
Grupo de Trenzas y Espacios de Configuración

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

eochoa@unal.edu.co

30 de noviembre de 2025

Resumen

Este trabajo estudia el concepto del grupo de trenzas desde múltiples perspectivas, geométrica, algebraica, como espacios de configuración y mas que surgen de estas. Posterior a estas mostramos como cada una de estas perspectivas resultan equivalentes y se mencionaran algunos resultados interesantes derivados del concepto de trenzas, intentando hacer gran énfasis en la vista geométrica.

1. Introducción

La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin [4], quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclidiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas. No es sorpresa que el estudio de estos objetos tan naturales en la naturaleza resulte de interés debido a su clara conexión con la teoría nudos.

En este proyecto cubriremos el primer capítulo de [1], con la intención de introducir al lector a los grupos de trenzas y todas sus posibles perspectivas, complementar pruebas, presentar diagramas diferentes y en general dar una vista mas aterrizada a entender estas estructuras tan interesantes. Presentaremos las definiciones elementales y multiples perspectivas para luego revisar resultados de equivalencia y finalizar con algunos hechos bien conocidos en la literatura pero que resultan interesantes para un nuevo lector.

2. Diferentes acercamientos a las Trenzas

2.1. Las Trenzas Geométricas

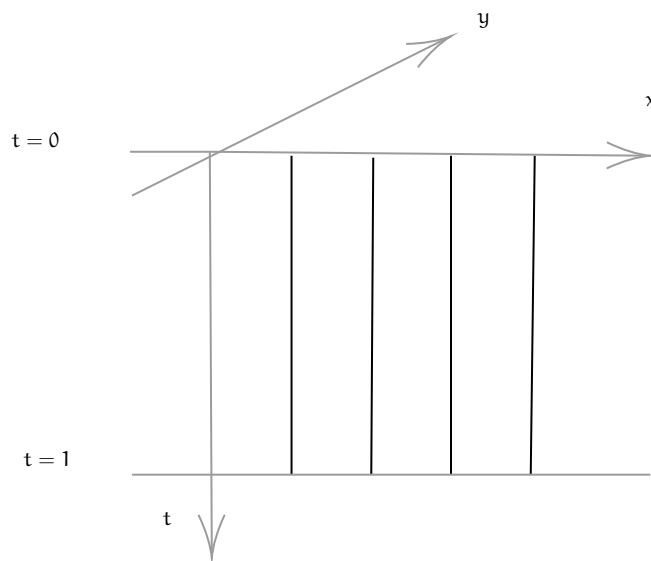
Dada la naturaleza geométrica del objeto a estudiar, la representación que resulta mas satisfactoria e intuitiva de ver en un principio de manera formal es la geométrica.

Definición 2.1. Una **trenza geométrica** con $n \geq 1$ cuerdas es un conjunto $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ formado por n intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de b , tales que la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$, envia cada cuerda de manera homeomorfa a I , y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) | i = 1, 2, \dots, n\},$$
$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 1, 1) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

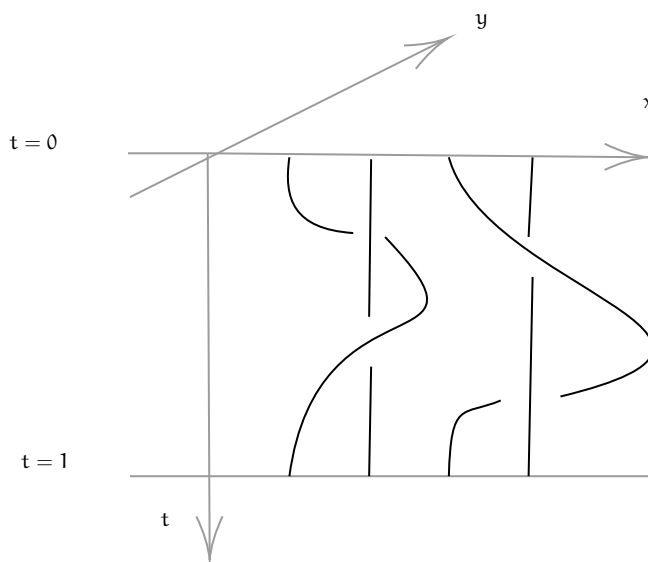
Observe que como cada cuerda va por medio de la proyección de manera homeomorfa a I , esto quiere decir que cada cuerda interseca a $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ de manera única para cada $t \in I$, es decir cada plano tiene exactamente n puntos del conjunto b . Note ademas que nuestra definición no menciona el punto final de cada una de las cuerdas ni el recorrido que hace.

Ejemplo 2.2. El diagrama donde cada cuerda tiene como punto inicial y final el mismo y donde no hay “giros”.



Note que en este ejemplo sencillo si bien cada cuerda pareciera que se encuentra solo en el plano (x, t) , estas cuerdas se pueden deformar en la dirección del eje y , por lo que debemos ser cuidadosos con estas representaciones.

Ejemplo 2.3. Observe que en este ejemplo los puntos iniciales y finales de cada cuerda son los mismos que el anterior, pero en este caso si hay cuerdas que “giran” al rededor de otras.



A pesar de lo observado anteriormente los puntos finales e iniciales no tienen por que ser los mismos por lo que en general cada cuerda conectara a un punto $(i, 0, 0)$ a un punto $(s(i), 0, 1)$, donde $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observe que la secuencia $(s(1), s(2), \dots, s(n))$ es una permutacion del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, por lo que para una trenza b cualquiera, decimos que la secuencia $(s(1), s(2), \dots, s(n))$ es la **permutacion subyacente** de b . En particular note que para los ejemplos anteriores tenemos la misma permutación subyacente $(1, 2, 3, 4)$.

Con esto en mente es natural preguntarse de que manera podemos ver si dos trenzas son “equivalentes” en algún sentido, para esto introducimos la noción de *isotopia*.

Definición 2.4. Dos trenzas b y b' son isotopicas si existe una función continua $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, tal que para cada $s \in I$, la función $F_s := F(-, s)$ es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de n cuerdas, $F_0 = \text{Id}_b$ y $F_1(b) = b'$. Tanto F como la familia de trenzas geométricas $\{F_s(b)\}_{s \in I}$ se conocen como una isotopia de b a b' .

Note que esta noción es muy parecida a una homotopia, así naturalmente podemos verificar la siguiente propiedad.

Proposición 2.5. La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

Demostración. Es claro que dada una trenza b es isotopica a si misma tomando $(x, s) \mapsto x$, es decir la identidad. Si b es isotopica a b' existe F , tal que F_s es un embedimiento para cada s y $F_0 = \text{Id}_b$ mientras que $F_1(b) = b'$. Note que como F_1 es un embebimiento F_1^{-1} es un homeo con dominio b' e imagen b , así el candidato a considerar es $H_s(x) = F_{1-s}(F_1^{-1}(x))$. Note que como para cada s , F_s es embedimiento entonces la composición dada también lo será y cada imagen es una trenza geométrica. Luego $H_0 = F_1 \circ F_1^{-1} = \text{Id}_{b'}$ y además, $H_1(b') = F_0(F_1^{-1}(b')) = F_0(b) = \text{Id}_b(b) = b$. Concluyendo así la simetría. Para la transitividad si tenemos que b' es isotopica a b'' existe G , tal que G_s cumple las condiciones respectivas. Note que ambas son en esencia deformaciones así basta usar el truco clásico de pegado

$$H_s(x) = \begin{cases} F_{2s}(x) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G_{2s-1}(F_1(x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Por el lema del pegado es continua H_s , y las condiciones se siguen inmediatamente de la definición ya que $H_0 = F_0 = \text{Id}_b$ y $H_1(b) = G_1(F_1(b)) = G_1(b') = b''$.

□, □

Dadas las similitudes con la noción de homotopia, podemos pensar en una forma de definir un “producto” trenzas geométricas con n cuerdas.

Definición 2.6. Dadas 2 trenzas geométricas con n cuerdas b_1, b_2 , definimos su producto como el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ tales que si $t \in [0, 1/2]$ entonces $(x, y, 2t) \in b_1$, y en caso donde $t \in [1/2, 1]$ tenemos que $(x, y, 2t - 1) \in b_2$.

Note que el producto de dos trenzas geométricas de ese estilo claramente será otra trenza, ya que lo único que estamos haciendo es unir el final de una con el inicio de la otra. La siguiente proposición nos permitirá definirla como un producto sobre las clases de trenzas geométricas con n cuerdas

Proposición 2.7. Dadas b_1, b_2, b'_1, b'_2 , donde b_i es isotopica a b'_i para $i = 1, 2$, entonces $b_1 b_2$ es isotopica a $b'_1 b'_2$

Demostración. Sea F la isotopia entre b_1 y b'_1 y G la de b_2 y b'_2 , luego dada la definición de

$b_1 b_2$ un simple truco de concatenacion de F y G basta, es decir

$$H_s(x, y, t) = \begin{cases} F_s(x, y, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(x, y, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por las propiedades de F y G se sigue que H es la isotopia desdeada. \square, \square

Dado esto podemos observar que esta operación es asociativa y además tiene un elemento neutro. Este elemento neutro será denotado como 1_n y es presentador por la trenza geométrica dibujada de el ejemplo 2.2. en su expresión de conjunto sería

$$1_n = \{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times I.$$

De esto concluimos que es un monoide, la prueba de que efectivamente resulta un grupo vendrá más adelante.

