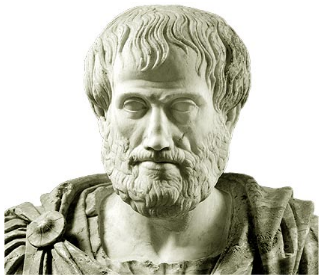
SECCIONES CÓNICAS - LA ELIPSE

Nunca se alcanza la verdad total, ni nunca se está totalmente alejado de ella.
ARISTÓTELES



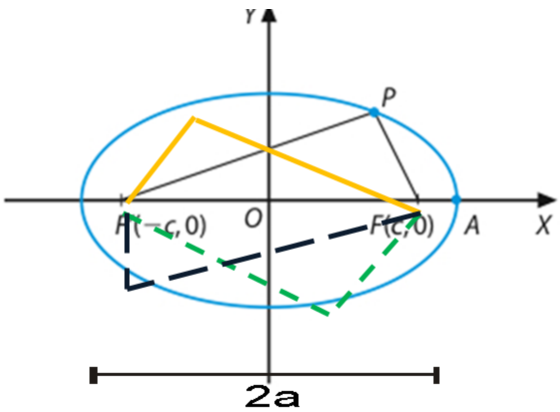
LOGRO DE LA SESIÓN:

"Al finalizar la sesión el estudiante identifica los elementos y grafica la elipse. Reconoce las diferentes expresiones algebraicas que representan una elipse y resuelve problemas aplicados a la ingeniería donde utiliza conceptos y propiedades de la elipse"

6.2. Secciones Cónicas

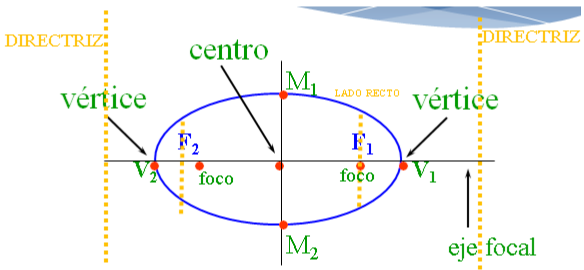
6.2.1. La Elipse

Es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos; llamados focos, es siempre igual a una constante positiva $2a$



$$d\left(P,F_1\right)+d\left(P,F_2\right)=2a$$

Elementos de la elipse:



eje mayor: $\overline{V_1V_2}=2a$

eje menor: $\overline{B_1B_2}=2b$

Longitud del segmento focal: $\overline{F_1F_2}=2c$

Relación entre a, b y c: $a^2=b^2+c^2$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

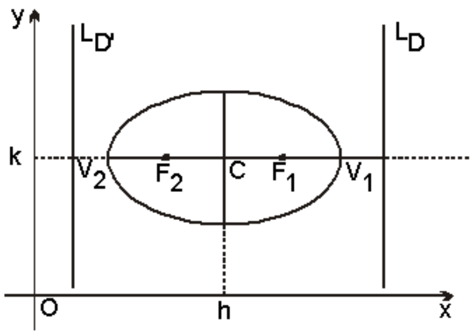
Lado recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Distancia entre directrices: $\overline{DD'}=\frac{2a^2}{c}$

6.2.1.1. Ecuación de la Elipse

ELIPSE CON EJE MAYOR PARALELO AL EJE X

Consideremos la elipse cuyo eje focal es paralelo al **eje X**



La ecuación de dicha elipse es de la forma

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elementos:
Foco: $F(h \pm c, k)$
Vértice: $V(h \pm a,k)$
Directriz $L_d : x = h \pm \frac{a^2}{c}$
Ecuación general:

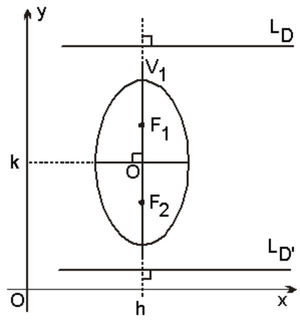
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo 46. Bosqueje la gráfica de la ecuación $5x^2 + 9y^2 + 50x - 18y + 89 = 0$; y halle vértices, focos, lado recto y las rectas directrices.

Solución. :

ELIPSE CON EJE MAYOR PARALELO AL EJE Y

Consideremos la elipse cuyo eje focal es paralelo al **eje Y.**



La ecuación de dicha elipse es de la forma

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Elementos:
Foco: $F(h, k \pm c)$
Vértice: $V(h,k \pm a)$
Directriz $L_d : y = k \pm \frac{a^2}{c}$
Ecuación general:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo 47. Bosqueje la gráfica de la ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$; y halle vértices, focos, lado recto y las rectas directrices.

