

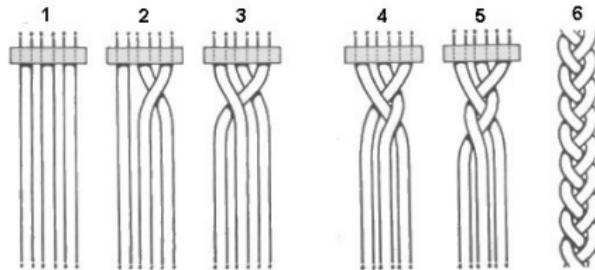
# Grupos de Trenzas y Espacios de Configuración

Un primer acercamiento a las nociones algebraicas, geométricas y topológicas

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

# Introducción

Cuando hablamos de Trenzas en un ámbito general es completamente natural que la primera imagen que se pase por la cabeza es la de una trenza de cabello. La más clásica se hace agarrando tres mechones, donde los mechones externos pasan hacia el centro intercalándose.



La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin, quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclíadiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas.

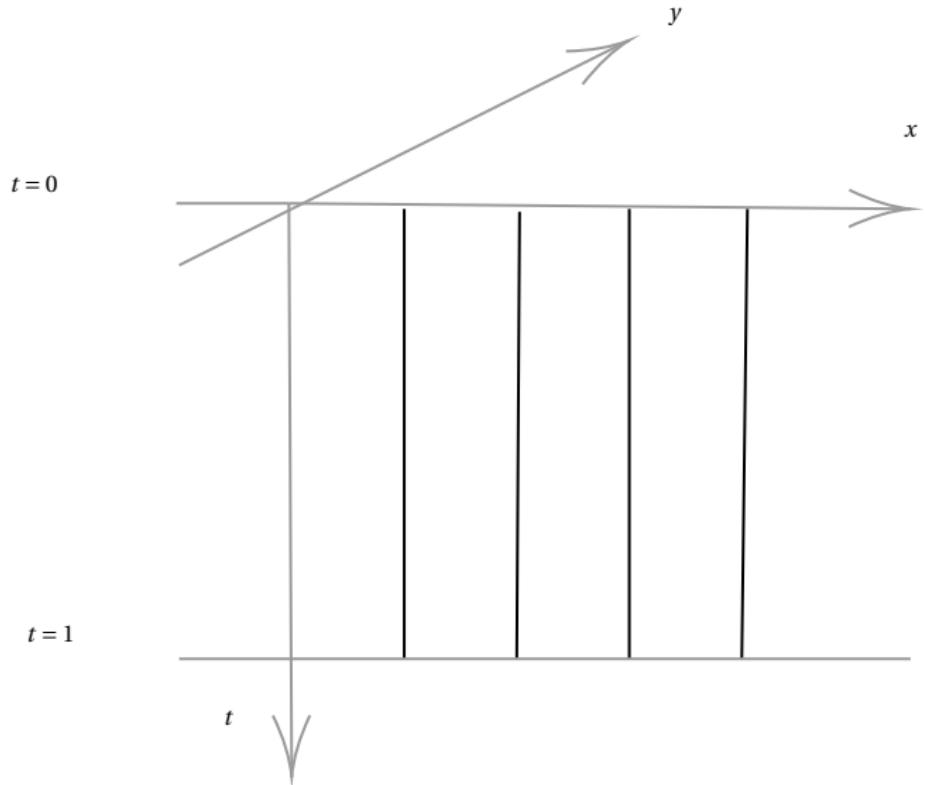
# Grupos de Trenzas geometricos $\mathcal{B}_n$

