Vadym Liss (257264)

Zadanie 1

Opis algorytmu:

Metoda bisekcji opiera się na tw. Darboux, które mówi, że jeżeli dla funkcji ciągłej $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zachodzi $f(a) * f(b) < 0$ (f zmienia znak na przedziale $[a, b]$), to w przedziale (a, b) istnieje takie c, że $f(c) = 0$. Warunek ten jest sprawdzany w pierwszym kroku algoytmu. Jeżeli dane wejściowe go nie spełniają, to funkcja zwraca kod błędu 1, a jeżeli spełniają, to funkcja przechodzi do pętli while. W kolejnych iteracjach wyliczany jest środek przedziału $[a, b]$, jednak nie z potencjalnie problematycznego wzoru $\frac{a+b}{2}$, a poprzez wyliczenie początkowej długości przedziału i sukcesywne dzielenie jej przez 2. Następnie wyliczana jest wartość funkcji f dla środka przedziału - jeżeli jest ona mniejsza niż zadany ϵ lub jeżeli długość aktualnie rozpatrywanego przedziału jest mniejsza niż 2δ, to funkcja zwraca bieżący środek przedziału jako rozwiązanie równania. Jeżeli nie, to funkcja przechodzi do lewej lub prawej połowy przedziału, w zależności od tego która z nich spełnia tw. Darboux i przechodzi do kolejnej iteracji. Sprawdzenie spełniania tw. zachodzi przez porównanie znaków wartości funkcji na lewym końcu przedziału i na środku, a nie przez badanie ich iloczynu, ponieważ mogłoby to prowadzić do błędów związanych z liczeniem w arytmetyce zmiennoprzecinkowej.

Zadanie 2

Opis algorytmu:

Metoda stycznych korzysta z linearyzacji funkcji za pomocą dwóch pierwszych wyrażeń w szeregu Taylora. Wtedy $f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Kolejne wartości x_n obliczane są ze wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, stąd wymóg podania x_0 jako argument funkcji oraz założenie, że $f'(x_0) \neq 0$ (czyli $|f'(x_0)| > \epsilon$, z uwagi na ograniczenia arytmetyki). Jeżeli wymóg ten nie jest spełniony, to funkcja zwraca kod błędu 2 i kończy pracę, a w przeciwnym przypadku przechodzi do sprawdzenia czy przypadkiem $f(x_0)$ nie jest na tyle blisko 0, by zwrócić x_0 jako wynik. Jeżeli nie, to funkcja przechodzi do pętli for, która wykonuje się conajwyżej maxit razy. W niej wyliczane są kolejne wartości x, aż do momentu, gdy odległość między x_n a x_{n+1} będzie mniejsza niż δ lub $f(x_{n+1})$ będzie wystarczająco blisko 0, lub gdy zostanie wykorzystany limit iteracji. Jeżeli tak się stanie, to funkcja zwróci ostatnie x_{n+1} i kod błędu 1.

Zadanie 3

Opis algorytmu:

Ostatnim zaimplementowanym sposobem rozwiązania równania $f(x) = 0$ jest metoda siecznych. Jedną z trudności w wykorzystaniu metody Newtona jest konieczność wykorzystanie wzoru pochodnej badanej funkcji. Metoda siecznych jest jednym ze sposobów jej obejścia. Z definicji pochodnej funkcji f w punkcie $- x_n$ mamy bowiem $f'(x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Zastosujemy zatem przybliżenie

$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. Podstawiając do wzoru na kolejną aproksymację z metody Newtona otrzymujemy $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. Zauważmy, że do wyznaczenia kolejnej aproksymacji, oprócz bieżącej, potrzebujemy również poprzedniej. Na starcie metoda potrzebuje więc dwóch punktów początkowych należących do odpowiednio małego otoczenia pierwiastka r. Ponieważ metoda siecznych oparta jest na metodzie stycznych, również dla niej może się okazać, że początkowe przybliżenia nieleżące dostatecznie blisko właściwej wartości r spowodują rozbieganie się kolejnych aproksymacji.

