

---

# Grupo de Trenzas y Espacios de Configuración

---

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

eochoa@unal.edu.co

2 de noviembre de 2025

## Resumen

Este trabajo estudia el concepto del grupo de trenzas desde múltiples perspectivas, geométrica, algebraica, como espacios de configuración y mas que surgen de estas. Posterior a estas mostramos como cada una de estas perspectivas resultan equivalentes y se mencionaran algunos resultados interesantes [aun por decidir de momento cuestiones relacionadas con  \$SL\_2\(\mathbb{Z}\)\$ , grupo libre de torsion, etc.](#)

## 1. Introducción

La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin [4], quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclidiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas. No es sorpresa que el estudio de estos objetos tan naturales en la naturaleza resulte de interés debido a su clara conexión con la teoría nudos.

En este proyecto cubriremos el primer capitulo de [1], con la intención de introducir al lector a los grupos de trenzas y todas sus posibles perspectivas, complementar pruebas, presentar diagramas diferentes y en general dar una vista mas aterrizada a entender estas estructuras tan interesantes. Presentaremos las definiciones elementales y multiples perspectivas para luego revisar resultados de equivalencia y finalizar con algunos hechos bien conocidos en la literatura pero que resultan interesantes para un nuevo lector. [Cambiara a posteriori dependiendo del avance](#)

## 2. Diferentes acercamientos a las Trenzas

### 2.1. Las Trenzas Geométricas

Dada la naturaleza geométrica del objeto a estudiar, la representación que resulta mas satisfactoria e intuitiva de ver en un principio de manera formal es la geométrica.

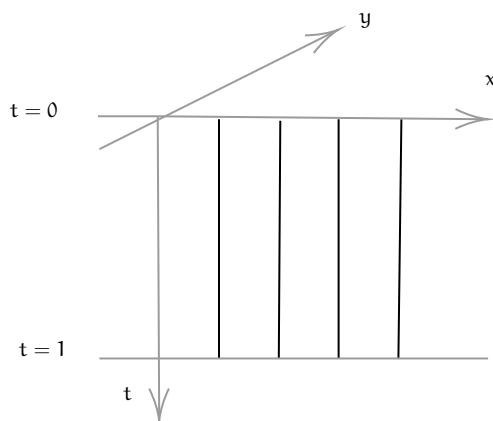
**Definición 2.1.** Una **trenza geometrica** con  $n \geq 1$  cuerdas es un conjunto  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  formado por  $n$  intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de  $b$ , tales que la proyeccion  $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ , envia cada cuerda de manera homeomorfica a  $I$ , y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) | i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 1, 1) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

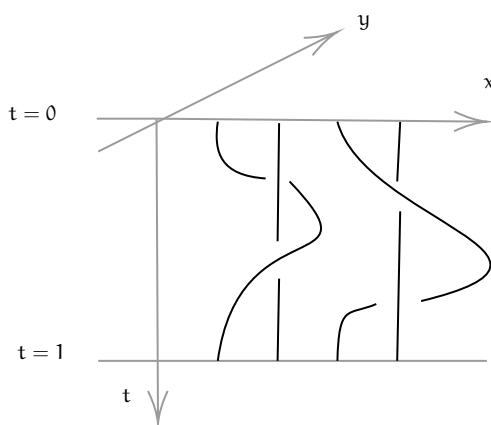
Observe que como cada cuerda va por medio de la proyección de manera homeomorfica a  $I$ , esto quiere decir que cada cuerda interseca a  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  de manera única para cada  $t \in I$ , es decir cada plano tiene exactamente  $n$  puntos del conjunto  $b$ . Note ademas que nuestra definición no menciona el punto final de cada una de las cuerdas ni el recorrido que hace.

**Ejemplo 2.2.** El diagrama donde cada cuerda tiene como punto inicial y final el mismo y donde no hay “giros”.



Note que en este ejemplo sencillo si bien cada cuerda pareciera que se encuentra solo en el plano  $(x, t)$ , estas cuerdas se pueden deformar en la dirección del eje  $y$ , por lo que debemos ser cuidadosos con estas representaciones.

