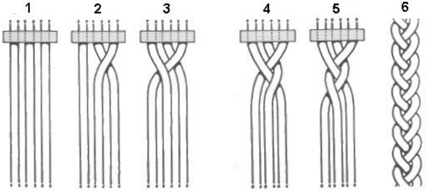
Grupos de Trenzas y Espacios de Configuración

Un primer acercamiento a las nociones algebraicas, geométricas y topológicas

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Introducción

Cuando hablamos de Trenzas en un ámbito general es completamente natural que la primera imagen que se pase por la cabeza es la de una trenza de cabello. La mas clásica se hace agarrando tres mechones, donde los mechones externos pasan hacia el centro intercalándose.

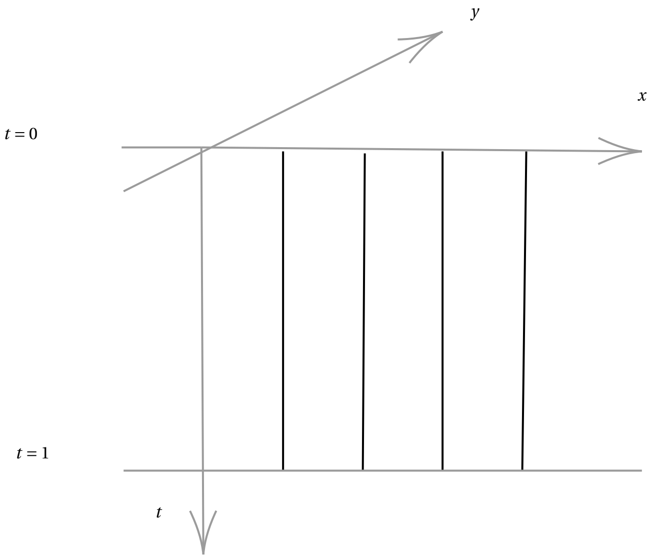


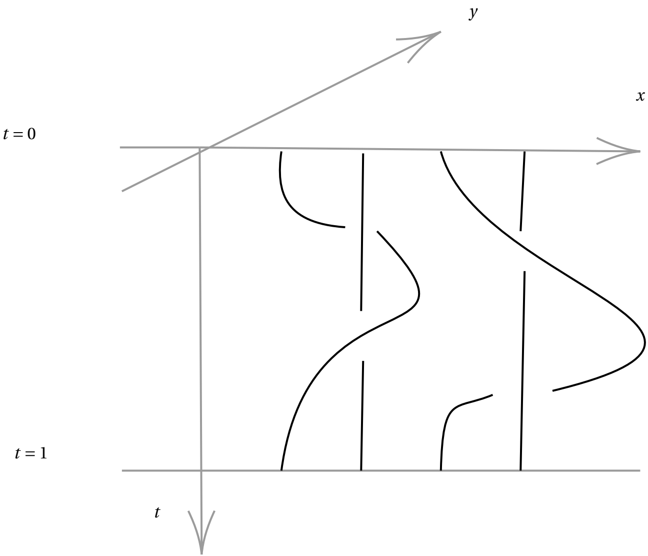
La primera aparición con mención propia de los grupos de trenzas se las debemos a Emil Artin, quien en 1925 los introdujo para modelar como se entrelazaban múltiples cuerdas en un espacio euclidiano 3-dimensional, estas cuerdas es lo que conocemos como trenzas.

Definición

Una **trenza geometrica** con $n \geq 1$ cuerdas es un conjunto $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ formado por n intervalos topológicos disyuntos llamados las *cuerdas* de b, tales que la proyeccion $\mathbb{R}^2 \times I \to I$, envia cada cuerda de manera homeomorfica a I, y ademas

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i,0,0) | i = 1,2,\dots n\},$$
$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i,0,1) | i = 1,2,\dots n\}.$$


y
x
$t = 0$
$t = 1$
t



y
x
$t = 0$
$t = 1$
t

Equivalencia de Trenzas Geometricas

Definición

Dos trenzas b y b' son isotopicas si existe una función continua $F : b \times I \longrightarrow R^2 \times I$, tal que para cada $s \in I$, la función $F_s := F(-, s)$ es un embedimiento el cual su imagen es una trenza geométrica de n cuerdas, $F_0 = Id_b$ y $F_1(b) = b'$.
Tanto F como la familia de trenzas geometricas $\{F_s(b)\}_{s \in I}$ se conocen como una isotopia de b a b'.

