
Grupo de Trenzas y Espacios de Configuración

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

eochoa@unal.edu.co

11 de octubre de 2025

Resumen

Este trabajo estudia el concepto del grupo de trenzas desde múltiples perspectivas, geométrica, algebraica, como espacios de configuración y mas que surgen de estas. Posterior a estas mostramos como cada una de estas perspectivas resultan equivalentes y se mencionaran algunos resultados interesantes [aun por decidir de momento cuestiones relacionadas con \$SL_2\(\mathbb{Z}\)\$, grupo libre de torsion, etc.](#)

1. Introducción

La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin [4], quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclíadiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas. No es sorpresa que el estudio de estos objetos tan naturales en la naturaleza resulte de interés debido a su clara conexión con la teoría nudos.

En este proyecto cubriremos el primer capítulo de [1], con la intención de introducir al lector a los grupos de trenzas y todas sus posibles perspectivas, complementar pruebas, presentar diagramas diferentes y en general dar una vista mas aterrizada a entender estas estructuras tan interesantes. Presentaremos las definiciones elementales y multiples perspectivas para luego revisar resultados de equivalencia y finalizar con algunos hechos bien conocidos en la literatura pero que resultan interesantes para un nuevo lector. [Cambiara a posteriori dependiendo del avance](#)

2. Las Trenzas Geométricas

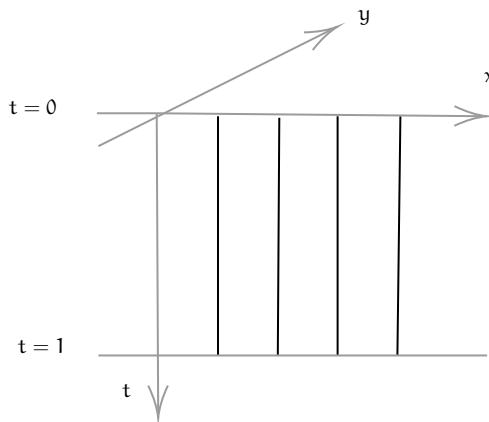
Dada la naturaleza geométrica del objeto a estudiar, la representación que resulta mas satisfactoria e intuitiva de ver en un principio de manera formal es la geométrica.

Definición 2.1. Una **trenza geométrica** con $n \geq 1$ cuerdas es un conjunto $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ formado por n intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de b , tales que la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$, envia cada cuerda de manera homeomorfica a I , y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) | i = 1, 2, \dots, n\},$$
$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 0, 1) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

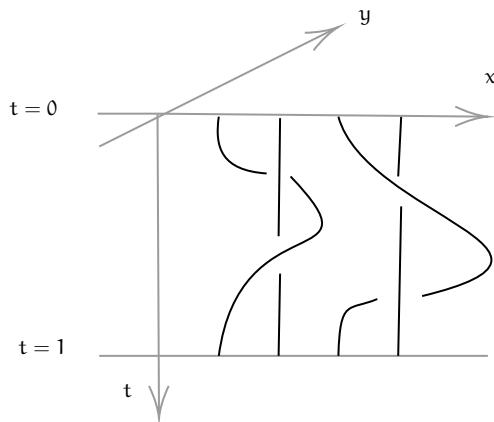
Observe que como cada cuerda va por medio de la proyección de manera homeomorfica a I , esto quiere decir que cada cuerda interseca a $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ de manera única para cada $t \in I$, es decir cada plano tiene exactamente n puntos del conjunto b . Note ademas que nuestra definición no menciona el punto final de cada una de las cuerdas ni el recorrido que hace.

Ejemplo 2.2. El diagrama donde cada cuerda tiene como punto inicial y final el mismo y donde no hay “giros”.



Note que en este ejemplo sencillo si bien cada cuerda pareciera que se encuentra solo en el plano (x, t) , estas cuerdas se pueden deformar en la dirección del eje y , por lo que debemos ser cuidadosos con estas representaciones.