Dane testowe dla zadań 1-3:

Zmienna	Wartość
f(x)	$x^2 - 1$
pf(x)	2x
a	-3.0
b	-0.5
maxit	100.0
x_0	40.0
x_1	2000.0
delta	0.00001
epsilon	0.00001

Wyniki:

Metoda	Zwracane wartości
bisekcji	-1.0000019073486328, 3.814700903603807e-6, 18, 0
Newtona	1.0000000000151628, 3.0325519873031226e-11, 9, 0
siecznych	1.000000010272644, 2.0545288137441275e-8, 13, 0

Zadanie 4

Wyznaczyć pierwiastek równania sin(x)−$(\frac{x}{2})^2$ *= 0 za pomocą wcześniej napisanych funkcji.*

Dane testowe dla metody bisekcji:

Zmienna	Wartość
f(x)	$x \to \sin(x) - 0.5x^2$
a	1.5
b	2.0
delta	0.5*0.00001
epsilon	0.5*0.00001

Dane testowe dla metody Newtona:

Zmienna	Wartość
f(x)	$x \to \sin(x) - 0.5x^2$
pf(x)	x→cos(x)-0.5x
x_0	1.5
delta	0.5*0.00001
epsilon	0.5*0.00001
maxit	5

Dane testowe dla metody siecznych:

Zmienna	Wartość
f(x)	$x \to \sin(x) - 0.5x^2$
x_0	1.0
x_1	2.0
delta	0.5*0.00001
epsilon	0.5*0.00001
maxit	5

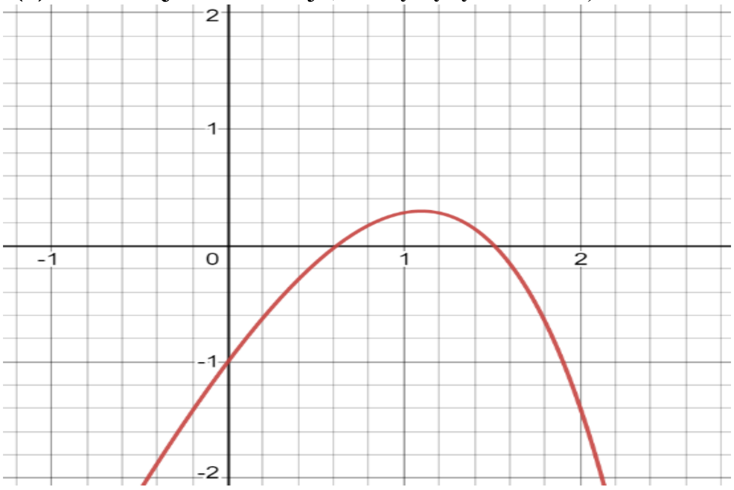
Wyniki:

Metoda	Zwracane wartości
bisekcji	1.9337539672851562, -2.7027680138402843e-7, 16, 0
Newtona	1.933753779789742, -2.2423316314856834e-8, 4, 0
siecznych	1.933753644474301, 1.564525129449379e-7, 4, 0

Wniosek: Metody Newtona i siecznych wykonały 4-krotnie mniej iteracji niż metoda bisekcji. Dzieje się tak, ponieważ wykładniki zbieżności metody Newtona i siecznych wynoszą odpowiednio 2 i $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1.618..., tymczasem dla metody bisekcji parametr ten wynosi 1, a więc zbiega ona do dobrego rozwiązania o wiele wolniej niż pozostałe metody. Metoda Newtona również zwróciła x dla którego wartość f(x) jest najbliżej 0. Czyli, metoda bisekcji jako najstabilniejsza, ale i najwolniejsza, zwraca wyniki najbardziej zbieżne do zadanej dokładności. Metody stycznych i siecznych są również dokładne, ale o wiele szybsze niż metoda bisekcji. Jeżeli przedkładamy niezawodność nad szybkością działania, powinniśmy zastosować metodę bisekcji. W przypadku, gdy mamy do czynienia z porządna funkcją (to znaczy znamy wzór jej pochodnej, łatwo ja sobie wyobrazić i wybrać x_0, nie ma złośliwych ekstremów lokalnych), warto skorzystać z metody Newtona. Metoda siecznych, radząc sobie z niektórymi z tych trudności, jest w stanie zaoferować nam dobre rozwiązanie w podobnej liczbie iteracji.