**Ejemplo 2.3.** Observe que en este ejemplo los puntos iniciales y finales de cada cuerda son los mismos que el anterior, pero en este caso si hay cuerdas que “giran” al rededor de otras.



A pesar de lo observado anteriormente los puntos finales e iniciales no tienen por que ser los mismos por lo que en general cada cuerda conectara a un punto  $(i, 0, 0)$  a un punto  $(s(i), 0, 1)$ , donde  $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Observe que la secuencia  $(s(1), s(2), \dots, s(n))$  es una permutacion del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , por lo que para una trenza  $b$  cualquiera, decimos que la secuencia  $(s(1), s(2), \dots, s(n))$  es la **permutacion subyacente** de  $b$ . En particular note que para los ejemplos anteriores tenemos la misma permutación subyacente  $(1, 2, 3, 4)$ .

Con esto en mente es natural preguntarse de que manera podemos ver si dos trenzas son “equivalentes” en algún sentido, para esto introducimos la noción de *isotopia*.

**Definición 2.4.** Dos trenzas  $b$  y  $b'$  son isotopicas si existe una función continua  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ , tal que para cada  $s \in I$ , la función  $F_s := F(-, s)$  es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de  $n$  cuerdas,  $F_0 = \text{Id}_b$  y  $F_1(b) = b'$ . Tanto  $F$  como la familia de trenzas geométricas  $\{F_s(b)\}_{s \in I}$  se conocen como una isotopia de  $b$  a  $b'$ .

Note que esta noción es muy parecida a una homotopia, así naturalmente podemos verificar la siguiente propiedad.

**Proposición 2.5.** La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

**Demostración.** [luego](#)

□□

Dadas las similitudes con la noción de homotopia, podemos pensar en una forma de definir un “producto” trenzas geométricas con  $n$  cuerdas.

**Definición 2.6.** Dadas 2 trenzas geométricas con  $n$  cuerdas  $b_1, b_2$ , definimos su producto como el conjunto de puntos  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$  tales que si  $t \in [0, 1/2]$  entonces  $(x, y, 2t) \in b_1$ , y en caso donde  $t \in [1/2, 1]$  tenemos que  $(x, y, 2t - 1) \in b_2$ .

Note que el producto de dos trenzas geométricas de ese estilo claramente será otra trenza, ya que lo único que estamos haciendo es unir el final de una con el inicio de la otra. La siguiente proposición nos permitirá definirla como un producto sobre las clases de trenzas geométricas con  $n$  cuerdas

**Proposición 2.7.** Dadas  $b_1, b_2, b'_1, b'_2$ , donde  $b_i$  es isotopica a  $b'_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $b_1 b_2$  es isotopica a  $b'_1 b'_2$

**Demostración.** [luego](#)

□□

Dado esto podemos observar que esta operación es asociativa y además tiene un elemento neutro. Este elemento neutro será denotado como  $1_n$  y es presentador por la trenza geométrica dibujada de el ejemplo 2.2. en su expresión de conjunto sería

$$1_n = \{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times I.$$

De esto concluimos que es un monoide, la prueba de que efectivamente resulta un grupo vendrá más adelante.

## 2.2. Diagramas de Trenzas y movimientos de Reidemeister

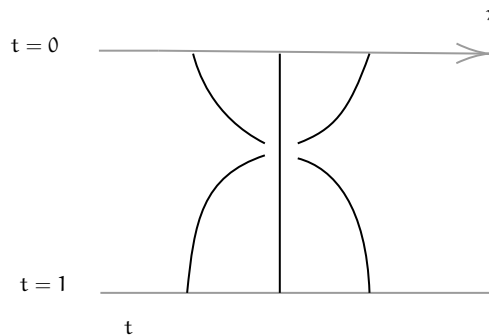
Como mencionamos en el Ejemplo 2.2, si bien uno debe ser cuidadoso con las representaciones, en términos prácticos esta proyección donde las cuerdas en el diagrama pareciera que están solo en el plano  $y = 0$  y donde los tramos que pasan por “debajo” pareciera que se cortan son útiles, siempre y cuando de manera local solo hayan cortes transversales dos a dos. Esta idea nos lleva a querer definir estas representaciones.