Ejemplo 2.3. Observe que en este ejemplo los puntos iniciales y finales de cada cuerda son los mismos que el anterior, pero en este caso si hay cuerdas que “giran” al rededor de otras.



A pesar de lo observado anteriormente los puntos finales e iniciales no tienen por que ser los mismos por lo que en general cada cuerda conectara a un punto $(i, 0, 0)$ a un punto $(s(i), 0, 1)$, donde $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observe que la secuencia $(s(1), s(2), \dots, s(n))$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, por lo que para una trenza b cualquiera, decimos que la secuencia $(s(1), s(2), \dots, s(n))$ es la **permutación subyacente** de b . En particular note que para los ejemplos anteriores tenemos la misma permutación subyacente $(1, 2, 3, 4)$.

Con esto en mente es natural preguntarse de que manera podemos ver si dos trenzas son “equivalentes” en algún sentido, para esto introducimos la noción de *isotopia*.

Definición 2.4. Dos trenzas b y b' son isotopicas si existe una función continua $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, tal que para cada $s \in I$, la función $F_s := F(-, s)$ es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de n cuerdas, $F_0 = \text{Id}_b$ y $F_1(b) = b'$. Tanto F como la familia de trenzas geometricas $\{F_s(b)\}_{s \in I}$ se conocen como una isotopia de b a b' .

Note que esta noción es muy parecida a una homotopia, así naturalmente podemos verificar la siguiente propiedad.

Proposición 2.5. La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

Demostración. luego □

Dadas las similitudes con la noción de homotopia, podemos pensar en una forma de definir un “producto” trenzas geométricas con n cuerdas.

Definición 2.6. Dadas 2 trenzas geométricas con n cuerdas b_1, b_2 , definimos su producto como el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ tales que si $t \in [0, 1/2]$ entonces $(x, y, 2t) \in b_1$, y en caso donde $t \in [1/2, 1]$ tenemos que $(x, y, 2t - 1) \in b_2$.

Note que el producto de dos trenzas geométricas de ese estilo claramente sera otra trenza, ya que lo único que estamos haciendo es unir el final de una con el inicio de la otra. La siguiente proposición nos permitirá definirla como un producto sobre las clases de trenzas geométricas con n cuerdas

Proposición 2.7. Dadas b_1, b_2, b'_1, b'_2 , donde b_i es isotopica a b'_i para $i = 1, 2$, entonces $b_1 b_2$ es isotopica a $b'_1 b'_2$

Demostración. luego □

Dado esto podemos observar que esta operación es asociativa y ademas tiene un elemento neutro. Este elemento neutro sera denotado como 1_n y es presentador por la trenza geométrica dibujada de el ejemplo 2.2. en su expresión de conjunto seria

$$1_n = \{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times I.$$

De esto concluimos que es un monoide, la prueba de que efectivamente resulta un grupo vendra mas adelante.

2.1. Diagramas de Trenzas y movimientos de Reidemeister

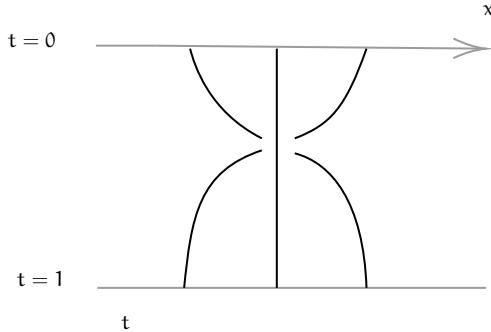
Como mencionamos en el Ejemplo 2.2, si bien uno debe ser cuidadoso con las representaciones, en términos prácticos esta proyección donde las cuerdas en el diagrama pareciera que están solo en el plano $y = 0$ y donde lo tramos que pasan por “debajo” pareciera que se cortan son útiles, siempre y cuando de manera local solo hayan cortes transversales dos a dos. Esta idea nos lleva a querer definir estas representaciones.