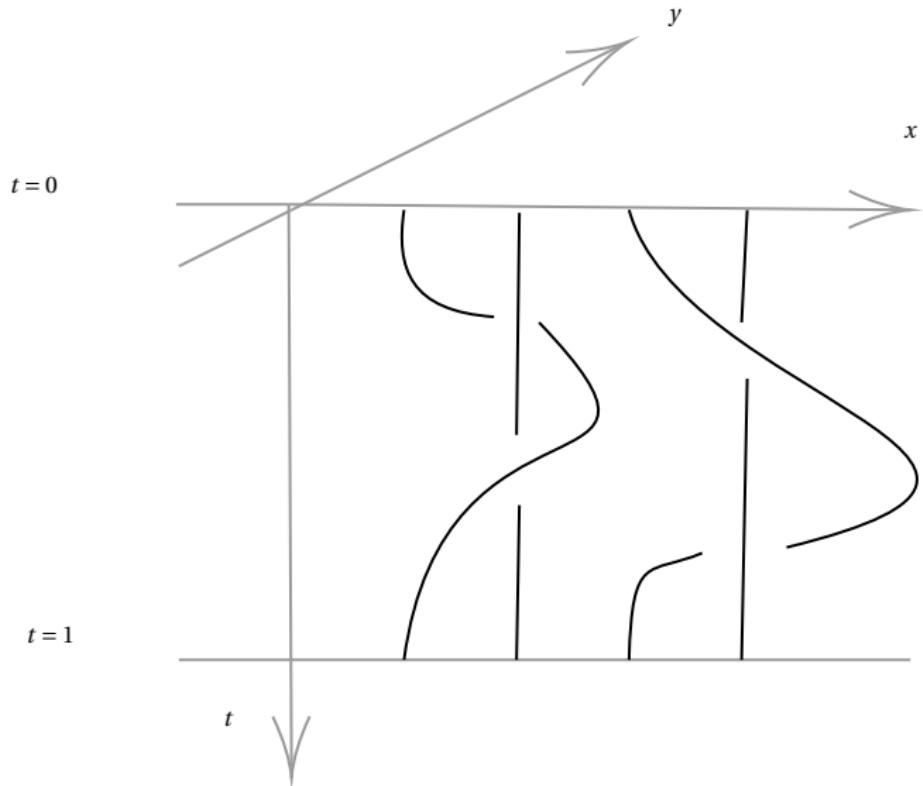
## Definición

Una **trenza geométrica** con  $n \geq 1$  cuerdas es un conjunto  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  formado por  $n$  intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de  $b$ , tales que la proyección  $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ , envia cada cuerda de manera homeomorfa a  $I$ , y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) | i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 0, 1) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$





# Equivalecia de Trenzas Geometricas

## Definición

Dos trenzas  $b$  y  $b'$  son isotopicas si existe una función continua  $F: b \times I \rightarrow R^2 \times I$ , tal que para cada  $s \in I$ , la función  $F_s := F(-, s)$  es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de  $n$  cuerdas,  $F_0 = Id_b$  y  $F_1(b) = b'$ .

Tanto  $F$  como la familia de trenzas geometricas  $\{F_s(b)\}_{s \in I}$  se conocen como una isotopia de  $b$  a  $b'$ .

## Proposición

La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

# Estructura de Monoide

## Definicion

Dadas 2 trenzas geométricas con  $n$  cuerdas  $b_1, b_2$ , definimos su producto como el conjunto de puntos  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$  tales que si  $t \in [0, 1/2]$  entonces  $(x, y, 2t) \in b_1$ , y en caso donde  $t \in [1/2, 1]$  tenemos que  $(x, y, 2t - 1) \in b_2$ .

## Proposición

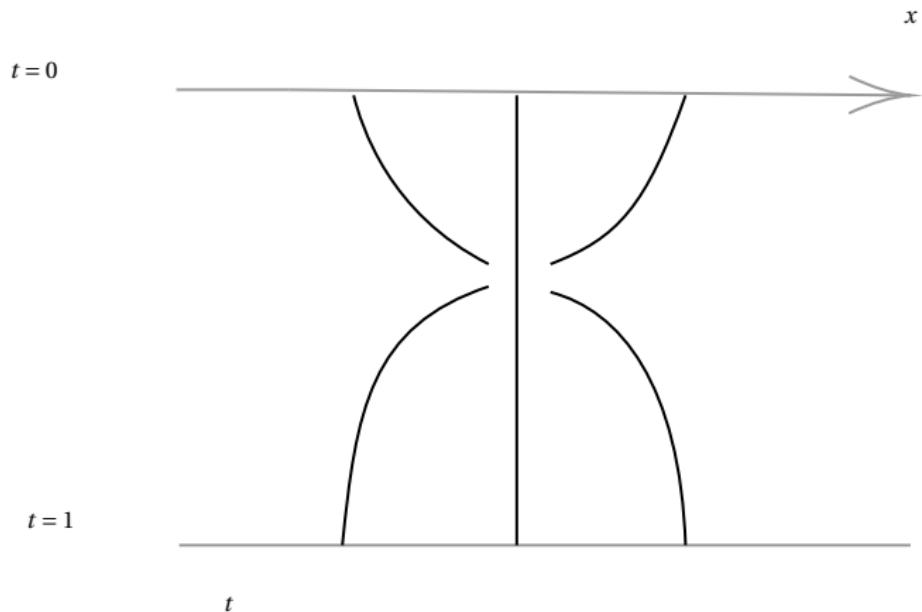
Dadas  $b_1, b_2, b'_1, b'_2$ , donde  $b_i$  es isotopica a  $b'_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $b_1 b_2$  es isotopica a  $b'_1 b'_2$ .

# Diagramas de Trenzas

## Definición

Un **diagrama de trenzas** de  $n$  cuerdas es un conjunto  $D \subset \mathbb{R} \times I$ , vista como la unión de  $n$  intervalos topológicos llamados las cuerdas de  $D$  donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyección  $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$  envía cada cuerda homeomorficamente a  $I$ .
- Cada punto  $\{1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$  es el extremo de una única cuerda.
- Todo punto de  $\mathbb{R} \times I$  pertenece a lo más a 2 cuerdas. En cada punto de intersección las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.

