

Espacios de Teichmuller y Moduli

Universidad Nacional de Colombia.

Sergio Alejandro Bello Torres
Edgar Santiago Ochoa Quiroga

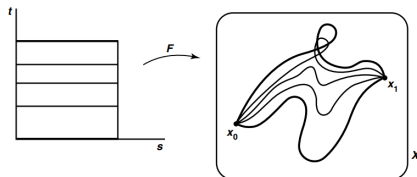
Introducción

Aquí una introducción y resumen de lo que se hará

Definición

Dos caminos γ_1 y γ_2 que envían el intervalo $[0, 1]$ en un espacio topológico X , se dice que son **caminos homotópicos** si ambos tienen el mismo punto inicial x_0 y final x_1 , y además existe una función continua $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$F(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(s) & \text{Si } t = 0, \\ \gamma_2(s) & \text{Si } t = 1, \\ x_0 & \text{Si } s = 0, \\ x_1 & \text{Si } s = 1. \end{cases}$$



Definición

Dado X espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de clases de homotopía de caminos cuyo punto inicial y final es x_0 , junto a la operación de concatenar caminos lo llamamos el **grupo fundamental** de X relativo a x_0 y que denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$

Definición

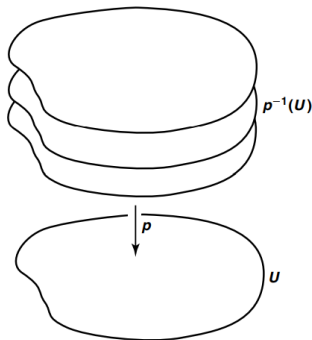
Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si es arco-conexo y su grupo fundamental es el trivial.

Definición

Sean X, Y espacios topológicos y $h: X \rightarrow Y$ una función continua tal que $f(x_0) = y_0$, definimos $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, tal que $h_*([f]) = [(h \circ f)]$. Llamamos a h_* el **homomorfismo inducido** por h .

Definición

Sea $p: E \rightarrow B$ una función continua y sobreyectiva. Dado un abierto U de B se dice que U está cubierto uniformemente por p si la imagen inversa de U por p puede ser escrita como unión de abiertos disyuntos V_α en E , y la restricción de p a cada uno de estos es un homeomorfismo.



Definición

Si para cada punto b existe una vecindad U tal que ésta esté cubierta uniformemente se dice que p es una función recubridora y que E es un **espacio recubridor**

Definición

Si el espacio recubridor E es simplemente conexo se le llama el **cubrimiento universal**.

Al referirnos al cubrimiento universal de un espacio X lo denotaremos por \tilde{X} .

Teorema

Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces X es biholomorfa a exactamente una de las siguientes superficies

- La esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ .
- El plano Complejo \mathbb{C} .
- El semiplano superior \mathbb{H}^2 .

Observación: Note que a el cubrimiento universal lo podemos dotar de una estructura de superficie Riemann a partir de la de X , por lo que podemos pensar a las superficies de Riemann como cocientes de su cubrimiento universal.

Cocientes de superficies

En vista de lo anterior, lo natural sería pensar en las superficies de Riemann simplemente conexas y ver sus posibles cocientes, pero resulta que para la esfera de Riemann y el plano complejo tenemos poca variedad

Proposición

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a \mathbb{C}_∞ si y solo si X es biholomorfo a \mathbb{C}_∞

Proposición

Sea X una superficie de Riemann. El cubrimiento universal de X es biholomorfo a \mathbb{C} si y solo si X es biholomorfo a $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$ o \mathbb{C}/L

Resulta que donde tendremos una mayor variedad son los cocientes de \mathbb{H}^2 , antes de eso veremos la siguiente construcción

Espacio de Teichmüller del Toro

En general un espacio de Teichmüller asociado a una superficie sera el espacio de superficies de Riemann *marcadas* de aquella superficie, mientras que el espacio de Moduli sera el de clases de isomorfismo de estas estructuras.