Proposición

La isotopia entre trenzas geométricas define una relación de equivalencia.

Estructura de Monoide

Definicion

Dadas 2 trenzas geométricas con n cuerdas b_1, b_2, definimos su producto como el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ tales que si $t \in [0, 1/2]$ entonces $(x, y, 2t) \in b_1$, y en caso donde $t \in [1/2, 1]$ tenemos que $(x, y, 2t - 1) \in b_2$.

Proposición

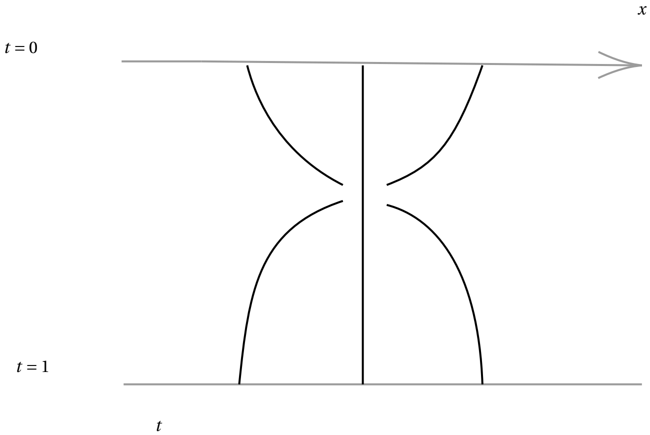
Dadas b_1, b_2, b'_1, b'_2, donde b_i es isotopica a b'_i para $i = 1, 2$, entonces $b_1 b_2$ es isotopica a $b'_1 b'_2$.

Diagramas de Trenzas

Definición

Un **diagrama de trenzas** de n cuerdas es un conjunto $D \subset \mathbb{R} \times I$, vista como la union de n intervalos topologicos llamados las cuerdas de D donde se cumplen las siguientes condiciones.

- La proyeccion $\mathbb{R} \times I \to I$ envia cada cuerda homeomorficamente a I.
- Cada punto $\{1, 2, \ldots\} \times \{0, 1\}$ es el extremo de una unica cuerda.
- Todo punto de $\mathbb{R} \times I$ pertenece a lo maximo a 2 cuerdas. En cada punto de interseccion las cuerdas se cruzan de manera transversal y una de ellas se difumina para indicar que pasa por debajo, mientras la que se ve continua indica que pasa por arriba.



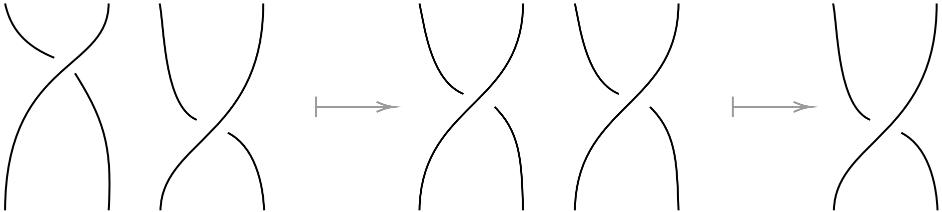
x
$t = 0$
$t = 1$
t

Definicion

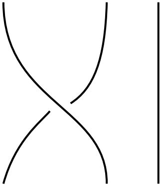
Dos diagramas de trenzas D y D' se dicen isotopicos si existe una funcion continua $F: D \times I \to R \times I$ tal que para cada $s \in I$, $D_s = F(D \times \{s\}) \subset \mathbb{R} \times I$ es un diagrama de trenzas con la misma cantidad cuerdas, ademas $D_0 = D$ y $D_1 = D'$.

