

## Capítulo 2

# VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

*Considero más valiente  
al que conquista sus  
deseos, que al que  
conquista a sus  
enemigos, ya que la  
victoria más dura es la  
victoria sobre uno  
mismo.*

ARISTÓTELES



### LOGRO DE LA SESIÓN:

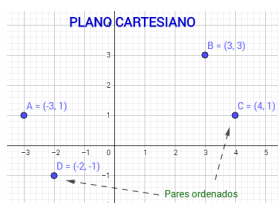
“Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce al Plano Cartesiano como un Plano Vectorial y a los elementos llamados pares ordenados como vectores; realiza operaciones entre vectores”

### 2.1. Producto Cartesiano

Sean los conjuntos  $A$  y  $B$ , se llama producto cartesiano de  $A$  y  $B$ , al conjunto de los pares ordenados  $(a, b)$ , donde  $a$  pertenece al conjunto  $A$ , y “ $b$ ” pertenece al conjunto  $B$  y se denotara por  $A \times B$ , es decir:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Todos estos elementos o pares ordenados del producto cartesiano pueden ser representados en el plano de coordenadas cartesianas de ejes  $X$  e  $Y$ .



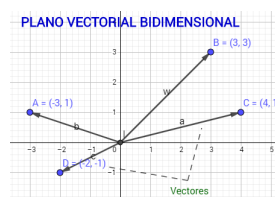
Ahora bien y respecto al tema de vectores, lo que llamamos **pares ordenados** será llamado **vector bidimensional** y el **plano de coordenadas cartesianas** será llamado **plano vectorial bidimensional**.

### 2.2. Vector Bidimensional

Un vector bidimensional es un par ordenado de números reales  $(x, y)$ , donde “ $x$ ” es llamada la primera componente y “ $y$ ” es llamada la segunda componente.

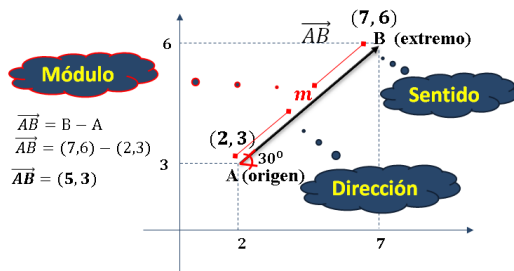
### 2.3. Plano Vectorial Bidimensional

Es el plano cartesiano conformado por diversos pares ordenados, que ahora serán representados como radio vectores o vectores, según sea el caso.



## 2.4. Representación de un Vector como segmento orientado

Un vector se representa como un segmento dirigido con origen o punto inicial y un extremo o punto terminal. Así también, todo **vector** presenta una **magnitud**, una **dirección** y un **sentido** y puede estar presente en cualquier parte del plano vectorial.



### Notación:

$\vec{AB} = (5, 3)$ : es un **vector** del cual se conoce el origen y el final.

$\vec{a} = (-1, 5)$ : es un **vector** del cual no se conoce ni el origen ni el final.

$a = (3, 5)$ : es un **radio vector**, que a su vez puede ser considerado un punto en el plano cartesiano. Los radio vectores tienen un punto de origen en el centro del plano vectorial.

## 2.5. Magnitud, norma o módulo de un Vector

La magnitud o módulo de un vector  $\vec{v}$  es un número real no negativo asociado a dicho vector y representado por  $\|\vec{v}\|$ .

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \implies \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

## 2.6. Vector Unitario

Se llama vector unitario, al vector cuyo módulo es la unidad, es decir:  $\vec{v}$  es un vector unitario si y solo si  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$

**Teorema.** Dado un vector  $\vec{v} \neq 0$ , entonces el vector  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  es un vector unitario.

## 2.7. Vectores Canónicos

Son vectores de módulo 1 que están presentes y son paralelos al eje X (eje de las abscisas) y al eje Y (eje de las ordenadas) y se denotan como  $\hat{i} = (1, 0)$ ;  $\hat{j} = (0, 1)$  respectivamente.

Todo vector puede ser expresado en función de sus vectores canónicos

**Ejemplo 9.** Dados los puntos o radio vectores  $P = (1, -8)$ ;  $Q = (-3, 5)$ . Determine el módulo del vector  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ , su correspondiente vector unitario y exprese el vector y su vector unitario en su forma canónica.

