SECCIONES CÓNICAS - HIPÉRBOLA

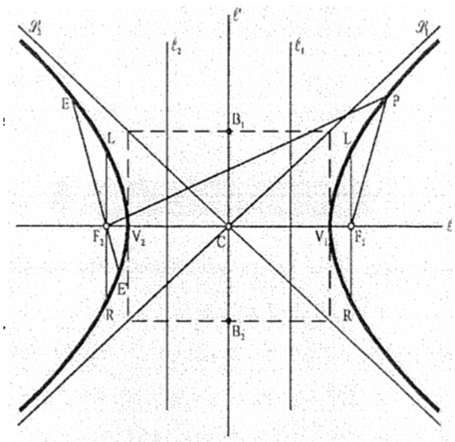
Antes de convencer al intelecto, es imprescindible tocar y predisponer el corazón.
BLAISE PASCAL

6.3. Secciones Cónicas

6.3.1. La Hipérbola

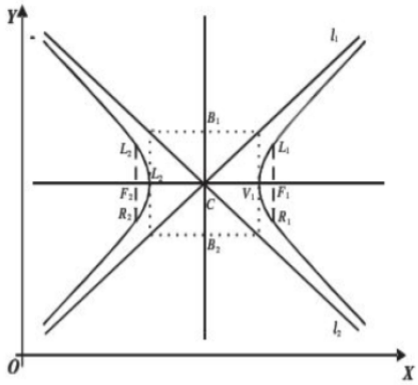
Una hipérbola es el conjunto H de todos los puntos en el plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante

|d(P;F_1)-d(P;F_2)|=2a



$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Elementos de la elipse:



eje mayor: $\overline{V_1V_2} = 2a$

eje menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$

Longitud del segmento focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$

Relación entre a, b y c: $c^2 = a^2 + b^2$

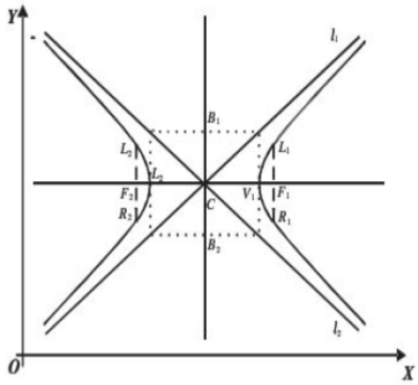
Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$

Distancia entre directrices: $\overline{DD'} = \frac{2a^2}{c}$

6.3.1.1. Ecuación de la Hipérbola

HIPÉRBOLA CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE X, CENTRO $C(h;k)$



$$\mathcal{H}: \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

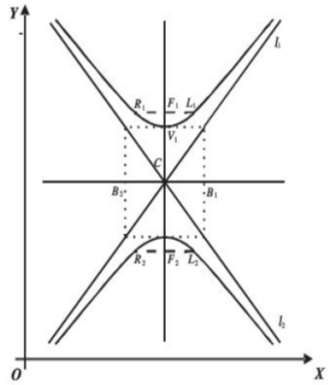
Elementos:
Foco: $F(h \pm c, k)$
Vértice: $V(h \pm a,k)$
Extremos del eje conjugado: $B(h; k \pm b)$
Directriz: $L_d : x = h \pm \frac{a^2}{c}$
Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
Ecuación general:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo 49. Bosqueje la gráfica de la ecuación $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 36 = 0$; y halle vértices, focos, rectas directrices y asintotas

Solución. :

HIPÉRBOLA CON EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y, CENTRO $C(h,k)$



$$\mathcal{H}: \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Elementos:
Foco: $F(h, k \pm c)$
Vértice: $V(h,k \pm a)$
Extremos del eje conjugado: $B(h \pm b; k)$
Directriz: $L_d : y = k \pm \frac{a^2}{c}$
Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$
Ecuación general:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo 50. Bosqueje la gráfica de la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$; y halle vértices, focos, rectas directrices y asintotas.

