FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE $\mathbb{C}$

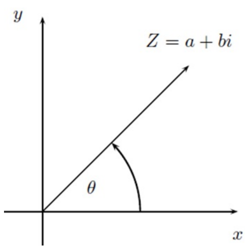
Antes de convencer al intelecto, es imprescindible tocar y predisponer el corazón
BLAISE PASCAL

LOGRO DE LA SESIÓN:
"Al finalizar la sesión el estudiante resuelve problemas donde utiliza conceptos de números complejos en su forma polar o trigonométrica con autonomía y seguridad, además identifica y aplica propiedades y criterios lógicos de solución"

7.6. Módulo de un Número Complejo

Dado $z = (a, bi)$ como vector (a, b) el módulo será:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



7.7. Argumento de un Número Complejo

El argumento o amplitud de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por $arg(z)$. Para obtener el argumento o amplitud, aplicamos trigonometría elemental en el triángulo que se forma, luego:

$$\theta = arg(z) = arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

7.8. Forma Polar de un Número Complejo

Sea $z = (a, bi)$ un punto en el plano complejo, su forma polar se define como:

$$z = a + bi = (a, bi) = r_\theta$$

Donde $r = |z|$ y θ es el argumento de z y se representa como $arg(z)$.

7.9. Forma trigonométrica

Sea $z = (a, bi)$ un punto en el plano complejo, su forma trigonométrica se obtiene a partir de asumir que:

$a = r\,cos(\theta)$; $\;b = r\,sen(\theta)$

luego se deduce que:

$z = a + bi = (a, bi) = r_\theta = r(cos(\theta) + i\,sen(\theta))$

7.10. Operaciones en la Forma Polar

Dados $z = a + bi$ y $z' = c + di$, se tiene que.

$r_\theta \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\theta+\beta}$

$\frac{r_\theta}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\beta}$

$(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 10 Sesión 02

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Represente en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y trigonométrica
   $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$; $z_2 = -4 - 6i$; $z_3 = -3 + 2i$.
   Solución. :

   R.: $z_1 = \sqrt{14}_{36,7^\circ}$; $z_2 = \sqrt{52}_{236,3^\circ}$; $z_3 = \sqrt{13}_{146,3^\circ}$

2. Calcular y expresar en forma polar y trigonométrica
   $$M = \frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i^{15}}{2(2+i)-(3-2i)+3-i^3}$$
   Solución. :

   R.: $M = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$; $M = \left(\frac{\sqrt{533}}{41}\right)_{-85^\circ}$

3. Determine el valor de z en su forma trigonométrica $z = \frac{(1-i)^{16}(1+i)^{20}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{12}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{18}}$

   Solución. :

   R.: $z = 2^{18}\left(cos\left(180°\right) + i\ sen\left(180°\right)\right)$

4. Un número complejo que tiene de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50°. Hallar en forma binómica el otro complejo y su quinta potencia

   Solución. :

   R.: $z = 4_{30°}$; $z^5 = 1024_{150°}$

5. Determine el valor de $z = \frac{(2+3i)(2-i)^2}{(1+2i)^2}$.

   a) Empleando el álgebra en números complejos.

   Solución. :

   R.: $z = -2 - 3i$

   b) Expresando en forma polar

   Solución. :

   R.: $z = \sqrt{13}_{-124°}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREAS DOMICILIARIA

1. Expresar en su forma polar los siguientes números complejos

   $z_1 = 2 - 2i \quad ; \quad z_2 = \frac{-i}{1-i} \quad ; \quad z_3 = \frac{3(1+i)(3-\sqrt{3}i)}{(-2-2\sqrt{3}i)^2}$

2. Pasarlos a su forma trigonométrica y binómica y representarlos en un solo plano de Gauss.

   $z_1 = 3_{60} \quad ; \quad z_2 = 4_{225} \quad ; \quad z_3 = 5_{330}$

3. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a la forma binómica.

   $z_1 = \frac{2_{15}4_{153}}{8_{170}}$; $z_2 = \frac{2_{15}(1+i)}{(1-i)}$; $z_3 = 1_{33}2_{16}3_{41}$

4. Determine el valor de Z en su forma polar y trigonométrica.

   $Z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^8(\sqrt{3}-i)^6}{(-1+i)^4}$

5. Determine el valor de Z en su forma polar y trigonométrica.

   $Z = \frac{(3+4i)^7(1-\sqrt{3}i)^{10}}{(2-2i)^6}$

6. Halla dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad.

Respuesta:

1. $z_1 = (2\sqrt{2})_{-45^\circ}$; $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-45^\circ}$; $z_3 = \left(\frac{9\sqrt{2}}{64}\right)_{255^\circ}$
2. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$; $z_3 = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$
3. $z_1 = 1_{358}$; $z_2 = 2_{105}$; $z_3 = 6_{90}$
4. $Z = (2^{12})_{120}$
5. $Z = (156250)_{41^\circ}$
6. $z_1 = 4$; $z_2 = -2$