INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

9 de febrero de 2021

Capítulo 1

MATRICES - TIPOS - ÁLGEBRA DE MATRICES

Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución.
RENÉ DESCARTES

LOGRO DE LA SESIÓN:
"Al finalizar la sesión, el estudiante ubica los elementos de una matriz por medio de la lectura de filas y columnas e identifica los diferentes tipos de matrices y realiza operaciones con matrices"

1.1. Matriz

Una matriz $A_{m\times n}$ es un arreglo rectangular $m \times n$ de números dispuestos en m filas (reglones) y n columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notación:
$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$: Matriz de m filas y n columnas.

a_{ij} : Elemento de la matriz ubicado en la $i-esima$ fila y la $j-esima$ columna

1.2. Tipos de Matrices

1.2.1. Matriz Fila

Es aquella matriz formada por una sola fila o reglón

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

1.2.2. Matriz Columna

Es aquella matriz formada por una sola columna.

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

1.2.3. Matriz Rectangular

Es aquella matriz donde el número de filas y columnas son diferentes.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 12 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

1.2.4. Matriz Cuadrada

Es aquella matriz donde el número de filas y columnas son iguales. Además, a los elementos a_{ij}, con $i = j$, se le llama **diagonal principal**.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

1.2.5. Matriz Nula

Es aquella matriz cuyos elementos son todos nulos.
$a_{ij} = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

1.2.6. Matriz Triangular Superior

Es aquella matriz **cuadrada** cuyos elementos que quedan debajo de la diagonal principal son todos nulos. $a_{ij} = 0\ ;\ \forall i > j$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

1.2.7. Matriz Triangular Inferior

Es aquella matriz **cuadrada** cuyos elementos que quedan encima de la diagonal principal son todos nulos. $a_{ij} = 0\ ;\ \forall i < j$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

1.2.8. Matriz Diagonal

Es aquella matriz **cuadrada** cuyos elementos que no están en la diagonal principal son todos nulos.$a_{ij} = 0\ ;\ \forall i \neq j$. Es triangular superior e inferior a la vez.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

1.2.9. Matriz Identidad (I)

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad. $a_{ij} = 0\ ;\ \forall i \neq j\ ;\ a_{ij} = 1\ ;\ \forall i = j$. Se representa por la letra I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

1.2.10. Matrices Idénticas

Dadas las matrices $A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden, se dice que son iguales si se verifica que: $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$; $\forall j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} a = x & b = y \\ c = z & d = w \end{matrix}$$

1.2.11. Matriz Transpuesta

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, su transpuesta es el intercambio de sus filas por columnas, se denota como $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$\Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Propiedades con Transpuesta de Matrices

1. $\left(A^t\right)^t = A$
2. $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
3. $(A + B)^t = A^t + B^t$
4. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
5. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

1.2.12. Matriz Simétrica

Es aquella matriz **cuadrada** que es igual o idéntica a su matriz transpuesta, es decir $A = A^t$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3x3}$$

1.2.13. Matriz Anti-simétrica

Es aquella matriz **cuadrada**, cuya transpuesta coincide con su matriz opuesta, es decir $A^t = -A$, por consiguiente los elementos de la diagonal principal deben de ser nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \\ -7 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

1.3. Traza de una Matriz

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$; se llama traza de A ($Tr(A)$) al número que resulta de la suma de los elementos de la diagonal principal

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

1.4. Operaciones con Matrices

1.4.1. Suma de Matrices

Dadas dos matrices A y B del mismo orden, se define su suma como una matriz C del mismo orden, la cual está compuesta por la suma de cada elemento de la matriz A con su correspondiente elemento en la matriz B.

$$[a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [c_{ij}]_{mxn}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.2. Resta de Matrices

La resta de matrices es la suma de A con el opuesto de B.

$$[a_{ij}]_{mxn} - [b_{ij}]_{mxn} = [c_{ij}]_{mxn}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Producto por un Escalar

Es la matriz B cuyos elementos se obtienen de multiplicar cada elemento de la matriz A por un número α

$$\alpha.[a_{ij}]_{mxn} = [\alpha.a_{ij}]_{mxn} = [b_{ij}]_{mxn}$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.4. Multiplicación de Matrices