Solución. :

.

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Semana 9 Sesión 02

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. El centro de la elipse tiene por coordenadas $C(2;4)$. Si la distancia del centro a los focos es $3u$, su excentricidad $\frac{1}{3}$ y la elipse es de eje vertical, determine su ecuación ordinaria.

   Solución. :

   R: $\frac{(x-2)^2}{72} + \frac{(y-4)^2}{81} = 1$

2. El centro de una elipse es el punto $(2,-4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2,-4)$ y $(-1,-4)$ respectivamente. Determine la ecuación general de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la longitud del lado recto.

   Solución. :

   R: $7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 = 0$

3. La parte superior de la entrada de un túnel de forma semielíptica tiene 10 m de ancho. Su altura en el centro es de 10 metros y la de sus paredes laterales 6 metros. Calcular la altura a 2 metros de una de las paredes laterales.

   Solución. :

   R: $9{,}2m$

4. Graficar y reconocer todos los elementos principales de la elipse: $9x^2 + 16y^2 = 18x + 64y + 71$.

   Solución. :

   R: $C(1,2) \quad a = 4 \; b = 3 \; //ejeX.$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar la ecuación general de la elipse cuyos focos son $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$ y una de sus directrices es $x=8$.

   Solución. :

   R: $12x^2+16y^2-192=0$

2. Una pista de carrera de galgos, tiene forma elíptica, si la longitud de su eje mayor es 1000 m. y la de su eje menor 600 m. Calcule la longitud de una cuerda perpendicular a su eje focal que dista 200 m. de uno de sus vértices

   Solución. :

   R: $480m$

3. Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, el lado recto, excentricidad y las rectas directrices de $4x^2+25y^2+24x-50y-39=0$

   Solución. :

   R: $C(-3;1)\quad a=5\ b=2\ //ejeX$

4. El lado recto de una elipse mide $\frac{32}{5}$, la recta $L_1: x=2$, es su eje focal. La recta $L_2: y=-4$ contiene a uno de sus lados rectos y 2 es la ordenada de uno de sus focos. Determine las ecuaciones de las rectas directrices y la ecuación general de la elipse.

   Solución. :

   R: $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0;$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

TAREA DOMICILIARIA

1. Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, el lado recto, excentricidad y las rectas directrices de $9x^2 + 36y^2 - 54x + 72y - 207 = 0$.

2. Los vértices de una elipse son los puntos $V_1(1;1)$ y $V_2(7;1)$ y su excentricidad es $e = \frac{1}{3}$. Determine la ecuación general de dicha elipse, sus focos,puntos extremos, rectas directrices y lado recto

3. Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, el lado recto, excentricidad y las rectas directrices de $x^2 + 4y^2 + 6 = 12y - 2x$

4. Una ventana arriba de una entrada se construye en la forma de la mitad superior de una elipse, la ventana es de 20 pulgadas de alto en su punto más alto y de 80 pulgadas de ancho en la base. Encuentre la altura h de la ventana a 25 pulgadas del centro de la base.

5. Determinar la ecuación general de la elipse en el cual un vértice es $(3;2)$, el foco opuesto $(11;2)$ y la longitud del eje menor 8.

6. Halle la ecuación de una elipse cuyo centro es $(-4;5)$, eje mayor mide 16 unidades de longitud y con uno de sus focos en $(-4;10)$.

7. Halle la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $V_1(7,-2)$ y $V_2(-5,-2)$ y pasa por el punto $P(3,2)$.

8. Halle la ecuación y la excentricidad de la elipse cuyas directrices son las rectas $x = 1$ y $x = 9$ y uno de sus focos es $F(7,0)$.

9. Un arco semielíptico de concreto en la entrada de un parque tiene un claro de 10m y una altura máxima de 4m. Se desea apuntalarlo con columnas a distancias de 2m de sus vértices, determinar la altura de cada puntal.

   Respuestas

   1: $C(3;-1) \quad a = 6 \ b = 3 \ //ejeX$

   2: $8x^2 + 9y^2 - 64x - 18y + 65 = 0$

   3: $C(-1;\frac{3}{2}) \quad a = 2 \ b = 1 \ //ejeX$

   4: $15,6$

   5: $16x^2 + 25y^2 - 256x - 100y + 724 = 0$

   6: $\frac{(x+4)^2}{39} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

   7: $18x^2 + 36y^2 - 36x + 144y - 486 = 0$

   8: $\frac{(x-5)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad e = \frac{\sqrt{8}}{4}$

   9: $3,2m$