Definición 2.8. Un **diagrama de trenzas** de n cuerdas es un conjunto $D \subset \mathbb{R} \times I$, vista como la unión de n intervalos topológicos llamados las cuerdas de D donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyección $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ envía cada cuerda homeomorficamente a I .
- Cada punto $\{1, 2, \dots\} \times \{0, 1\}$ es el extremo de una única cuerda.
- Todo punto de $\mathbb{R} \times I$ pertenece a lo más a 2 cuerdas. En cada punto de intersección las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.

En particular si en los ejemplos 2.2 y 2.3 quitamos el eje y serían diagramas de trenzas, pero incluimos la tercera condición para evitar casos como el siguiente

Ejemplo 2.9. Observe que en la figura es imposible distinguir que trenza pasa por debajo de la otra por lo que si bien podemos ver que la permutación subyacente sería del tipo $(3, 2, 1)$ no sabemos cómo se comportan las trenzas por el dibujo.



La condición en la que hemos realizado el particular énfasis, nos dice que vía homeomorfismo en una vecindad de estos puntos de cruce, las trenzas se ven como el conjunto $\{(x, y) : xy = 0\}$ que en esencia son los ejes coordenados de \mathbb{R}^2 .

Otra implicación de esta condición es que el número de cruces en D es finito, pues en caso contrario si fueran infinito ([luego lo pienso](#)).

El propósito de introducir los diagramas de trenzas es que podemos ver cómo estos son representantes de la clase de isotopía de las trenzas geométricas de la manera más natural posible. La idea detrás de esto es ver a el diagrama de trenzas de la manera natural dentro de $\mathbb{R}^2 \times I$, como $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$, así en cada vecindad de intersección cambiamos la coordenada de la trenza que pasa por debajo mientras las otras dos las dejamos quietas, es decir nuestra cuerda ahora se encontrara ubicada en $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times I$. Este acto que es continuo y transforma el diagrama D en una trenza geométrica, la cual tiene su clase de isotopía bien definida presentada por D , esto suele denominarse por $\beta(D)$.

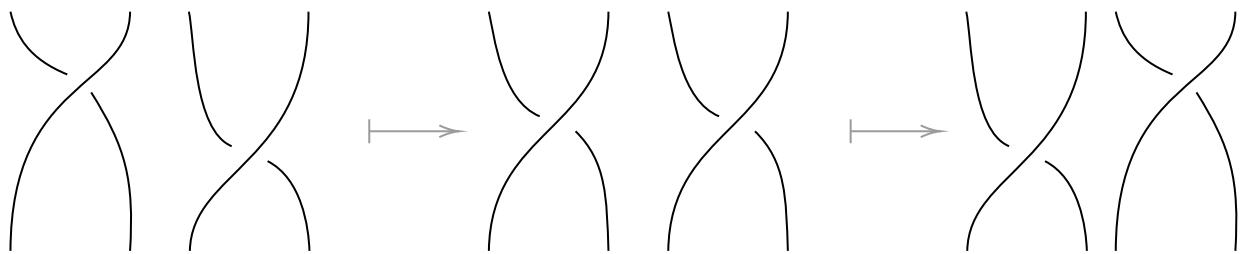
Con esto en mente es relativamente sencillo imaginarse la forma en la que uno puede transformar un elemento de la clase de isotopía en un diagrama, dada β una trenza geométrica, en la clase de isotopía podemos encontrar una trenza geométrica b donde solo se den los cruces de manera transversal, luego si recordamos cuáles son las cuerdas que tienen segunda coordenada más grande en el corte al momento de hacer la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R} \times 0 \times I$

estas serán en las que tomaremos sub-arcos de b para que se vea “cortada”, de esta manera podemos obtener el diagrama D que es claramente igual a $\beta(D)$. Con esta idea de que podemos pasar libre mente de la trenza geométrica a un diagrama de trenzas pues debemos de definir que es la isotopia en estos diagramas.

Definición 2.10. Dos diagramas de trenzas D y D' se dicen isotópicos si existe una función continua $F : D \times I \rightarrow R \times I$ tal que para cada $s \in I$, $D_s = F(D \times \{s\}) \subset R \times I$ es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, ademas $D_0 = D$ y $D_1 = D'$.