Para poder multiplicar dos matrices A y B es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B, de lo contrario no se podrá evaluar el producto. Y el orden de la nueva matriz C estará dado por el número de filas de A y el número de columnas de B. La multiplicación se da filas por columnas.

$$[a_{ij}]_{pxq} \cdot [b_{ij}]_{qxn} = [c_{ij}]_{pxn}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (-1)(0) + (2)(1) + (0)(2) & (-1)(-3) + (2)(2) + (0)(-1) \\ (3)(0) + (1)(1) + (2)(2) & (3)(-3) + (1)(2) + (2)(-1) \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Nota: Dado como está definida la multiplicación de matrices, se tiene que la multiplicación de matrices, en general, no cumple la propiedad conmutativa. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Propiedades con Adición y/o Multiplicación de Matrices

- $k(A + B) = kA + kB$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- $A \cdot B = 0$, no implica que $A = 0$ o que $B = 0$
- $A \cdot B = A \cdot C$, no implica que $B = C$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 1 Sesión 01

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Determine $M = AB + 2A$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución. :

R.: $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}$

2. Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

Determine X si $(A+B)^t = B^2 - 2X$

Solución. :

R.: $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 7 & 9 & -9 \\ 13 & -17 & 33 \end{bmatrix}$

3. Plaza Vea quiere ofertar tres paquetes X, Y, Z de azúcar, arroz y fideo. El paquete X contiene 1 kg de azúcar, 3 kg de arroz y 2 kg de fideo Extra Light; el paquete Y contiene 2 kg de azúcar, 1 kg de arroz y 6 kg fideo Extra Light; el paquete Z contiene 1 kg de cada uno de los anteriores. Si se quiere sacar a la venta 80 paquetes del artículo X, 70 de Y y 140 de Z ¿Cuántos kilogramos se necesitará de cada producto?. Plantee matricialmente.

Solución. :

R.: $\begin{bmatrix} 360 \\ 450 \\ 720 \end{bmatrix}$

4. Obtener la matrices X; Y que verifican los sistemas matriciales siguientes:

$$2X - 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} ; X - Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución. :

R: $X = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

5. Expresar explícitamente la matriz M y determine la $Tr(M)$, si:

$$M = [m_{ij}]_{3x3} = \begin{cases} 3^{i+j} & ; \quad i < j \\ i^2 + j^2 & ; \quad i = j \\ 2^{i-j} & ; \quad i > j \end{cases} ;$$

Solución. :

R.: $Tr(M) = 28$

6. Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 4x + 9y & 5x \\ 18 & x - 2y \end{bmatrix}$ donde se cumple que: $a_{22} = 0$ y $a_{12} = 2 + a_{21}$. Calcular: $x + y$

Solución. :

R.: 6

7. Dadas las matrices:
$A = \begin{bmatrix} 2a + b & -4 \\ 12 & 3c + d \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 19 & a + 2b \\ 3c & 15 \end{bmatrix}$
Si A y B son iguales, determine el valor de: $E = \frac{a-b}{d-c}$

Solución. :

R.: -23

8. Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C. En el mes de febrero, el primer cliente y el segundo duplicaron el número de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, y el cuarto cliente no hizo pedido alguno.

a) Construye las matrices correspondiente a las ventas de enero, febrero, enero y febrero

b) Si los precios de los artículos son 100 €, 80 € y 90 €, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica por sus pedidos de enero y febrero.

Solución. :

R.: $\begin{bmatrix} 4440 \\ 2820 \\ 1080 \\ 1250 \end{bmatrix}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la matriz $C = A \cdot B^t$, si las matrices A y B satisfacen sistema matricial siguiente:

$$3A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; -2A + B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución. :

R: $C = \begin{bmatrix} 50 & -20 \\ -45 & 210 \end{bmatrix}$

2. El 1ro. de mayo, la cantidad de acciones en las compañías x, y, z, w, propiedad de André, Leonel, Sophie y Aarón esta dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{lcccc} & x & y & z & w \\ \textit{André} & 200 & 150 & 300 & 20 \\ \textit{Leonel} & 300 & 120 & 220 & 35 \\ \textit{Sophie} & 150 & 160 & 200 & 60 \\ \textit{Aarón} & 0 & 80 & 40 & 100 \end{array}$$

y los respectivos precios al cierre de x, y, z y w fueron de \$ 25, \$ 42, \$ 45 y \$ 18 la acción. Hallar el valor de las acciones en las diferentes compañías de cada accionista.

