
Propuesta proyecto: Espacios de Teichmüller y Moduli

Sergio Alejandro Bello Torres.¹

sbellot@unal.edu.co

Edgar Santiago Ochoa Quiroga.²

eochoa@unal.edu.co

3 de julio de 2025

Uno de los problemas principales en el estudio de las superficies de Riemann es su clasificación. A partir de este problema surgen los espacios de Moduli y Teichmüller, que por su estructura ayudan a clasificar todas las posibles estructuras complejas de una superficie dada. Este proyecto tiene como objetivo hacer una breve introducción a éstos espacios, incluyendo algunas construcciones elementales. Para esto tendremos que recorrer algunos conceptos previos que permiten comprender dichas construcciones.

Objetivos.

- Introducir de manera clara el concepto de Espacio de Teichmüller y Moduli, y su papel en la clasificación de las estructuras complejas de una superficie dada.
- Realizar la construcción de estos espacios para la superficie compacta de género 1 (El toro).
- Entender las relaciones entre estos espacios y las superficies hiperbólicas.

Alcance del proyecto.

Dar un contexto general mencionando los conceptos preliminares, como son: Teorema de uniformización, que caracteriza las superficies de Riemann de género 0 y nos brinda información sobre el espacio recubridor de una superficie de género g . Superficies hiperbólicas y métricas riemannianas, a partir de estas se puede construir una correspondencia con las estructuras complejas de las que se puede dotar una superficie orientable, más aún, podemos caracterizar las superficies hiperbólicas por automorfismos del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . El grupo fundamental, que a partir de una técnica llamada *marking* podemos determinar los espacios de Moduli y Teichmüller de una superficie dada. Además introduciremos las aplicaciones cuasiconformes, que representan transformaciones geométricas que pueden no ser holomorfas, pero nos brindan una construcción alternativa de los espacios de Teichmüller, con lo cual podemos contrastar ambas construcciones, adicionalmente presentaremos una aplicación directa de estas funciones, que es el problema de Grötzsch.

1. Borrador documento/Expo

- Empezar con el teorema de uniformización, introducir grupo fundamental y cubrimiento universal para luego explicar brevemente (muy charlado) como la esfera de Riemann y el plano complejo ya están caracterizados, por lo que el interés principal será el plano hiperbólico (Esto está en el Petri)

Referencias

- [1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand Company, 1966.
- [2] B. Petri, *Introduction to Teichmüller Theory. Lecture Notes*, 2024. disponible [aquí](#)
- [3] W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer, 1980.
- [4] J. H. Hubbard, *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology and Dynamics*, Vol. 1, Matrix Editions, 2006.