**Solución.** :

## 2.8. Operaciones con Vectores

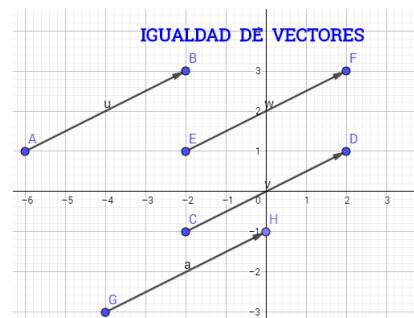
### 2.8.1. Igualdad de Vectores

Dos vectores  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ;  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  son iguales si y solo si sus componentes correspondientes toman los mismos valores; es decir:

$$\text{Si: } \vec{a} = \vec{b} \implies (a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

$$\iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

**Geométricamente (gráficamente)**, dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido



**Ejemplo 10.** : Dados los vectores iguales  $\vec{a} = (3x - 19, 5 - 3y)$ ;  $\vec{b} = 4y\hat{i} + (2x - 2)\hat{j}$  Determine el vector unitario de  $\vec{R} = (x, 12y)$ .

**Solución.** :

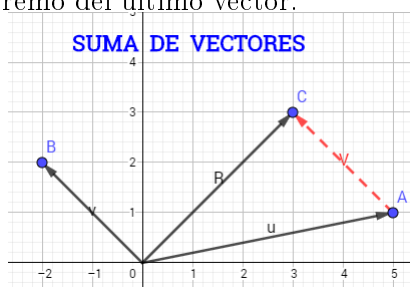
### 2.8.2. Suma de Vectores

Dados los vectores  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  ;  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ , la suma  $\vec{a} + \vec{b}$  es el **vector resultante**  $\vec{R}$  que se obtiene sumando sus respectivas componentes, es decir:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$$

$$\vec{R} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

**Geoméricamente**, la suma de vectores es poner un vector a continuación de otro haciendo coincidir el extremo de uno con el origen de otro (sin cambiar su magnitud, dirección, ni sentido), para finalmente determinar la resultante uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector.



**Ejemplo 11.** Siendo  $\vec{a} = (5, 1)$ ;  $\vec{b} = (-2, 2)$ . Tenemos que:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (5, 1) + (-2, 2)$$

$$\vec{R} = (3, 3) \text{ (ver gráfico)}$$

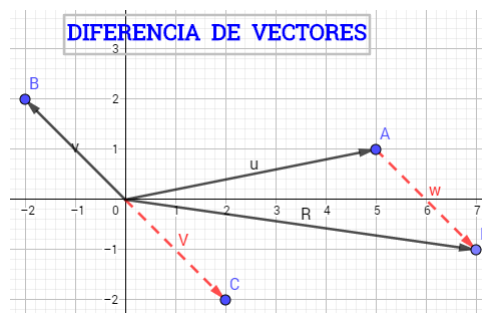
### 2.8.3. Diferencia de Vectores

Dados los vectores  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ , la diferencia  $\vec{a} - \vec{b}$  es el vector resultante que se obtiene sumando el vector  $\vec{a}$  al vector opuesto (se cambia el sentido) de  $\vec{b}$ , es decir:

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2)$$

$$\vec{R} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

**Geoméricamente**, la diferencia de vectores es cambiar el sentido a uno de ellos, para luego poner un vector a continuación de otro y obtener la resultante



**Ejemplo 12.** Siendo  $\vec{a} = (5, 1)$ ;  $\vec{b} = (-2, 2)$ . Tenemos que:

$$\vec{R} = \vec{a} - \vec{b} = (5, 1) - (-2, 2)$$

$$\vec{R} = (7, -1) \text{ (ver gráfico)}$$

### 2.8.4. Producto de un Escalar por un Vector

Sea el escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y sea el vector  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ , llamaremos producto de  $\lambda$  por  $\vec{a}$  al vector resultante cuyas componentes deben ser multiplicadas por  $\lambda$ , es decir:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

**Geoméricamente**, el producto de un escalar por un vector, hace que este último varíe su magnitud o sentido.



**Ejemplo 13.** Dado el escalar  $\lambda = 3$  y el vector  $\vec{a} = (2, 1)$ , tenemos que:

Calcular  $\lambda \vec{a}$  (ver gráfico)

$$\vec{R} = \lambda \vec{a} = 3(2, 1)$$

$$\vec{R} = (6, 3) \text{ (ver gráfico)}$$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 3

