Espacios de Teichmuller y Moduli

Universidad Nacional de Colombia.

Sergio Alejandro Bello Torres
Edgar Santiago Ochoa Quiroga

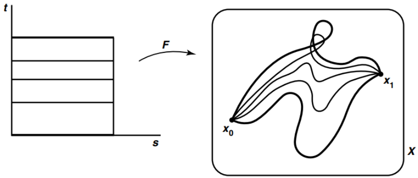
Introducción

Aqui una introduccion y resumen de lo que se hara

Definición

Dos caminos γ_1 y γ_2 que envian el intervalo $[0,1]$ en un espacio topológico X, se dice que son **caminos homotopicos** si ambos tienen el mismo punto inicial x_0 y final x_1, y además exisste una funcion continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$F(s,t) = \begin{cases} \gamma_1(s) & Si\ t = 0, \\ \gamma_2(s) & Si\ t = 1, \\ x_0 & Si\ s = 0, \\ x_1 & Si\ s = 1. \end{cases}$$



Definición

Dado X espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de clases de homotopía de caminos cuyo punto inicial y final es x_0, junto a la operacion de concatenar caminos lo llamamos el **grupo fundamental** de X relativo a x_0 y que denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$

Definición

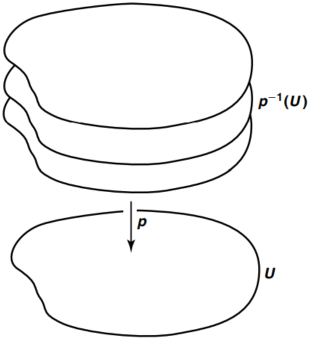
Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si es arco-conexo y su grupo fundamental es el trivial.

Definición

Sean X, Y espacios topológicos y $h : X \to Y$ una función contínua tal que $f(x_0) = y_0$, definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, tal que $h_*([f]) = [(h \circ f)]$. Llamamos a h_* el **homomorfismo inducido** por h.

Definición

Sea $p : E \to B$ una función contínua y sobreyectiva. Dado un abierto U de B se dice que esta cubierto uniformemente por p is la imagen inversa de U por p puede ser escrita como unión de abiertos disyuntos V_α en E, y la restricción de p a cada uno de estos es un homeomorfismo.



Definición

Si para cada punto b existe una vecindad U tal que ésta esté cubierta uniformemente se dice que p es una funcion recubridora y que E es un **espacio recubridor**

Definición

Si el espacio recubridor E es simplemente conexo se le llama el **cubrimiento universal**.

Al referirnos al cubrimiento universal de un espacio X lo denotaremos por $\tilde{X}$.

Teorema de Uniformizacion

Teorema

Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces X es biholomorfa a exactamente una de las siguientes superficies

- La esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.
- El plano Complejo $\mathbb{C}$.
- El semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

Observación: Note que a el cubrimiento universal lo podemos dotar de una estructura de superficie Riemann a partir de la de X, por lo que podemos pensar a las superficies de Riemann como cocientes de su cubrimiento universal.

Cocientes de superficies

En vista de lo anterior, lo natural seria pensar en las superficies de Riemann simplemente conexas y ver su posibles cocientes, pero resulta que para la esfera de Riemann y el plano complejo tenemos poca variedad

Proposicion

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a $\mathbb{C}_\infty$ si y solo si X es biholomorfo a $\mathbb{C}_\infty$

Proposicion

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a $\mathbb{C}$ si y solo si X es biholomorfo a $\mathbb{C}, \mathbb{C}-\{0\}$ o $\mathbb{C}/L$

Resulta que donde tendremos una mayor variedad son los cocientes de $\mathbb{H}^2$, antes de eso veremos la siguiente construcción

Espacio de Teichmuller del Toro

En general un espacio de Teichmüller asociado a una superficie sera el espacio de superficies de Riemann *marcadas* de aquella superficie, mientras que el espacio de Moduli sera el de clases de isomorfismo de estas estructuras.