Definición

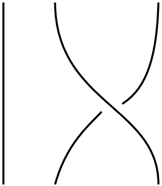
Definimos Ω_2 un movimiento donde tomamos dos cuerdas del diagrama y creamos dos cruces nuevos transversales, pasando una de las cuerdas del diagrama por debajo de la otra, mientras que a Ω_3 es un movimiento que involucra a tres cuerdas y preserva el numero de cruces transversales pero invierte el diagrama de manera reflexiva.



D_1

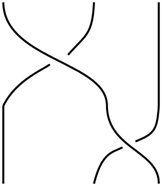


D_2

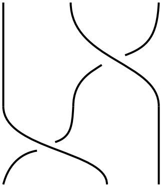


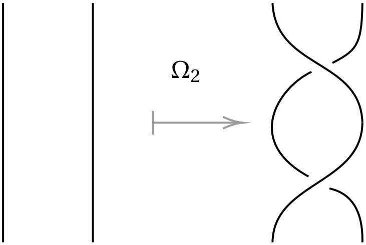
$\longmapsto$

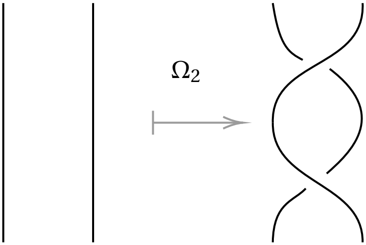
$D_1 D_2$

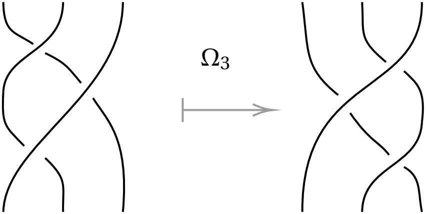


$D_2 D_1$




Ω_2


Ω_2


Ω_3

Diagramas y Trenzas Geometricas

Definicion

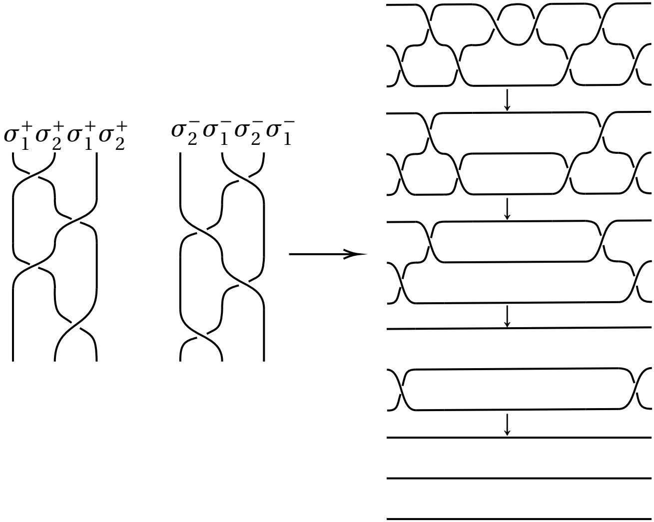
Dados dos diagramas D y D' decimos que son R-equivalentes si D se puede transformas por medio de una secuencia finita de isotopias y movimientos de Reidemeister a D'

Teorema

Dos diagramas de trenzas representan trenzas geométricas isotopicas si y solo si estos diagramas son R-equivalentes.

Teorema

$\mathscr{B}_n$ es un grupo.


$\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_1^+\sigma_2^+$
$\sigma_2^-\sigma_1^-\sigma_2^-\sigma_1^-$

Grupo de Trenzas de Artin B_n

Definición

El grupo de trenzas de Artin B_n es el grupo generado por $n-1$ generadores σ_i con $i = 1, 2, \dots n-1$ y las relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots n-1$ con $|i-j| \geq 2$, y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

para $i = 1, 2, \dots n-2$.