**Definición 2.8.** Un **diagrama de trenzas** de  $n$  cuerdas es un conjunto  $D \subset \mathbb{R} \times I$ , vista como la union de  $n$  intervalos topologicos llamados las cuerdas de  $D$  donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyeccion  $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$  envia cada cuerda homeomorficamente a  $I$ .
- Cada punto  $\{1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$  es el extremo de una unica cuerda.
- Todo punto de  $\mathbb{R} \times I$  pertenece a lo maximo a 2 cuerdas. En cada punto de interseccion las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.

En particular si en los ejemplos 2.2 y 2.3 quitamos el eje  $y$  serian diagramas de trenzas, pero incluimos la tercera condicion para evitar casos como el siguiente

**Ejemplo 2.9.** Observe que en la figura es imposible distinguir que trenza pasa por debajo de la otra por lo que si bien podemos ver que la permutacion subyacente seria del tipo  $(3, 2, 1)$  no sabemos como se comportan las trenzas por el dibujo.



La condicion en la que hemos realizado el particular enfasis, en terminos un poco mas formales significa que via homeomorfismo existe una vecindad de estos puntos de cruce, las trenzas se ven como el conjunto  $\{(x, y) : xy = 0\}$  que en escencia son los ejes coordenados de  $\mathbb{R}^2$ .

Esta condición implica que el numero de cruces en  $D$  es finito, pues en caso contrario si fueran infinito como de manera homeomorfica las trenzas son una unión de  $n$  intervalos cerrados, por lo que es un conjunto compacto, así como es un conjunto infinito de puntos, este conjunto tiene un punto de acumulación que esta en  $D$ , luego para este punto una vecindad no es homeomorfica a un intervalo ni a un cruce transversal, ya que hay infinitos puntos de intersección en cada vecindad de este punto, así tienen que ser finitos.

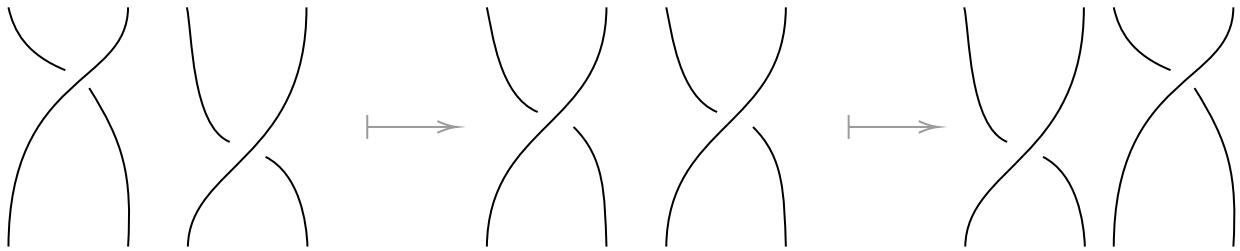
El proposito de introducir los diagramas de trenzas es que podemos ver como estos son representantes de la clase de isotopia de las trenzas geometricas de la manera mas natural posible. La idea detrás de esto es ver a el diagrama de trenzas de la manera natural dentro de  $\mathbb{R}^2 \times I$ , como  $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ , asi en cada vecindad de intersección cambiamos la coordenada de la trenza que pasa por debajo mientras las otras dos las dejamos quietas, es decir nuestra cuerda ahora se encontrara ubicada en  $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times I$ . Este acto que es continuo y transforma el diagrama  $D$  en una trenza geométrica, la cual tiene su clase de isotopia bien definida presentada por  $D$ , esto suele denotarse por  $\beta(D)$ .

