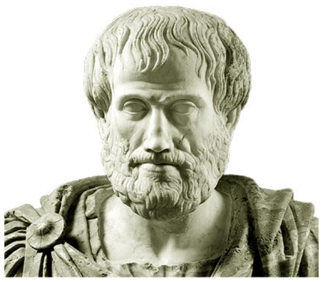
Capítulo 7

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

Considero más valiente al que conquista sus deseos, que al que conquista a sus enemigos, ya que la victoria más dura es la victoria sobre uno mismo.
ARISTÓTELES



LOGRO DE LA SESIÓN:
"Al finalizar la sesión de apredizaje el estudiante reconoce y realiza operaciones con números complejos"

7.1. Números Complejos

Un número complejo es una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, i la unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$.

En general, todo número complejo puede ser representado como $z = a + bi$, siendo a la parte real $(Re\{z\})$ y b la parte imaginaria $(Im\{z\})$. También podemos utilizar la forma (a, bi) la cual representa al vector z en el plano cartesiano.

Siendo la representación de z como la de un vector, este cumple todas las condiciones y propiedades de vectores.

$z = a + bi$ es su forma binomica

$z = (a, bi)$ es su forma cartesiana

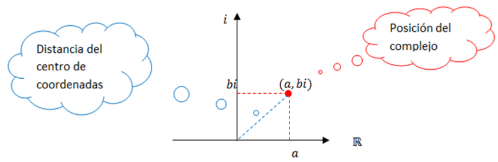
7.2. Módulo de un Número complejo

Dado $z = (a, bi)$ como vector (a, b) el módulo será:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Su interpretación ya no es la medida o valor de un complejo porque NO ES UN VECTOR, sino la distancia del centro de coordenadas al punto complejo ya que en el plano de Gauss los puntos complejos muestran una posición.

Puede tomarse al complejo como radio vector y entender su módulo como distancia o medida del radio vector. En este sentido al ser un vector la diferencia entre radio vectores, puede asumirse la distancia entre puntos como la distancia entre complejos.



7.3. Potencias de i

$\sqrt{-1} = i$
$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

7.4. Conjugado

Dado el número complejo $z = a + bi$, su correspondiente complejo conjugado es $\overline{z} = a - bi$ (solo se cambia el signo de la parte imaginaria)

Propiedades:
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$\overline{\overline{z}} = z$

7.5. Operaciones en $\mathbb{C}$

Para realizar operaciones con números complejos, podemos proceder como en el álgebra de números reales, siempre teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

7.5.1. Igualdad en $\mathbb{C}$

Dos números complejos $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$ son iguales si y solo si sus componentes correspondientes toman los mismos valores; es decir:

$$\text{Si: } z_1 = z_2 \Rightarrow (a, bi) = (c, di)$$

$$\Longleftrightarrow a = c \quad b = d$$

7.5.2. Suma de $\mathbb{C}$

Dados los números complejos $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$, la suma esta determinada por:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

7.5.3. Diferencia de $\mathbb{C}$

dados los números complejos $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$. La diferencia es el número complejo resultante:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$= (a - c) + (b - d)i$$

7.5.4. Producto de un Escalar por un complejo

Sea el escalar $k \in R$ y sea el números complejo $z_1 = a + bi$, llamaremos producto de k por z_1 al número complejo resultante:

$$k \cdot z_1 = k(a + bi) = (ka, kbi)$$

7.5.5. Multiplicación de $\mathbb{C}$

Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$, tenemos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

7.5.6. División de $\mathbb{C}$

Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$, tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo 48. Dados $z_1 = 3 + 5i$ y $z_2 = -4 + 3i$, determine la suma, resta, multiplicación y división de estos números complejos

Solución. :

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 10 Sesión 01

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $z_1 = (2, 3i)$; $z_2 = 3 - 2i$; $z_3 = -5 + i$. Determine el valor de
$M = (z_2)^2 - 3z_1 + 4\overline{z}_3 - \sqrt{-64} + i^{27}$
Solución. :

R.: $M = -21 - 34i$

2. Sea $z_1 = -1 - 2i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 2$. Determine $P = (z_3 - 2z_1)(2z_2 + z_1)$
Solución. :

R.: $z = 36 + 4i$

3. Sea $z_1 = -1 - 2i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 2$. Determine el valor de $D = \frac{(z_3 - 2z_1)}{(2z_2 + z_1)}$
Solución. :

R.: $z = \frac{4}{41} + \frac{36}{41}i$

4. Determine el valor de $z = a + bi$ si se sabe que: $z + 2\overline{z} = \frac{2-i}{1+3i}$
Solución. :

Respuesta: $z = -\frac{1}{30} + \frac{7}{10}i$

5. Determine dos números complejos cuya diferencia es un imaginario puro; cuya suma tiene parte imaginaria 5 y cuyo producto es el número complejo $-5 + 5i$.

   Solución. :

   Respuesta: $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 1 + 3i$
   $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 1 + 2i$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver: $T = \frac{2}{3+i} - \frac{2-3i}{3} + \frac{1}{2-i}$

   Solución. :

   R.: $T = \frac{1}{3} + i$

2. Sea $z_1 = a - 2i$; $z_2 = 1 - bi$; $z_3 = 4 + 3i$. Si $z_1 + z_3 = z_2 \cdot z_3$. Hallar $a + b$

   Solución. :

   R.: 2

3. Sea $z_1 = (2, i)$; $z_2 = (1, 2i)$; $z_3 = 1 - i$. Determine el valor de $R = \left[\frac{z_2}{z_3 - i} + \frac{z_1}{z_2}\right] \cdot z_3$

   Solución. :

   R.: $R = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$

4. Sea $z_1 = (4, -3i)$; $z_2 = 1 - 2i$; $z_3 = 4 + i$.

   Determine $M = 2z_2 - 3\overline{z_1} + 3z_3$

   Solución. :

   R.: $M = 2 - 10i$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREAS DOMICILIARIA

1. Reducir: $\sqrt{-4} + 2\sqrt{9} + i - 8 + \frac{2}{1-i}$
2. Determine el valor de: $M = \frac{3}{1-\frac{2i}{1+i}} + \frac{i}{2}$
3. Si $\frac{a+3i}{2-i} - \frac{3+i}{1+i} = 7 + bi$. Determine $a + b$
4. Sea $z_1 = (3, i)$; $z_2 = 2 - i$; $z_3 = 1 + 2i$. Determine $M = \frac{1}{z_1} + \frac{z_1}{\overline{z_3}} - \frac{2}{z_2}$
5. Determine dos números complejos cuya diferencia es un imaginario puro; cuya suma tiene parte imaginaria 4 y cuyo producto es el número complejo $16 + 8i$
6. Sea $z_1 = (a, -3i)$; $z_2 = 3 - bi$; $z_3 = c + 3i$. Si $z_2 \cdot z_3$ es un imaginario puro; $z_1 \cdot z_3$ es un número real puro. Determine $a + b$
7. Sea $z_1 = 2 - i$; $z_2 = -1 + 2i$; $z_3 = 3 + i$. Hallar $R = \frac{\overline{z_1}}{z_1 - z_3} + \frac{z_1}{\overline{z_2}}$
8. Determine el valor de $Z = \frac{(2+3i)(2-i)^2}{(1+2i)^2}$.

Respuesta:

1: $z = -1 + 4i$
2: $z = \frac{7}{2}i$
3: $a + b = 31$
4: $M = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$
5: $z_1 = 2 + 6i$; $z_2 = 2 - 2i$
6: $a + b = 0$
7: $R = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$
8: $Z = -2 - 3i$