Espacios de Teichmuller y Moduli

Universidad Nacional de Colombia.

Sergio Alejandro Bello Torres
Edgar Santiago Ochoa Quiroga

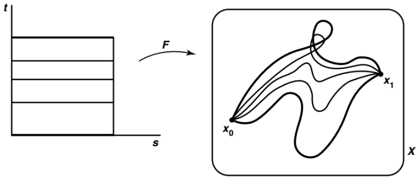
Introducción

Uno de los problemas principales en el estudio de las superficies de Riemann es su clasificación, en particular hemos visto que una misma superficie puede tener dos estructuras complejas completamente diferentes, por lo que nos interesamos en caracterizarlas todas. A partir de este problema surgen los espacios de Moduli y Teichmüller, que nos ayudan a clasificar todas las posibles estructuras complejas de una superficie dada. Nuestro propósito es hacer una breve introducción a éstos espacios, incluyendo algunas construcciones elementales.

Definición

Dos caminos γ_1 y γ_2 que envian el intervalo $[0,1]$ en un espacio topológico X, se dice que son **caminos homotópicos** si ambos tienen el mismo punto inicial x_0 y final x_1, y además existe una función contínua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$F(s,t) = \begin{cases} \gamma_1(s) & Si\ t = 0, \\ \gamma_2(s) & Si\ t = 1, \\ x_0 & Si\ s = 0, \\ x_1 & Si\ s = 1. \end{cases}$$



Definición

Dado X espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de clases de homotopía de caminos cuyo punto inicial y final es x_0, junto a la operacion de concatenar caminos lo llamamos el **grupo fundamental** de X relativo a x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$

Definición

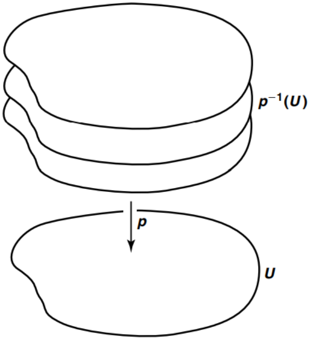
Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si es arco-conexo y su grupo fundamental es el trivial.

Definición

Sean X, Y espacios topológicos y $h : X \to Y$ una función contínua tal que $f(x_0) = y_0$, definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, tal que $h_*([f]) = [(h \circ f)]$. Llamamos a h_* el **homomorfismo inducido** por h.

Definición

Sea $p: E \to B$ una función contínua y sobreyectiva. Dado un abierto U de B se dice que esta cubierto uniformemente por p is la imagen inversa de U por p puede ser escrita como unión de abiertos disyuntos V_α en E, y la restricción de p a cada uno de estos es un homeomorfismo.



Definición

Si para cada punto b existe una vecindad U tal que ésta esté cubierta uniformemente se dice que p es una funcion recubridora y que E es un **espacio recubridor**

Definición

Si el espacio recubridor E es simplemente conexo se le llama el **cubrimiento universal**.

Teorema de Uniformizacion

Teorema

Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces X es biholomorfa a exactamente una de las siguientes superficies

- La esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.
- El plano Complejo $\mathbb{C}$.
- El semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

Observación: Note que al cubrimiento universal lo podemos dotar de una estructura de superficie Riemann a partir de la de X, por lo que podemos pensar a las superficies de Riemann como cocientes de su cubrimiento universal.

Cocientes de superficies

En vista de lo anterior, lo natural seria pensar en las superficies de Riemann simplemente conexas y ver su posibles cocientes, pero resulta que para la esfera de Riemann y el plano complejo tenemos poca variedad

Proposicion

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a $\mathbb{C}_\infty$ si y solo si X es biholomorfo a $\mathbb{C}_\infty$

Proposicion

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a $\mathbb{C}$ si y solo si X es biholomorfo a $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$ o $\mathbb{C}/L$

Resulta que donde tendremos una mayor variedad son los cocientes de $\mathbb{H}^2$.

Superficies Hiperbólicas

Los cocientes de $\mathbb{H}^2$ son lo que denominaremos como superficies hiperbólicas. Se tiene que $\mathbb{H}^2$ viene equipado con una métrica dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

además el grupo de automorfismos $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ de $\mathbb{H}^2$, es justamente el grupo de isometrías que preservan la orientación de esta métrica.