Con esto en mente es relativamente sencillo imaginarse la forma en la que uno puede transformar un elemento de la clase de isotopía en un diagrama, dada  $\beta$  una trenza geométrica, en la clase de isotopía podemos encontrar una trenza geométrica  $b$  donde solo se den los cruces de manera transversal, luego si recordamos cuales son las cuerdas que tienen segunda coordenada mas grande en el corte al momento de hacer la proyección  $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R} \times 0 \times I$  estas serán en las que tomaremos sub-arcos de  $b$  para que se vea “cortada”, de esta manera podemos obtener el diagrama  $D$  que es claramente igual a  $\beta(D)$ . Con esta idea de que podemos pasar libre mente de la trenza geométrica a un diagrama de trenzas pues debemos de definir que es la isotopía en estos diagramas.

**Definición 2.10.** Dos diagramas de trenzas  $D$  y  $D'$  se dicen isotopicos si existe una funcion continua  $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$  tal que para cada  $s \in I$ ,  $D_s = F(D \times \{s\}) \subset \mathbb{R} \times I$  es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, ademas  $D_0 = D$  y  $D_1 = D'$ .

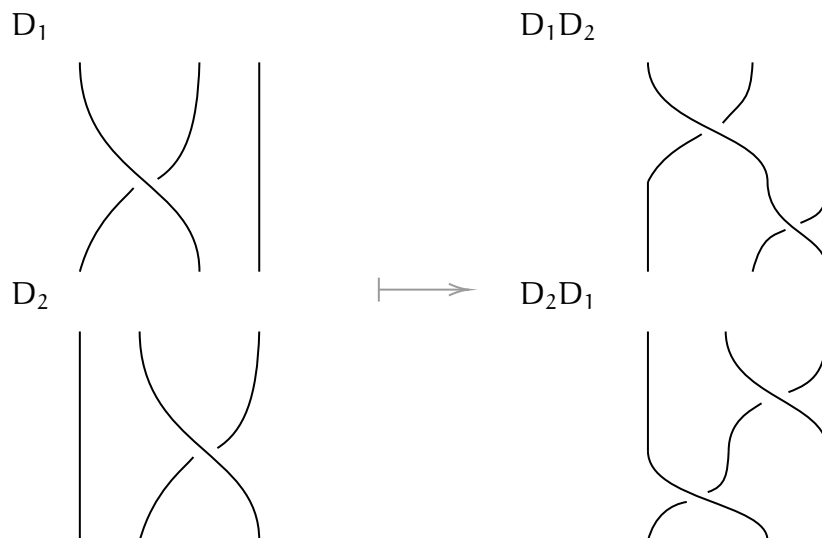
Se sobreentiende de la definición de que la función  $F$  en cada  $s$  envía los cruces y la información de quien va por debajo y arriba a  $D_s$ .

**Ejemplo 2.11.** Observe que podemos ver todo lo que se menciona antes, la información se preserva tanto de los cortes como de que cuerda va por debajo.



Análogamente el producto de diagramas  $D_1$  y  $D_2$  lo podemos ver como pegar un diagrama encima de otro para posteriormente aplastarlo hasta que este contenido en  $\mathbb{R} \times I$ , ese producto sera llamado  $D_1 D_2$  y este diagrama representara el producto de las trenzas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  correspondientes