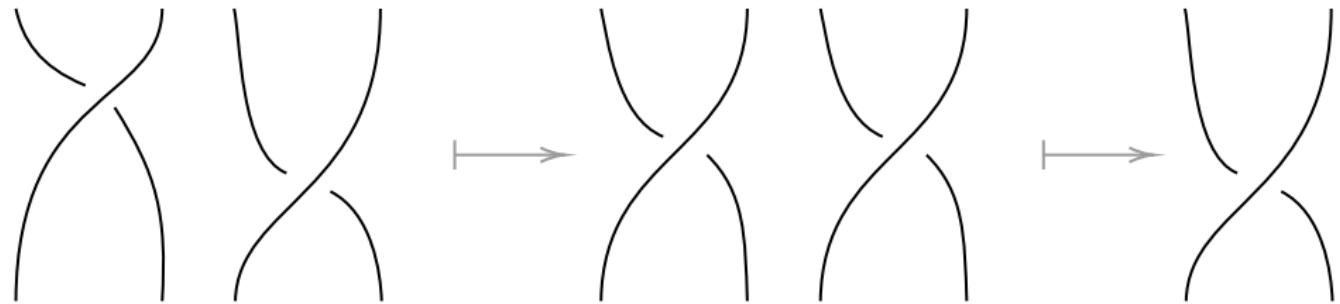


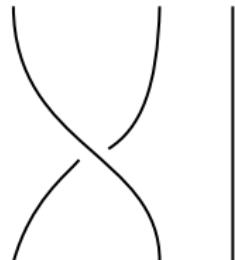
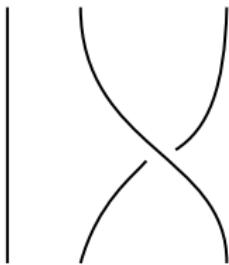
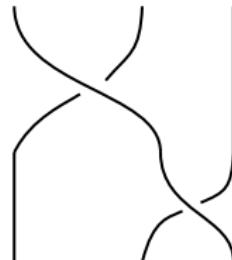
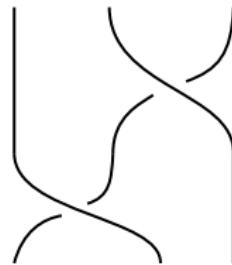
## Definicion

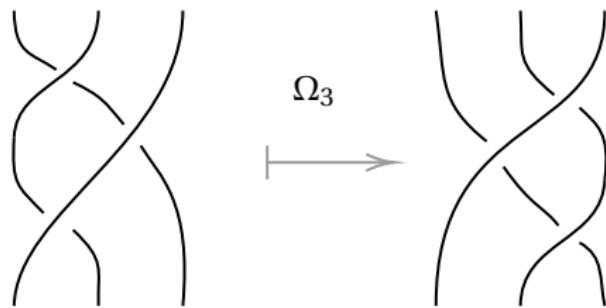
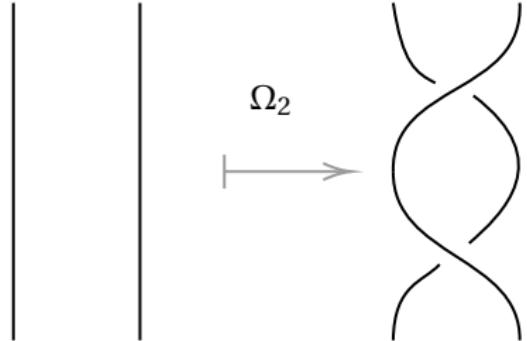
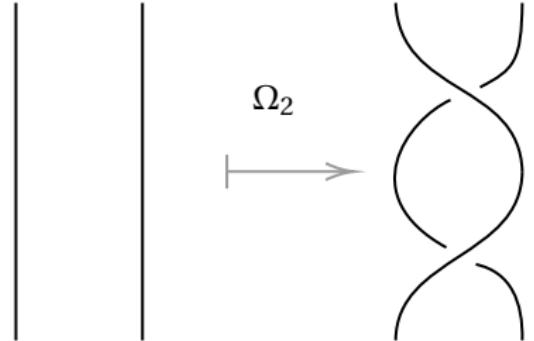
Dos diagramas de trenzas  $D$  y  $D'$  se dicen isotopicos si existe una funcion continua  $F : D \times I \rightarrow R \times I$  tal que para cada  $s \in I$ ,  $D_s = F(D \times \{s\}) \subset \mathbb{R} \times I$  es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, ademas  $D_0 = D$  y  $D_1 = D'$ .

## Definición

Definimos  $\Omega_2$  un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a  $\Omega_3$  es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.



$D_1$  $D_2$  $D_1 D_2$  $D_2 D_1$ 



# Diagramas y Trenzas Geometricas

## Definicion

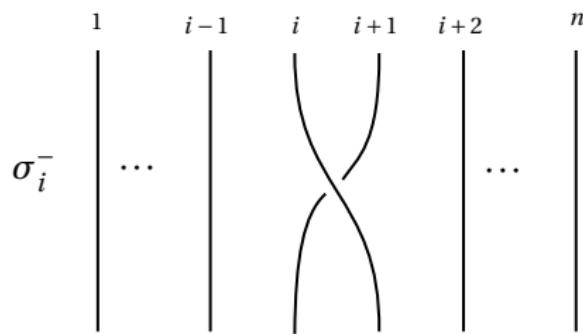
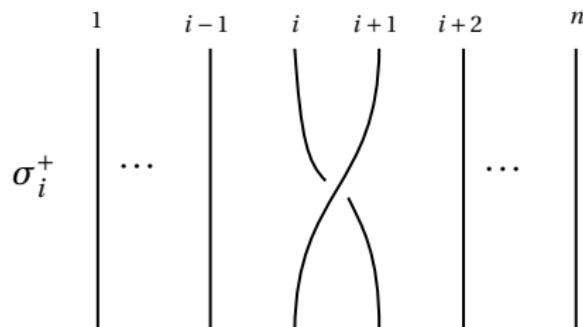
Dados dos diagramas  $D$  y  $D'$  decimos que son  $R$ -equivalentes si  $D$  se puede transformar por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a  $D'$