Lema

Si existen elementos $\{s_i | i = 1, \ldots, n-1\}$ en un grupo G tales que se satisfacen las relaciones de trenzas, entonces existe un unico homomorfismo de grupos $f : B_n \to G$, tal que $s_i = f(\sigma_i)$.

Lema

Las trasposiciones simples $s_i = (i\ i+1) \in S_n$, generan S_n y satisfacen las relaciones de trenzas.

Teorema

El grupo B_n para $n \geq 3$ no es abeliano

Equivalencia entre $\mathscr{B}_n$ y B_n

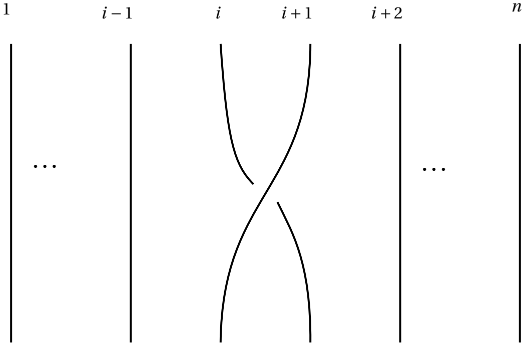
Proposicion

Los elementos $\sigma_1^+, \ldots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathscr{B}_n$ satisfacen las relaciones de trenzas.

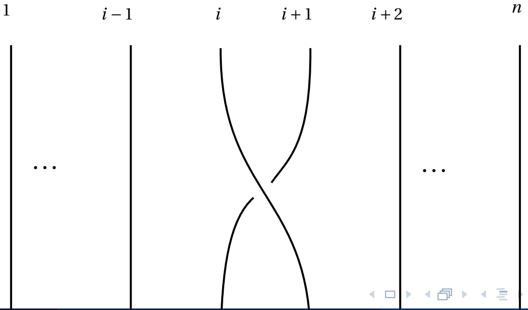
Teorema

Para $\varepsilon = \pm$, existe un unico homomorfismo $\varphi_\varepsilon : B_n \to \mathscr{B}_n$ tal que $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots n-1$. Ademas el homorfismo φ_ε resulta ser un isormorfismo.