Observación: Todos los cocientes de $\mathbb{H}^2$ que dan lugar a una superficie de Riemann heredan una métrica completa de curvatura constante -1, es decir una métrica hiperbólica. Más aún, toda métrica de la que se puede dotar una superficie da lugar a una superficie de Riemann.

Espacio de Teichmüller del Toro

En general un espacio de Teichmüller asociado a una superficie será el espacio de superficies de Riemann *marcadas* de aquella superficie, mientras que el espacio de Moduli sera el de clases de isomorfismo de estas estructuras.

Por el Teorema de Uniformizacion solo podemos asignarle una estructura de superficie de Riemann a $\mathbb{C}_\infty$, por lo que segun nuestra idea general el espacio de Moduli es un único punto. Resulta que para el espacio de Teichmüller ocurre lo mismo, por lo que nuestro interés inicial será estudiar estos espacios para los toros $\mathbb{C}/L$

Recordemos que los retículos están determinados por una base de la forma $\{1, \tau\}$, donde $\tau \in \mathbb{H}^2$, por lo cual cualquier estructura compleja del toro viene determinada por un punto del plano hiperbólico. Sin embargo pueden existir $\tau, \tau' \in \mathbb{H}^2$ con $\tau \neq \tau'$ que resulten en dos estructuras biholomorfas.

Proposición

Sean $\mathbb{C}/L$ y $\mathbb{C}/L'$ dos toros determinados por τ y τ' respectivamente, entonces son biholomorfos si y solo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$

Esto quiere decir que las estructuras de superficie de Riemann del toro están determinadas por la acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}^2$

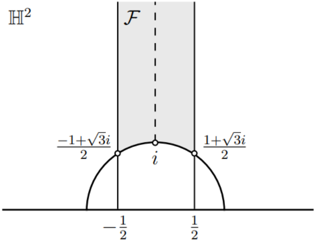
Sea $\mathscr{M}_1 = \mathbb{H}^2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ queremos ver como es la topología de este cociente.

Definición

Sea G un grupo que actúa sobre un espacio topológico X, definimos un dominio fundamental como un subespacio de X cerrado tal que su interior contiene solo un elemento de cada órbita.

Con esta idea podemos estudiar la estructura del cociente presentado. Considere el conjunto

$$\mathscr{F} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |z| \geq 1 \text{ y } |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$



Note que dado $\tau \in \mathbb{H}^2$ existe $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tal que $g\tau \in \mathscr{F}$. Observe que

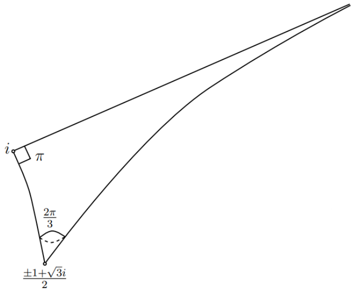
$$\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2},$$

Podemos tomar g tal que $\mathrm{Im}(g\tau)$ es maximal y de hecho es maximo. Luego podemos trasladar por medio de $z \to z+1$ hasta que $|\mathrm{Re}(g\tau)| \leq \frac{1}{2}$. Si $|g\tau| < 1$ entonces $\left|\frac{-1}{g\tau}\right| > 1$ y eso contradice la maximalidad de la parte imaginaria.

Podemos ver que

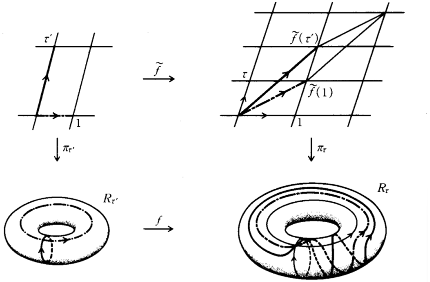
- Si $\tau \in \mathrm{Int}(\mathscr{F})$ entonces $O(\tau) \cap \mathscr{F} = \{\tau\}$.
- Si $\mathrm{Re}(\tau) = \pm\frac{1}{2}$ entonces $O(\tau) \cap \mathscr{F} = \{\tau, \tau \mp 1\}$.
- Si $|\tau| = 1$ entonces $O(\tau) \cap \mathscr{F} = \left\{\tau, -\frac{1}{\tau}\right\}$.