2.2. Diagramas de Trenzas y movimientos de Reidemeister

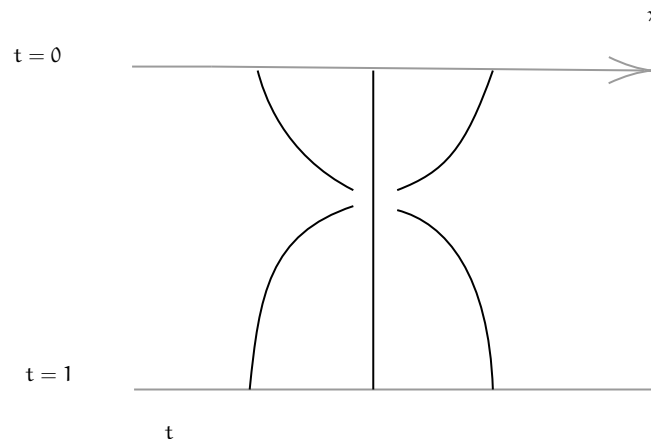
Como mencionamos en el Ejemplo 2.2, si bien uno debe ser cuidadoso con las representaciones, en términos prácticos esta proyección donde las cuerdas en el diagrama pareciera que están solo en el plano $y = 0$ y donde los tramos que pasan por “debajo” pareciera que se cortan son útiles, siempre y cuando de manera local solo hayan cortes transversales dos a dos. Esta idea nos lleva a querer definir estas representaciones.

Definición 2.8. Un **diagrama de trenzas** de n cuerdas es un conjunto $D \subset \mathbb{R} \times I$, vista como la unión de n intervalos topológicos llamados las cuerdas de D donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyección $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ envía cada cuerda homeomórficamente a I .
- Cada punto $\{1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$ es el extremo de una única cuerda.
- Todo punto de $\mathbb{R} \times I$ pertenece a lo máximo a 2 cuerdas. En cada punto de intersección las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.

En particular si en los ejemplos 2.2 y 2.3 quitamos el eje y serían diagramas de trenzas, pero incluimos la tercera condición para evitar casos como el siguiente

Ejemplo 2.9. Observe que en la figura es imposible distinguir que trenza pasa por debajo de la otra por lo que si bien podemos ver que la permutacion subyacente seria del tipo $(3, 2, 1)$ no sabemos como se comportan las trenzas por el dibujo.



La condicion en la que hemos realizado el particular enfasis, en terminos un poco mas formales significa que via homeomorfismo existe una vecindad de estos puntos de cruce, las trenzas se ven como el conjunto $\{(x, y) : xy = 0\}$ que en escencia son los ejes coordenados de \mathbb{R}^2 .

Esta condición implica que el numero de cruces en D es finito, pues en caso contrario si fueran infinito como de manera homeomorfica las trenzas son una unión de n intervalos cerrados, por lo que es un conjunto compacto, así como es un conjunto infinito de puntos, este conjunto tiene un punto de acumulación que esta en D , luego para este punto una vecindad no es homeomorfica a un intervalo ni a un cruce transversal, ya que hay infinitos puntos de intersección en cada vecindad de este punto, así tienen que ser finitos.

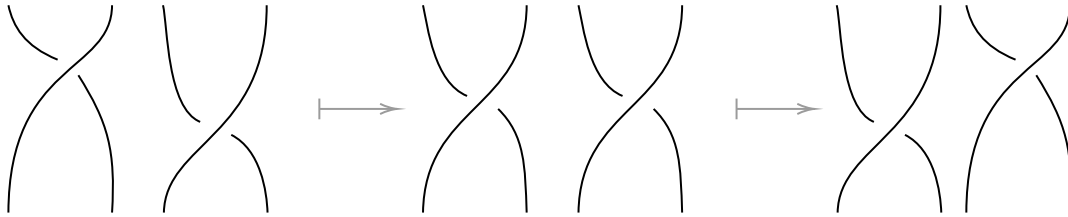
El proposito de introducir los diagramas de trenzas es que podemos ver como estos son representantes de la clase de isotopia de las trenzas geometricas de la manera mas natural posible. La idea detrás de esto es ver a el diagrama de trenzas de la manera natural dentro de $\mathbb{R}^2 \times I$, como $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$, asi en cada vecindad de intersección cambiamos la coordenada de la trenza que pasa por debajo mientras las otras dos las dejamos quietas, es decir nuestra cuerda ahora se encontrara ubicada en $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times I$. Este acto que es continuo y transforma el diagrama D en una trenza geométrica, la cual tiene su clase de isotopia bien definida presentada por D , esto suele denotarse por $\beta(D)$.

Con esto en mente es relativamente sencillo imaginarse la forma en la que uno puede transformar un elemento de la clase de isotopia en un diagrama, dada β una trenza geométrica, en la clase de isotopia podemos encontrar una trenza geométrica b donde solo se den los cruces de manera transversal, luego si recordamos cuales son las cuerdas que tienen segunda coordenada mas grande en el corte al momento de hacer la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R} \times 0 \times I$ estas serán en las que tomaremos sub-arcos de b para que se vea "cortada", de esta manera podemos obtener el diagrama D que es claramente igual a $\beta(D)$. Con esta idea de que podemos pasar libre mente de la trenza geométrica a un diagrama de trenzas pues debemos de definir que es la isotopia en estos diagramas.

Definición 2.10. Dos diagramas de trenzas D y D' se dicen isotopicos si existe una función continua $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ tal que para cada $s \in I$, $D_s = F(D \times \{s\}) \subset \mathbb{R} \times I$ es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, además $D_0 = D$ y $D_1 = D'$.

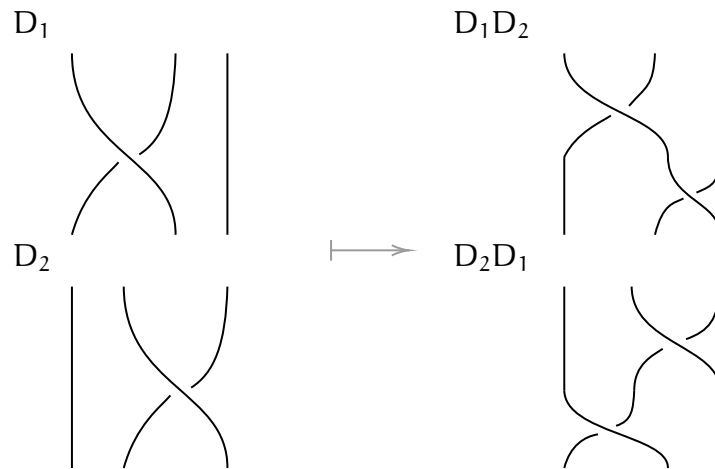
Se sobreentiende de la definición de que la función F en cada s envía los cruces y la información de quien va por debajo y arriba a D_s .

Ejemplo 2.11. Observe que podemos ver todo lo que se menciono antes, la información se preserva tanto de los cortes como de que cuerda va por debajo.



Análogamente el producto de diagramas D_1 y D_2 lo podemos ver como pegar un diagrama encima de otro para posteriormente aplastarlo hasta que este contenido en $\mathbb{R} \times I$, ese producto sera llamado $D_1 D_2$ y este diagrama representara el producto de las trenzas β_1 y β_2 correspondientes

Ejemplo 2.12. El producto de dos diagramas para obtener $D_1 D_2$ y $D_2 D_1$

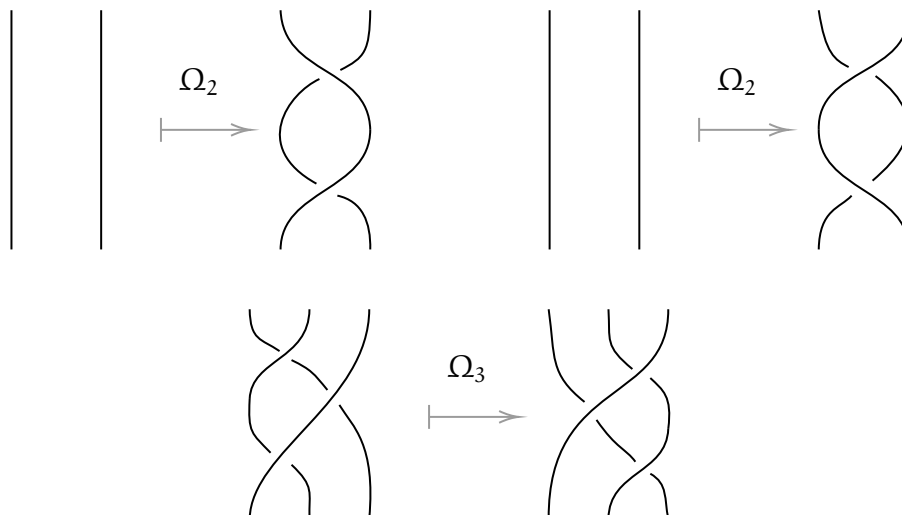


Note que esto ya nos muestra la no conmutatividad ya que la permutacion subyacente de el representante $D_1 D_2$ es $(3, 1, 2)$, mientras que la de $D_2 D_1$ es $(2, 3, 1)$.

Por ultimo, teniendo en cuenta que todos los diagramas los podemos pensar como cuerdas en la realidad es natural pensar en que movimientos preservan la clase de isotopia entre diagramas, para esto tomamos prestados de la teoria de nudos los *movimientos de Reidemeister* Ω_2 y Ω_3

Definición 2.13. Definimos Ω_2 un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a Ω_3 es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.

