MATRICES - SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El mayor riesgo es no correr ningún riesgo. En un mundo que cambia muy rápidamente, la única estrategia que tiene garantizado el fracaso en no arriesgar.
MARK ZUCKERBERG

LOGRO DE LA SESIÓN:
"Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios aplicadas a la ingeniería y otros campos de estudio mediante los sistemas de ecuaciones lineales basado en la teoría de matrices"

1.9. Sistema de Ecuaciones Lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial

$$SistemaLineal$$
$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} \end{array}$$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.

X: Matriz de variables

B: Matriz de constantes

Toda ecuación matricial de la forma $A \cdot X = B$ puede ser resuelta mediante tres métodos. De los cuales destacaremos dos.

1.9.1. Método de la Matriz Inversa

Dada ecuación matricial $A \cdot X = B$, procedemos a hallar la $|A|$, para luego considerar que:

- Si $|A| \neq 0$, entonces existe la inversa A^{-1}; por lo tanto existe una solución única X, la cual se determina mediante el producto: $X = A^{-1} \cdot B$
- Si $|A| = 0$, entonces **NO** existe la inversa A^{-1}, en consecuencia **NO** existe una solución única X, pero pueden existir otro tipo de soluciones.

Nota: Este método se aplica sólo a sistemas de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

Ejemplo 7. : Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Solución. :

1.9.2. Método de Eliminación de Gauss-Jordán

Dado $A \cdot X = B$, procedemos a formar la matriz aumentada $\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix}$, la cual reduciremos a una matriz canónica o de forma escalonada por filas, para luego escribir un nuevo sistema con esta nueva matriz, el cual se resolverá por sustitución.

Nota: El método es aplicado a cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales (" n " ecuaciones, " m " incógnitas) y no es necesario que $|A| \neq 0$, o que exista A^{-1}. Estos son casos mucho mas reales y que ocurren con frecuencia en las ingenierías y otros campos de estudio.

Soluciones de un Sistema Lineal en forma escalonada por filas:

Todo sistema lineal reducido mediante el método de Gauss – Jordán puede presentar tres tipos de soluciones.

- **Una única solución:** Si cada una de las incógnitas en la forma escalonada por reglones es una incógnita inicial, entonces el sistema tiene exactamente una solución y es llamado **CONSISTENTE.**
- **No hay solución:** Si la forma escalonada por reglones contiene un reglón que representa la ecuación $0 = k$, donde k es un número distinto de cero, entonces el sistema no tiene solución y es denominado **INCONSISTENTE.**
- **Infinitas soluciones:** Si las incógnitas en la forma escalonada por reglones no son todas ellas incógnitas iniciales y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene un número infinito de soluciones. En este caso el sistema es llamado **CONSISTENTE INDETERMINADO**. Resolvemos el sistema al poner la matriz en forma escalonada por reglones reducida y expresamos las incógnitas iniciales en términos de las incógnitas no iniciales.

Las siguientes matrices, nos ilustran los tres casos.

$$UnicaSolución \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad NohaySolución \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$InfinitasSoluciones \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8. : Determine el tipo de solución del sistema siguiente y exprese el conjunto solución adecuadamente.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución. :

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 2 Sesión 02

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Plaza Vea quiere ofertar tres tipos de paquetes A, B y C. El paquete A contiene 1kg de azúcar, 3kg de arroz y 2kg de fideo Extra Light; el paquete B contiene 2kg de azúcar, 1kg de arroz y 6kg fideo Extra Light; el paquete C contiene 1kg de cada uno de los anteriores ¿Cuántos paquetes se podrá elaborar si se cuenta con 36kg de azúcar, 45kg de arroz, 90kg de fideo Extra Light? Exprese el sistema y resuelva por el método de eliminación gaussiana. (Vea el mismo ejercicio de la primera semana y razone Ud. por que se trabajan de manera distinta)

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2. Un medico recomienda que un paciente tome 50 mg de Niacina, de Riboflavina y de Tiemina diariamente para aliviar una deficiencia vitamínica. En su maletín de medicinas en casa, el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitaminas. Las píldoras VitaMax contienen 5 mg de N, 15mg de R y 10 mg de T, Vitron contiene 10 mg de N, 20mg de R y 10 mg de T y Vitaplus contienen 15 mg de N y 10 mg de T. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe tomar a diario para obtener 50 mg de cada vitamina?

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas *T1*, *T2* y *T3*, cada prenda pasa por el proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lotes. Para producir un lote del tipo 1 se necesitan *30min* para cortarlas, *40min* para coserlas y *50min* para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2 se necesitan *50min* para cortar, *50min* para coser y *50min* para planchar y empaquetar. Para el tipo 3 se necesitan *65min* para cortar, *40min* para coser y *15min* para planchar y empaquetar. ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan *8* horas en cortar, *8* en coser y *8* horas en planchar y empaquetar?.

   a) Exprese como un sistema y determine su tipo de solución

   b) Si se produjeran 2 lotes del *T3*, ¿Cuanto se debe producir de los otros lotes?