Solución. :

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 12 Sesión 01

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola que tiene sus vértices en los puntos $V_1(1, 4)$ y $V_2(-5, 4)$ y la longitud de su eje conjugado es igual a 8 unidades.

   Solución. :

   R: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

2. Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola vertical cuyo eje transverso mide *16* unidades y su semi eje conjugado mide 6 unidades, y tiene su centro en el punto $C(-1, 7)$.

   Solución. :

   R: $\frac{(y-7)^2}{36} - \frac{(x+1)^2}{64} = 1$

3. Los focos de la elipse $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-4)^2}{14} = 1,$ son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de esta última coinciden con los vértices de la elipse. Hallar la ecuación de la hipérbola.

   Solución. :

   R: $\frac{(y-4)^2}{6} - \frac{(x-1)^2}{8} = 1$

4. El centro de una hipérbola es el foco de la cónica $\mathcal{P}: \ y^2 + 6y + 32x - 119 = 0$ y sus focos son los extremos del lado recto de $\mathcal{P}$. Hallar la ecuación de dicha hipérbola, si la pendiente de una de sus asíntotas es $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

   Solución. :

   R: $\frac{(y+3)^2}{160} - \frac{(x+4)^2}{96} = 1$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}: 16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$, encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas

   Solución. :

   R: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

2. Determina la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V_1(5;5)$ $V_2(5;-1)$ y su excentricidad es $e = 2$

   Solución. :

   R: $x^2 - 3y^2 - 10x + 12y + 40 = 0$

3. Los focos de un hipérbola son los extremos del lado recto de la parábola $y^2 - 8x - 6y - 15 = 0$. Hallar la ecuación de la hipérbola sabiendo que triseca al lado recto de la parábola

   Solución. :

   R: $\frac{9(y-3)^2}{16} - \frac{9(x+1)^2}{128} = 1.$

4. Hallar la ecuación ordinaria de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $\mathcal{E}: 16x^2 + 25y^2 - 100y - 96x - 156 = 0$ y uno de sus extremos del eje conjugado es un punto de paso de la recta $L: 2x - 5y + 14 = 0$

   Solución. :y

   R: $\frac{(x-3)^2}{21} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREA DOMICILIARIA

1. Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, excentricidad y rectas asintotas de $16x^2 - 9y^2 + 96x + 32y + 252 = 0$.

2. Encuentra la ecuación de la hipérbola vertical en su forma general, cuyas ecuaciones de las asíntotas $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, y distancia entre los vértices 2.

3. Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos $V_1(3;1)$ y $V_2(3:-5)$ y una asíntota es $L: \ 2x - y = 8$

4. Halla la ecuación de la hipérbola si te dan los siguientes datos $F_1(1,6)$, $F_2(1,0)$, y excentricidad $e = \frac{3}{2}$

5. Halle la ecuación de la hipérbola cuyo eje conjugado mide 6, sus asintotas son las rectas $L_1: \ 2x - y - 3 = 0$; $L_2: y = -2x - 1$ y su eje focal es paralelo al eje Y

6. Hallar la ecuación ordinaria de la parábola $\mathcal{P}$ cuyo foco se encuentra en el centro de la hipérbola $\mathcal{H}: \ 13x^2 - 3y^2 + 26x + 12y + 40 = 0$ y cuyo vértice es el punto de intersección de las rectas $L_1: \ 3y - x - 3 = 0$; $L_2: 3x + 2y - 13 = 0$

7. Halle la ecuación de la hipérbola cuyas ecuaciones de sus asintotas son $L_1: \ x - 2y - 11 = 0$; $L_2: x + 2y - 3 = 0$ y uno de sus focos es $F(8;-2)$

Respuestas

1: $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$
2: $\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$
3: $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{4(x-3)^2}{9} = 1$
4: $5y^2 - 4x^2 + 8x - 30y + 21 = 0$
5: $\frac{(y-1)^2}{36} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$
6: $(y-2)^2 = -16(x-3)$
7: $\frac{5(x-7)^2}{4} - \frac{5(y+2)^2}{1} = 1$