31/01/2016

Initiation à la Robotique

université de BORDEAUX

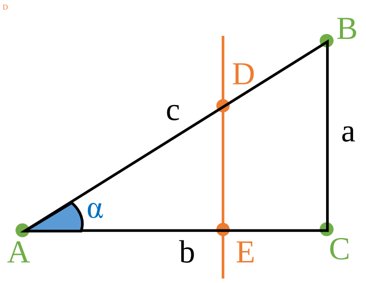
Thibaut Monseigne
Licence 3 Informatique Mention Informatique Parcours Informatique

Table des matières

1. Introduction

I. Principe de base de Trigonométrie

a) Définition



Une définition de la trigonométrie se base sur les triangles rectangles.
Dans ce cas, on a :

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

- $Pythagore : \ a^2 + b^2 = c^2$
- $Al - Kashi : \ a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times cos\, \alpha}$
- $Thalès : \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

b) Identités remarquables

Quel que soit l'angle α, on a (d'après le théorème de Pythagore) :

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Formules d'addition et de différence des arcs :

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta - \cos \alpha \times \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta + \sin \alpha \times \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \times \tan \beta}$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \times \tan \beta}$

Formules de duplication des arcs :

- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \times \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\sin(2\alpha) = 2 \times \sin \alpha \times \cos \alpha$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
- $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

Formules d'addition et de différence de deux sinus et de deux cosinus converties en produit :

- $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \times \cos \alpha \times \cos \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \times \sin \alpha \times \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \times \sin \alpha \times \cos \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \times \cos \alpha \times \sin \beta$

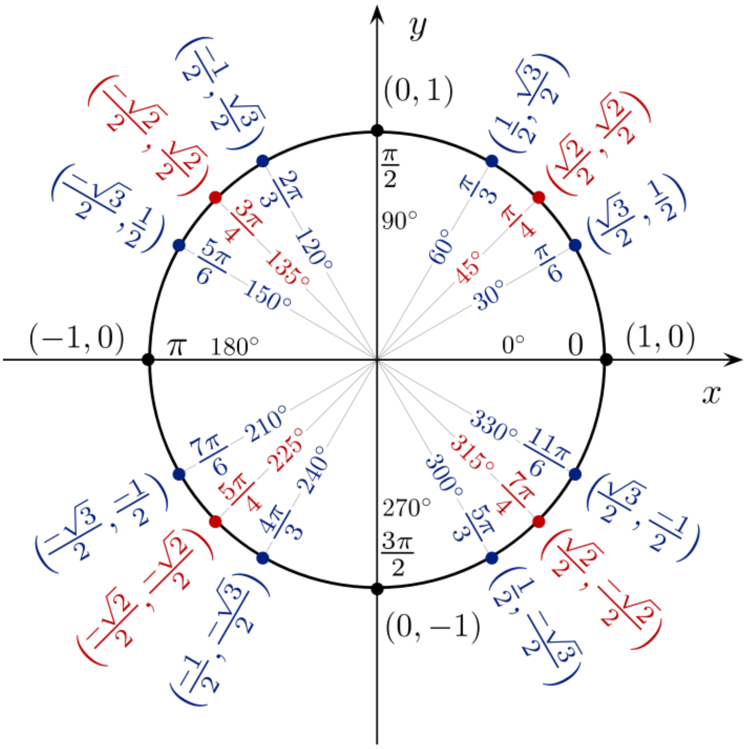
Identité trigonométrique :

- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

Relation entre les fonctions trigonométriques :

- $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$
- $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$
- $\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$

c) Cercle Trigonométrique



Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Angle	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Cos	$\mathbf{1}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathbf{1}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mathbf{1}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

d) Propriétés liées au cercle Trigonométrique

Réflexion d'axe $(\alpha\ =\ 0)$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
Réflexion d'axe $\left(\alpha\ = \frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
Réflexion d'axe $\left(\alpha\ = \frac{\pi}{4}\right)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
Décalage de $\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$	$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$
Décalage de π	$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$	$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$	$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
Décalage de 2π	$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$	$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$	$\tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$