Estos movimientos solo afectan el diagrama en un disco dentro de $\mathbb{R} \times I$ y podemos verlos a continuación



Decimos que el movimiento inverso es invertir las flechas en la figura, note que esto nos permite jugar con las cuerdas sin cambiar la estructura del diagrama, por lo que podemos definir una noción de equivalencia

Definición 2.14. Dados dos diagramas D y D' decimos que son R-equivalentes si D se puede transformar por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a D'

A simple instancia no parece tan claro que esta noción de equivalencia pueda ser trasladada hacia todas las trenzas geométricas, pero resulta que si podemos hacerlo

Teorema 2.15. Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotópicas si y solo si estos diagramas son R-equivalentes.

La prueba de este hecho se reduce a cuatro pasos, pero la terminología y longitud de la prueba se salen de los propósitos del proyecto, para la prueba de este hecho vea [1].

2.3. El Grupo de Trenzas de Artin

Luego de nuestro paso por la idea geométrica y teniendo en cuenta que definimos el grupo de trenzas geométricas, en esta sección abordaremos las trenzas desde un punto de vista netamente algebraico.

Definición 2.16. El grupo de trenzas de Artin B_n es el grupo generado por $n - 1$ generadores σ_i con $i = 1, 2, \dots, n - 1$ y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ con $|i - j| \geq 2$, y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 2$.

Dicho esto veamos los ejemplos mas sencillos de grupo de trenzas.

Ejemplo 2.17. $B_1 = \{1\}$, es decir el grupo trivial ya que no habrían generadores, en el caso de B_2 tenemos que es un grupo con un generador σ_1 , donde nuevamente no hay relaciones, así $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Como es comun en grupos queremos ver que como se comportan sus elementos bajo homomorfismos. Así sea $f : B_n \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos, por ser homomorfismo, es claro que $f(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}) = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ debe cumplir las relaciones de trenzas, pero también tenemos la dirección contraria

Lema 2.18. Si existen elementos $\{s_i | i = 1, \dots, n - 1\}$ en un grupo G tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un unico homomorfismo de grupos $f : B_n \rightarrow G$, tal que $s_i = f(\sigma_i)$.

Demostración. Sea F_n el grupo libre con n generadores, llamemos estos σ_i , luego existe un unico homeomorfismo f' dado por

$$\begin{aligned} f' : F_n &\rightarrow G \\ \sigma_i &\rightarrow s_i \end{aligned}$$

Ahora recordemos que B_n esta dada por las relaciones dadas en la definicion 2.16. Sea N el subgrupo normal de G mas pequeño que contiene los elementos $\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}$ para $i, j = 1, \dots, n - 1$ tales que $|i - j| \geq 2$ y $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1}$ para $k = 1, \dots, n - 2$. Note que en particular esto significa que $B_n \cong F_n/N$, ademas por como definimos el homomorfismo f' tenemos que $f'(N) = \{1\} \leq G$. ya que en G las relaciones de trenzas se cumplen. Asi el subgrupo normal N esta contenido en el kernel del homomorfismo, asi por el teorema fundamental del homeomorfismo, f' induce un homeomorfismo $f : F_n/N \rightarrow G$, que es justamente lo que queriamos. \square

Para los primeros dos grupos de trenzas, estos eran abelianos, pero esto de hecho no se mantiene siempre para esto mostremos primero el siguiente lema

Lema 2.19. Las trasposiciones simples $s_i = (i \ i + 1) \in S_n$, generan S_n y satisfacen las relaciones de trenzas.

Demostración. Primero probemos que lo generan. Procedemos por inducción, para $n = 2$ es claro ya que $S_2 = \langle (1, 2) \rangle$, ahora suponga que se tiene para S_n , veamos que lo tenemos para S_{n+1} , dada $\sigma \in S_{n+1}$, si el elemento $n + 1$ queda fijo bajo la permutacion, entonces lo podemos

ver como un elemento de S_n y por la hipótesis de inducción lo generan las trasposiciones simples. Ahora suponga que $\sigma(n+1) = m$ para algún $m < n+1$, observe que si definimos

$$\tau := (n \ n+1)(n-1 \ n) \dots (m+1 \ m+2)(m \ m+1).$$

Note que $\tau(m) = n+1$, así $\tau\sigma(n+1) = n+1$, así $\tau\sigma$ fija $n+1$ y por la hipótesis de inducción es generada por trasposiciones simples, como τ es un producto de trasposiciones simples, multiplicando por el inverso concluimos que σ también está generada por estas.

Ver que cumplen las relaciones de trenzas es simple, ya que por el producto en S_n tenemos que si $|i-j| \geq 2$ esto implica $i \neq j$ y además que $j > i+1$ o $i > j+1$, así

$$s_i s_j = (i \ i+1)(j \ j+1) = (j \ j+1)(i \ i+1) = s_j s_i,$$

ya que al ser ciclos disjuntos estos conmutan.

De manera similar para $i = 1, 2, \dots, n-2$.

$$s_i s_{i+1} s_i = (i \ i+1)(i+1 \ i+2)(i \ i+1) = (i \ i+2) = (i+1 \ i+2)(i \ i+1)(i+1 \ i+2) = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

Mostrando así que se verifican las relaciones de trenzas. \square, \square

Teorema 2.20. El grupo B_n para $n \geq 3$ no es abeliano

Demostración. Por los Lemas 2.18 y 2.19 existe un único homomorfismo de grupos $f : B_n \rightarrow S_n$, donde $f(\sigma_i) = s_i$, luego como las trasposiciones simples generan S_n este homomorfismo es sobreyectivo. Como S_n para $n \geq 3$ es no abeliano se sigue que B_n no lo es. \square, \square

Por lo visto antes existe un homomorfismo único de grupos $\pi : B_n \rightarrow S_n$, de manera similar es claro que la inclusión $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ es un homomorfismo, esto en ocasiones resulta útil ya que tendremos una cadena de subgrupos $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ y un diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\quad} & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & S_{n+1} \end{array}$$

2.4. Grupo de Trenzas Puro

Dado el grupo de trenzas B_n definimos el grupo de trenzas puras.

Definición 2.21. Dada la proyección natural vista previamente $\pi : B_n \rightarrow S_n$, definimos el grupo de trenzas puras como

$$P_n := \ker \pi.$$

Los elementos de P_n son llamados *trenzas puras de n cuerdas*. Cuando veamos la equivalencia entre las trenzas geométricas y el grupo de trenzas de Artin, nos daremos cuenta de la importancia de este grupo, además que este será especialmente útil para probar algunos hechos algebraicos.

2.5. Espacios de Configuración

Sea M un espacio topológico y denotemos el espacio

$$M^n = M \times M \times \cdots \times M,$$

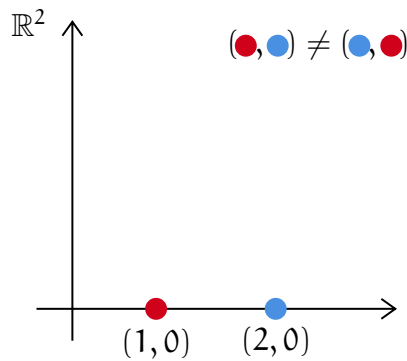
para $n \geq 1$, con la topología producto.

Definición 2.22. El subespacio de M^n definido como

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(u_1, \dots, u_n) \in M^n \mid u_i \neq u_j \text{ para todo } i \neq j\},$$

se conoce como el *espacio de configuración* de n -tuplas ordenadas de puntos en M .

Ejemplo 2.23. Si bien es prácticamente imposible visualizar este espacio para casos de interés podemos dar representaciones esquemáticas de que es un punto. Por ejemplo el punto $((1, 0), (2, 0)) \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^2)$ es



Note que tenemos que tener muy presente el orden de escogencia en el gráfico, ya que si no podríamos confundir este punto con $((2, 0), (1, 0))$

Con este espacio tenemos que

Definición 2.24. El grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$ se conoce como el *grupo de trenzas puras* de M en n cuerdas.

Posteriormente veremos cuando este es equivalente y algunas descripciones interesantes.

2.6. Automorfismos de Trenzas sobre Grupos Libres

Otro acercamiento a la noción de Trenzas desde el álgebra es a través de estudiar ciertos automorfismos de el grupo libre de n elementos $F_n \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

Definición 2.25. Decimos que un automorfismo $\phi : F_n \rightarrow F_n$ es un *automorfismo de trenzas* si satisface las siguientes condiciones

- i) Existe $\mu \in S_n$ tal que $\phi(a_k)$ es conjugado en F_n a $a_{\mu(k)}$ para todo $k \in 1, 2, \dots, n$
- ii) $\phi(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$.

Recordemos que todo automorfismo esta completamente determinado por la accion sobre sus geneeradores, luego bastara téner esto en cuenta para definir algun automorfismo de trenzas, un ejemplo de estos son los siguientes

Ejemplo 2.26. Definamos los siguientes automorfismos

$$\tilde{\sigma}_i(a_k) = \begin{cases} a_{k+1} & \text{si } k = i, \\ a_k^{-1} a_{k-1} a_k & \text{si } k = i + 1, \\ a_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_i^{-1}(a_k) = \begin{cases} a_k a_{k+1} a_k^{-1} & \text{si } k = i, \\ a_{k-1} & \text{si } k = i + 1, \\ a_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que la primera condicion se cumple si tomamos la permutacion $\mu = (i \ i + 1)$, ya que esos son los generadores cambiados por $\tilde{\sigma}_i$, de manera similar

$$\tilde{\sigma}_i(a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n) = a_1 \dots (a_{i+1}) (a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1}) \dots a_n = a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n.$$

Es claro que la eleccion de denotar una como el inverso de la otra es intencional. Definimos \tilde{B}_n como el conjunto de todos los automorfismos de trenzas sobre F_n , asi tenemos el siguiente resultado esperable

Proposición 2.27. \tilde{B}_n es un grupo con la composicion.

