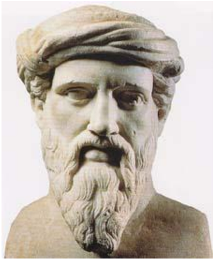
VECTORES - PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD ENTRE VECTORES

Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres.
PITÁGORAS



LOGRO DE LA SESIÓN:
"Al finalizar la sesión de aprendizaje el alumno reconoce el Paralelismo entre vectores y aplica e interpreta el concepto del operador "ortogonal del vector" y del producto escalar de vectores para reconocer la Perpendicularidad"

2.9. Producto Escalar de Vectores

El producto escalar (producto interno o producto punto) de dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ está dado por la suma de los productos de sus componentes correspondientes, es decir:

$$\text{Sean } \overrightarrow{a} = (a_1, a_2);\ \overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (a_1, a_2).(b_1, b_2)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$$

Ejemplo 14. Dados los vectores $\overrightarrow{a} = (3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, -4)$ y $\overrightarrow{c} = (-3, 2)$. Calcular el valor de: $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right) - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

Solución. :

Propiedades del Producto Escalar de Vectores

1. $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
2. $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
3. $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$
4. $\|\overrightarrow{a}\|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$
5. $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 + 2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$
6. $\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - 2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$

Ejemplo 15. Si $\|\overrightarrow{a}\| = 7$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 3$ y $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -4$. Calcular el valor de $M = \left(11\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right)\left(2\overrightarrow{a} + 7\overrightarrow{b}\right)$

Solución. :

2.10. Vectores Paralelos (//)

Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos ($\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$) si uno es múltiplo escalar del otro, es decir:

$$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b} \iff existe \lambda \in R \text{ tal que: } \overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$$

Teorema. *Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos si y solo si sus vectores unitarios son iguales $\overrightarrow{u}_a; \overrightarrow{u}_b$, es decir:*

$$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{u}_a = \overrightarrow{u}_b \iff \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|} = \frac{\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}$$

Ejemplo 16. Determine el valor de"p" para que los vectores $\overrightarrow{m} = 3i - 7j$ y $\overrightarrow{n} = (p+1)i + 14j$ sean paralelos.

Solución. :

Nota: Dos vectores iguales son siempre paralelos; pero dos vectores paralelos no necesariamente serán iguales.

2.11. Operador Ortogonal (⊥)

El operador ortogonal tiene la función de hacer girar un vector 90º y en forma antihoraria. Es así que si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, su operador ortogonal es: $\overrightarrow{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$

Ejemplo 17. Hallar el operador ortogonal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ formado por los puntos $A(-3,-1)$ y $B(2,5)$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,5) - (-3,-1) = (5,6)$$
$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB}^{\perp} = (-6,5)$$
$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-3,-1) - (2,5) = (-5,-6)$$
$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{BA}^{\perp} = (6,-5)$$

2.12. Vectores Ortogonales

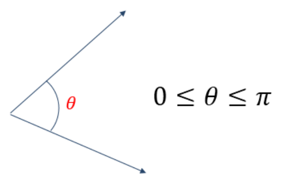
Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son ortogonales o perpendiculares $\left(\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}\right)$, si su producto escalar es cero, es decir:

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$$

Ejemplo 18. : Determine el valor de"p" para que los vectores $\overrightarrow{m} = 3i - 7j$ y $\overrightarrow{n} = (p+1)i + 14j$ sean ortogonales

Solución. :

2.13. Ángulo entre Vectores (θ)



Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores no nulos que tienen el mismo origen, sea θ el menor de los ángulos positivos formados por dichos vectores, se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$$

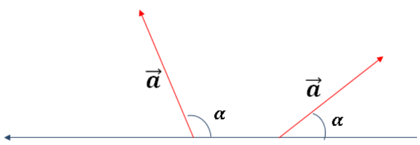
$$\Longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}\right)$$

Nota: Otra manera de expresar el producto punto entre dos vectores está determinada por:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|\cos\theta$$

2.14. Ángulo de Inclinación de un Vector (α)