**Ejemplo 2.12.** El producto de dos diagramas para obtener  $D_1 D_2$  y  $D_2 D_1$

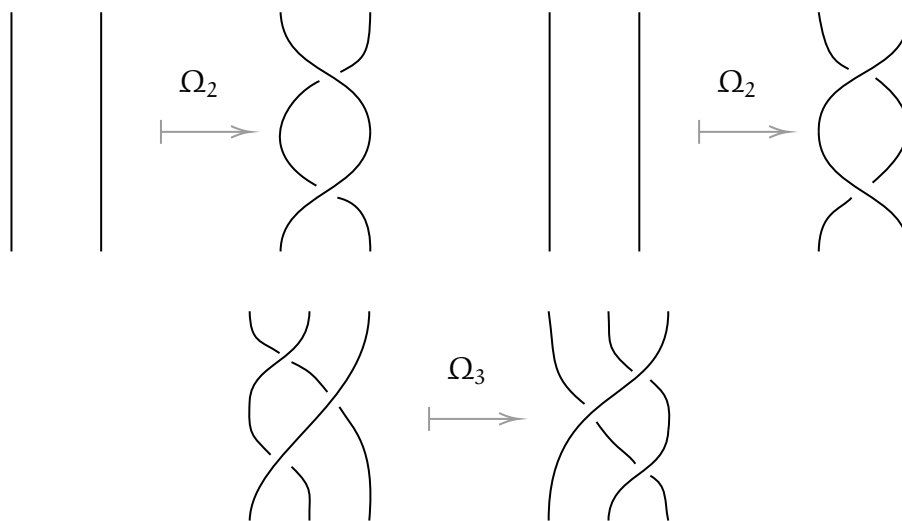


Note que esto ya nos muestra la no conmutatividad ya que la permutacion subyacente de el representante  $D_1 D_2$  es  $(3, 1, 2)$ , mientras que la de  $D_2 D_1$  es  $(2, 3, 1)$ .

Por ultimo, teniendo en cuenta que todos los diagramas los podemos pensar como cuerdas en la realidad es natural pensar en que movimientos preservan la clase de isotopia entre diagramas, para esto tomamos prestados de la teoria de nudos los *movimientos de Reidemeister*  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$

**Definición 2.13.** Definimos  $\Omega_2$  un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a  $\Omega_3$  es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.

Estos movimientos solo afectan el diagrama en un disco dentro de  $\mathbb{R} \times I$  y podemos verlos a continuación



Decimos que el movimiento inverso es invertir las flechas en la figura, note que esto nos permite jugar con las cuerdas sin cambiar la estructura del diagrama, por lo que podemos definir una noción de equivalencia

**Definición 2.14.** Dados dos diagramas  $D$  y  $D'$  decimos que son R-equivalentes si  $D$  se puede transformar por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a  $D'$

A simple instancia no parece tan claro que esta noción de equivalencia pueda ser trasladada hacia todas las trenzas geométricas, pero resulta que si podemos hacerlo

**Teorema 2.15.** Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotopicas si y solo si estos diagramas son R-equivalentes.

La prueba de este hecho se reduce a cuatro pasos, pero la terminología y longitud de la prueba se salen de los propósitos del proyecto, para la prueba de este hecho vea [1].

## 2.3. El Grupo de Trenzas de Artin

Luego de nuestro paso por la idea geométrica y teniendo en cuenta que definimos el grupo de trenzas geométricas, en esta sección abordaremos las trenzas desde un punto de vista netamente algebraico.

**Definición 2.16.** El grupo de trenzas de Artin  $B_n$  es el grupo generado por  $n - 1$  generadores  $\sigma_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$  con  $|i - j| \geq 2$ , y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

Dicho esto veamos los ejemplos mas sencillos de grupo de trenzas.

**Ejemplo 2.17.**  $B_1 = \{1\}$ , es decir el grupo trivial ya que no habrían generadores, en el caso de  $B_2$  tenemos que es un grupo con un generador  $\sigma_1$ , donde nuevamente no hay relaciones, así  $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

Como es comun en grupos queremos ver que como se comportan sus elementos bajo homomorfismos. Así sea  $f : B_n \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos, por ser homomorfismo, es claro que  $f(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}) = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$  debe cumplir las relaciones de trenzas, pero también tenemos la dirección contraria

**Lema 2.18.** Si existen elementos  $\{s_i | i = 1, \dots, n - 1\}$  en un grupo  $G$  tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un unico homomorfismo de grupos  $f : B_n \rightarrow G$ , tal que  $s_i = f(\sigma_i)$ .