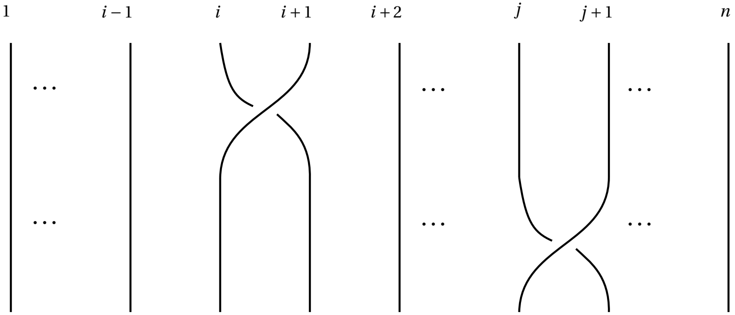
σ_i^+



σ_i^-

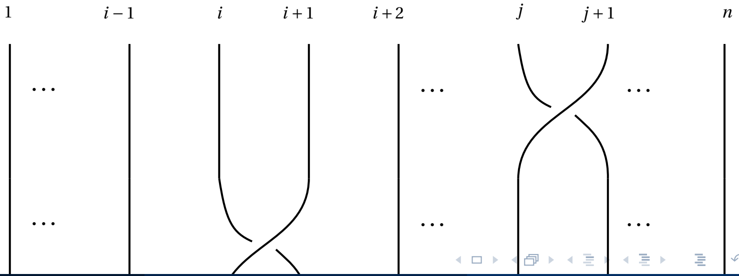


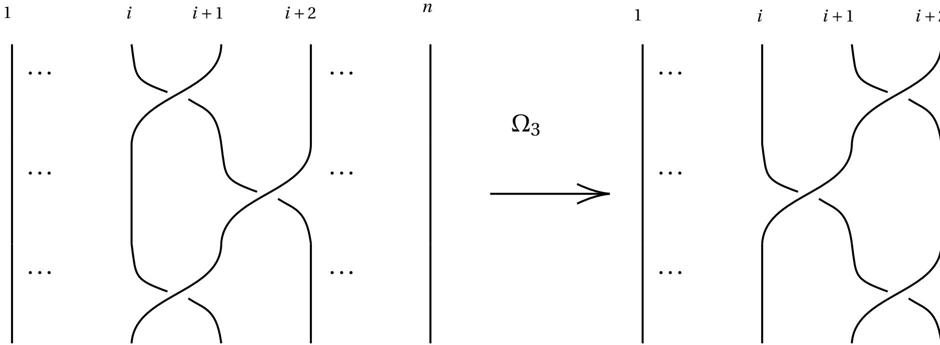
$\sigma_i^+ \sigma_j^+$



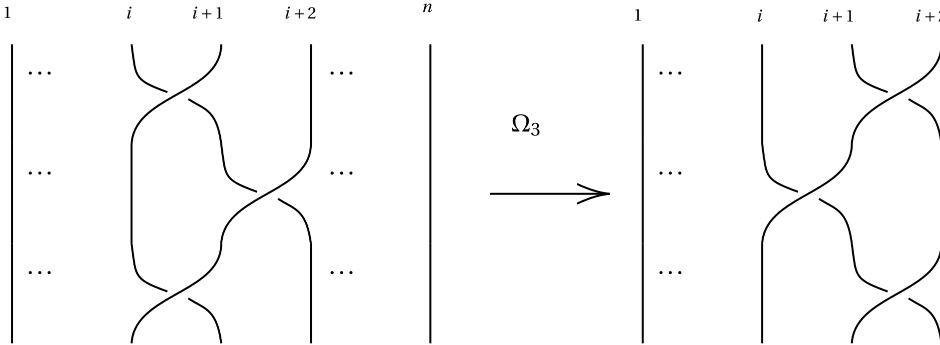
$\updownarrow$ *isotopia*

$\sigma_j^+ \sigma_i^+$





$\sigma_i^+\sigma_{i+1}^+\sigma_i^+$ $\sigma_{i+1}^+\sigma_i^+\sigma_{i+1}^+$



$\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$ $\qquad$ $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$

Trenzas Puras

Definición

Dada la proyección natural vista previamente $\pi : B_n \to S_n$, definimos el *grupo de trenzas puras* como

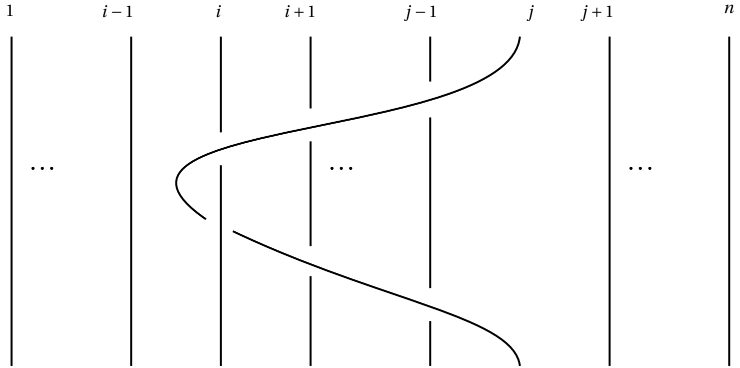
$$P_n := \ker \pi.$$

Definición

Definimos $A_{i,j} \in P_n$ como la trenza dada por

$$A_{i,j} := \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Para $1 \leq i < j \leq n$