Zadanie 5

Metodą bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji y = 3x i y = e^x.
Aby znaleźć odpowiedni przedział [a, b] wygenerowałem w programie Desmos wykres funkcji f(x) = 3x-$\boldsymbol{e^x}$ (jest to funkcja, którą będę rozważać).



Dane testowe:

Zmienna	Wartość
f(x)	x→3x-$\boldsymbol{e^x}$
a	0.5 dla x_1; 1.5 dla x_2
b	0.8 dla x_1; 1.6 dla x_2
delta	0.0001
epsilon	0.0001

Wyniki:

x	Zwracane wartości
x_1	0.6190917968749999, 3.486661493345977e-5, 11, 0
x_2	1.512109375, 3.868007140983565e-5, 8, 0

Wyniki z Wolfram Alpha:

Decimal approximation:

0.61906128673594511215232699402092223330147177726296935245983607 44
…

Decimal approximation:

1.51213455165784247389673967807203870460365038513535945425928547 39
…

Wniosek: Jak widać, metoda bisekcji dobrze obliczyła punkty przecięcia podanych w treści funkcji. Do rozwiązania tego typu zadań metoda bisekcji wymaga dodatkowej analizy problemu. W tym przypadku, analiza wykresu funkcji okazała się niezbędna przy dobieraniu odpowiednich parametrów początkowych tej metody. Porównując z wynikami z programu Wolfram Alpha można stwierdzić, że metoda zwróciła wartości zgodne z zadanymi dokładnościami.

Zadanie 6

Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x} - 1$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Rozwiązaniem równania f_1(x) = 0 jest x = 1, natomiast f_2(x) = 0 jest x = 0.

Wyniki dla f_1 metodą bisekcji dla przedziałów:

Przedział	Wynik
[-2.0, 1.3]	0.9999908447265624, 9.15531534717573e-6, 15, 0
[-2.0, 2.0]	1.0, 0.0, 2, 0
[-15.0, 2.0]	0.9999990463256836, 9.536747711536009e-7, 20, 0
[-34.7, 52.25]	1.000006949901579, -6.949877428441553e-6, 22, 0

Metoda zwróciła poprawne wyniki dla każdego z przedziałów, nie ważne jak długiego - jest dlatego, że jest zbieżna globalnie. W przypadku przedziału [−2.0, 2.0] zwróciła dokładny wynik, ponieważ x = 1.0 znajduje się na środku przedziału [0.0, 2.0], do którego algorytm przechodzi po pierwszej iteracji.

Wyniki dla f_1 metodą Newtona dla maxit = 100:

x_0	Wynik
0.5	0.9999999998878352, 1.1216494399945987e-10, 4, 0
-5.0	0.9999999999251376, 7.486256059507923e-11, 7, 0
4.0	0.9999999995278234, 4.721767421500545e-10, 21, 0
10.0	NaN, NaN, 100, 1

Metoda w trzech pierwszych wywołaniach zwraca poprawne wyniki. O ile dla dwóch pierwszych znajduje je stosunkowo szybko, to dla x_0 = 4.0 liczba iteracji znacznie się zwiększa, a w przypadku x_0 = 10.0 otrzymujemy kod błędu 1, oznaczający brak znalezienia rozwiązania w maxit iteracjach, a jako wynik Nan. Dzieje się tak, ponieważ w metodzie Newtona wykorzystujemy wzór $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$, a dla f(x) =$e^{1-x}$ −1 wyrażenie $\frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$ przyjmuje postać $\frac{e^{1-x}-1}{-e^{1-x}}$. Mianownik dla x > 5 jest bardzo bliski 0, przez występuje błąd reprezentacji w arytmetyce, w wyniku którego dostajemy 0 w mianowniku, a jako wynik NaN. Metoda Newtona jest również zbieżna lokalnie, a nie globalnie.