II. Principe de base de mécanique

a) Définitions

Force (F en Newton N) *: En mécanique classique, une force a un sens strict. La force résulte de l'action d'un objet sur un autre. C'est le cas en particulier des interactions de contact (pression, frottement, interaction dans une liaison) ou à distance (force gravitationnelle, force électrostatique, force électromagnétique). La force est représentée par un vecteur ayant un point d'application, une direction, un sens et une intensité (en newtons).*

Couple (C en Newton-mètre N-m) *: Un couple est l'effort en rotation appliqué à un axe. Il est ainsi nommé en raison de la façon caractéristique dont on obtient ce type d'action : un bras qui tire, un bras qui pousse, les deux forces étant égales et opposées. Un couple appliqué à un système provoque une variation de son moment cinétique sans modifier le mouvement de son centre de gravité.*

Poids/masse (P/m en Newton/Kilogramme N/kg) *: La masse m s'exprime en kilogramme (symbole kg) alors que le poids qui est une force possède comme unité le newton (symbole N), et l'accélération g est indifféremment exprimée en N/kg ou en m/s².*

$$P = m \times g$$

La masse corps est utilisée pour calculer la force nécessaire pour qu'un corps acquière une accélération, c'est sa résistance à l'accélération.

$$\vec{F} = m \times \vec{a} : \vec{a} \text{ est l'accélération acquise et } \vec{F} \text{ la force nécessaire.}$$

Moment d'Inertie (I en Kilogramme-mètre² kg-m²) *: Le moment d'inertie caractérise la répartition de la matière d'un solide. Il quantifie la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire). C'est équivalent, pour une rotation, à la masse qui mesure la résistance à une accélération linéaire. Exemple de la patineuse, elle accélère si elle replie les bras et ralenti en les écartant.*

Vitesse angulaire (ω ou Ω en radian/seconde rad/s) *: la vitesse angulaire ou vitesse de rotation est la dérivée première, par rapport au temps, de la coordonnée angulaire d'un système en rotation. La dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire est l'accélération angulaire.*

Énergie cinétique (Ec ou K en Joule J) *: L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. Sa valeur dépend donc du choix de ce référentiel.*

$$E_c = \frac{1}{2} m w^2$$

Puissance (P en Watt W) *: La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. La puissance correspond donc à un débit d'énergie : si deux systèmes de puissances différentes fournissent le même travail (la même énergie), le plus puissant est le plus rapide. Une puissance s'exprime généralement en watts, en joules par seconde ou en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$.*

$$P_m = \frac{E}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P(t) \times dt, \qquad P = \frac{dE}{dt}, \qquad \text{Pour un couple : } P = \vec{C} \times \vec{\Omega}$$

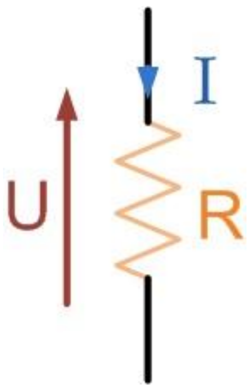
b) Convention

On représente un couple par une flèche (semblable à celle qui représente un vecteur) dans l'axe de rotation, s'éloignant de l'objet pour une rotation dans le sens trigonométrique (qui est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre), comme la vitesse de rotation.

On mesure le couple en newtons-mètres (N·m). Un couple de 1 N·m appliqué à un axe représente un apport d'énergie de 1 joule (J) par radian, soit 2π J par tour. Un couple est homogène à un travail ou une énergie (en joules), mais il est préférable, pour éviter les confusions, d'exprimer cette grandeur dans l'unité qui rappelle comment elle est définie.

III. Principe de base électronique

a) Loi d'Ohm



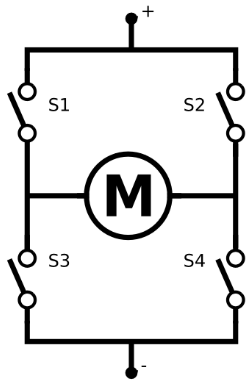
C'est la loi qui permet de connaître l'intensité du courant qui traverse une charge (une résistance dans notre cas) soumise à une différence de potentiel (dite tension ou DDP). Inversement, cette loi permet aussi de connaître la tension à appliquer à la charge pour qu'elle soit parcourue par une certaine intensité de courant. Soit les trois paramètres suivants :

- R : la résistance. Son unité est l'ohm, noté Ω.
- U : la tension entre les deux bornes de la résistance. Son unité est le volt, noté V.
- I : le courant traversant la résistance. Son unité est l'ampère, noté A.