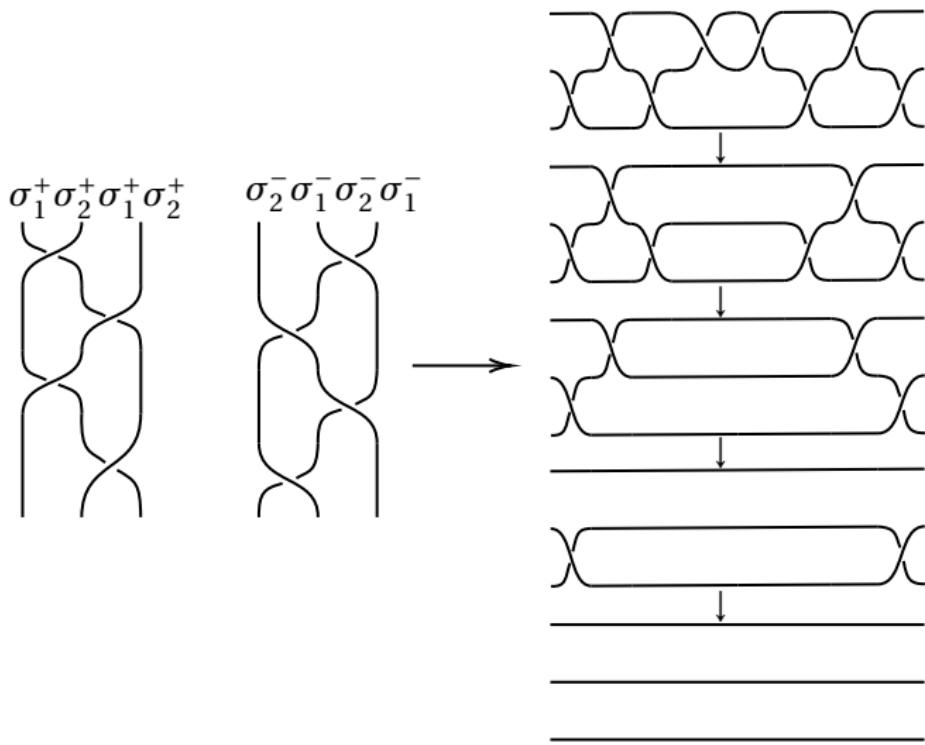
## Teorema

Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotópicas si y solo si estos diagramas son  $R$ -equivalentes.

## Teorema

$\mathcal{B}_n$  es un grupo.





# Grupo de Trenzas de Artin $B_n$

## Definición

El grupo de trenzas de Artin  $B_n$  es el grupo generado por  $n - 1$  generadores  $\sigma_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$  con  $|i - j| \geq 2$ , y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

## Lema

Si existen elementos  $\{s_i \mid i = 1, \dots, n - 1\}$  en un grupo  $G$  tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un único homomorfismo de grupos  $f : B_n \rightarrow G$ , tal que  $s_i = f(\sigma_i)$ .

## Lema

Las trasposiciones simples  $s_i = (i \ i + 1) \in S_n$ , generan  $S_n$  y satisfacen las relaciones de trenzas.

## Teorema

El grupo  $B_n$  para  $n \geq 3$  no es abeliano

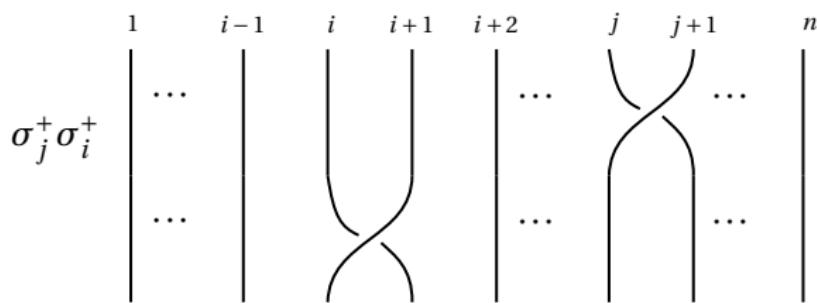
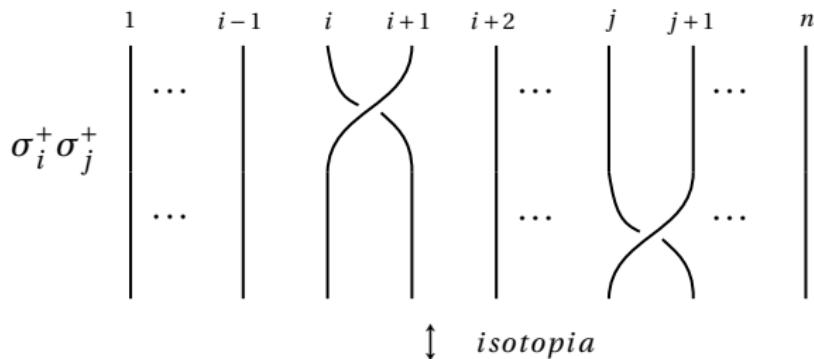
# Equivalecia entre $\mathcal{B}_n$ y $B_n$