Demostración. Observe que por ser funciones la asociatividad y elemento neutro estan asegurados, faltaria verifcas la ley de composicion interna y que el inverso es un automorfismo con esas propiedades. Dados $\phi, \psi \in \tilde{B}_n$, tenemos que existen μ_1 y μ_2 permutaciones asociadas respectivamente, luego $\phi(\psi(a_k))$ sera conjugado al elemento $a_{\mu_1(\mu_2(k))}$, y $\phi(\psi(a_1 \dots a_n)) = \phi(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$. Para el caso de ϕ^{-1} , la conjugacion vendra dada por la permutacion μ_1^{-1} , mientras que como $\phi(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$ aplicando el inverso a ambos lados obtenemos $a_1 \dots a_n = \phi^{-1}(a_1 \dots a_n)$.

□□

2.7. Trenzas y Homeomorfismos

Sea M una variedad topologica orientada y $Q \subset \text{Int}(M)$ finito.

Definición 2.28. Un *auto-homeomorfismo* de la pareja (M, Q) es un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tal que

- i) Para todo $x \in \partial M$, $f(x) = x$.
- ii) $f(Q) = Q$.
- iii) Preserva la orientacion.

Observe que en i) cada punto de frontera esta fijo, mientras que por ii) puede que Q quede fijo pero tambien esta la posibilidad de permutar los puntos en Q .

Como es constumbre tenemos que definir una noción de isotopia entre estos auto-homeomorfismos para poder empezar a dar la estructura adecuada y no estar repitiendo elementos.

Definición 2.29. Sean f_0, f_1 auto-homeomorfismos de (M, Q) , decimos que son isotopicos si existe una familia de auto-homeomorfismos $\{f_t\}_{t \in I}$ donde estos sean los extremos y cada f_t sea continuo.

Dada la similitud con nociones anteriores no mostraremos que efectivamente esta isotopia define una relacion de equivalencia.

Definición 2.30. El *Mapping Class Group* $\mathcal{M}(M, Q)$ es el conjunto de clases de isotopia de automorfismos con la composicion de funciuones como operacion.

Si el conjunto de puntos $Q = \emptyset$ omitiremos su escritura en general. A continuacion veremos un ejemplo clasico de este grupo

Ejemplo 2.31. Mostraremos que $\mathcal{M}(D^n) = \{1\}$, para esto consideremos la siguiente familia de funciones

$$h_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq |x| \leq 1, \\ \text{th}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } |x| < t. \end{cases}$$

Donde h es un auto-homeomorfismo de D^n . Note que $h_0 = \text{Id}_{D^n}$, mientras que

$$h_1 = \begin{cases} x & \text{si } |x| = 1, \\ h(x) & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Que justamente es h ya que este es auto-homeomorfismo. Claramente estos son continuos y son auto-homeomorfismos, asi concluimos lo deseado, en particular note que si $h(0) = 0$, cada h_t fija 0 por lo que $\mathcal{M}(D^n, \{0\}) = \{1\}$.

En particular nos concentraremos en el caso D^2 y $Q \subset \int(M)$ un conjunto finito de puntos por lo anterior para un solo punto es el grupo trivial, de momento esto no resulta particularmente revelador pero al tomar $|Q| = k \geq 2$ se vera mejor la conexion pero no nos adelantemos.

2.8. Medios-Giros

Siguiendo las mismas nociones anteriores y con vistas en llegar a nociones de trenzas consideramos arcos especiales dentro de D^2

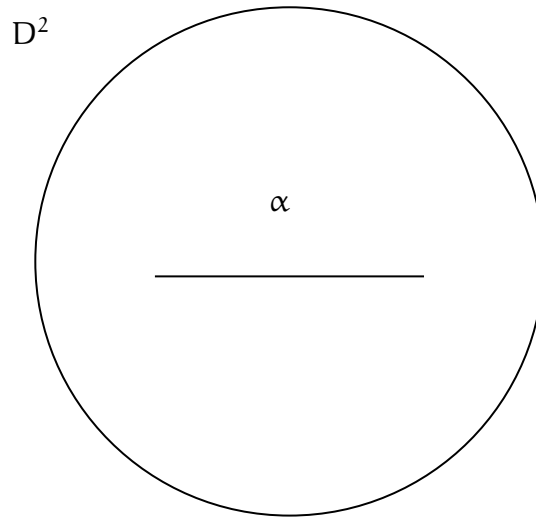
Definición 2.32. Decimos que α es un *arco generador* en (M, Q) si

- $\alpha \subset M$ con α homeomorfo a I .
- $\alpha \cap (Q \cup \partial M) = \{x_1, x_2\} \subset Q$

Note que la primera condicion de ser homeomorfo evita que hallan autointersecciones en estos arcos, asi son lo que se suele llamar arcos simples. La segunda condicions hace referencia a que los arcos son disyuntos con Q y la frontera de M salvo en los extremos que son dos

puntos exclusivamente de Q

Ejemplo 2.33. Si tomamos $M = D^2$ y $Q = \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$, α es un arco generador donde sus extremos son los puntos de Q .

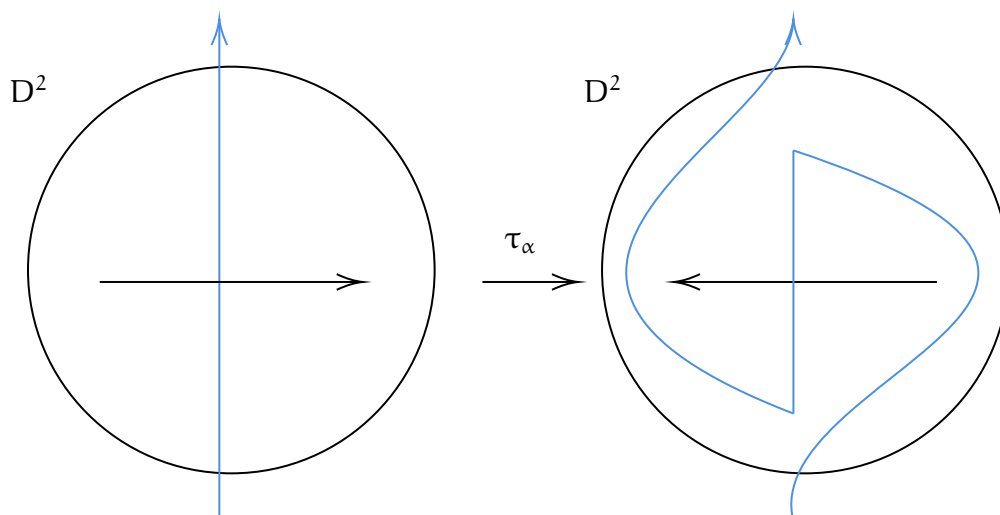


Definición 2.34. Dado un arco generador α definimos el *medio-giro* como

$$\tau_\alpha: (M, Q) \rightarrow (M, Q)$$

Tal que dada una vecindad pequeña U de α , que identificamos de manera homeomorfa con $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ tal que $\alpha = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y la orientación de M sea en contra de las manecillas del reloj, tal que fuera de U , τ_α es la identidad, Si $|z| \leq \frac{1}{2}$ es enviado a $-z$, y para $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$ es enviado a $ze^{-2\pi i|z|}$

Ejemplo 2.35. Tomando como referencia el ejemplo anterior un Medio giro dado por τ_α alteraría una curva transversal de la siguiente forma



Note que en terminos mas informales basicamente estamos rotando un α un angulo de π fijando un punto medio, y todo lo demas se distorsiona acordeamente. A continuacion enunciaremos mas no demostraremos las propiedades de estos medios giros

- Si $f: (M, Q) \rightarrow (M', Q')$ es un homeomorfismo que preserva la orientacion, y α un arco generador, entonces $f(\alpha)$ tambien lo es y $\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1}$.
- Si α y α' son isotopicos en la clase de arcos generadores, entonces $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$ en $\mathcal{M}(M, Q)$.
- Si α, β son arcos generadores disjuntos en $\mathcal{M}(M, Q)$ entonces $\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha$.
- Para α, β arcos generadores que son disjuntos salvo un punto en comun en sus extremos tenemos que $\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta$.

Observe la gran similitud inmediatamente con las relaciones de trenzas, bastaria ver que tipo de arcos generadores son los que generarian el Mapping class group.

3. Resultados de Equivalencia

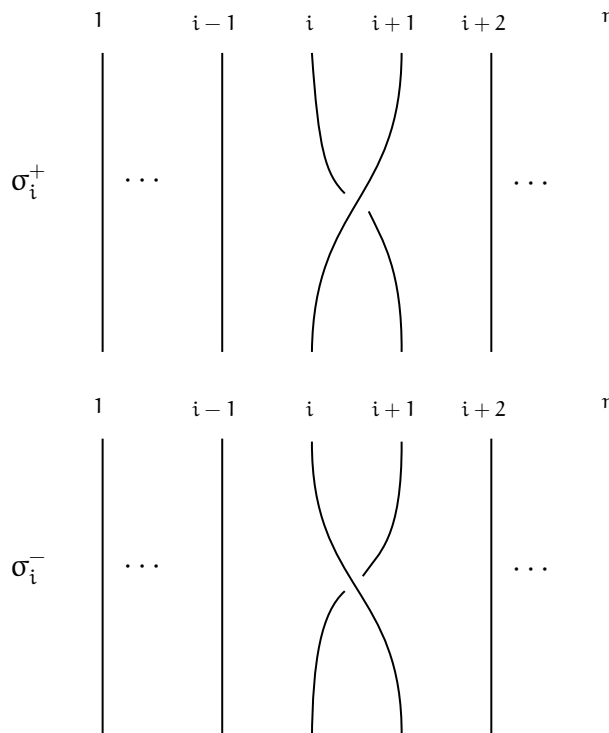
Durante este capitulo probaremos la equivalencias respectivas entre las definiciones presentadas en el anterior capitulo y algunos hechos derivados de estas equivalencias.