**Demostración.** Sea  $F_n$  el grupo libre con  $n$  generadores, llamemos estos  $\sigma_i$ , luego existe un unico homeomorfismo  $f'$  dado por

$$\begin{aligned} f' : F_n &\rightarrow G \\ \sigma_i &\rightarrow s_i \end{aligned}$$

Ahora recordemos que  $B_n$  esta dada por las relaciones dadas en la definicion 3.1. Sea  $N$  el subgrupo normal de  $G$  mas pequeño que contiene los elementos  $\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}$  para  $i, j = 1, \dots, n - 1$  tales que  $|i - j| \geq 2$  y  $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1}$  para  $k = 1, \dots, n - 2$ . Note que en particular esto significa que  $B_n \cong F_n/N$ , ademas por como definimos el homomorfismo  $f'$  tenemos que  $f'(N) = \{1\} \leq G$ . ya que en  $G$  las relaciones de trenzas se cumplen. Asi el subgrupo normal  $N$  esta contenido en el kernel del homomorfismo, asi por el teorema fundamental del homeomorfismo,  $f'$  induce un homeomorfismo  $f : F_n/N \rightarrow G$ , que es justamente lo que queriamos.  $\square$

Para los primeros dos grupos de trenzas, estos eran abelianos, pero esto de hecho no se mantiene siempre para esto mostremos primero el siguiente lema

**Lema 2.19.** Las trasposiciones simples  $s_i = (i \ i + 1) \in S_n$ , generan  $S_n$  y satisfacen las relaciones de trenzas.

**Demostración.** Primero probemos que lo generan. Procedemos por inducción, para  $n = 2$  es claro ya que  $S_2 = \langle (1, 2) \rangle$ , ahora suponga que se tiene para  $S_n$ , veamos que lo tenemos para  $S_{n+1}$ , dada  $\sigma \in S_{n+1}$ , si el elemento  $n + 1$  queda fijo bajo la permutación, entonces lo podemos ver como un elemento de  $S_n$  y por la hipótesis de inducción lo generan las trasposiciones simples. Ahora suponga que  $\sigma(n + 1) = m$  para algún  $m < n + 1$ , observe que si definimos

$$\tau := (n \ n + 1)(n - 1 \ n) \dots (m + 1 \ m + 2)(m \ m + 1).$$

Note que  $\tau(m) = n + 1$ , así  $\tau\sigma(n + 1) = n + 1$ , así  $\tau\sigma$  fija  $n + 1$  y por la hipótesis de inducción es generada por trasposiciones simples, como  $\tau$  es un producto de trasposiciones simples, multiplicando por el inverso concluimos que  $\sigma$  también está generada por estas.

Ver que cumplen las relaciones de trenzas es simple, ya que por el producto en  $S_n$  tenemos que si  $|i - j| \geq 2$  esto implica  $i \neq j$  y además que  $j > i + 1$  o  $i > j + 1$ , así

$$s_i s_j = (i \ i + 1)(j \ j + 1) = (j \ j + 1)(i \ i + 1) = s_j s_i,$$

ya que al ser ciclos disjuntos estos conmutan.

De manera similar para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

$$s_i s_{i+1} s_i = (i \ i + 1)(i + 1 \ i + 2)(i \ i + 1) = (i \ i + 2) = (i + 1 \ i + 2)(i \ i + 1)(i + 1 \ i + 2) = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

Mostrando así que se verifican las relaciones de trenzas.  $\square$

**Teorema 2.20.** El grupo  $B_n$  para  $n \geq 3$  no es abeliano

**Demostración.** Por los Lemas 3.3 y 3.4 existe un único homomorfismo de grupos  $f : B_n \rightarrow S_n$ , donde  $f(\sigma_i) = s_i$ , luego como las trasposiciones simples generan  $S_n$  este homomorfismo es sobreyectivo. Como  $S_n$  para  $n \geq 3$  es no abeliano se sigue que  $B_n$  no lo es.  $\square$

Por lo visto antes existe un homomorfismo único de grupos  $\pi : B_n \rightarrow S_n$ , de manera similar es claro que la inclusión  $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$  es un homomorfismo, esto en ocasiones resulta útil ya que tendremos una cadena de subgrupos  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$  y un diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\quad} & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & S_{n+1} \end{array}$$

## 2.4. Grupo de Trenzas Puro

Dado el grupo de trenzas  $B_n$  definimos el grupo de trenzas puras.