Por el Teorema de Uniformizacion solo podemos asignarle una estructura de superficie de Riemann a $\mathbb{C}_\infty$, por lo que segun nuestra idea general el espacio de Moduli es un único punto. Resulta que para el espacio de Teichmuller ocurre lo mismo, por lo que nuestro interés inicial sera estudiar estos espacios para los toros $\mathbb{C}/L$

Recordemos que los retículos están determinados por una base de la forma $\{1, \tau\}$, donde $\tau \in \mathbb{H}^2$, por lo cual cualquier estructura compleja del toro viene determinada por un punto del plano hiperbólico. Sin embargo pueden existir $\tau, \tau' \in \mathbb{H}^2$ con $\tau \neq \tau'$ que resulten en dos estructuras biholomorfas.

Proposición

Sean $\mathbb{C}/L$ y $\mathbb{C}/L'$ dos toros determinados por τ y τ' respectivamente, entonces son biholomorfos si y solo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$

Esto quiere decir que las estructuras de superficie de Riemann del toro están determinadas por la acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}^2$

Sea $\mathscr{M}_1 = \mathbb{H}^2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ queremos ver como es la topología de este cociente. aqui van las imagenes esas pero me da pereza
$\mathscr{M}_1$ se denomina el espacio de móduli del toro y $\mathscr{T}_1 = \mathbb{H}^2$ es el espacio de Teichmüller

Habiendo hecho esto, queremos generalizar éstos espacios a superficies de género más alto, vimos que fue sencillo construir los espacios de Teichmüller y móduli del toro debido a una particularidad muy especial, sin embargo, éstas particularidades pueden ser entendidas de otra manera, si tomamos $p_0 = [0] \in \mathbb{C}/L$, podemos ver que los segmentos $\overline{[0:1]}$ y $\overline{[0:\tau]}$ del plano complejo tienen asociados dos caminos cerrados que determinan dos generadores $[A_\tau], [B_\tau]$ de $\pi_1(\mathbb{C}/L, p_0)$, si además, tenemos $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ un biholorfismo, el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(\mathbb{C}/L, p_0) \to \pi_1(\mathbb{C}/L', p_0)$ no necesariamente envía $[A_\tau], [B_\tau]$ a $[A_{\tau'}], [B_{\tau'}]$, de hecho ésto solo ocurre si $\tau = \tau'$. Ésta idea será la que nos ayudará a conseguir nuestro objetivo principal.

Marking

Definición

Sea X una superficie de Riemann cerrada género g, decimos que $\Sigma_g = \{[A_1],[A_2],\ldots,[A_g],[B_1],[B_2],\ldots,[B_g]\}$ es un **sistema canónico de generadores** para $\pi_1(X,p_0)$ si

$$\prod_{i=1}^{g}[A_i,B_i] = e$$

- Un *marking* en X es un sistema canónico de generadores $\Sigma_p \subset \pi_1(X,p)$
- Dos markings Σ_p y $\Sigma'_{p'}$ se dicen **equivalentes** si existe una curva contínua α entre p y p', tal que el isomorfismo inducido $T_\alpha : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p')$ satisface

$$T_\alpha(\Sigma_p) = \Sigma'_p$$

Al par (X,Σ_p) lo llamamos **superficie de Riemann marcada**

Entonces siguiendo la construcción hecha para el Toro el espacio de Teichmuller de una superficie X cerrada, es el conjunto de las superficies marcadas que son difeomorfas a X modulo equivalencia.

Con esto tenemos una caracterización del espacio de Teichmuller, pero no nos da información sobre su topología, asi es como introducimos el *Marking por difeomorfismos.*

Definición

Sean R y R' superficies de Riemann, definamos

$$f : X \to R \text{ y } f' : X \to R',$$

como difeomorfismos que preservan la orientación. Decimos que las parejas (R, f) y (R', f') son equivalentes si existe un biholomorfismo $h : R \to R'$ tal que

$$(f')^{-1} \circ h \circ f : X \to X,$$

es homotopico a la identidad.

Observación: Si escogemos un conjunto de generadores Σ para el grupo fundamental $\pi_1(X, p)$, entonces cada pareja (R, f) define un punto

$$(R, f_*(\Sigma)) \in \mathscr{T}.$$

Donde $\mathscr{T}$ es el espacio de Teichmuller de X.