3.1. El grupo de trenzas geométrico

Denotemos \mathcal{B}_n como el conjunto de trenzas en n cuerdas con la multiplicacion dada en la Definicion 2.6, veamos que efectivamente es un grupo

Proposición 3.1. \mathcal{B}_n es un grupo.

Demostración. Previamente ya habíamos visto que con esta operación el conjunto es un monoide, nos bastaría encontrar un inverso para cada $\beta \in \mathcal{B}_n$. Para $i = 1, \dots, n-1$, definimos σ_i^+ y σ_i^- dadas en la siguiente figura



Veamos que el conjunto de todas estas genera a cualquier trenza $\beta \in \mathcal{B}_n$. consideremos el diagrama de trenzas $D \subset \mathbb{R} \times I$ que la representa. Como hay una cantidad finita k de intersecciones en el diagrama podemos deformarlo de tal manera que cada intersección se de en una segunda coordenada diferente, es decir podemos conseguir una partición del intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1,$$

tal que cada banda $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}]$ posee exactamente una intersección en el interior de cada banda. Así cada una de estas bandas se puede ver como una reparametrización de la trenza σ_i^+ o σ_i^- , así con el producto obtenemos que

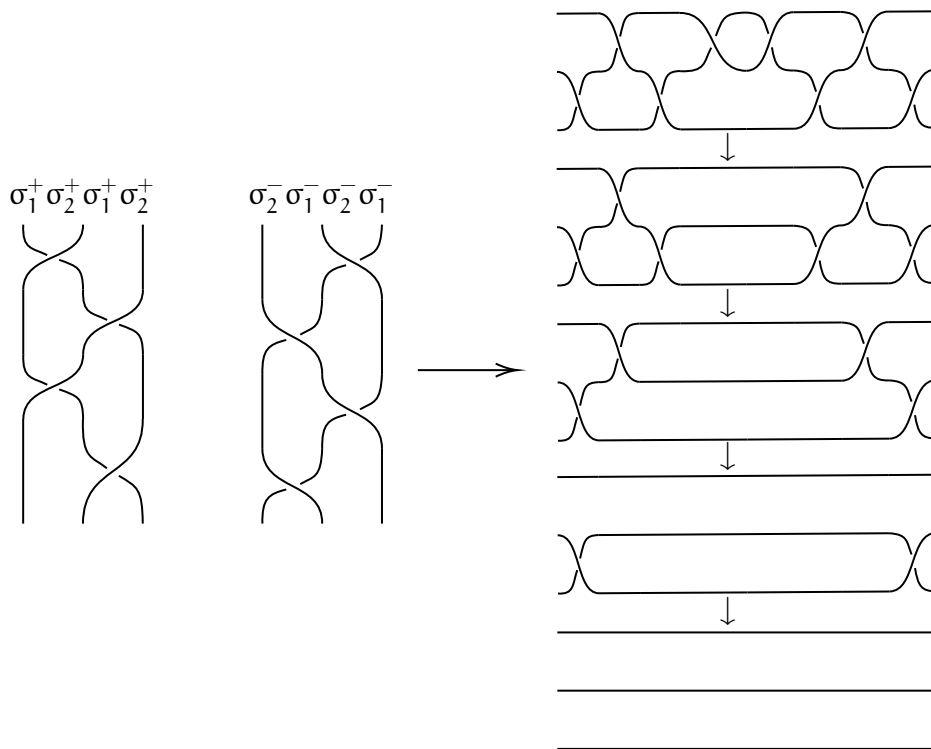
$$\beta = \beta(D) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

donde cada $\varepsilon_j = \pm$ y $i_j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Así como cada $\sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \sigma_i^+ = 1$, debido a que este diagrama es equivalente al trivial aplicando Ω_2 . Así el elemento inverso es

$$\beta^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\varepsilon_k} \dots \sigma_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

Mostrando así que es un grupo. □□

Ejemplo 3.2. Para ver esta idea en acción en el siguiente diagrama podemos ver una trenza de \mathcal{B}_3 su inverso y el proceso de usar consecutivamente Ω_2 para convertir la concatenación en 1_3



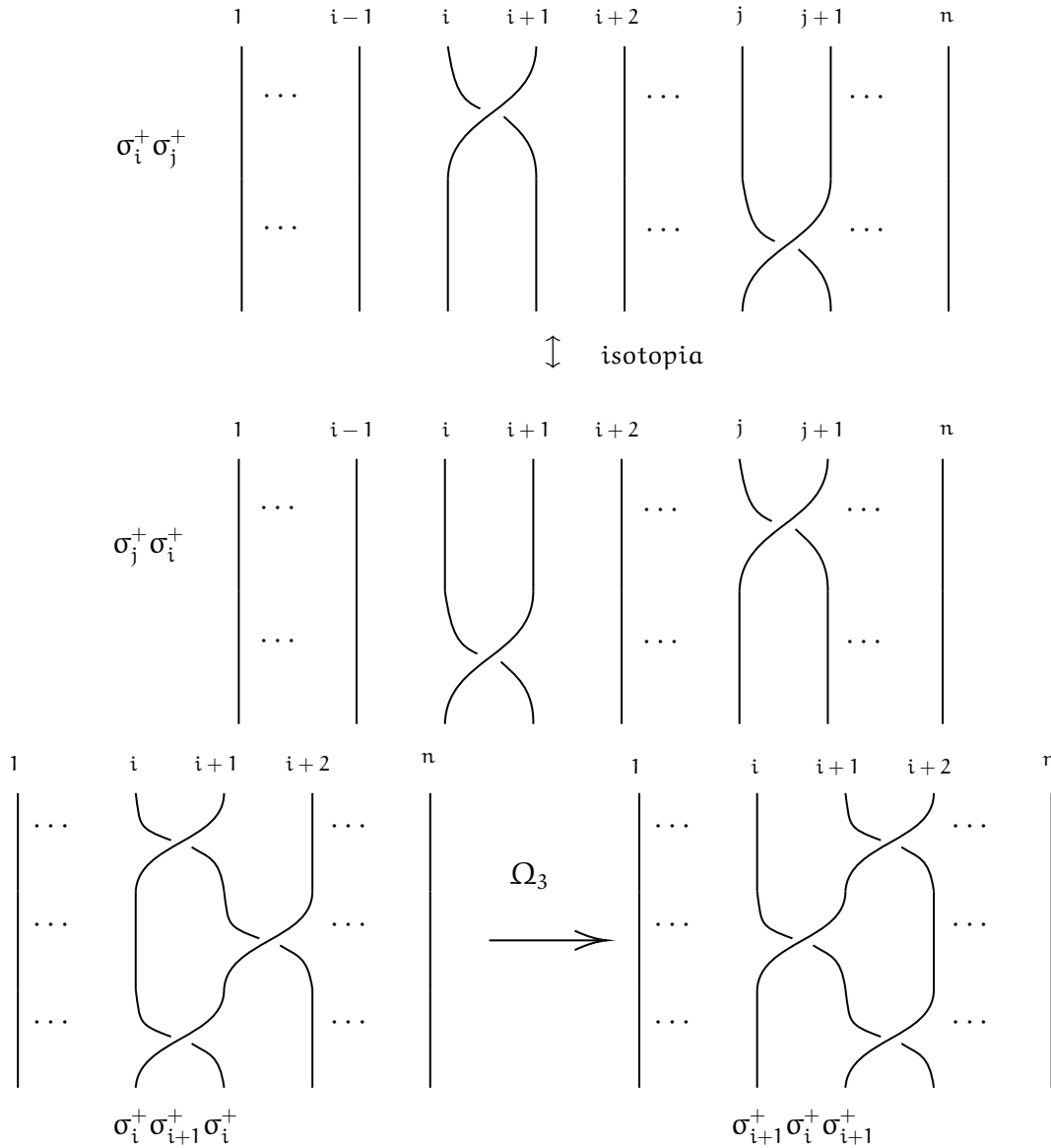
Teniendo en cuenta que vimos que los elementos σ_i^+ generaban el \mathcal{B}_n , la pregunta natural que surge es si cumplen las relaciones de trenzas propuestas por Artin.

Proposición 3.3. Los elementos $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathcal{B}_n$ satisfacen las relaciones de trenzas.

Demostración. Note que dados $|i - j| \geq 2$, esto quiere decir que $i \geq j + 2$ o $j \geq i + 2$, en ambos casos al hacer el producto $\sigma_i^+ \sigma_j^+$ y $\sigma_j^+ \sigma_i^+$ las trenzas involucradas son diferentes, por

lo que por medio de una isotopia se puede llegar de un diagrama a otro, así $\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+$. Note que para $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$, se tiene la igualdad debido a que ambos diagramas difieren solo por hacer el movimiento Ω_3 .

□□



Con todo esto estamos preparados para probar nuestro primer resultado de equivalencia

Teorema 3.4. Para $\varepsilon = \pm$, existe un unico homomorfismo $\varphi_\varepsilon : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ tal que $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Además el homomorfismo φ_ε resulta ser un isomorfismo.