Wyniki dla f_1 metodą siecznych dla maxit = 100:

x_0	x_1	Wynik
-1.0	0.0	0.9999990043764041, 9.956240916153547e-7, 6, 0
-2.0	1.5	1.0000000218730498, -2.1873049593779115e-8, 6, 0
-2.0	-3.0	0.9999970015876295, 2.9984168656849164e-6, 9, 0
10.0	11.0	10.0, -0.9998765901959134, 2, 0

Metoda siecznych zachowuje się podobnie do metody Newtona - im przybliżenia początkowe są bliższe do rozwiązania faktycznego i bliższe do siebie nawzajem, tym lepsze jest przybliżenie oraz jego znalezienie wymaga mniej iteracji. Jest tak, ponieważ metoda ta również jest zbieżna lokalnie. W przypadku wybrania odległych przybliżeń od rzeczywistego rozwiązania możemy otrzymać możemy otrzymać zarówno dobre jak i złe wyniki, wszystko jest zależne od monotoniczności badanej funkcji.

Wyniki dla f_2 metodą bisekcji dla przedziałów:

Przedział	Wynik
[-2.0, 1.3]	-1.907348632920158e-6, -1.9073522709024344e-6, 18, 0
[-2.0, 2.0]	0.0, 0.0, 1, 0
[-15.0, 2.0]	-1.9073486328125e-6, -1.9073522707947765e-6, 19, 0
[-34.7, 52.25]	9.310245512208098e-6, 9.310158831940109e-6, 22, 0

Podobnie jak dla f_1, metoda bisekcji zwróciła wyniki zgodne z zadaną dokładnością.

Wyniki dla f_2 metodą Newtona dla maxit = 100:

x_0	Wynik
-2.5	-3.3084197593330218e-6, -3.3084307049924325e-6, 7, 0
-5.0	-9.064102913053547e-6, -9.064185071387511e-6, 10, 0
1.0	0.0, 0.0, 0, 2
5.0	15.194283983439147, 3.827247505782993e-6, 9, 0

Dla dwóch pierwszych wywołań metoda Newtona zwraca poprawne wyniki. Nie można wybrać x_0 = 1, ponieważ otrzymujemy kod błędu 2, bo $f'_2(1)$ = 0. Dla x_0= 5.0 metoda zwróciła wynik poprawny względem dokładności przybliżenia wartości f(x), jednak sam x jest bardzo odległy od faktycznego rozwiązania równania. Dla tej metody dobór parametrów początkowych ma bardzo istotny wpływ na ostateczny wynik.

Wyniki dla f_2 metodą siecznych dla maxit = 100:

x_0	x_1	Wynik
-2.0	-1.0	-6.982568902521766e-6, -6.982617658960467e-6, 7, 0
-3.0	-2.0	-2.466940303935572e-8, -2.4669403647935173e-8, 10, 0
1.0	2.0	14.787653201811631, 5.593750238217686e-6, 14, 0
4.0	5.0	14.445548632765878, 7.693287836872918e-6, 12, 0

Również dla f_2 metoda siecznych zachowuje się podobnie do metody Newtona.

Wniosek: Metoda bisekcji zwróciła poprawne wyniki, również przedział nie miał znaczenia (dobry przedział początkowy gwarantował dokładną wartość).
Metoda Newtona zwróciła ciekawe wyniki dla przybliżeń początkowych > 1; x ~ 15 jest dalekie od faktycznego miejsca zerowego, jednak prawidłowe pod względem zadanego błędu. Z kolei dla x = 1, pochodna rozważanej funkcji jest bliska 0, więc algorytm od razu kończy działanie z kodem błędu = 2.
Metoda siecznych miała problem z dalekim otoczeniem x_0, jednak wartości funkcji w otrzymanych wynikach również mieszczą się w zadanym błędzie. W przypadku metod Newtona oraz siecznych, wybór parametrów początkowych okazał się kluczowy.

Na podstawie powyższych eksperymentów potwierdza się fakt, że metoda bisekcji jest najstabilniejsza (zbieżność globalna), ale i najwolniejsza. Dwie pozostałe metody są o wiele szybsze (zbieżność lokalna), ale w przypadku źle dobranych parametrów początkowych mogą zwrócić niezadowalające nas wyniki.