La definición anterior nos brinda una nueva descripción del espacio de Teichmuller de una superficie X.

$$\mathscr{T}(X) = \left\{ (R, f) : \begin{array}{c} R \text{ es una superficie de Riemann }, f : X \to R \\ \text{un difeomorfismo que preserva la orientación} \end{array} \right\} / \sim .$$

Con esta nueva descripción sera mucho mas sencillo describir el espacio de Moduli, con lo que llamaremos *Mapping class group.*

Mapping class group

Sea X una superficie de Riemann cerrada. Definimos

$$Diff^{+}(X) = \{f : X \to X | f \text{ es un difeomorfismo que preserva la orientación }\},$$

y

$$Diff_0^{+}(X) = \{f \in Diff^{+}(X) : f \text{ es homotopico a la identidad}\}.$$

Podemos notar que $Diff^{+}(X)$ es un grupo y que $Diff_0^{+}(X)$ es un subgrupo normal de $Diff^{+}(X)$. Con lo cual

Definición

El **Mapping class group** de una superficie de riemann cerrada X es

$$MCG(X) := Diff^{+}(X)/Diff_0^{+}(X).$$

Espacio de Moduli

El *Mappin class group* actua sobre el espacio de Teichmuller de la siguiente manera:

$$[g] \cdot [(R, f)] = [(R, f \circ g^{-1})].$$

El cociente de el espacio de Teicchmuller por esta acción es lo que llamaremos espacio de Moduli, es decir

Definición

El **espacio de Moduli** de una superficie de Riemann cerrada X es

$$\mathscr{M}(X) = \mathscr{T}(X)/MCG(X).$$

Si X es una superficie cerrada de genero g, se suele denotar $\mathscr{T}(X) = \mathscr{T}_g$ y $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}_g$

Ya hemos construido los espacios de Teichmuller y Moduli para las superficies cerradas de genero g. Sabemos que estos espacios nos dan información sobre las estructuras complejas de estas superficies, pero ahora queremos saber que relación guarda una estructura con otra. De estudiar este problema es donde aparecen las **aplicaciones cuasiconformes**.

Aplicaciones conformes y cuasiconformes

Sea $w = f(z)$ un homeomorfismo C^1 de una región a otra. En un punto z_0 se inducen aplicaciones lineales de diferenciales tal que

$$du = u_x dx + u_y dy,$$
$$dv = v_x dx + v_y dy.$$

Estos también se pueden ver de manera compleja como

$$dw = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z},$$

donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Geometricamente estos representan transformaciones afines del plano (dx, dy) al plano (du, dv).
De esta manera estas transformaciones envían círculos centrados en el origen en elipses similares, es de nuestro interés ver la razón entre los ejes y como cambia su dirección.

Observemos ahora si que podemos escribir

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + u_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y).$$

Con esto podemos notamos

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J.$$

Donde J es el Jacobiano de la transformación. Como solo estamos considerando las aplicaciones que preservan la orientación, el Jacobiano es positivo, luego $|f_{\overline{z}}| < |f_z|$, de esto se sigue que

$$(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)|dz|.$$

Donde ambos extremos de la desigualdad se alcanzan, asi obtenemos que la razon esta dada por

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} \geq 1.$$

Esto se conoce como la **dilatación** en el punto z.

Definición

La aplicación f se dice **cuasiconforme** si D_f es acotada.

Particularmente obtenemos que

Proposición

Si $D_f = 1$ tenemos que f es una aplicación **conforme**.

Resulta mas conveniente considerar

$$d_f = \frac{|f_{\overline{z}}|}{|f_z|} < 1,$$

que se relaciona con D_f tal que

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f}.$$

Definición

La dilatación compleja esta dada por

$$\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}.$$

LLamamos a μ_f el *coeficiente de Beltrami de* f.

aqui el dibujo del imayoshi tengo sueño

Relacion con el espacio de Teichmuller

Consideremos $[(R,f)] \in \mathcal{T}(X)$, es de nuestro interes comparar la estructura compleja de R y X, para esto tomamos una vecindad U y una coordenada local z en R, de manera similar V vecindad y w coordenada local en X. Si consideramos $F = w \circ f \circ z^{-1}$ entonces

$$\mu_F = \frac{F_{\overline{z}}}{F_z},$$

es una función suave de valor complejo y ademas no depende de la coordenada local w. Además μ_F cumple todas las condiciones de un coeficiente de Beltrami.

Si $\{(U_\alpha, w_\alpha)\}$ es un atlas en X y $f : R \to X$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, la colección $\{(f^{-1}(V_\alpha), w_\alpha \circ f)\}$ es tambien un atlas en R,

Referencias