Demostración. Debido a la similitud de ambas pruebas solo haremos el caso $\varepsilon = +$. Por la proposición 3.2 y el Lema 2.18 existe un único homomorfismo Φ_+ que cumple lo deseado. Luego por la prueba de la proposición 3.1 sabemos que los σ_i^+ generan \mathcal{B}_n así el homomorfismo es sobreyectivo. Para la inyectividad sea $\beta \in \mathcal{B}_n$ representada por su diagrama de trenzas D con la representación presentada en la proposición 3.1, es decir

$$\beta = \beta(D) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

y definamos $\psi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ tal que

$$\psi(D) = (\sigma_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots (\sigma_{i_k})^{\varepsilon_k}.$$

Donde las potencias $\varepsilon_j = \pm$ significan en B_n el tomar el elemento usual o su inverso. Note que si ψ esta bien definido entonces como función por construcción $\psi \circ \varphi_+ = \text{id}_{B_n}$, luego como mostramos la existencia de una inversa a izquierda, φ_+ es inyectiva y por tanto un isomorfismo. Mostremos que la imagen $\psi(D)$ depende unicamente de β . Por el teorema 2.15 basta ver que la imagen se preserva bajo secuencias finitas de isotopias de D y movimientos de Ω_2 y Ω_3 (el caso de los inversos es equivalente). Primero observe que las isotopias que preservan el orden de los puntos de corte dado por la expansión no alteran D y por tanto $\psi(D)$ no se altera. Si una isotopia cambia el orden de dos puntos de corte, eso es equivalente a cambiar en la expresión $\sigma_i^{\varepsilon_i} \sigma_j^{\varepsilon_j}$ por $\sigma_j^{\varepsilon_j} \sigma_i^{\varepsilon_i}$ con $|i - j| \geq 2$. Bajo ψ note que estas dos expresiones son iguales en B_n por la primera relación del grupo de trenzas.

Para Ω_2 esto lo que hace es que inserta un $\sigma_i^+ \sigma_i^-$ o $\sigma_i^- \sigma_i^+$ a la expresión de D , luego al enviarla por ψ al ser inversos queda la misma $\psi(D)$. El movimiento Ω_3 en la expresión de D reemplaza una secuencia $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$ por $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$, pero en $\psi(D)$ estas dos son iguales en B_n por la segunda relación de trenzas. Así concluimos lo deseado.

□□

Esto nos permite intercambiar libremente entre las trenzas geométricas y algebraicas, por lo que de ahora en adelante nos referiremos a cualquier elemento en B_n como *trenzas en n cuerdas*, esto nos permite hacer algunas observaciones de B_n desde la vista geometrica, que solo desde el álgebra habría sido difícil de probar

Corolario 3.5. La inclusión $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ es inyectiva para todo n .

Demostración. Geometricamente la inclusión es tomar una trenza en n cuerdas y añadir una cuerda extra a la derecha del diagrama que no interactué con las demás, resultando en una trenza en $n + 1$ cuerdas. Así dadas b_1 y b_2 trenzas geometricas tales que $i(b_1)$ y $i(b_2)$ isotopicas, como ambas trenzas tienen la cuerda $n + 1$ fija, si las restringimos a las primeras n cuerdas obtenemos una isotopia de b_1 y b_2 , así i es inyectiva.

□□

3.2. El grupo de Trenzas puro y los espacios de configuración

Retomamos la definición dada en la sección 2.4 del grupo de trenzas puro, en primera instancia desde un punto de vista netamente algebraico si bien no es imposible resulta difícil pensar en que elementos de B_n pertenecen al kernel de la proyección natural al grupo simétrico. Aquí es donde entra en juego la visualización de los generadores de B_n como cruces en nuestros diagramas de trenzas.

Dada una trenza β , si tomamos su representación por D la podemos escribir como $\beta = \beta(D) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, luego por la proyección tenemos que

$$\pi(\beta) = (i_1 i_1 + 1) \cdots (i_k i_k + 1).$$

Note que para que este sea la identidad en S_n debería de fijar a todos los elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, esto se traduce a que una cuerda con punto inicial $(i, 0)$ debe terminar en el punto $(i, 1)$. Así una trenza pura en n cuerdas serán aquellas trenzas con permutacion subyacente $(1, 2, \dots, n)$, pero en particular hay una de estas trenzas que es de gran importancia

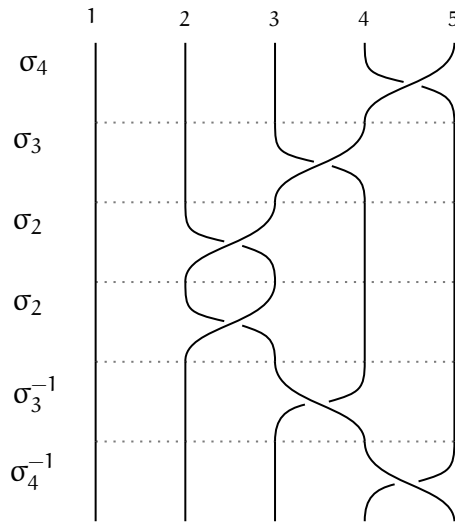
Definición 3.6. Definimos $A_{i,j} \in P_n$ como la trenza dada por

$$A_{i,j} := \sigma_{j-1}\sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

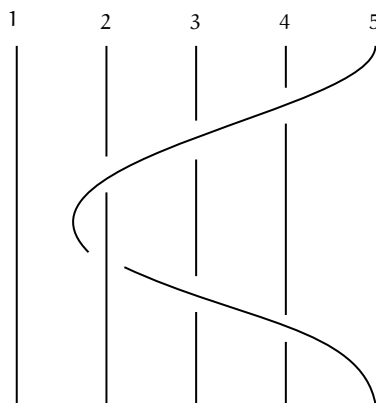
Para $1 \leq i < j \leq n$

Antes de ver la ilustración general de esta trenza veamos un ejemplo pequeño construido desde la concatenación de diagramas

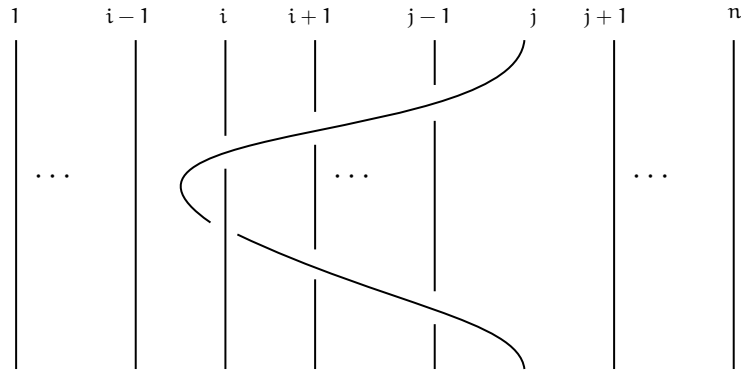
Ejemplo 3.7. Consideremos $A_{2,5} \in P_5 \leq B_5$, en términos de generadores sería $\sigma_4\sigma_3\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$, los diagramas de cada una de estas concatenados sería el siguiente



Note en esencia la cuerda que empieza en el punto $(5, 0)$ pasa por encima de todas salvo de la que empieza en $(1, 0)$, gira al rededor de la que empieza en $(2, 0)$ y luego vuelve a pasar por encima en el camino de vuelta. Así por medio de una isotopía que tense las cuerdas obtenemos el siguiente diagrama

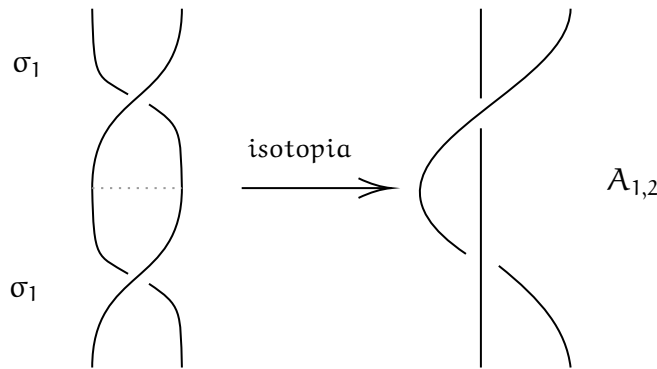


Visto el ejemplo particular anterior la representación general de esta trenza es mas clara y se ve así



Nuevamente observemos como se ven estos grupos en los casos pequeños

Ejemplo 3.8. Es claro que $P_1 = \{1\}$, para P_2 note que queremos trenzas no isotopicas a la identidad tales que su permutacion subyacente sea $(1, 2)$, es claro que $A_{1,2}$ es una de ellas, pero recordemos que $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle$, desde el diagrama nos podemos dar cuenta que $A_{1,2} = \sigma_1^2$, por lo que $P_2 = \langle \sigma_1^2 \rangle \cong 2\mathbb{Z}$, ya que aplicar σ_1 un numero impar de veces siempre nos dara una trenza con permutacion subyacente $(2, 1)$.



De la misma manera en que la inclusión $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ añadía una cuerda al diagrama que no interactuaba con otras a la derecha del todo, se puede considerar $i|_{P_n}$ de manera similar podemos pensar en una función que elimine alguna cuerda. Note que esa nocion de eliminar no es conveniente trabajarla directamente en B_n ya que los puntos finales e iniciales de cada cuerda no son los mismos, por lo que podríamos tener algún problema al definirlo, pero en P_n no tendríamos por que preocuparnos

Definición 3.9. Definimos el *homomorfismo de olvido* $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ tal que a una trenza geométrica en P_n , se elimina la trenza con puntos $(n, 0, 0)$ y $(n, 0, 1)$ iniciales y finales respectivamente.