Une résistance R traversée par un courant I et soumise à une tension U. On a :

$$U = R \times I, \qquad R = \frac{U}{I}, \qquad I = \frac{U}{R}$$

b) Pont en H



Le pont en H est une structure électronique servant à contrôler la polarité aux bornes du moteur. Il est composé de quatre transistors généralement disposés schématiquement en une forme de H.

En activant S1 et S4 on a un courant positif dans le moteur.
En activant S2 et S3 on a un courant négatif dans le moteur.
En activant S1 et S3 ou S2 et S4 il y a un court-circuit.
En activant S1 e S2 ou S3 et S4 on court-circuite les bornes du moteur et on a un freinage magnétique s'il est capable d'en dissiper la puissance générée. Il est possible avec un peu d'électronique et un contrôleur perfectionné d'effectuer un freinage régénératif. Dans le cas d'une alimentation à batterie, l'énergie est renvoyée aux batteries plutôt que dissipée dans les commutateurs du pont.

En jouant avec les commutateurs on peut par exemple garder S3 fermer et faire osciller S2. Les bobines du moteur n'aiment pas les changements brutaux, ils vont temporiser ces oscillations. On peut ainsi fournir uniquement 6V au lieu des 12V de la source d'énergie en ouvrant et fermant le commutateur de façon homogène. Et ainsi diviser la vitesse par deux. La fréquence d'oscillation est de 20kHz, car l'oreille humaine ne peut entendre au-delà, en dessous de ce seuil on entendrait un sifflement, mais en réalité le phénomène fonctionne avec des fréquences beaucoup plus faibles.