Asumamos que $z, gz \in \mathscr{F}$, luego asuma que $Im(gz) \geq Im(z)$, así $|cz+d| \leq 1$, por la relación de antes. Como $|z| \geq 1$, tenemos que $c = \pm 1, 0$.
Si $c = 0$, $d = \pm 1$ y por la condición sobre el determinante $gz = z + b$, luego $b = 0, \pm 1$, si $b = 0$ ya tenemos el primer caso. En cambio si $b = \mp 1$, tenemos que $Re(z) = \pm \frac{1}{2}$.
Por ultimo si $c = \pm 1$, forzosamente $d = 0$ y $|z| = 1$, asi $gz = -\frac{1}{z}$.
Concluimos que $\mathscr{M}_1$ es el espacio que resulta de identificar los bordes de $\mathscr{F}$



$\mathscr{M}_1$ se denomina el espacio de móduli del toro y $\mathscr{T}_1 = \mathbb{H}^2$ es el espacio de Teichmüller

Habiendo hecho esto, queremos generalizar éstos espacios a superficies de género más alto, vimos que fue sencillo construir los espacios de Teichmüller y móduli del toro debido a una particularidad muy especial, sin embargo, éstas particularidades pueden ser entendidas de otra manera, si tomamos $p_0 = [0] \in \mathbb{C}/L$, podemos ver que los segmentos $\overline{[0:1]}$ y $\overline{[0:\tau]}$ del plano complejo tienen asociados dos caminos cerrados que determinan dos generadores $[A_\tau], [B_\tau]$ de $\pi_1(\mathbb{C}/L, p_0)$, si además, tenemos $f: \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ un biholorfismo, el homomorfismo inducido $f_*: \pi_1(\mathbb{C}/L, p_0) \to \pi_1(\mathbb{C}/L', p_0)$ no necesariamente envía $[A_\tau], [B_\tau]$ a $[A_{\tau'}], [B_{\tau'}]$, de hecho ésto solo ocurre si $\tau = \tau'$. Ésta idea será la que nos ayudará a conseguir nuestro objetivo principal.



Marking

Definición

Sea X una superficie de Riemann cerrada de género g, decimos que $\Sigma_p = \{[A_1], [A_2], \ldots, [A_g], [B_1], [B_2], \ldots, [B_g]\}$ es un **sistema canónico de generadores** para $\pi_1(X, p)$ si

$$\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = e$$

- Un *marking* en X es un sistema canónico de generadores $\Sigma_p \subset \pi_1(X, p)$
- Dos markings Σ_p y $\Sigma'_{p'}$ se dicen **equivalentes** si existe una curva contínua α entre p y p', tal que el isomorfismo inducido $T_\alpha : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, p')$ satisface

$$T_\alpha(\Sigma_p) = \Sigma'_{p'}$$

Al par (X, Σ_p) lo llamamos **superficie de Riemann marcada**.

Entonces siguiendo la construcción hecha para el Toro, el espacio de Teichmüller de una superficie X cerrada es el conjunto de las superficies marcadas que son difeomorfas a X, módulo equivalencia.

$$\mathscr{T}(X) = \left\{ (R, \Sigma_p) : \begin{array}{c} R \text{ es una superficie de Riemann difeomorfa a } X \\ p \in R,\ \Sigma_p \text{ un marking en } R \end{array} \right\} / \sim .$$

Con esto tenemos una caracterización del espacio de Teichmüller, pero no nos da información sobre su topología, por tanto introducimos el *Marking por difeomorfismos.*

Definición

Sean R y R' superficies de Riemann, definamos

$$f : X \to R \text{ y } f' : X \to R',$$

como difeomorfismos que preservan la orientación. Decimos que las parejas (R, f) y (R', f') son equivalentes si existe un biholomorfismo $h : R \to R'$ tal que

$$(f')^{-1} \circ h \circ f : X \to X,$$

es homotópico a la identidad.

Observación: Si escogemos un conjunto de generadores Σ para el grupo fundamental $\pi_1(X, p)$, entonces cada pareja (R, f) define un punto

$$(R, f_*(\Sigma)) \in \mathscr{T}.$$

Donde $\mathscr{T}$ es el espacio de Teichmüller de X.