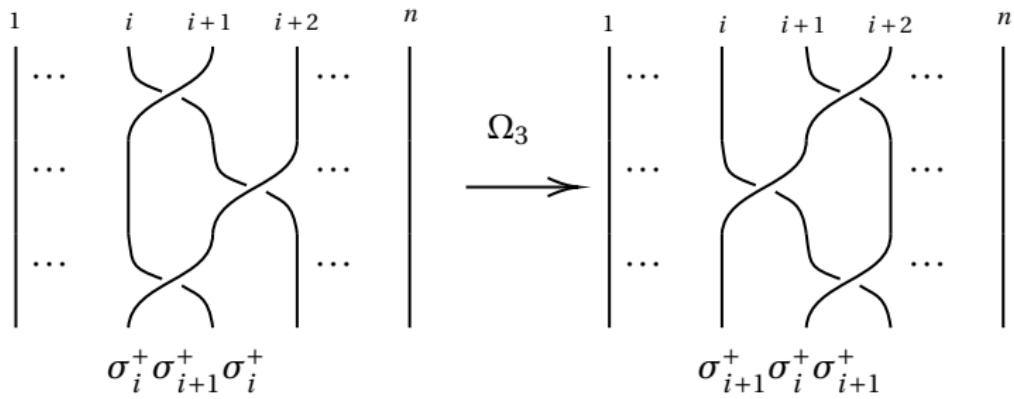
## Proposicion

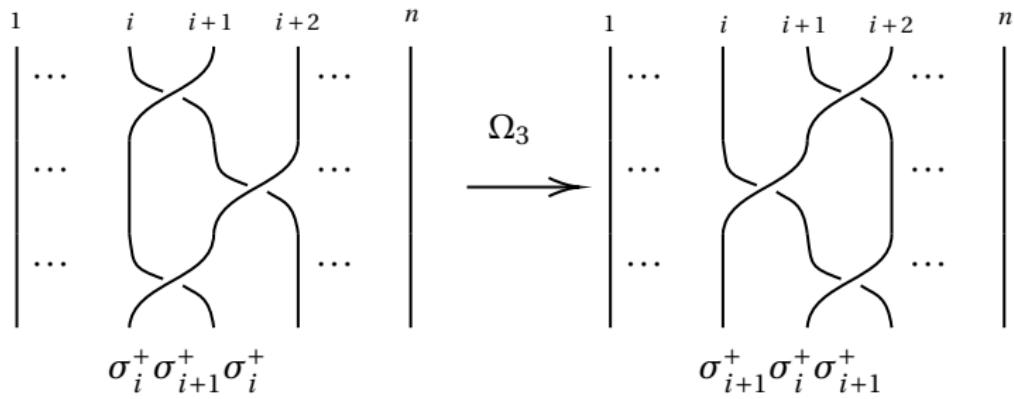
Los elementos  $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathcal{B}_n$  satisfacen las relaciones de trenzas.

## Teorema

Para  $\varepsilon = \pm$ , existe un unico homomorfismo  $\varphi_\varepsilon : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$  tal que  
 $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ . Ademas el homomorfismo  $\varphi_\varepsilon$  resulta ser un isomorfismo.







# Trenzas Puras

## Definición

Dada la proyección natural vista previamente  $\pi : B_n \rightarrow S_n$ , definimos el *grupo de trenzas puras* como

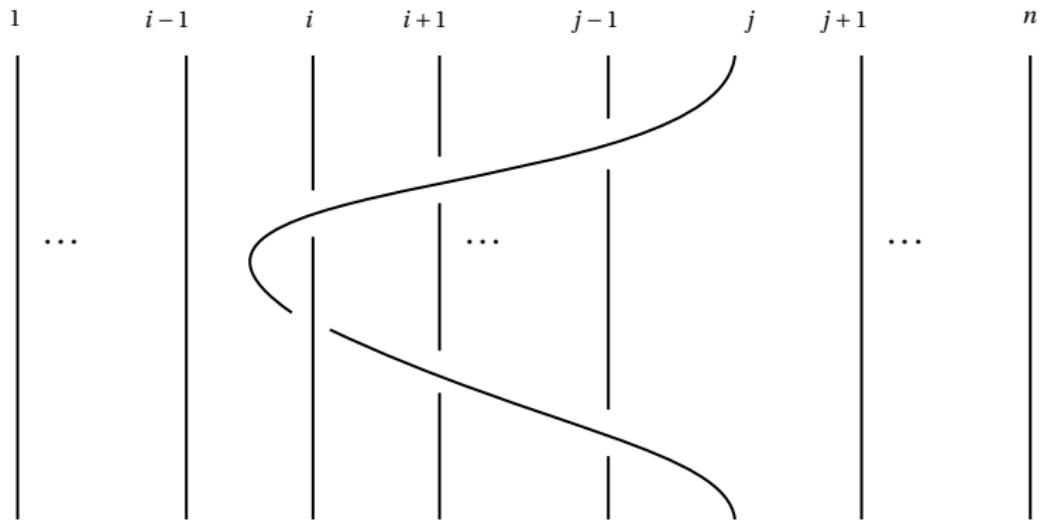
$$P_n := \ker \pi.$$

## Definición

Definimos  $A_{i,j} \in P_n$  como la trenza dada por

$$A_{i,j} := \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Para  $1 \leq i < j \leq n$