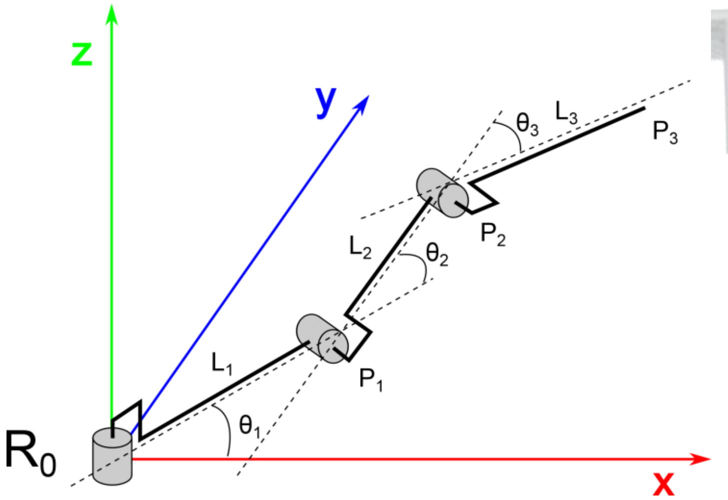
IV. Principe de base de Python

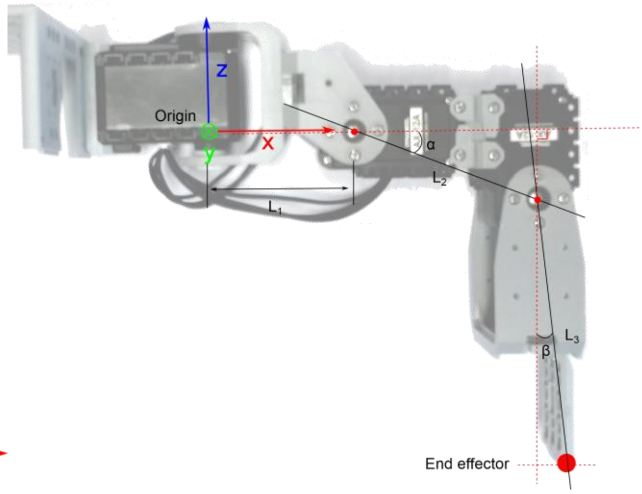
```python
# Ceci est un commentaire
"""
Ceci est un bloc de commentaire
"""

# On peut écrire une chaîne de caractères de différentes façons :
# Entre guillemets "Ceci est une chaîne de caractères"
# Entre apostrophes 'Ceci est une chaîne de caractères'
# Entre triples guillemets """Ceci est une chaîne de caractères"""

var = element    # on ne type pas les variables
var = int(var)   # cast en int
type(var)        # fonction donnant le type de la variable

#Conditionnel
if var == 0:
    print("var=0")
elif var == 1:
```

```
    print("var=1")
else:
    print("var=",var)

#While
while condition:
    instruction 1
    instruction 2
    ...
    if var==2:
        continue # On retourne au while sans exécuter les autres lignes
    if var==5:
        break        # On sort du while
    instruction N

#for
chaîne = "Bonjour les ZER0S"
for lettre in chaine:
    if lettre in "AEIOUYaeiouy": # La lettre est une voyelle
        print(lettre)
    else:
        print("*")

# Création de fonctions
def nom_de_la_fonction(arg1, arg2=10,argN):
    #arg2 à une valeur par défaut
    # Bloc d'instructions

#si plusieurs valeurs par défaut on va préciser l'argument qui prend la
nouvelle valeur ou on respecte l'ordre un peu comme en LISP
Ex fonction(4,arg2=8,1)

#fonction anonyme limité à une instruction
lambda x, y: x + y

#include de bibliothèque
import math
math.sqrt(25)

#as mathématique permet de redonner un nom à la bibliothèque pour
l'utiliser pas forcément utile, mais sympa
import math as mathematiques
mathematiques.sqrt(25)

#from et import permettent d'importer une seule fonction ou toutes avec
étoile
#,mais plus de préfixes si plusieurs bibliothèques risque de conflit
from math import *
sqrt(25)

#Divers
annee = input("Saisissez une année : ") # On attend que l'utilisateur
saisisse une année
```

2. Cinématique

I. Représentation d'un bras





II. Cinématique directe, Calcul Théorique de la position

$$Projection_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \times \cos\theta_2 \Longrightarrow Projection_3 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \times \cos\theta_2 + \mathcal{L}_3 \times \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\mathcal{P}_1\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1 \times \cos\theta_1\\ \mathcal{L}_1 \times \sin\theta_1\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{P}_2\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \times Projection_2\\ \sin\theta_1 \times Projection_2\\ \mathcal{L}_2 \times \sin\theta_2\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{P}_3\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \times Projection_3\\ \sin\theta_1 \times Projection_3\\ \mathcal{L}_2 \times \sin\theta_2 + \mathcal{L}_3 \times \sin(\theta_2 + \theta_3)\end{pmatrix}$$

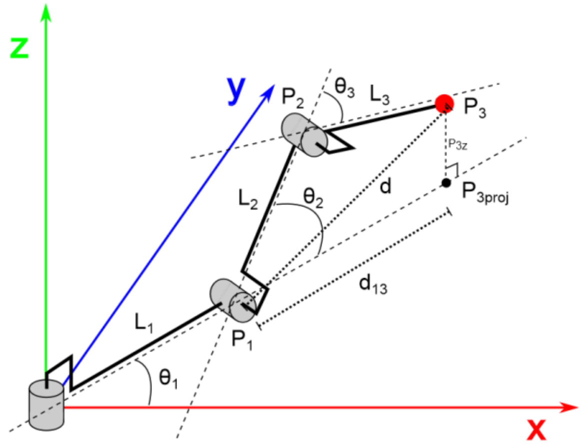
III. Cinématique directe, Calcul de la position réelle

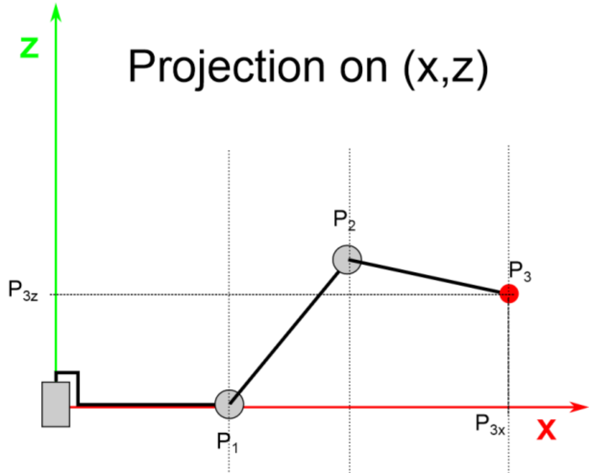
$$\Delta\theta\begin{pmatrix}0\\ 20{,}69°\\ 90° - 20{,}69° - 5{,}06°\end{pmatrix} \Longrightarrow \theta\begin{pmatrix}\theta'_1 = \theta_1\\ \theta'_2 = \theta_2 + 20{,}69°\\ \theta'_3 = 90° - (20{,}69° + 5{,}06° + \theta_3)\end{pmatrix}$$