1
$i-1$
i
$i+1$
$j-1$
j
$j+1$
n
$\cdots$
$\cdots$
$\cdots$

Espacios de Configuración

Definición

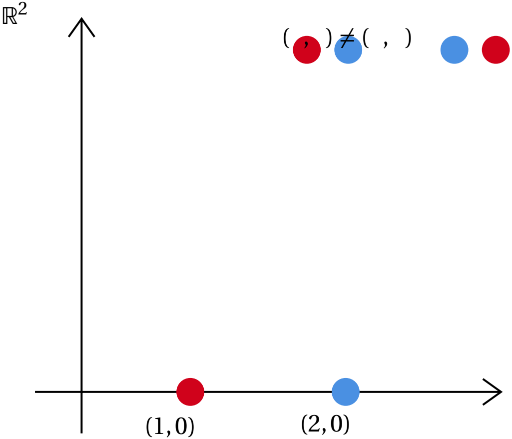
El subespacio de M^n definido como

$$\mathscr{F}_n(M) := \{(u_1, \ldots, u_n) \in M^n | u_i \neq u_j \text{ para todo } i \neq j\},$$

se conoce como el *espacio de configuracion* de $n-$tuplas ordenadas de puntos en M.

Definición

El grupo fundamental $\pi_1(\mathscr{F}_n(M))$ se conoce como el *grupo de trenzas puras* de M en n cuerdas.



$\mathbb{R}^2$
$(\;,\;) \neq (\;,\;)$
$(1,0)$
$(2,0)$

Equivalencias

Teorema

Para $M = \mathbb{R}^2$ tenemos que $\pi_1(\mathscr{F}_n(M)) \cong P_n$.

Definición

Dado $\mathscr{F}_n(M)$, definimos

$$C_n(M) := \mathscr{F}_n(M)/S_n$$

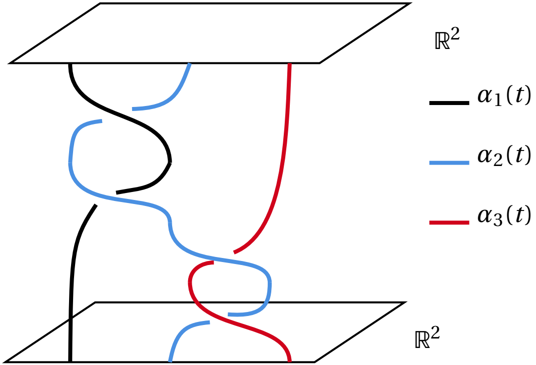
Donde el cociente es dado por la acción usual de S_n permutando el orden de la entradas. Este espacio se conoce como el espacio de configuración de conjuntos de puntos no ordenados.

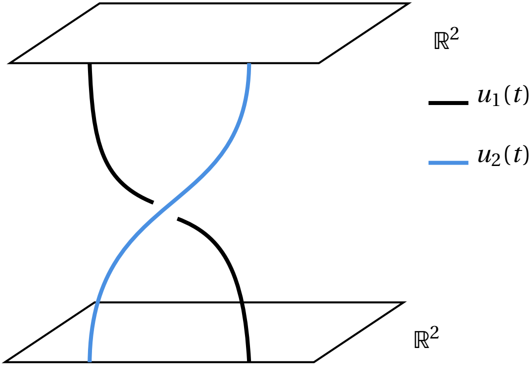
Teorema

Para $M = \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$B_n \cong \pi_1(C_n(M), q)$$

Donde q hace referencia al conjunto de puntos no ordenado $\{(1,0), (2,0), \dots, (n,0)\}$.


$\mathbb{R}^2$
$\alpha_1(t)$
$\alpha_2(t)$
$\alpha_3(t)$
$\mathbb{R}^2$


$\mathbb{R}^2$
$u_1(t)$
$u_2(t)$
$\mathbb{R}^2$

Automorfismos de F_n

Definición

Decimos que un automorfismo $\phi : F_n \to F_n$ es un *automorfismo de trenzas* si satisface las siguientes condiciones

i) Existe $\mu \in S_n$ tal que $\phi(a_k)$ es conjugado en F_n a $a_{\mu(k)}$ para todo $k \in 1, 2, \ldots, n$

ii) $\phi(a_1 \ldots a_n) = a_1 \ldots a_n$.

