

Вариант №9

1. Задание по варианту

ρ	c	α	β	γ	u_0	k_1	k_2	x_1	x_2
4	0.5	0.1	1	3	0.3	0.5	2.5	1/3	3/4

Тепловой поток слева

$$P_1 = \begin{cases} 10, & 0 \leq t < 0.5, \\ 0, & t \geq 0.5. \end{cases}$$

Температура на правом конце стержня $u = u_0$. Длина стержня $l = 1$. Шаг по времени $\tau = 0.0001$, шаг по пространству $h = 0.1$.

2. Порядки схем

Будем рассматривать порядки сходимости схем на примере:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Подставим (1) в уравнение теплопроводности и получим, что коэффициент $k = \frac{\lambda}{\pi^2}$.

Явная схема

Для устойчивости явной схемы необходимо выполнение соотношения:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau k}. \quad (2)$$

Преобразовав (2) для примера (1) получим

$$\frac{\pi^2}{2} h^2 \geq \tau. \quad (3)$$

Таблица для момента времени $t = 0.1$:

n	Шаг сетки h_n	Норма ошибки $\ y_k - u(t_k)\ $	Отношение ошибок z_n	Порядок сходимости p_n
1	$h=0.1, \tau=0.001$	0.00155974	-	-
2	$h/2, \tau/4$	0.000552722	0.354367	-1.49668
3	$h/4, \tau/16$	0.000195585	0.353857	-1.49876
4	$h/8, \tau/64$	0.000069615	0.355933	-1.49032

Неявная схема

Момент времени $t = 0.1$:

n	Шаг сетки h_n	Норма ошибки $\ y_k - u(t_k)\ $	Отношение ошибок z_n	Порядок сходимости p_n
1	$h=0.1, \tau=0.001$	0.00175875	-	-
2	$h/2, \tau/4$	0.000623474	0.354498	-1.49615
3	$h/4, \tau/16$	0.000220463	0.353604	-1.4998
4	$h/8, \tau/64$	0.0000779756	0.353691	-1.49944

Смешенная схема $\sigma = 0.5$

Момент времени $t = 0.1$:

n	Шаг сетки h_n	Норма ошибки $ y_k - u(t_k) $	Отношение ошибок z_n	Порядок сходимости p_n
1	$h=0.1, \tau=0.001$	0.00165846	-	-
2	$h/2, \tau/4$	0.000587551	0.354275	-1.49706
3	$h/4, \tau/16$	0.000207587	0.353308	-1.501
4	$h/8, \tau/64$	0.0000738258	0.355638	-1.49152

3. Пример 3

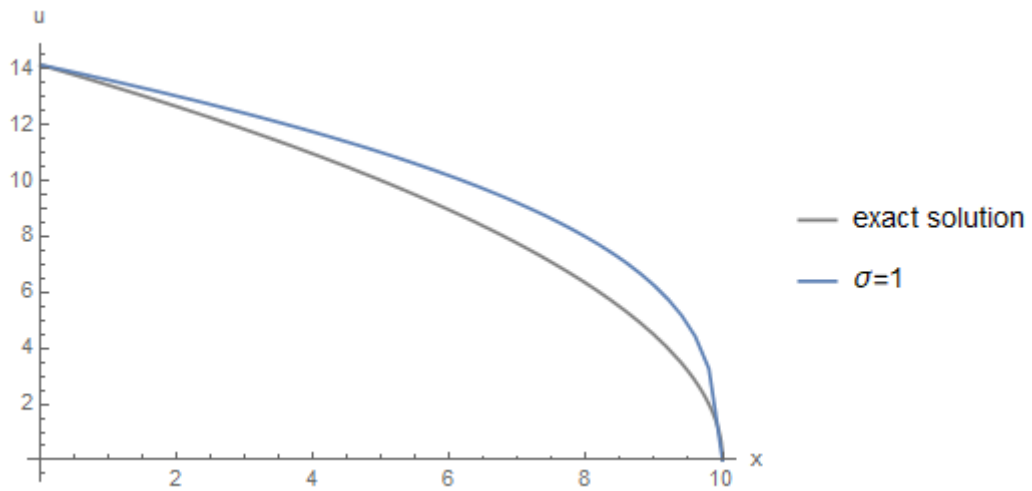


Рис. 1. $\tau = 0.0001$, $h = 0.2$, $\sigma = 1$

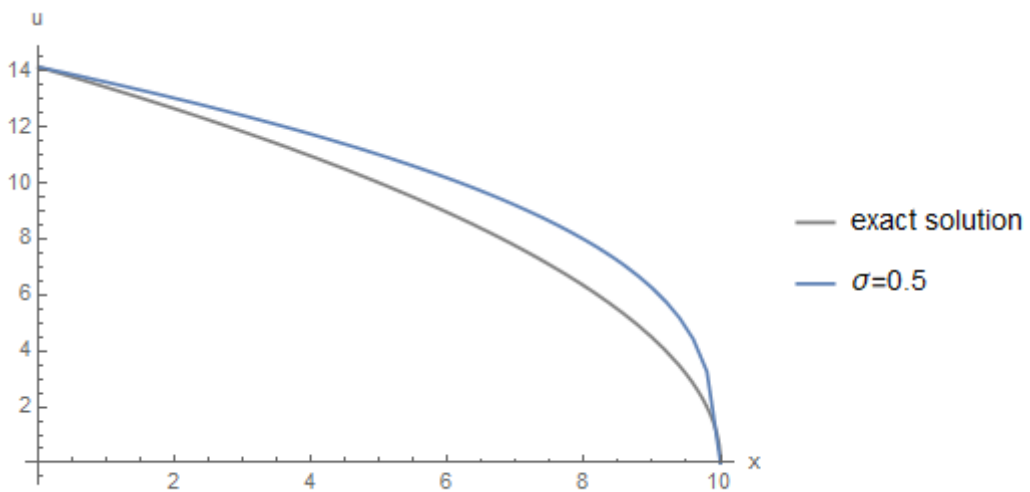


Рис. 2. $\tau = 0.0001$, $h = 0.2$, $\sigma = 0.5$