# Espacios de Configuración

## Definición

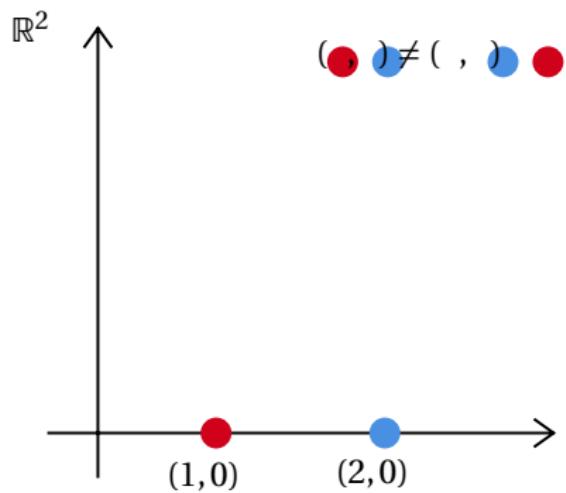
El subespacio de  $M^n$  definido como

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(u_1, \dots, u_n) \in M^n \mid u_i \neq u_j \text{ para todo } i \neq j\},$$

se conoce como el *espacio de configuración* de  $n$ -tuplas ordenadas de puntos en  $M$ .

## Definición

El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$  se conoce como el *grupo de trenzas puras* de  $M$  en  $n$  cuerdas.



# Equivalecias

## Teorema

Para  $M = \mathbb{R}^2$  tenemos que  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M)) \cong P_n$ .

## Definición

Dado  $\mathcal{F}_n(M)$ , definimos

$$C_n(M) := \mathcal{F}_n(M) / S_n$$

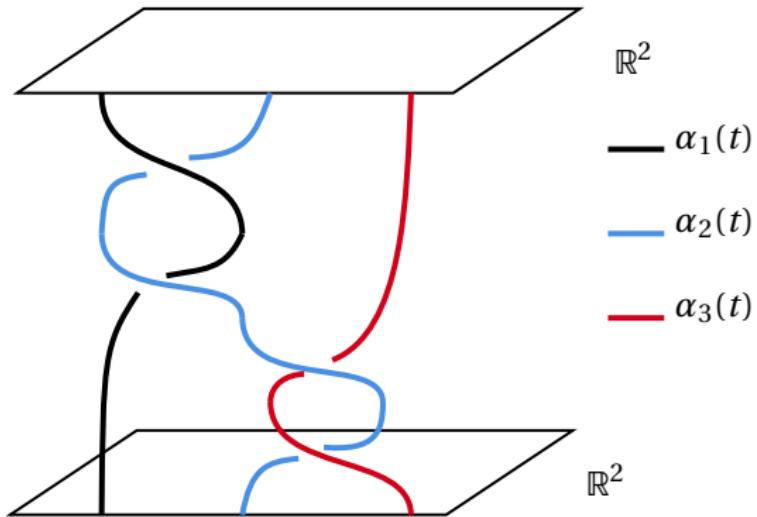
Donde el cociente es dado por la acción usual de  $S_n$  permutando el orden de las entradas. Este espacio se conoce como el espacio de configuración de conjuntos de puntos no ordenados.

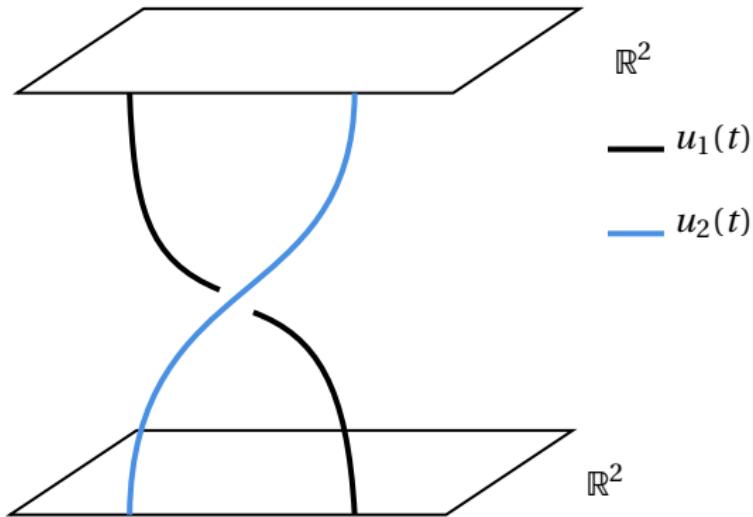
## Teorema

Para  $M = \mathbb{R}^2$  tenemos que

$$B_n \cong \pi_1(C_n(M), q)$$

Donde  $q$  hace referencia al conjunto de puntos no ordenado  $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$ .