La función esta bien definida en clases de isotopia ya que dadas dos trenzas en P_n isotopicas, al eliminar la misma cuerda la isotopia sigue actuando igual sobre las trenzas en P_{n-1} , ya que en cada paso es simplemente olvidar la deformación sobre la n -esima cuerda, que sea homomorfismo de grupos es inmediato de la definición de multiplicación de trenzas ya que es solo la concatenación de diagramas y como los puntos finales e iniciales de cada cuerda son el mismo se sigue manteniendo el hecho de que sean trenzas. En vistas de esto. Con esto de manera similar a lo hecho con π sera util en un futuro considerar el siguiente subgrupo.

Definición 3.10. Para $n \geq 2$ definimos

$$U_n = \ker f_n.$$

De manera inmediata no se ve la razón particular de definir este subgrupo, mas sera útil posteriormente para estudiar propiedades algebraicas.

Ejemplo 3.11. Dada la trenza $A_{2,5}$, por el diagrama es claro que $f_5(A_{2,5}) = 1_4$, así $A_{2,5} \in U_5$, en general es fácil notar del diagrama general que $A_{i,n} \in U_n$ para $1 \leq i < n$.

Retomaremos la discusión de estos objetos simplemente para enunciar algunos hechos de interés al final del documento, pero primero vayamos camino a las equivalencias.

Teorema 3.12. Para $M = \mathbb{R}^2$ tenemos que $\pi_1(\mathcal{F}_n(M)) \cong P_n$.

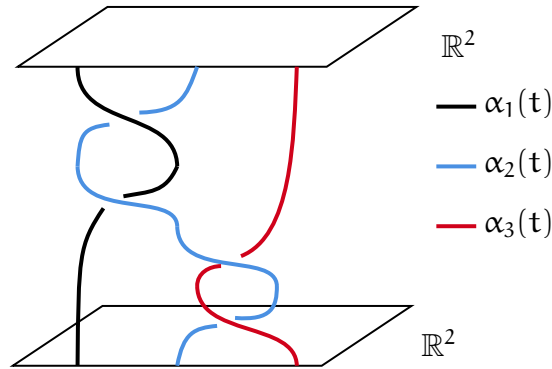
Demostración. La idea a seguir sera enviar las trenzas puras geométricas a los posibles lazos. Sea $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$, definamos la imagen de b como el camino $I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$, donde $t \mapsto (u_1(t), \dots, u_n(t))$, donde el camino tiene que cumplir que la i -ésima cuerda de b intersecta a el plano $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ en el punto $(u_i(t), t)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Con esto estamos aprovechando el hecho de que en cada plano hay n puntos diferentes. Asi note que esto nos da un camino que inicia y termina en el punto $q_n = ((1, 0), \dots, (n, 0))$, esto debido a que es una trenza pura. Para hacer la otra asignación un camino $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ con punto inicial y final q_n . Podemos considerar el siguiente conjunto

$$\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{t \in I} (\alpha_i(t), t).$$

Note que como cada $\alpha_i(t)$ es un camino continuo y $t \in I$ estamos creando cada cuerda a partir de este camino, y al ser elementos del espacio de configuración cumplimos la condición de ser disjuntos. Estas construcciones son inversas la una de la otra y dan una correspondencia entre lazos y trenzas geométricas puras, de la forma $P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), q_n)$. \square

En primera instancia es difícil ver como los lazos pueden ser trenzas pero una representación esquemática, que si bien antes seria sugestiva, ahora nos puede ayudar con la visualización

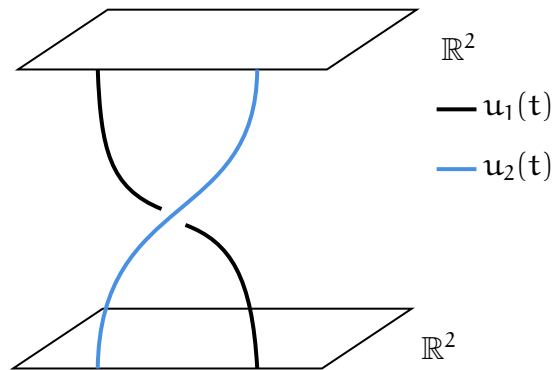
Ejemplo 3.13. Consideremos $\mathcal{F}_3(\mathbb{R}^2)$, Note que dado un lazo $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ basado en $q_3 = ((1, 0), (2, 0), (3, 0))$ se puede ver en $\mathbb{R}^2 \times I$ ya que cada α_i es un camino que se puede graficar, y como para cada t $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ serán caminos que no se cruzan, como se puede ver en la siguiente imagen



Separamos los puntos iniciales y finales por propósitos demostrativos, mas recuerde que en $\mathcal{F}_3(\mathbb{R}^2)$, el punto de abajo es igual al de arriba.

Observe que nuestro mayor problema para llegar a una trenza en B_n es el problema de que los lazos tienen punto inicial y final el mismo, así una trenza cualquiera al enviarla al espacio de configuración correspondiente no sería un lazo

Ejemplo 3.14. Observe que si tomamos la trenza $\sigma_1 \in B_2$, al replicar la construcción de la función hecha en el teorema $t \rightarrow (u_1(t), u_2(t))$ obtenemos un camino que empieza en $0 \rightarrow ((1, 0), (2, 0))$ y termina en $1 \rightarrow ((2, 0), (1, 0))$, así no es un lazo en $\pi_1(\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^2))$, lo cual es claro ya que la permutación subyacente es $(2, 1)$



Note que la descripción del espacio en coordenadas nos da una acción natural de S_n sobre $\mathcal{F}_n(M)$, en la cual cada elemento actúa permutando las entradas, esto nos da una herramienta para ignorar el orden de los puntos.

Ejemplo 3.15. En el ejemplo anterior si pasamos a mirar este camino en $\pi_1(\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^2)/S_2)$ note que particularmente los puntos iniciales y finales son los mismos ya que en el cociente $[((1, 0), (2, 0))] = [((2, 0), (1, 0))]$

Definición 3.16. Dado $\mathcal{F}_n(M)$, definimos

$$C_n(M) := \mathcal{F}_n(M)/S_n$$

Donde el cociente es dado por la acción usual de S_n permutando el orden de las entradas. Este espacio se conoce como el espacio de configuración de conjuntos de puntos no ordenados.

Siguiendo una idea similar a la dada para las trenzas puras tenemos nuestro resultado de equivalencia

Teorema 3.17. Para $M = \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$B_n \cong \pi_1(C_n(M), q)$$

Donde q hace referencia al conjunto de puntos no ordenado $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$.

Demostración. La construcción es igual al caso de trenzas puras salvo que como ya no tenemos en cuenta el orden de las coordenadas podemos ver estas clases como el conjunto que estos puntos forman en \mathbb{R}^2 , así una trenza $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ se envía unívocamente a el lazo $I \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$, donde $t \rightarrow b_t \subset \mathbb{R}^2$, tal que $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\}) = b_t \times \{t\}$. \square

3.3. El grupo de automorfismos y Mapping Class Group

La manera en la que nombramos los elementos de \tilde{B}_n nos invita a pensar que habrá una clara relación entre los automorfismos $\tilde{\sigma}_i$ y los σ_i , y resulta que si la hay, y como ya es costumbre en este documento nos da una nueva equivalencia

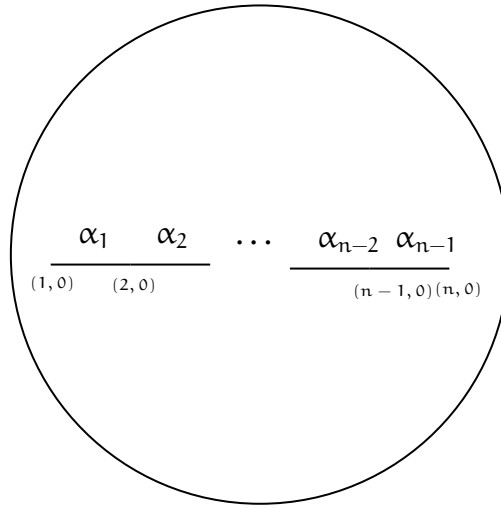
Teorema 3.18. La función que envía $\sigma_i \mapsto \tilde{\sigma}_i$ define un isomorfismo de grupos entre B_n y \tilde{B}_n

Si bien esta puede resultar interesante desde un punto de vista algebraico, nos interesa mas ver que tiene esto que ver con el Mapping Class Group de manera breve.