La definición anterior nos brinda una nueva descripción del espacio de Teichmüller de una superficie X.

$$\mathcal{T}(X) = \left\{ (R, f) : \begin{array}{c} R \text{ es una superficie de Riemann }, f : X \to R \\ \text{un difeomorfismo que preserva la orientación} \end{array} \right\} / \sim .$$

Con esta nueva descripción será mucho mas sencillo describir el espacio de Moduli, con lo que llamaremos *Mapping class group.*

Mapping class group

Sea X una superficie de Riemann cerrada. Definimos

$$Diff^+(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ es un difeomorfismo que preserva la orientación }\},$$

y

$$Diff_0^+(X) = \{f \in Diff^+(X) : f \text{ es homotópico a la identidad}\}.$$

Podemos notar que $Diff^+(X)$ es un grupo y que $Diff_0^+(X)$ es un subgrupo normal de $Diff^+(X)$. Con lo cual

Definición

El **Mapping class group** de una superficie de Riemann cerrada X es

$$\mathrm{MCG}(X) := Diff^+(X)/Diff_0^+(X).$$

Espacio de Moduli

El *Mapping class group* actúa sobre el espacio de Teichmüller de la siguiente manera:

$$[g] \cdot [(R, f)] = [(R, f \circ g^{-1})].$$

El cociente de el espacio de Teichmüller por esta acción es lo que llamaremos espacio de Moduli, es decir

Definición

El **espacio de Moduli** de una superficie de Riemann cerrada X es

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{T}(X)/\mathrm{MCG}(X).$$

Si X es una superficie cerrada de genero g, se suele denotar $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}_g$ y $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}_g$

Ya hemos construido los espacios de Teichmüller y Moduli para las superficies cerradas de género g. Sabemos que éstos espacios nos dan información sobre las estructuras complejas de estas superficies, pero ahora queremos saber que relación guarda una estructura con otra. De estudiar este problema es donde aparecen las **aplicaciones cuasiconformes**.

Aplicaciones conformes y cuasiconformes

Sea $w = f(z)$ un homeomorfismo C^1 de una región del plano complejo a otra. En un punto z_0 se inducen aplicaciones lineales de diferenciales tal que

$$du = u_x dx + u_y dy,$$
$$dv = v_x dx + v_y dy.$$

Estos también se pueden ver de manera compleja como

$$dw = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z},$$

donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Geométricamente estos representan transformaciones afines del plano (dx, dy) al plano (du, dv).
De esta manera estas transformaciones envían círculos centrados en el origen en elipses similares, es de nuestro interés ver la razón entre los ejes y como cambia su dirección.

Observemos ahora que podemos escribir

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + u_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y).$$

Con esto notamos que

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J.$$

Donde J es el Jacobiano de la transformación. Como solo estamos considerando las aplicaciones que preservan la orientación, el Jacobiano es positivo, luego $|f_{\overline{z}}| < |f_z|$, de esto se sigue que

$$(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)|dz|.$$

Donde ambos extremos de la desigualdad se alcanzan, asi obtenemos que la razon esta dada por

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} \geq 1.$$

Esto se conoce como la **dilatación** en el punto z.

Definición

La aplicación f se dice **cuasiconforme** si D_f es acotada.

Particularmente obtenemos que

Proposición

Si $D_f = 1$ tenemos que f es una aplicación **conforme**.

Resulta mas conveniente considerar

$$d_f = \frac{|f_{\overline{z}}|}{|f_z|} < 1,$$

que se relaciona con D_f tal que

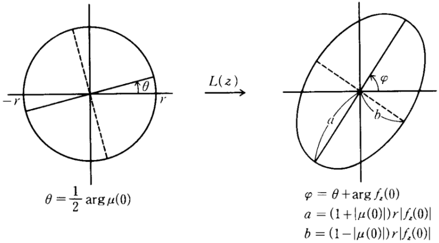
$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f}.$$

Definición

La dilatación compleja esta dada por

$$\mu_f = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}.$$

LLamamos a μ_f el *coeficiente de Beltrami de* f.



Relación con el espacio de Teichmüller

Consideremos $[(R, f)] \in \mathscr{T}(X)$, es de nuestro interés comparar la estructura compleja de R y X, para esto tomamos una vecindad U y una coordenada local z en R, de manera similar tomamos una vecindad V y coordenada local w en X. Si consideramos $F = w \circ f \circ z^{-1}$ entonces

$$\mu_F = \frac{F_{\overline{z}}}{F_z},$$

es una función suave de valor complejo y ademas no depende de la coordenada local w. Además μ_F cumple todas las condiciones de un coeficiente de Beltrami.

Si $\{(U_\alpha, w_\alpha)\}$ es un atlas en X y $f : R \to X$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, la colección $\{(f^{-1}(V_\alpha), w_\alpha \circ f)\}$ es tambien un atlas en R. En este sentido tenemos una nueva superficie de Riemann R_f con el sistema de coordenadas dado previamente.