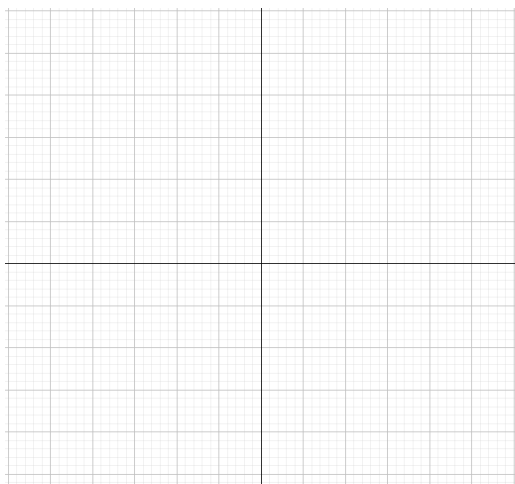
Sesión 01

**EJERCICIOS EXPLICATIVOS**

1. Dados los vectores:  $A = (2; 5)$ ;  
 $B = (6; -3)$ ;  $P = (3; 2)$ ;  $Q = (-2; -3)$ .

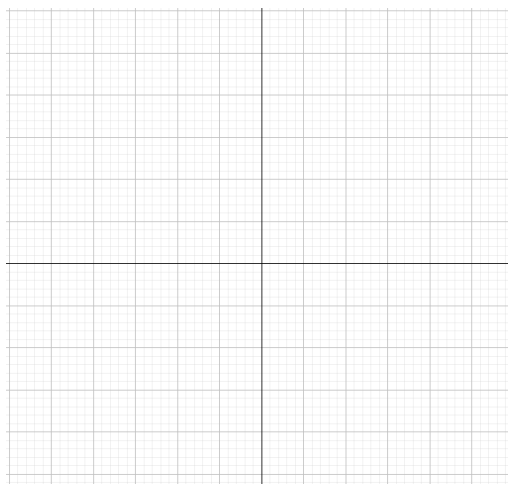
Grafique  $A$ ;  $B$ ;  $P$ ;  $Q$ ;  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{QP}$  y  $-\overrightarrow{AB}$

**Solución.** :



2. Halle el perímetro de la figura formada por la unión de los puntos o radio vectores  $A = (-3, 5)$ ;  $B = (2, 6)$ ;  $C = (5, 2)$ ;  $D = (1, -3)$  y  $E = (-2, -4)$ .

**Solución.** :



3. Determine el o los valores que pueda tomar el vector  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , si se tiene que:  $\|\vec{b}\| = \sqrt{5}$ ;  $b_1 = b_2 + 1$ .

**Solución.** :

4. Sean los vectores:  $\vec{a} = (3 + m; b - 2)$ ;  
 $\vec{b} = (6; 4)$ ;  $P = (2, b)$ ;  $Q = (3m, 2)$ .

Si  $\vec{a} + P = \vec{b} - 2\overrightarrow{QP}$ . Determine  $m - b$

**Solución.** :

R.:  $(2, 1); (-1, -2)$

R.:  $-\frac{19}{10}$

5. Determine el valor de  $\vec{x}$  en:

$$2\vec{x} - 3(1, -2) = 5(-1, 3) - \vec{x}$$

**Solución.** :

R.:  $(-\frac{2}{3}, 3)$ .

7. Los puntos  $A = (2; 1)$ ,  $B = (4; -1)$ ,  $C = (-1; 1)$  y  $D$  son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar las coordenadas del punto D.

**Solución.** :

R.:  $D(-3; 3)$

6. Si los vértices de un triángulo son:  $A = (-1; -3)$ ,  $B = (-5; 1)$  y  $C = (1; 3)$ . Compruebe, usando vectores, si se trata de un triángulo isósceles.

**Solución.** :

R.: *Sí*

8. Los vectores  $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ , cumplen que:  $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}$  y  $\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{c}$ . Siendo  $\vec{a}$  un vector unitario, determine la norma de  $\vec{b} + \vec{c}$   
(Sug. Expresé  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  en función del vector  $\vec{a}$ )

**Solución.** :

R.:  $\frac{4}{7}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Determine el vector  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ , si se tiene que:  $\|\vec{a}\| = 2$ ;  $\frac{a_1}{a_2} = 4$ .

**Solución.** :

R.:  $\left(\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

3. Si los vértices de un triángulo son:  $A = (3; 2)$ ,  $B = (-5; 12)$  y  $C = (8; 6)$ . Compruebe usando vectores si se trata de un triángulo isósceles, equilátero o triángulo rectángulo.

