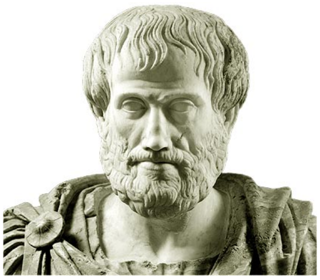
MATRICES - DETERMINANTE - INVERSA

Nunca se alcanza la verdad total, ni nunca se está totalmente alejado de ella.
ARISTÓTELES



LOGRO DE LA SESIÓN:

"Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios aplicados a la ingeniería donde utiliza conceptos y propiedades de matrices, determinante e inversa"

1.5. Determinante de una Matriz

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$, matriz de orden n, llamaremos determinante de la matriz A, al **número real** que está relacionado con los elementos a_{ij} de la matriz.

Notación: $|A|$, $det(A)$, indican el determinante de la matriz **cuadrada** A.

- **Para una matriz de orden 2:** Diagonal principal menos la diagonal secundaria.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo 1. : Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Calcular la $|A|$; $|B|$ y $|AB|$

Solución. :

- **Para una matriz de orden 3:** Se puede desarrollar por el método de submatrices, el cual define la determinante como la sumatoria del producto de los elementos de una línea cualquiera de la matriz (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos o submatrices.

$$det(A) = \sum(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A(i/j))$$

$A(i/j)$: es la sub_matriz de A eliminando la $i - esima$ fila y la $j - esima$ columna.

Ejemplo 2. Dado $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, calcule su determinante por el método de sub-matrices.

Solución. :

O también, se puede desarrollar por el método de SARRUS, así:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Ejemplo 3. : Calcular la determinante de la matriz mediante Sarrus y sub-matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución. :

1.6. Inversa de una Matriz por el método de la Adjunta

Sea la **matriz cuadrada** $A = [a_{ij}]_n$, matriz de orden n, su inversa existe si y solo si $|A| \neq 0$ y se denota como A^{-1}, luego:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$$

- **Matriz Adjunta:** La matriz adjunta $adj(A)$ es igual a la transpuesta de la matriz de cofactores de A
- **Matriz de Cofactores:** La matriz de cofactores $cof(A)$ esta compuesta por todas las sub-matrices de orden $(n-1)$ de la matriz A, donde cada elemento tiene la forma: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A(i/j))$

Ejemplo 4. Determine la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. :

.

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 1 Sesión 02

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Determine el valor de x si se cumple que: $\begin{vmatrix} 1-2x & 1 & 3 \\ x-3 & -5 & 0 \\ -4 & x-4 & 2 \end{vmatrix} = -22$

   Solución. :

   R.: $\{-1; 2\}$

2. Determine la matriz inversa de A, mediante la adjunta $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

   Solución. :

   R.: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 11/2 & 2 & -5/2 \\ 7/2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$

3. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 13 \\ -15 \\ -10 \end{bmatrix}$

4. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -5 \\ 6 & 15 & -9 \\ -7 & 6 & -11 \end{bmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $3A + AX = B + C$

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 19 \\ -17 & -7 & -23 \\ -19 & -8 & -26 \end{bmatrix}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de x si se cumple que: $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

   Solución. :

   R.: $x = 4$

2. Determine la matriz inversa de A, mediante la adjunta $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   Solución. :

   R.: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Determine la matriz X que cumple la ecuación: $A(X+I) = 4B$, siendo:

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Solución. :

   R.: $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2/3 \\ 4 & -3 & 16/3 \\ -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. Hallar el valor numérico de:

   $$P = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}}$$

   Solución. :

   R.: $1/37$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREA DOMICILIARIA

1. Calcule la determinante de: $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Halle la inversa de las siguientes matrices:
   $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $N = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. Determine el valor de t si se sabe que: $\begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 0 & t+6 & 3 \\ t-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

4. Calcular la inversa de la siguiente matriz por el método de la adjunta. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k-4 \end{bmatrix}$. Hallar los valores de k para que $|A| = 0$

6. Resolver $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres y
   $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
   Ojo que en este caso se debe multiplicar por la inversa, pero por la derecha.

7. Determine el o los valores de m si se sabe que: $\begin{vmatrix} m+2 & 3 & 1 \\ 3 & m-1 & 0 \\ m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = 4.$

8. Determine el valor de x si se sabe que: $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 16$

9. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Respuestas:

1: $|P| = 2$; $|Q| = 7$

2: $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; $N^{-1} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

3: $\{-3; 1\}$

4: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \\ -23 & -27 & -3 \end{bmatrix}$

5: $\{-2; 4\}$

6: $\begin{bmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

7: $\{-3; -1; 3\}$

8: $x = 2$

9: $X = \begin{bmatrix} -41/30 \\ 11/6 \\ 43/30 \end{bmatrix}$