Solución. :

R.: $\begin{bmatrix} 25160 \\ 23070 \\ 20550 \\ 6960 \end{bmatrix}$

3. Sea: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcula la matriz B tal que $A^2 + B = A \cdot A^t$

Solución. :

R.: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Determine la matriz X que cumple la ecuación: $3X + 2A = 4B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución. :

R.: $X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 10 \\ -20 & 8 & -8 \end{bmatrix}$

5. Si A es una matriz identidad:

$$A = \begin{bmatrix} x & m-1 & n-2 \\ q+1 & y & p-3 \\ r+2 & t+3 & z \end{bmatrix}$$

Calcular $xyz + mnp + qrt$

Solución. :

R.: 1

6. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 1-y & 3 \\ 2 & -3 & z+2 \\ x & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$, es una matriz simétrica. Hallar el valor de $E = 2x - y + 3z$

Solución. :

R.: $E = 16$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREA DOMICILIARIA

1. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$. Determine la matriz M que satisface la ecuación $(AB + 2M)^t = \frac{1}{2}C$

2. Si: $P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$. Determine R si $(P+Q)^2 + R = Q$

3. Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N y 30 L; de sillas, 200 E, 150 N y 100 L; de armarios, 40 E, 30 N y 20 L. Representa esta información en una matriz y calcule la matriz que resulta de la producción de un año.

4. Obtener la matrices X; Y que verifican los sistemas matriciales siguientes:
$3X - 5Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; $-X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y determine $M = X - Y$

5. Dadas la matrices $A = [a_{ij}]_{4x3} = \begin{cases} i+j & ; \ i = j \\ -2i+5j & ; \ i > j \\ -i+j & ; \ i < j \end{cases}$; $B = [b_{ij}]_{4x3} = \begin{cases} 2i-j & ; \ i < j \\ i+j & ; \ i > j \\ 2i+3j & ; \ i = j \end{cases}$.
Determine $N = B^t A$

6. Si $A = \begin{bmatrix} x & x+2y & 10 \\ 5 & 2y & 3z+x \\ 2y+3z & 7 & 3z \end{bmatrix}$ es simétrica, calcular la *traza*(A)

7. Si $B = \begin{bmatrix} 8x & x^2-16 & z-7 \\ 3y-10+y^2 & 4y & 0 \\ 0 & 3z-21 & z \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal con $x, y, z \in \mathbb{N}$. Determine la traza de dicha matriz

8. Dadas $A = \begin{bmatrix} 2x-3 & 3y+2x \\ w+3z & 1-z \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} x+1 & y-2 \\ x-w & 2z+7 \end{bmatrix}$ matrices iguales. Determine el valor de $R = x^2 - y^2 + z^2 - w^2$

9. Resolver la ecuación matricial $2A + 3X = 3B$ y dar como respuesta la traza de X, siendo:
$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 \\ 5 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

10. Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ Determine X^t si $(AB + 2X)^t = 3A - 2B^t$

11. Determine la traza de la matriz A, siendo $A = \begin{bmatrix} 3y & 3x & y+3 \\ 2 & x^2-3 & 5 \\ 3 & y & 1 \end{bmatrix}$ y además se cumple que $a_{22} = a_{33}$; $a_{11} + a_{32} = 2a_{13}$. Considere que $x, y \in \mathbb{N}$

Respuestas:

1: $M = \begin{bmatrix} -11/2 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2: $R = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -10 \\ 38 & -30 & 44 \\ -16 & 20 & -25 \end{bmatrix}$

3: $P = \begin{bmatrix} 600 & 2400 & 480 \\ 480 & 180 & 360 \\ 360 & 1200 & 240 \end{bmatrix}.$

4: $M = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 11/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

5: $N = \begin{bmatrix} -6 & 43 & 72 \\ -13 & 72 & 82 \\ -37 & 77 & 138 \end{bmatrix}$

6: $traza(A) = 11$

7: $traza(B) = 47$

8: $R = -30$

9: $traza(X) = \frac{1}{3}$

10.: $X^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -9 \\ 10 & -11 & 5/2 \\ -11 & 19/2 & -11/2 \end{bmatrix}$

11: $traza(A) = 11$