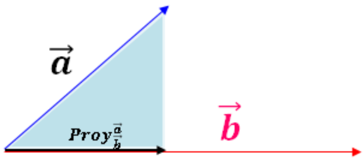
Es aquel ángulo que se genera entre un vector $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ y una recta paralela al eje X. Este ángulo α es conocido como la dirección del vector, se inicia en el eje X y gira en forma antihoraria



$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

2.15. Proyección Ortogonal de un Vector

Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, donde $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. La sombra que pudiera proyectar el vector $\overrightarrow{a}$ sobre el vector $\overrightarrow{b}$ es considerada como la proyección ortogonal de $\overrightarrow{a}$ en $\overrightarrow{b}$.



$$Proy_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{b} \right\|^2} \right) \cdot \overrightarrow{b}$$

Propiedades del vector Proyección Ortogonal

1. $Proy_{\overrightarrow{c}}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = Proy_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a} + Proy_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{b}$
2. $Proy_{\overrightarrow{b}}k\overrightarrow{a} = k.Proy_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$
3. $Proy_{k.\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = Proy_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$

2.16. Componentes

Se denomina componente a la longitud del vector proyección, es lo mismo que decir módulo del vector proyección. La componente viene a ser un número real positivo o negativo que está definido como:

$$Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{b} \right\|}$$

Propiedades de la Componente

1. $Comp_{\overrightarrow{c}}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a} + Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{b}$
2. $Comp_{\overrightarrow{b}}k\overrightarrow{a} = k.Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$
3. $Comp_{k\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 3 Sesión 02

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sean los vectores: $\overrightarrow{a} = (-2, 4)$; $\overrightarrow{b} = (3, 5)$; $\overrightarrow{c} = (3, -6)$. Determinar el valor de $\left(\overrightarrow{b} + 2i\right)\left(3i - \overrightarrow{a}^{\perp}\right) + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$

   Solución. :

   R.: 24

2. Si $\overrightarrow{a} = (4m; m-3)$ y $\overrightarrow{b} = (2; m+3)$ determine los valores de m tales que $\overrightarrow{a}$ es paralelo a $\overrightarrow{b}$

   Solución. :

   R.: $\{-\frac{3}{2}, -1\}$

3. Se quiere partir una varilla de acero $\overline{AB}$, donde $A = (2, 5)$ y $B = (16, 20)$; en 3 segmentos iguales, Halle las coordenadas de los puntos de corte.

   Solución. :

   R.: $(\frac{20}{3}, 10)$; $(\frac{34}{3}, 15)$

4. Dado un rectángulo de vértices consecutivos y en forma antihoraria ABCD,donde $A = (-3, 7)$; $B = (-8, -5)$ y de lado $\|BC\| = 39$ metros. Halle los vértices C y D

   Solución. :

   R.: $(28, -20)$; $(33, -8)$

5. Calcular $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|$, si $\|\overrightarrow{a}\|=3$ y $\left\|\overrightarrow{b}\right\|=5$ y el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es de *60°*

   Solución. :

   R.: *7*

6. Sean los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$; $\overrightarrow{a}=(4,2)$ y $\overrightarrow{b}=2j-3i$

   Calcular: $M = Proy_{\overrightarrow{3b}} 13\overrightarrow{AB} + Proy_{\overrightarrow{AB}} 5\overrightarrow{a}$

   Solución. :

   R.: $(36,-22)$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean los vectores $\overrightarrow{a} = 6j - i$; $\overrightarrow{b} = 2i + 3j$ y $\overrightarrow{c} = -5i$, Hallar $\left(2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}^{\perp} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right)$

   Solución. :

   R.: -50

2. Determine un vector $\overrightarrow{c}$ cuya magnitud es igual a la del vector $\overrightarrow{a} = (4, -3)$ y cuya dirección es la misma que la del vector $\overrightarrow{b} = (1, \sqrt{3})$

   Solución. :

   R.: $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

3. Si $\overrightarrow{a} = (4m; m - 3)$ y $\overrightarrow{b} = (2; m + 3)$ determine los valores de m tales que $\overrightarrow{a}$ es ortogonal a $\overrightarrow{b}$

   Solución. :

   R.: $\{-9, 1\}$

4. Calcular el módulo de la resultante (en N) de dos fuerzas de $4N$ y $8N$ respectivamente y que forman un ángulo de $60°$.