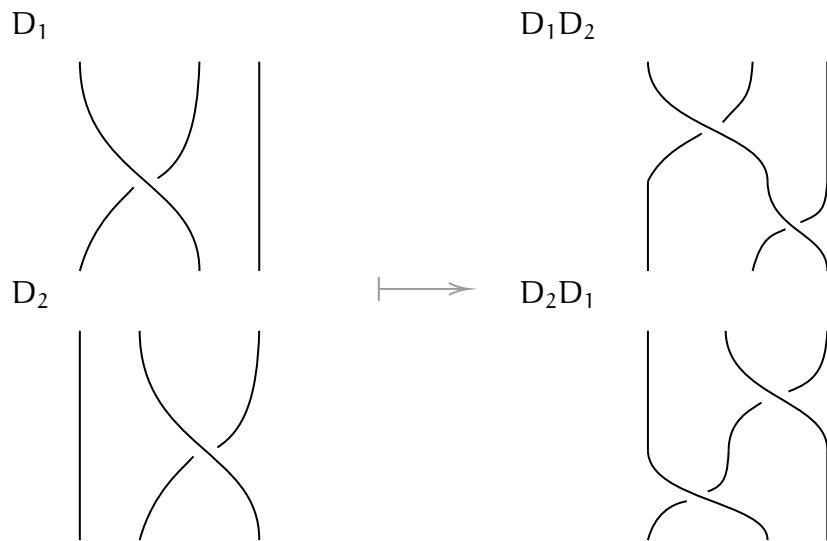
Se sobreentiende de la definición de que la función F en cada s envía los cruces y la información de quien va por debajo y arriba a D_s .

Ejemplo 2.11. Observe que podemos ver todo lo que se menciono antes, la información se preserva tanto de los cortes como de que cuerda va por debajo.



Análogamente el producto de diagramas D_1 y D_2 lo podemos ver como pegar un diagrama encima de otro para posteriormente aplastarlo hasta que este contenido en $R \times I$, ese producto sera llamado D_1D_2 y este diagrama representara el producto de las trenzas β_1 y β_2 correspondientes

Ejemplo 2.12. El producto de dos diagramas para obtener D_1D_2 y D_2D_1



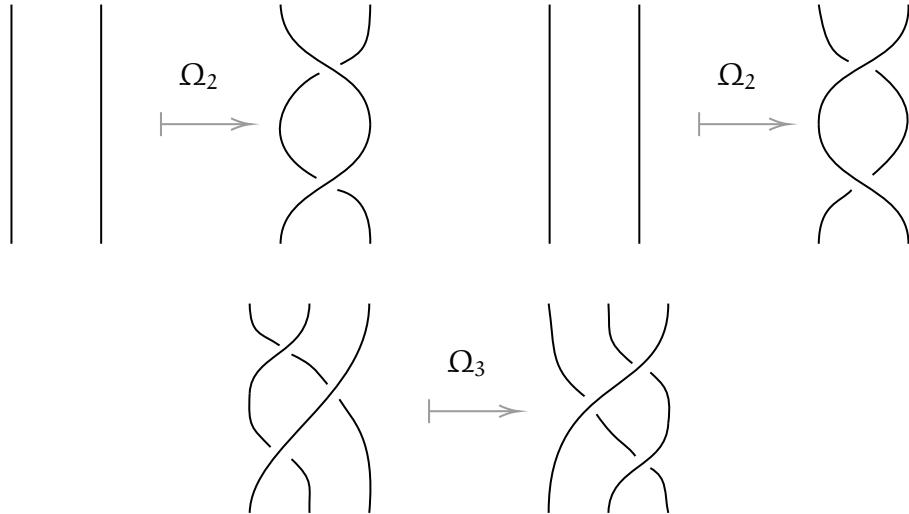
Note que esto ya nos muestra la no comutatividad ya que la permutacion subyacente de el representante D_1D_2 es $(3, 1, 2)$, mientras que la de D_2D_1 es $(2, 3, 1)$.