**Solución.** :

R.: Si

5. Sean los vectores:  $\vec{a} = (5; -7)$ ;  $\vec{b} = 10\hat{i} - 2\hat{j}$ ;  $P = (-2, 5)$ ;  $Q = (30, -7)$ . Determinar el módulo de  $\|2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{PQ}\|$

**Solución.** :

R.:  $8\sqrt{2}$

2. Determine el perímetro de la figura formada por los siguientes puntos:  $P = (1, 1)$ ;  $Q = (2, 3)$ ;  $R = (4, 2)$ ;  $S = (6, 1)$ .

**Solución.** :

R.:  $5 + 3\sqrt{5}$

4. Determine el valor de  $\vec{x}$  en:  
 $(15, -12) + 2[\vec{x} + (-6, 5)] = 4(1, -2) + \vec{x}$

**Solución.** :

R.:  $(1, -6)$

6. Dados los vectores  $\vec{a} = (3x; 2x + 4y)$  y  $\vec{b} = (5y + 1; 8)$ . Determine el valor de " $x + y$ ", sabiendo que ambos vectores son iguales

**Solución.** :

R.: 3

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

**TAREAS DOMICILIARIA**

1. Dados  $A = (3, -4)$ ;  $B = (8, -1)$ ;  $C = (-2, 5)$  Grafique:  $\overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{CB}$  y  $-\overrightarrow{BA}$
2. Determine el o los valores que pueda tomar el vector  $\vec{c} = (c_1; c_2)$ , si se tiene que:  
 $\|\vec{c}\| = 2\sqrt{5}$ ;  $c_2 = c_1 + 2$ .
3. Si los vértices de un triángulo son:  $(-2; -1)$ ,  $(2; 2)$  y  $(5; -2)$ . Compruebe usando vectores si se trata de un triángulo isósceles, equilátero o triángulo rectángulo.
4. Si los vértices consecutivos de un cuadrilátero son:  $A(-6; 2)$ ,  $B(3; 5)$ ;  $C(8; 1)$ ;  $D(-1; -2)$ . Compruebe usando vectores si se trata de un paralelogramo
5. Dados  $a = (3, -4)$ ;  $b = (8, -1)$ ;  $c = (-2, 5)$  Hallar:  $v = 2(a + c) + \frac{1}{3}(b - 2c)$
6. Dados los vectores:  $\vec{a} = 5i + 2j$ ;  $\vec{b} = -3i + 4j$  y  $\vec{c} = (7, 4)$ . Determine el vector  $\vec{x}$ , si:  
 $2\vec{x} + 5\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{c}$
7. Dados los puntos  $A = (2, 1)$ ,  $B = (3, 2)$  y  $C = (-4, -1)$ . Determine la longitud de  $\overrightarrow{BD}$ , sabiendo que el punto  $D$  está definido por la relación:  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
8. Los cuatro vértices consecutivos de un paralelogramo son  $A = (-1; 3)$ ,  $B$ ,  $C = (7; 4)$  y  $D$ , siendo  $M = (1, 2)$  el punto medio del lado  $AB$ . Hallar  $B$  y  $D$ .
9. Si  $(3x - 5y; -8 - x) = (26; x + 3y)$ . Determine  $\frac{x}{y}$
10. Sean los vectores:  $\vec{a} = (2x + y - 3; 5y - x - 8)$  y  $\vec{b} = (x + 3y - 11; 2x + 3y + 4)$ . Si  $\vec{a} = \vec{b}$ , determine el valor de  $S = 4x + 5y$
11. Sean los vectores:  $\vec{a} = 3i$ ;  $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ;  $P = (2; 3)$ ;  $Q = (10, -7)$ . Determinar el módulo de  $M = \sqrt{205} \left( \left\| 3\vec{b} - \overrightarrow{PQ} \right\| \right) - \left\| \vec{a} + \overrightarrow{QP} \right\|$
12. Dados los vectores:  $\vec{a} = 2i + 2j$ ;  $\vec{b} = -3i + 4j$  y  $\vec{c} = (0, 4)$ . Determine el módulo de  $\vec{x}$ , si:  $2\vec{x} + 5(\vec{a} - \vec{c}) = 4\vec{b}$

Respuesta:

- 2:  $(-4, -2)$ ;  $(2, 4)$
- 3: Isósceles y Triángulo Rectángulo
- 4: Sí
- 5  $(6, -\frac{5}{3})$
- 6:  $(-3, 9)$
- 7:  $\sqrt{80}$
- 8:  $B(3, 1)$ ;  $D(3, 6)$
- 9:  $-\frac{1}{2}$
- 10: 7
- 11:  $36\sqrt{5}$
- 12:  $\sqrt{290}$