**Definición 2.21.** Dada la proyección natural vista previamente  $\pi : B_n \rightarrow S_n$ , definimos el grupo de trenzas puras como

$$P_n := \ker \pi.$$



Los elementos de  $P_n$  son llamados *trenzas puras de n cuerdas*. Cuando veamos la equivalencia entre las trenzas geometricas y el grupo de trenzas de artin, nos daremos cuenta de la importancia de este grupo, ademas que este sera especialmente util para probar algunos hechos algebraicos.

## 2.5. Espacios de Configuración

Sea  $M$  un espacio topologico y denotemos el espacio

$$M^n = M \times M \times \cdots \times M,$$

para  $n \geq 1$ , con la topologia producto.

**Definición 2.22.** El subespacio de  $M^n$  definido como

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(u_1, \dots, u_n) \in M^n | u_i \neq u_j \text{ para todo } i \neq j\},$$

se conoce como el *espacio de configuracion* de  $n$ -tuplas ordenadas de puntos en  $M$ .

Con este espacio tenemos que

**Definición 2.23.** El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$  se conoce como el *grupo de trenzas puras* de  $M$  en  $n$  cuerdas.

Posteriormente veremos cuando este es equivalente y algunas descripciones interesantes.

## 2.6. Automorfismos de Trenzas sobre Grupos Libres

Otro acercamiento a la nocion de Trenzas desde el algebra es a traves de estudiar ciertos automorfismos de el grupo libre de  $n$  elementos  $F_n \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

**Definición 2.24.** Decimos que un automorfismo  $\phi : F_n \rightarrow F_n$  es un *automorfismo de trenzas* si satisface las siguientes condiciones

- i) Existe  $\mu \in S_n$  tal que  $\phi(a_k)$  es conjugado en  $F_n$  a  $a_{\mu(k)}$  para todo  $k \in 1, 2, \dots, n$
- ii)  $\phi(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$ .

Recordemos que todo automorfismo esta completamente determinado por la accion sobre sus geneeradores, luego bastara tener esto en cuenta para definir algun automorfismo de trenzas, un ejemplo de estos son los siguientes

**Ejemplo 2.25.** Definamos los siguientes automorfismos

$$\tilde{\sigma}_i(a_k) = \begin{cases} a_{k+1} & \text{si } k = i, \\ a_k^{-1} a_{k-1} a_k & \text{si } k = i + 1, \\ a_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_i^{-1}(a_k) = \begin{cases} a_k a_{k+1} a_k^{-1} & \text{si } k = i, \\ a_{k-1} & \text{si } k = i + 1, \\ a_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que la primera condicion se cumple si tomamos la permutacion  $\mu = (i \ i + 1)$ , ya que esos son los generadores cambiados por  $\tilde{\sigma}_i$ , de manera similar

$$\tilde{\sigma}_i(a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n) = a_1 \dots (a_{i+1})(a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1}) \dots a_n = a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n.$$

Es claro que la eleccion de denotar una como el inverso de la otra es intencional. Definimos  $\tilde{B}_n$  como el conjunto de todos los automorfismos de trenzas sobre  $F_n$ , asi tenemos el siguiente resultado esperable

**Proposición 2.26.**  $\tilde{B}_n$  es un grupo con la composicion.

**Demostración.** [luego](#)

□□

## 2.7. Trenzas y Homeomorfismos

Sea  $M$  una variedad topologica orientada y  $Q \subset \text{Int}(M)$  finito.