Por el Teorema de Uniformizacion solo podemos asignarle una estructura de superficie de Riemann a \mathbb{C}_∞ , por lo que segun nuestra idea general el espacio de Moduli es un único punto. Resulta que para el espacio de Teichmüller ocurre lo mismo, por lo que nuestro interés inicial sera estudiar estos espacios para los toros \mathbb{C}/L

Recordemos que los retículos están determinados por una base de la forma $\{1, \tau\}$, donde $\tau \in \mathbb{H}^2$, por lo cual cualquier estructura compleja del toro viene determinada por un punto del plano hiperbólico. Sin embargo pueden existir $\tau, \tau' \in \mathbb{H}^2$ con $\tau \neq \tau'$ que resulten en dos estructuras biholomorfas.

Proposición

Sean \mathbb{C}/L y \mathbb{C}/L' dos toros determinados por τ y τ' respectivamente, entonces son biholomorfos si y solo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$

Esto quiere decir que las estructuras de superficie de Riemann del toro están determinadas por la acción de $SL(2, \mathbb{Z})$ sobre \mathbb{H}^2

Sea $\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}^2 / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2 / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ queremos ver como es la topología de este cociente. **aquí van las imágenes esas pero me da pereza**
 \mathcal{M}_1 se denomina el espacio de módulos del toro y $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2$ es el espacio de Teichmüller

Habiendo hecho esto, queremos generalizar éstos espacios a superficies de género más alto, vimos que fue sencillo construir los espacios de Teichmüller y móduli del toro debido a una particularidad muy especial, sin embargo, éstas particularidades pueden ser entendidas de otra manera, si tomamos $p_0 = [0] \in \mathbb{C}/L$, podemos ver que los segmentos $\overline{[0:1]}$ y $\overline{[0:\tau]}$ del plano complejo tienen asociados dos caminos cerrados que determinan dos generadores $[A_\tau], [B_\tau]$ de $\pi_1(\mathbb{C}/L, p_0)$, si además, tenemos $f: \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/L'$ un biholorfismo, el homomorfismo inducido $f_*: \pi_1(\mathbb{C}/L, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}/L', p_0)$ no necesariamente envía $[A_\tau], [B_\tau]$ a $[A_{\tau'}], [B_{\tau'}]$, de hecho ésto solo ocurre si $\tau = \tau'$. Ésta idea será la que nos ayudará a conseguir nuestro objetivo principal.

Definición

Sea X una superficie de Riemann cerrada género g ,

- decimos que $\Sigma_g = \{[A_1], [A_2], \dots, [A_g], [B_1], [B_2], \dots, [B_g]\}$ es un **sistema canónico de generadores** para $\pi_1(X, p_0)$ si

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = e$$

- Un *marking* en X es un sistema canónico de generadores $\Sigma_p \subset \pi_1(X, p)$
- Dos markings Σ_p y $\Sigma_{p'}$ se dicen **equivalentes** si existe una curva continua α entre p y p' , tal que el isomorfismo inducido $T_\alpha : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, p')$ satisface

$$T_\alpha(\Sigma_p) = \Sigma_{p'}$$

Al par (X, Σ_p) lo llamamos **superficie de Riemann marcada**

Aplicaciones conformes y cuasiconformes

Sea $w = f(z)$ un homeomorfismo C^1 de una región a otra. En un punto z_0 se inducen aplicaciones lineales de diferenciales tal que

$$du = u_x dx + u_y dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy.$$

Donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$, Estos también se pueden ver de manera compleja pero concentremonos en que geométricamente estos representan transformaciones afines del plano (dx, dy) al plano (du, dv) .

De esta manera estas transformaciones envían círculos centrados en el origen en elipses similares, es de nuestro interés ver la razón entre los ejes y como cambia su dirección.

Aqui va lo de mapas conformes pero me raye