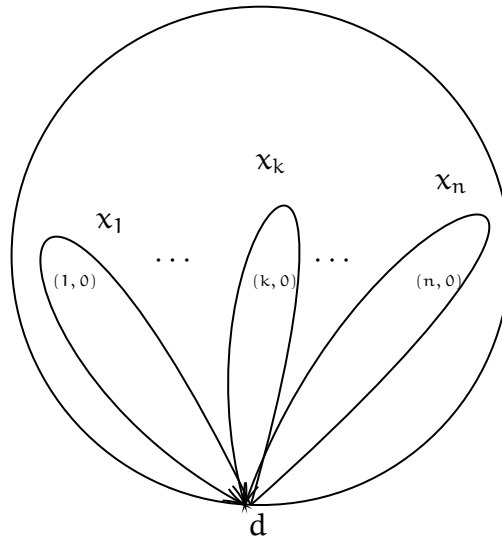
Sea $n \geq 1$, definimos $Q_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0)\}$. Sea D un disco en \mathbb{R}^2 que contenga a Q_n en su interior y lo orientamos en sentido contrario a las manecillas del reloj. y definimos los arcos

$$\alpha_i = [i, i+1] \times \{0\}$$

para $i = 1, \dots, n-1$. como se puede ver en la siguiente imagen



Note que por las propiedades dadas previamente $\tau_{\alpha_i} \in \mathcal{M}(D, Q_n)$ y además satisfacen las relaciones de trenzas, luego por 2.18 existe un homomorfismo de grupos que envía $\sigma_i \rightarrow \tau_{\alpha_i}$. Ahora intentaremos definir un homomorfismo de grupos $\rho: \mathcal{M}(D, Q_n) \rightarrow \tilde{B}_n$, sabemos que escogiendo $d \in \partial D$, el grupo fundamental $\pi_1(D - Q_n, d) \cong F_n$ generado por los lazos abajo



Note que cada auto homeomorfismo se puede restringir a $D - Q_n$, y como por hipótesis d queda fijo, por lo que induce un automorfismo $\rho(f)$, resulta que este automorfismo es un automorfismo de trenzas por lo que tenemos el siguiente teorema que nos da la última equivalencia

Teorema 3.19. Para $n \geq 1$, los homomorfismos η, ρ son isomorfismos que hacen que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc}
 B_n & & \\
 \eta \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{M}(D, Q_n) & \xrightarrow{\rho} & \tilde{B}_n
 \end{array}$$

4. Resultados estándar conocidos.

4.1. El grupo B_3

El primer caso de un grupo de trenzas no abeliano es B_3 que definido a partir de relaciones y generadores posee la siguiente presentación

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle.$$

Geométricamente recordemos que esta relación se traduce en el movimiento Ω_3 , Por el Ejemplo 2.12 (particularmente) y el Teorema 2.20 (general) sabemos que B_3 es no abeliano que ya en si es un hecho relevante, pero en esta sección iremos un poco mas allá respecto a este grupo.

Definamos

$$x = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \quad y = \sigma_1 \sigma_2$$

Note que $x = y \sigma_1$, luego $\sigma_1 = y^{-1}x$, mientras que

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1} x \sigma_1^{-1} = (x^{-1} y) x (x^{-1} y) = x^{-1} y^2$$

Luego como ambos generadores los podemos reescribir en términos de x y y tenemos la siguiente presentación equivalente

$$B_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

con esto podemos probar particularmente para este caso que

Proposición 4.1. El centro de B_3 es generado por y^3 , es decir

$$Z(B_3) = \langle y^3 \rangle$$

Demostración. Para mostrar que un elemento esta en el centro basta ver que conmuta con los generadores, es claro que y^3 conmuta con y , ahora note que $xy^3 = xx^2 = x^3 = x^2x = y^3x$, así $y^3 \in Z(B_3)$ y por tanto $\langle y^3 \rangle \subset Z(B_3)$.

Como el centro de cualquier grupo es normal, $\langle y^3 \rangle$ también lo es, luego

$$B_3 / \langle y^3 \rangle = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

Así el centro es trivial, es decir $Z(B_3 / \langle y^3 \rangle) = \{ \langle y^3 \rangle \}$. Con esto sea $b \in Z(B_3)$, eso implica que $bg = gb$ para todo $g \in B_3$, así $bg \langle y^3 \rangle = gb \langle y^3 \rangle$, lo que implica que la clase lateral $b \langle y^3 \rangle \in Z(B_3 / \langle y^3 \rangle)$, pero por lo anterior $b \langle y^3 \rangle = \langle y^3 \rangle$, así $b \in \langle y^3 \rangle$ y concluimos la igualdad. \square

Con esto en mente consideremos $SL(2, \mathbb{Z})$, que es el grupo de matrices invertibles con entradas enteras y determinante 1. Un hecho que no probaremos es que $SL(2, \mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

La escogencia de estas dos matrices es por lo siguiente:

Proposición 4.2. Dado $SL(2, \mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, tenemos que

$$Z(SL(2, \mathbb{Z})) = \langle -I_2 \rangle$$

y que los dos generadores dados satisfacen las relaciones de trenzas.

Demostración. La segunda parte es una verificación sencilla de los productos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la primera parte si tomamos una matriz en el centro en particular conmuta con nuestros generadores, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí concluimos que $a+c=c$, así $c=0$, de manera similar $b+d=a+b$, así $a=d$, así nuestra matriz se reduce a $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Por la condición del determinante sabemos que $a = \pm 1$ falta ver que ocurre con d , pero

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ -a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $a-b=a$ y por tanto $b=0$, así concluimos lo deseado. \square

Observe entonces que el grupo modular $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) := \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \text{Z}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$, tendrá centro trivial ya que las clases solo difieren por signo. Con esto en mente tenemos el resultado deseado de B_3

Teorema 4.3. Dados B_3 y $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ existe un único homomorfismo, que desciende en un isomorfismo

$$B_3 / \text{Z}(B_3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Demostración. La existencia está garantizada por 2.18, así tenemos que $\sigma_1 \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\sigma_2 \mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, observe que este es sobreyectivo ya que las matrices generan el grupo especial lineal, luego la composición con la proyección a $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ también es sobreyectiva. Tenemos que $x \mapsto S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, luego $x^2 \mapsto -I_2$, así x^2 está contenido en el kernel del homomorfismo, y por tanto se induce un homomorfismo como en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} B_3 & \xrightarrow{\varphi} & \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \\ B_3 / \text{Z}(B_3) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Nos bastaría mostrar que $\bar{\psi}$ es inyectiva. Por la presentación cualquier elemento tendrá la siguiente forma

$$\omega = y^{\pm 1} x \cdots y^{\pm 1} x y^{\pm 1}, \omega x, x \omega, x \omega x, x$$

Es claro que x no estaría en el kernel. Luego como $x \omega x = x \omega x^{-1}$, es decir, es conjugado de ω y $x \omega$ es conjugado de ωx , basta ver que ωy y ωx no están en el kernel. Por las presentaciones $y^{-1} x \mapsto \bar{A}$ y $y x \mapsto \bar{B}^{-1}$. Así $\bar{\psi}(\omega x)$ es un producto de matrices A, B^{-1} , pero note que cualquier

producto no vacío de estas tiene entradas en la diagonal mayor a 1, así no podrá ser la identidad, de manera similar si $\bar{\psi}(\omega) = I$ entonces $\bar{\psi}(\omega x) = \bar{\psi}(x) = S$, pero esto es imposible por la condición sobre las entradas, así la función es inyectiva y hemos probado que

$$B_3/Z(B_3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

□□

4.2. Propiedades de B_n y P_n

En esta sección solo listaremos múltiples resultados algebraicos que vienen desde el grupo de trenzas puro

Teorema 4.4. Para $n \geq 2$, el grupo U_n es libre generado por $A_{i,n}$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$

Este teorema es curiosamente de los más útiles debido a que nos da una manera de reescribir elementos en U_n y por consiguiente luego en P_n de forma iterativa, esto se conoce como forma normal, este hecho nos da múltiples corolarios supremamente interesantes, de los cuales enunciaremos dos

Corolario 4.5. P_n es libre de torsión, es decir no hay elementos de orden finito.

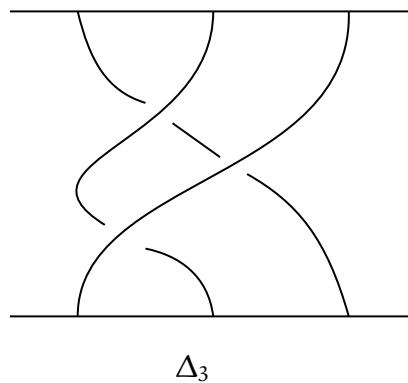
Corolario 4.6. P_n es generado por $A_{i,j}$ para $1 \leq i < j \leq n$

Siguiendo esta idea en la sección anterior explicitamente calculamos el centro de B_3 y vimos que era cíclico e infinito, resulta que de manera general tenemos que

Teorema 4.7. Si $n \geq 3$ $Z(B_n) = Z(P_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$, donde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

Note que en particular para $n = 3$, $\Delta_3 = (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 = x$, esta trenza de manera intuitiva se obtiene al fijar la parte superior y dar un giro de π a los puntos inferiores



De este hecho se sigue un corolario que aunque intuitivamente tenía mucho sentido no lo habíamos probado aun

Corolario 4.8. Para $m \neq n$, B_m no es isomorfo a B_n .

Por ultimo no es un corolario directo de esto ya que depende del espacio de configuración pero también es un hecho estándar.

Teorema 4.9. B_n es un grupo libre de torsión.

4.3. El espacio $C_n(\mathbb{R}^2)$

Finalizamos con una breve descripción del espacio de configuración por medio de polinomios, que nos da una relación muy interesante hacia la geometría algebraica. Si hacemos la identificación natural de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, consideremos el siguiente polinomio simétrico

$$p_k(u) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} u_{i_1} \cdots u_{i_k}.$$

Donde $u \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ y $k = 1, \dots, n$, note que por ser simétrico estas funciones p_k son invariantes bajo la acción de S_n , por lo que inducen una función $C_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Resulta que esta función es un homeomorfismo al conjunto de los polinomios monoicos con raíces diferentes de grano n y coeficientes complejos. Siendo así B_n el grupo fundamental de un conjunto clásico en la geometría algebraica.

Referencias

- [1] C. Kassel and V. Turaev, *Braid Groups*. With the graphical assistance of O. Dodane. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.
- [2] J. S. Birman and T. E. Brendle, Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, September 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0409205>.
- [3] Gonzalez-Meneses, J. (2010). *Basic results on braid groups*. arXiv:1010.0321 [math.GT]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1010.0321>.
- [4] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [5] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [6] E. Artin, *Braids and permutations*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 643–649.