**Definición 2.27.** Un *auto-homeomorfismo* de la pareja  $(M, Q)$  es un homeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  tal que

- i) Para todo  $x \in \partial M$ ,  $f(x) = x$ .
- ii)  $f(Q) = Q$ .
- iii) Preserva la orientacion.

[Luego completo esta parte](#)

## 3. Equivalencias entre las definiciones y algunos hechos

Durante este capitulo probaremos la equivalencias respectivas entre las definiciones presentadas en el anterior capitulo y algunos hechos derivados de estas equivalencias.

### 3.1. El grupo de trenzas geométrico

Denotemos  $B_n$  como el conjunto de trenzas en  $n$  cuerdas con la multiplicacion dada en la Definicion 2.6, veamos que efectivamente es un grupo

**Proposición 3.1.**  $\mathcal{B}_n$  es un grupo.

**Demostración.** Previamente ya habíamos visto que con esta operación el conjunto es un monoide, nos bastaría encontrar un inverso para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$ . Para  $i = 1, \dots, n-1$ , definimos  $\sigma_i^+$  y  $\sigma_i^-$  dadas en la siguiente figura

luego la dibujo

Veamos que el conjunto de todas estas genera a cualquier trenza  $\beta \in \mathcal{B}_n$ . consideremos el diagrama de trenzas  $D \subset \mathbb{R} \times I$  que la representa. Como hay una cantidad finita  $k$  de intersecciones en el diagrama podemos deformarlo de tal manera que cada intersección se de en una segunda coordenada diferente, es decir podemos conseguir una partición del intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1,$$

tal que cada banda  $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}]$  posee exactamente una intersección en el interior de cada banda. Así cada una de estas bandas se puede ver como una reparametrización de la trenza  $\sigma_i^+$  o  $\sigma_i^-$ , así con el producto obtenemos que

$$\beta = \beta(D) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

donde cada  $\varepsilon_j = \pm$  y  $i_j \in 1, 2, \dots, n-1$ . Así como cada  $\sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \sigma_i^+ = 1$ , debido a que este diagrama es equivalente al trivial aplicando  $\Omega_2$ . Así el elemento inverso es

$$\beta^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\varepsilon_k} \dots \sigma_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

Mostrando así que es un grupo. □□

Teniendo en cuenta que vimos que los elementos  $\sigma_i^+$  generaban el  $\mathcal{B}_n$ , la pregunta natural que surge es si cumplen las relaciones de trenzas propuestas por Artin.

**Proposición 3.2.** Los elementos  $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathcal{B}_n$  satisfacen las relaciones de trenzas.

**Demostración.** Note que dados  $|i - j| \geq 2$ , esto quiere decir que  $i \geq j + 2$  o  $j \geq i + 2$ , en ambos casos al hacer el producto  $\sigma_i^+ \sigma_j^+$  y  $\sigma_j^+ \sigma_i^+$  las trenzas involucradas son diferentes, por lo que por medio de una isotopía se puede llegar de un diagrama a otro, así  $\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+$ . Note que para  $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$ , se tiene la igualdad debido a que ambos diagramas difieren solo por hacer el movimiento  $\Omega_3$ .

luego la dibujo

□□

Con todo esto estamos preparados para probar nuestro primer resultado de equivalencia

**Teorema 3.3.** Para  $\varepsilon = \pm$ , existe un unico homomorfismo  $\varphi_\varepsilon : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_\setminus$  tal que  $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . Además el homomorfismo  $\varphi_\varepsilon$  resulta ser un isomorfismo.

**Demostración.** □□

## Referencias

- [1] C. Kassel and V. Turaev, *Braid Groups*. With the graphical assistance of O. Dodane. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.

- [2] J. S. Birman and T. E. Brendle, Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, September 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0409205>.
- [3] Gonzalez-Meneses, J. (2010). *Basic results on braid groups*. arXiv:1010.0321 [math.GT]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1010.0321>.
- [4] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [5] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [6] E. Artin, *Braids and permutations*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 643–649.