# Automorfismos de $F_n$

## Definición

Decimos que un automorfismo  $\phi : F_n \rightarrow F_n$  es un *automorfismo de trenzas* si satisface las siguientes condiciones

- i) Existe  $\mu \in S_n$  tal que  $\phi(a_k)$  es conjugado en  $F_n$  a  $a_{\mu(k)}$  para todo  $k \in 1, 2, \dots, n$
- ii)  $\phi(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$ .

## Proposición

$\tilde{B}_n$  es un grupo con la composición.

# Mapping Class Group

## Definición

Un *auto-homeomorfismo* de la pareja  $(M, Q)$  es un homeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  tal que

- i) Para todo  $x \in \partial M$ ,  $f(x) = x$ .
- ii)  $f(Q) = Q$ .
- iii) Preserva la orientación.

## Definición

El *Mapping Class Group*  $\mathcal{M}(M, Q)$  es el conjunto de clases de isotopía de automorfismos con la composición de funciones como operación.

## Definición

Decimos que  $\alpha$  es un *arco generador* en  $(M, Q)$  si

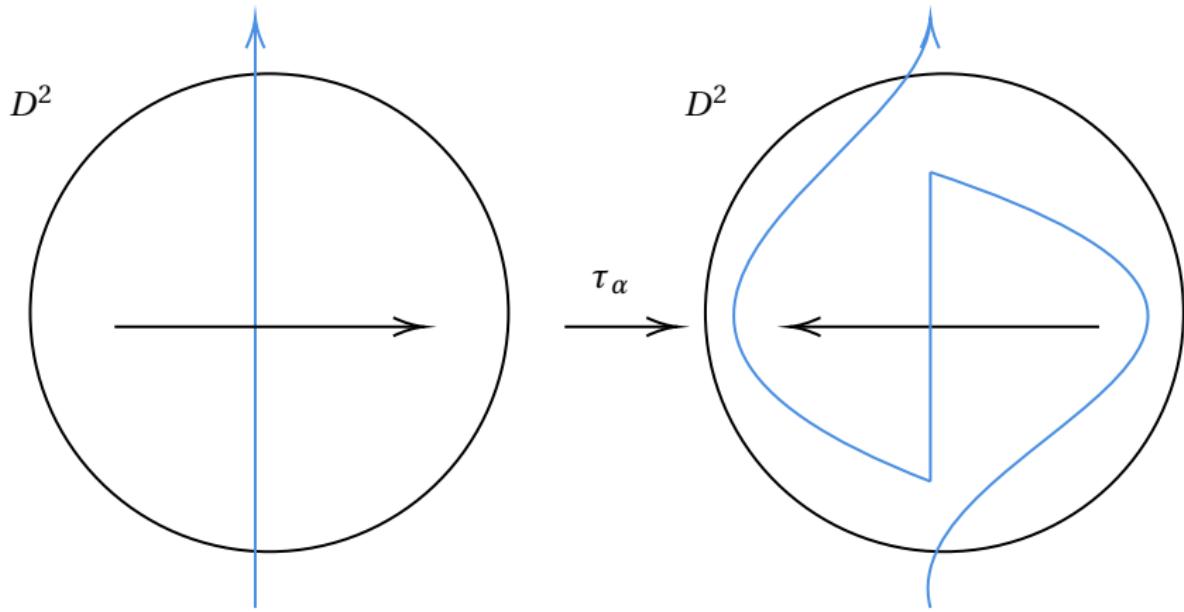
- $\alpha \subset M$  con  $\alpha$  homeomorfico a  $I$ .
- $\alpha \cap (Q \cup \partial M) = \{x_1, x_2\} \subset Q$

## Definición

Dado un arco generador  $\alpha$  definimos el *medio-giro* como

$$\tau_\alpha: (M, Q) \rightarrow (M, Q)$$

Tal que dada una vecindad pequeña  $U$  de  $\alpha$ , que identificamos de manera homeomorfa con  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$  tal que  $\alpha = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  y la orientación de  $M$  sea en contra de las manecillas del reloj, tal que fuera de  $U$ ,  $\tau_\alpha$  es la identidad. Si  $|z| \leq \frac{1}{2}$  es enviado a  $-z$ , y para  $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$  es enviado a  $ze^{-2\pi i|z|}$