Podemos notar que la función identidad de R a R_f es un difeomorfismo que preserva la orientación. Luego tomando $f : R_f \to X$, este es un biholomorfismo, por lo que $(X, f) = (R_f, id)$, entonces el coeficiente de Beltrami μ_F nos dice que tanto hay qué deformar una superficie en otra para obtener su estructura compleja. Asi podemos construir el espacio de Teichmüller a partir de los coeficientes de Beltrami.

Espacios de coeficientes de Beltrami

Proposición

Dadas superficies de Riemann R, S, T, y difeomorfismos que preservan la orientación $f : R \to S$ y $g : S \to T$, se tiene la siguiente relación

$$\mu_g \circ f = \frac{f_z}{\overline{f_z}} \frac{\mu_{g\circ f} - \mu_f}{1 - \overline{\mu_f} \cdot \mu_{g\circ f}}.$$

Es particular si tenemos difeomorfismos que preservan la orientación $f_1 : R \to S_1$ y $f_2 : R \to S_2$, la aplicacion $f_2 \circ f_1^{-1}$ es biholomorfa si y solo si $\mu_{f_1} = \mu_{f_2}$.

Ahora construiremos el espacio de Teichmüller en términos de los coeficientes de Beltrami de X. Sea $B(X)_1$ el conjunto de los coeficientes de Beltrami de X, si equipamos a este conjunto con la norma L^∞, hemos definido una topología.

Consideramos la acción de $Diff^+(X)$ sobre $B(X)_1$, dada por

$$w^*(\mu_f) = \mu_{f\circ w^{-1}} = \left(\frac{w_z}{\overline{w_z}}\frac{\mu_f - \mu_w}{1-\overline{\mu_w}\mu_f}\right)\circ w^{-1},$$

Teorema

Dados difeomorfismos que preservan la orientación $f : X \to R$ y $g : X \to R'$, existe una aplicacion biholomorfa $h : R \to R'$ si y solo si existe $w \in Diff^+(X)$ tal que $\mu_g = w^*(\mu_f)$. Ademas $g^{-1}\circ h \circ f$ es homotopico a la identidad en X si y solo si $w \in Diff_0^+(X)$.

Esta relación nos dice como son las orbitas del cociente.

Corolario

La aplicación que envia (R, f) a $\mu_f \in B(X)_1$ induce las siguientes correspondencias

$$\mathscr{T}(X) \cong B(X)_1/Diff_0^+(X),$$
$$\mathscr{M}(X) \cong B(X)_1/Diff^+(X).$$

Con esto hemos inducido una topología en $\mathscr{T}(X)$ y $\mathscr{M}(X)$, que resulta independiente de la estructura compleja inicial de X.

La métrica de Teichmüller

Definición

Sea X una superficie de Riemann, entonces podemos definir una metrica sobre $\mathscr{T}(X)$ de la siguiente manera

$$d_T((R_1, f_1), (R_2, f_2)) = \frac{1}{2}\log\left(\text{ínf}\left\{ D_g : \begin{array}{c} g : R_1 \to R_2 \text{ es un difeomorfismo que} \\ \text{preserva la orientación homotopico a} \\ f_2 \circ f_1^{-1} \end{array} \right\}\right).$$

Se puede observar que esta métrica resulta compatible con la topología dada anteriormente.

Esta metrica resulta ser una generalizacion de lo que se conoce como *el problema de Grotschz.*

Problema de Grötschz

Sean R, R' dos rectángulos de lados a, b y a', b' respectivamente. Queremos ver cual es la aplicación f que enviá $R \to R'$, que sea lo mas conforme posible, con conforme nos referimos a que la norma de la dilatación D_f sea mínima.

Teorema

Sea

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right)z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\overline{z},$$

entonces $f(z)$ es solución para el problema de Grötschz.

Note que esta función representa una transformación afín dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{a'}{a}x, \frac{b'}{b}y\right).$$

Referencias

[1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand Company, 1966.

[2] B. Petri, *Introduction to Teichmüller Theory. Lecture Notes*, 2024. disponible aquí

[3] Y. Imayoshi, M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer, 1992.

[4] J. Munkres, *Topology*, Pearson, 2014.

[5] W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer, 1980.

[6] J. H. Hubbard, *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology and Dynamics*, Vol. 1, Matrix Editions, 2006.