   Solución. :

   R.: $4\sqrt{7}$

5. Sean los vectores $\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{c}$ tales que $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{26}$; $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 3\sqrt{2}$ y $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 12$.

   Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, Hallar la norma de $\overrightarrow{c}$

   Solución. :

   R.: $\|c\| = 4\sqrt{2}$

6. Calcular las coordenadas de C y D para que el cuadrilátero de vértices consecutivos y en forma antihoraria ABCD; sean una cuadrado, donde $A = (-2, -1)$ y $B = (4, 1)$

   Solución. :

   R.: $C(2, 7)$;$D(-4, 5)$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

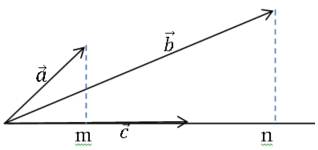
TAREA DOMICILIARIA

1. Dados $\overrightarrow{a} = (3+x)i + 4j$; $\overrightarrow{b} = i + xj$. Si ambos vectores son paralelos, halle el valor de x
2. Dados los vectores ortogonales $\overrightarrow{a} = (x+1; 3x-3)$; $\overrightarrow{b} = (1-x)i + xj$, con $x \in \mathbb{Z}$. Determine el módulo del vector $\overrightarrow{R} = (3x; x+3)$
3. Si $(1,5) + 2\overrightarrow{x} = (7,-3)$, hallar r y t tales que $(-3,2) = r\overrightarrow{x} + t\,(2,-4)$
4. Sean los vectores $\overrightarrow{v} = 7i - 2j$; $\overrightarrow{u} = (8,5)$; $\overrightarrow{w} = (-1,3)$.Hallar $M = \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}^{\perp}$
5. Sean los vectores $\overrightarrow{a} = (4;-3)$; $\overrightarrow{b} = 3i - 5j$; $\overrightarrow{c} = 4j - 7i$.

   Determine: $E = 3\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}^{\perp} - 5\left(\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - \|\overrightarrow{c}\|^2\right) + Comp_{\overrightarrow{a}}\,2\,\overrightarrow{b}$
6. Calcular $\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|$, si $\|\overrightarrow{a}\| = 13$; $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 19$ y $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = 24$
7. Calcular las coordenadas de C y D para que el cuadrilátero de vértices consecutivos y en forma horaria ABCD; sean una cuadrado, donde $A = (4,-2)$ y $B = (7,5)$
8. En el triángulo isósceles de base $A = (2,6)$ y $B(4,12)$, donde la longitud de la altura del vértice C hacia la base del triángulo es $\sqrt{10}$ cm. Halle las coordenadas del vértice C
9. Sean los vectores $\overrightarrow{AB} = (2;2)$; $\overrightarrow{a} = (-2;2)$ y $\overrightarrow{b} = (3;2)$.

   Halle: $M = Proy_{2\overrightarrow{a}}\,3\,\overrightarrow{b} + Proy_{\overrightarrow{AB}}2\,\overrightarrow{b}$
10. Sean los vectores $\overrightarrow{a} = i - 4j$; $\overrightarrow{b} = -6j$.

    Halle: $\overrightarrow{c} = \left\{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^{\perp} - \left(2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)\right\} + Proy_{2\overrightarrow{a}}17\,\overrightarrow{b}$
11. Calcular la distancia entre los puntos m y n, siendo $\overrightarrow{a} = (1,2)$ y $\overrightarrow{b} = (5,3)$. $\overrightarrow{c} = (3,1)$;



12. Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ forman entre si un ángulo de 30°, sabiendo que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3}$ y $\|\overrightarrow{v}\| = 1$
    a) Halle el producto escalar de dichos vectores
    b) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{v}$

Respuesta:
1: $\{-4;1\}$
2: $\left\|\overrightarrow{R}\right\|$ =5
3: $\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$
4: $M = 45$
5: $E = \frac{904}{5}$
6: $\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\| = 22$
7: $C(14,2)$; $D(11,-5)$
8: $C(0,10)$ o $C\,(6,8)$
9: $M = \left(\frac{13}{2},\frac{7}{2}\right)$
10: $\overrightarrow{c} = (35,-87)$
11: $\frac{13}{\sqrt{10}}$
12: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{3}{2}$; $\theta = arcos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$.