Proposición

$\tilde{B}_n$ es un grupo con la composición.

Mapping Class Group

Definición

Un *auto-homeomorfismo* de la pareja (M, Q) es un homeomorfismo $f : M \to M$ tal que

i) Para todo $x \in \partial M$, $f(x) = x$.

ii) $f(Q) = Q$.

iii) Preserva la orientacion.

Definición

El *Mapping Class Group* $\mathscr{M}(M, Q)$ es el conjunto de clases de isotopia de automorfismos con la composicion de funciuones como operacion.

Definición

Decimos que α es un *arco generador* en (M, Q) si

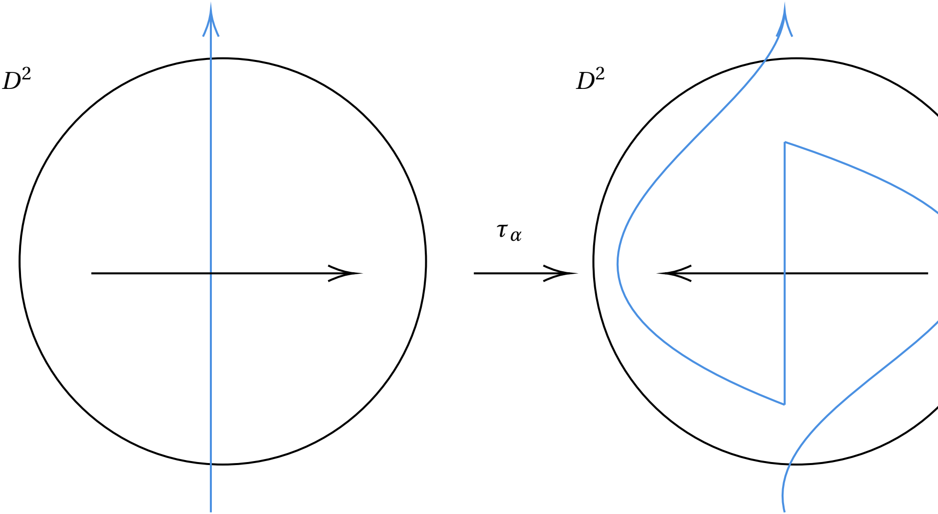
- $\alpha \subset M$ con α homeomorfico a I.
- $\alpha \cap (Q \cup \partial M) = \{x_1, x_2\} \subset Q$

Definición

Dado un arco generador α definimos el *medio-giro* como

$$\tau_\alpha : (M, Q) \to (M, Q)$$

Tal que dada una vecindad pequeña U de α, que identificamos de manera homeomorfa con $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que $\alpha = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y la orientacion de M sea en contra de las manecillas del reloj, tal que fuera de U, τ_α es la identidad, Si $|z| \leq \frac{1}{2}$ es enviado a $-z$, y para $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$ es enviado a $ze^{-2\pi i|z|}$

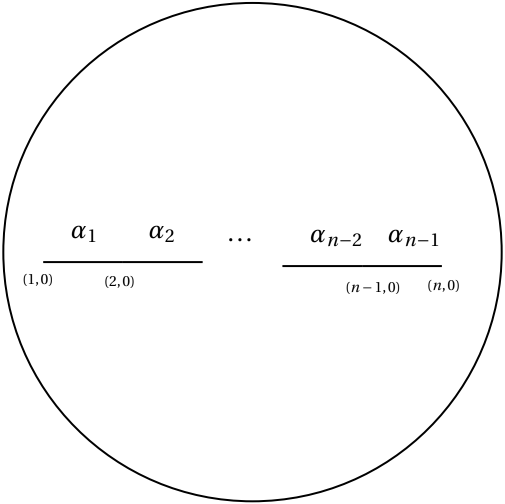

D^2
τ_α
D^2

Equivalencia MCG y Automorfismos

Teorema

Para $n \geq 1$, los homomorfismos η, ρ son isomorfismos que hacen que el siguiente diagrama conmute

$$
\begin{tikzcd}
B_n \arrow[d, "\eta"'] \arrow[drr] & & \\
\mathcal{M}(D, Q_n) \arrow[rr, "\rho"'] & & \tilde{B}_n
\end{tikzcd}
$$