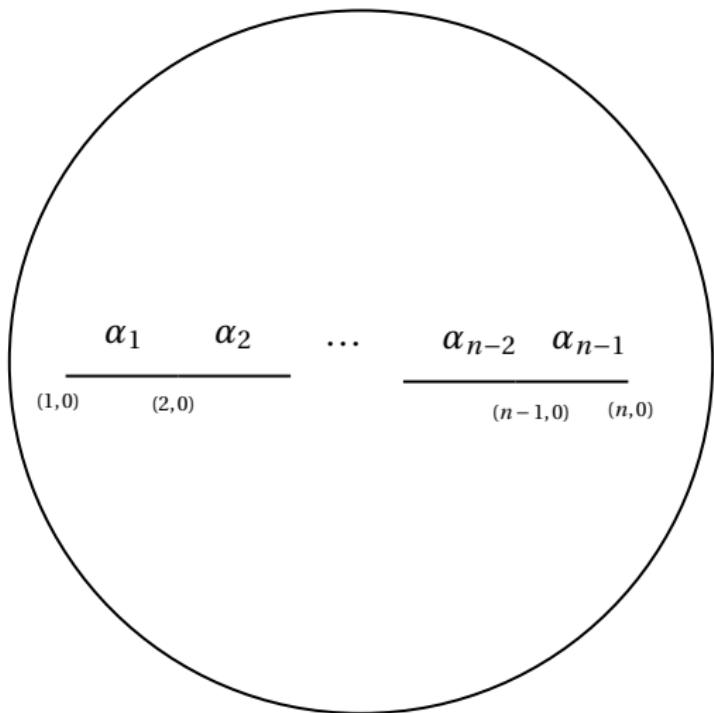


# Equivalencia MCG y Automorfismos

## Teorema

Para  $n \geq 1$ , los homomorfismos  $\eta, \rho$  son isomorfismos que hacen que el siguiente diagrama commute

$$\begin{array}{ccc} B_n & & \\ \downarrow \eta & \searrow & \\ \mathcal{M}(D, Q_n) & \xrightarrow{\rho} & \tilde{B}_n \end{array}$$



# $B_3$ y $PSL(2, \mathbb{Z})$

Primero recordemos por la presentación de Artin que

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$

Recordemos que esta relación resume el movimiento  $\Omega_3$ . Primero veamos alguna presentación mas conveniente. Definamos

$$x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \quad y = \sigma_1\sigma_2$$

Note que  $x = y\sigma_1$ , luego  $\sigma_1 = y^{-1}x$ , mientras que

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1}x\sigma_1^{-1} = (x^{-1}y)x(x^{-1}y) = x^{-1}y^2$$

Luego como ambos generadores los podemos reescribir en términos de  $x$  y  $y$  tenemos la siguiente presentación equivalente

$$B_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

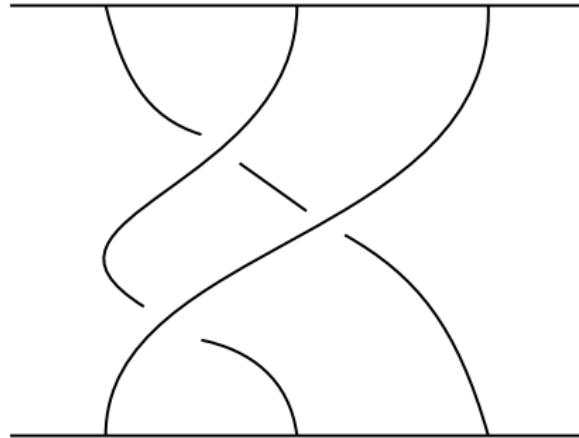
## Proposición

$$Z(B_3) = \langle y^3 \rangle$$

## Teorema

Dados  $B_3$  y  $SL(2, \mathbb{Z})$  existe un único homomorfismo, que desciende en un isomorfismo

$$B_3 / Z(B_3) \cong PSL(2, \mathbb{Z}).$$



$\Delta_3$

# Hechos del Grupo de Trenzas

## Corolario

$P_n$  es generado por  $A_{i,j}$  para  $1 \leq i < j \leq n$

## Teorema

Si  $n \geq 3$   $Z(B_n) = Z(P_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$ , donde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

## Corolario

Para  $m \neq n$ ,  $B_m$  no es isomorfo a  $B_n$ .

## Teorema

$B_n$  es un grupo libre de torsión.

# El espacio $C_n(\mathbb{R}^2)$

Finalizamos con una breve descripción del espacio de configuración por medio de polinomios, que nos da una relación muy interesante hacia la geometría algebraica. Si hacemos la identificación natural de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , consideremos el siguiente polinomio simétrico

$$p_k(u) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} u_{i_1} \cdots u_{i_k}.$$

Donde  $u \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$  y  $k = 1, \dots, n$ , note que por ser simétrico estas funciones  $p_k$  son invariantes bajo la acción de  $S_n$ , por lo que inducen una función  $C_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Resulta que esta función es un homeomorfismo al conjunto de los polinomios monóicos con raíces diferentes de grado  $n$  y coeficientes complejos. Siendo así  $B_n$  el grupo fundamental de un conjunto clásico en la geometría algebraica.

# Referencias

- Kassel, C. y Turaev, V. *Braid Groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, Springer, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.
- Birman, J. S. y Brendle, T. E. Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0409205>.
- González-Meneses, J. Basic results on braid groups. *arXiv:1010.0321* [math.GT]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1010.0321>.
- Artin, E. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 4 (1925), 47–72.
- Artin, E. Theory of braids. *Ann. of Math.* 48 (1947), 101–126.
- Artin, E. Braids and permutations. *Ann. of Math.* 48 (1947), 643–649.