Por ultimo, teniendo en cuenta que todos los diagramas los podemos pensar como cuerdas en la realidad es natural pensar en que movimientos preservan la clase de isotopia entre

diagramas, para esto tomamos prestados de la teoría de nudos los *movimientos de Reidemeister* Ω_2 y Ω_3

Definición 2.13. Definimos Ω_2 un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a Ω_3 es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.

Estos movimientos solo afectan el diagrama en un disco dentro de $\mathbb{R} \times I$ y podemos verlos a continuación



Decimos que el movimiento inverso es invertir las flechas en la figura, note que esto nos permite jugar con las cuerdas sin cambiar la estructura del diagrama, por lo que podemos definir una noción de equivalencia

Definición 2.14. Dados dos diagramas D y D' decimos que son R-equivalentes si D se puede transformar por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a D'

A simple instancia no parece tan claro que esta noción de equivalencia pueda ser trasladada hacia todas las trenzas geométricas, pero resulta que si podemos hacerlo

Teorema 2.15. Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotópicas si y solo si estos diagramas son R-equivalentes.

La prueba de este hecho se reduce a cuatro pasos, pero la terminología y longitud de la prueba se salen de los propósitos del proyecto, para la prueba de este hecho vea [1].

3. El Grupo de Trenzas de Artin

Luego de nuestro paso por la idea geométrica y teniendo en cuenta que definimos el grupo de trenzas geométricas, en esta sección abordaremos las trenzas desde un punto de vista netamente algebraico.

Definición 3.1. El grupo de trenzas de Artin B_n es el grupo generado por $n-1$ generadores σ_i con $i = 1, 2, \dots, n-1$ y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ con $|i - j| \geq 2$, y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Dicho esto veamos los ejemplos mas sencillos de grupo de trenzas.

Ejemplo 3.2. $B_1 = \{1\}$, es decir el grupo trivial ya que no habrían generadores, en el caso de B_2 tenemos que es un grupo con un generador σ_1 , donde nuevamente no hay relaciones, así $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Como es comun en grupos queremos ver que como se comportan sus elementos bajo homomorfismos. Así sea $f : B_n \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos, por ser homomorfismo, es claro que $f(\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}) = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ debe cumplir las relaciones de trenzas, pero también tenemos la dirección contraria

Lema 3.3. Si existen elementos $\{s_i | i = 1, \dots, n-1\}$ en un grupo G tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un unico homomorfismo de grupos $f : B_n \rightarrow G$, tal que $s_i = f(\sigma_i)$.

Demostración. luego □

Para los primeros dos grupos de trenzas, estos eran abelianos, pero esto de hecho no se mantiene siempre para esto mostremos primero el siguiente lema

Lema 3.4. Las trasposiciones simples $s_i = (i \ i + 1) \in S_n$, generan S_n y satisfacen las relaciones de trenzas.

Demostración. luego □

Teorema 3.5. El grupo B_n para $n \geq 3$ no es abeliano

Demostración. luego □

Por lo visto antes existe un homomorfismo unico de grupos $\pi : B_n \rightarrow S_n$, de manera similar es claro que la inclusion $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ es un homomorfismo, esto en ocasiones resulta util ya que tendremos una cadena de subgrupos $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ y un diagrama que comuta

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & S_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{n+1} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & S_{n+1} \end{array}$$

Referencias

- [1] C. Kassel and V. Turaev, *Braid Groups*. With the graphical assistance of O. Dodane. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.
- [2] J. S. Birman and T. E. Brendle, Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, September 2004. <https://arxiv.org/abs/math/0409205>.
- [3] Gonzalez-Meneses, J. (2010). Basic results on braid groups. [arXiv:1010.0321](https://arxiv.org/abs/1010.0321) [math.GT]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1010.0321>.
- [4] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [5] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [6] E. Artin, *Braids and permutations*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 643–649.