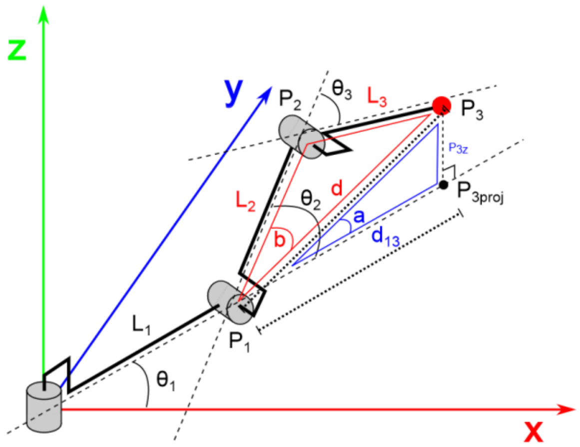
$$Projection'_2 = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \times \cos\theta'_2) \Longrightarrow Projection'_3 = Projection'_2 + (\mathcal{L}_3 \times \cos(\theta'_2 + \theta'_3))$$

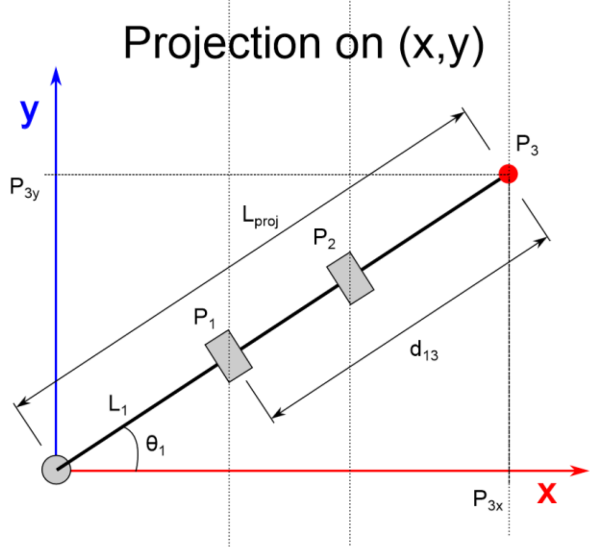
$$\mathcal{P}_1\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1 \times \cos\theta_1\\ \mathcal{L}_1 \times \sin\theta_1\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{P}_2\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \times Projection'_2\\ \sin\theta_1 \times Projection'_2\\ \mathcal{L}_2 \times \sin\theta'_2\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{P}_3\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \times Projection'_3\\ \sin\theta_1 \times Projection'_3\\ \mathcal{L}_2 \times \sin\theta'_2 + \mathcal{L}_3 \times \sin(\theta'_2 + \theta'_3)\end{pmatrix}$$

IV. Cinématique Inverse, Calcul des angles réels









$\boldsymbol{\mathcal{L}_{proj}} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

$\boldsymbol{d_{13}} = \mathcal{L}_{proj} - \mathcal{L}_1$

$\boldsymbol{d} = \sqrt{(z^2 + {d_{13}}^2)}$

$\boldsymbol{a} = \operatorname{atan2}(z, d_{13})$

$\boldsymbol{b} = \operatorname{acos}\dfrac{{\mathcal{L}_2}^2 + d^2 - {\mathcal{L}_3}^2}{2 \times \mathcal{L}_2 \times d}$

$\boldsymbol{\theta_1} = \operatorname{atan2}(y, x)$

$\boldsymbol{\theta_2} = b + a + \alpha$

$\boldsymbol{\theta_1} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha + \beta - \operatorname{acos}\dfrac{{\mathcal{L}_3}^2 + {\mathcal{L}_2}^2 - d^2}{2 \times \mathcal{L}_3 \times \mathcal{L}_2}$

3. Connexion Machine Moteur