

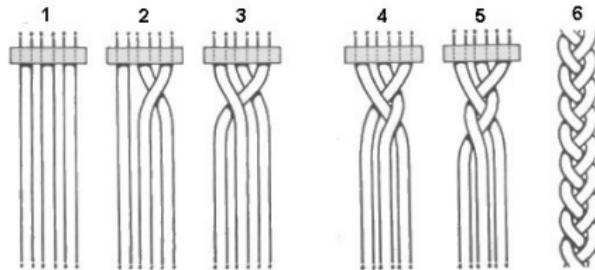
Grupos de Trenzas y Espacios de Configuración

Un primer acercamiento a las nociones algebraicas, geométricas y topológicas

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Introducción

Cuando hablamos de Trenzas en un ámbito general es completamente natural que la primera imagen que se pase por la cabeza es la de una trenza de cabello. La más clásica se hace agarrando tres mechones, donde los mechones externos pasan hacia el centro intercalándose.



La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin, quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclíadiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas.

Grupos de Trenzas geometricos \mathcal{B}_n

Definición

Una **trenza geométrica** con $n \geq 1$ cuerdas es un conjunto $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ formado por n intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de b , tales que la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$, envia cada cuerda de manera homeomorfa a I , y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) | i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 0, 1) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Equivalecia de Trenzas Geometricas

Definición

Dos trenzas b y b' son isotopicas si existe una función continua $F: b \times I \rightarrow R^2 \times I$, tal que para cada $s \in I$, la función $F_s := F(-, s)$ es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de n cuerdas, $F_0 = Id_b$ y $F_1(b) = b'$.

Tanto F como la familia de trenzas geometricas $\{F_s(b)\}_{s \in I}$ se conocen como una isotopia de b a b' .

Proposición

La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

Estructura de Monoide

Definicion

Dadas 2 trenzas geométricas con n cuerdas b_1, b_2 , definimos su producto como el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ tales que si $t \in [0, 1/2]$ entonces $(x, y, 2t) \in b_1$, y en caso donde $t \in [1/2, 1]$ tenemos que $(x, y, 2t - 1) \in b_2$.

Proposición

Dadas b_1, b_2, b'_1, b'_2 , donde b_i es isotopica a b'_i para $i = 1, 2$, entonces $b_1 b_2$ es isotopica a $b'_1 b'_2$.

Diagramas de Trenzas

Definición

Un **diagrama de trenzas** de n cuerdas es un conjunto $D \subset \mathbb{R} \times I$, vista como la unión de n intervalos topológicos llamados las cuerdas de D donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyección $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ envía cada cuerda homeomorficamente a I .
- Cada punto $\{1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$ es el extremo de una única cuerda.
- Todo punto de $\mathbb{R} \times I$ pertenece a lo más a 2 cuerdas. En cada punto de intersección las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.

Definicion

Dos diagramas de trenzas D y D' se dicen isotopicos si existe una funcion continua $F : D \times I \rightarrow R \times I$ tal que para cada $s \in I$, $D_s = F(D \times \{s\}) \subset \mathbb{R} \times I$ es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, ademas $D_0 = D$ y $D_1 = D'$.

Definición

Definimos Ω_2 un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a Ω_3 es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.

Diagramas y Trenzas Geometricas

Definicion

Dados dos diagramas D y D' decimos que son R -equivalentes si D se puede transformar por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a D'

Teorema

Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotópicas si y solo si estos diagramas son R -equivalentes.

Teorema

\mathcal{B}_n es un grupo.

Grupo de Trenzas de Artin B_n

Definición

El grupo de trenzas de Artin B_n es el grupo generado por $n - 1$ generadores σ_i con $i = 1, 2, \dots, n - 1$ y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ con $|i - j| \geq 2$, y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 2$.

Lema

Si existen elementos $\{s_i \mid i = 1, \dots, n - 1\}$ en un grupo G tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un único homomorfismo de grupos $f : B_n \rightarrow G$, tal que $s_i = f(\sigma_i)$.

Lema

Las trasposiciones simples $s_i = (i \ i + 1) \in S_n$, generan S_n y satisfacen las relaciones de trenzas.

Teorema

El grupo B_n para $n \geq 3$ no es abeliano

Equivalecia entre \mathcal{B}_n y B_n

Proposicion

Los elementos $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathcal{B}_n$ satisfacen las relaciones de trenzas.

Teorema

Para $\varepsilon = \pm$, existe un unico homomorfismo $\varphi_\varepsilon : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ tal que
 $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Ademas el homomorfismo φ_ε resulta ser un isomorfismo.

Definición

Dada la proyección natural vista previamente $\pi : B_n \rightarrow S_n$, definimos el *grupo de trenzas puras* como

$$P_n := \ker \pi.$$

B_3 y $PSL(2, \mathbb{Z})$

Primero recordemos por la presentacion de Artin que

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$

Recordemos que esta relación resume el movimiento Ω_3 . Primero veamos alguna presentacion mas conveniente. Definamos

$$x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \quad y = \sigma_1\sigma_2$$

Note que $x = y\sigma_1$, luego $\sigma_1 = y^{-1}x$, mientras que

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1}x\sigma_1^{-1} = (x^{-1}y)x(x^{-1}y) = x^{-1}y^2$$

Luego como ambos generadores los podemos reescribir en términos de x y y tenemos la siguiente presentación equivalente

$$B_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

Proposición

$$Z(B_3) = \langle y^3 \rangle$$

Referencias

- Kassel, C. y Turaev, V. *Braid Groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, Springer, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.
- Birman, J. S. y Brendle, T. E. Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0409205>.
- González-Meneses, J. Basic results on braid groups. *arXiv:1010.0321* [math.GT]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1010.0321>.
- Artin, E. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 4 (1925), 47–72.
- Artin, E. Theory of braids. *Ann. of Math.* 48 (1947), 101–126.
- Artin, E. Braids and permutations. *Ann. of Math.* 48 (1947), 643–649.