α_1
α_2
$\dots$
α_{n-2}
α_{n-1}
$(1,0)$
$(2,0)$
$(n-1,0)$
$(n,0)$

B_3 y $PSL(2,\mathbb{Z})$

Primero recordemos por la presentacion de Artin que

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$

Recordemos que esta relación resume el movimiento Ω_3. Primero veamos alguna presentacion mas conveniente. Definamos

$$x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \qquad y = \sigma_1\sigma_2$$

Note que $x = y\sigma_1$, luego $\sigma_1 = y^{-1}x$, mientras que

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1}x\sigma_1^{-1} = (x^{-1}y)x(x^{-1}y) = x^{-1}y^2$$

Luego como ambos generadores los podemos reescribir en términos de x y y tenemos la siguiente presentación equivalente

$$B_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

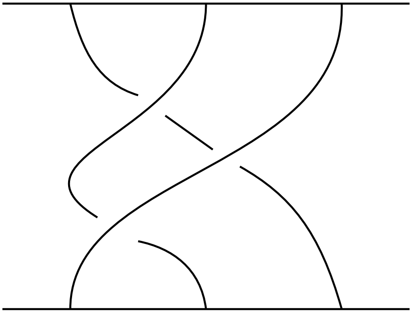
Proposición

$$Z(B_3) = \langle y^3 \rangle$$

Teorema

Dados B_3 y $SL(2,\mathbb{Z})$ existe un unico homomorfismo, que desciende en un isomorfismo

$$B_3/Z(B_3) \cong PSL(2,\mathbb{Z}).$$



Δ_3

Hechos del Grupo de Trenzas

Corolario

P_n es generado por $A_{i,j}$ para $1 \leq i < j \leq n$

Teorema

Si $n \geq 3$ $Z(B_n) = Z(P_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$, donde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

Corolario

Para $m \neq n$, B_m no es isomorfo a B_n.

Teorema

B_n es un grupo libre de torsión.

El espacio $C_n(\mathbb{R}^2)$

Finalizamos con una breve descripción del espacio de configuración por medio de polinomios, que nos da una relación muy interesante hacia la geometría algebraica. Si hacemos la identificación natural de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, consideremos el siguiente polinomio simétrico

$$p_k(u) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} u_{i_1} \cdots u_{i_k}.$$

Donde $u \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ y $k = 1, \ldots n$, note que por ser simétrico estas funciones p_k son invariantes bajo la acción de S_n, por lo que inducen una función $C_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$. Resulta que esta función es un homeomorfismo al conjunto de los polinomios monoicos con raíces diferentes de grano n y coeficientes complejos. Siendo así B_n el grupo fundamental de un conjunto clásico en la geometría algebraica.

Referencias

Kassel, C. y Turaev, V. *Braid Groups.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, Springer, 2008. doi:10.1007/978-0-387-68548-9.

Birman, J. S. y Brendle, T. E. Braids: A Survey. *arXiv Mathematics e-prints*, 2004. `https://arxiv.org/abs/math/0409205`.

González-Meneses, J. Basic results on braid groups. *arXiv:1010.0321* [math.GT]. Disponible en: `https://arxiv.org/abs/1010.0321`.

Artin, E. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 4 (1925), 47–72.

Artin, E. Theory of braids. *Ann. of Math.* 48 (1947), 101–126.

Artin, E. Braids and permutations. *Ann. of Math.* 48 (1947), 643–649.