   Solución. :

   R.: a) $X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}z \\ \frac{48}{5} - \frac{14}{5}z \\ z \end{bmatrix}$; $z \in \langle 0; \frac{24}{7} \rangle$;

   b) $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Determine el tipo de solución del sistema siguiente y exprese el conjunto solución adecuadamente

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine matricialmente el tipo de solución del sistema siguiente y exprese el conjunto solución adecuadamente:
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$
Solución. :

R.: $X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Un joyero tiene tres clases de monedas A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo B tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo C tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

Solución. :

R.: $X=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Determine matricialmente el tipo de solución del sistema siguiente y exprese el conjunto solución adecuadamente:
$$\begin{cases} 3x+2y-2z=4 \\ 4x+y-z=7 \\ x+4y-4z=-2 \end{cases}$$
Solución. :

R.: $X=\begin{bmatrix} 2 \\ -1+z \\ z \end{bmatrix}$

4. Resolver por el método de eliminación de Gauss - Jordán $\begin{cases} 3x+4y-3z=5 \\ x+2y-2z=1 \\ 2x+2y-3z=5 \end{cases}$

Solución. :

R.: $X=\begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREA DOMICILIARIA

1. Resolver matricialmente por el método de la matriz inversa $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=2 \\ x+z=5 \end{cases}$

2. Resolver por el método de eliminación de Gauss - Jordán $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ 3x-2y-z=1 \\ 4x-7y+3x=10 \end{cases}$

3. Resolver por el método de eliminación de Gauss - Jordán $\begin{cases} x-y+z=1 \\ -x+y-z=-1 \\ 2x-2y+2z=2 \end{cases}$

4. Resolver: $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ x-y+2z-w=2 \\ x+2y-2z+w=3 \\ x+y+z+w=2 \end{cases}$. Determine el conjunto solución

5. Un nutricionista está elaborando una comida que contenga los alimentos A, B y C. Cada gramo del alimento A contiene 1 unidad de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidrato. Cada gramo del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 1 unidad de grasa y 1 unidad de carbohidratos, y en el alimento C encontramos 1 unidad de proteína, 3 unidades de grasas y 2 unidades de carbohidrato. Si la comida debe proporcionar exactamente 14 unidades de proteína, 14 unidades de grasas y 9 unidades de carbohidrato, ¿Cuantos gramos de cada tipo de alimento deben ser utilizados? Exprese el sistema y resuelve por el método de eliminación gaussiana o matriz inversa.

6. A una función de teatro asisten hombres, mujeres y niños. Cada niño paga 10 soles; cada mujer 50 soles y cada hombre 60 soles. El día de hoy la recaudación ha sido de 16 300 soles, con 340 asistentes en total. Se sabe además que las mujeres son el doble de la diferencia entre los hombres y los niños (asistieron más hombre que niños). ¿Cuántos hombres, mujeres y niños asistieron a dicha función de teatro?. Modele un sistema de ecuaciones y resuelva por el método de eliminación gaussiana o matriz inversa

7. Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro artículos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación un turno de 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro artículos está dado por:

Máquina	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 3	Artículo 4
1	1	2	1	2
2	2	0	1	1
3	1	2	3	0

¿Cuantas unidades se deben producir de cada uno de los 4 artículos un día de 8 horas completas? Determine todos los casos posibles

8. Tres compuestos se combinan para formar tres tipos de fertilizantes. Una unidad del fertilizante del tipo I requerido *10kg* del compuesto A, *30kg* del compuesto B, y *60kg* del compuesto C. una unidad del tipo II requiere *20kg* del A, *30kg* del B, y *50kg* del C. Una unidad del tipo III requiere *50kg* del A, *50kg* del C. Si hay disponibles 1600kg del A, 1200kg del B y 3200kg del C. ¿Cuántas unidades de los tres tipos de fertilizantes se pueden producir si se usa todo material químico disponible?

Respuesta:

1: $x=\frac{21}{2}$; $y=-4$; $z=-\frac{11}{2}$
2: $x=2$; $y=1$; $z=3$
3: $x=1+t-r$; $y=t$; $z=r$
4: $x=\frac{5}{4}$; $y=\frac{5}{2}$; $z=\frac{1}{2}$; $w=\frac{-9}{4}$
5: $x=4$; $y=3$; $z=1$
6: $x=130$; $y=160$; $z=50$
7: $x=4-w$; $y=2-w$; $z=w$
8: $x=20$; $y=20$; $z=20$