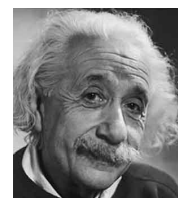


## Capítulo 6

# SECCIONES CÓNICAS - LA CIRCUNFERENCIA

*El genio se hace con un 1 % de talento, y un 99 % de trabajo.*

**ALBERT  
EINSTEIN**



### LOGRO DE LA SESIÓN:

“Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce las diversas ecuaciones de la circunferencia, resuelve ejercicios de circunferencia, referentes a la distancia de un punto a la Circunferencia y la ecuación de una recta tangente a la Circunferencia”

### 6.1. Secciones Cónicas

El nombre de “secciones cónicas” se derivó del hecho de que estas figuras se encontraron originalmente en un cono. Cuando se hace intersectar un cono con un plano obtenemos distintas figuras. Cada una de ellas es una cónica.

**CONO:** Es el lugar geométrico que se forma al hacer girar una recta que pasa por el origen alrededor de un eje. La recta que se hace girar siempre se considera distinta al eje y se conoce como generatriz.

#### 6.1.1. La Circunferencia

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia de otro punto fijo del mismo plano denominado centro.

#### ELEMENTOS:

**Centro:** Es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

**Radio:** Es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

**Cuerda:** Es un segmento que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a la circunferencia.

**Diámetro:** Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro es la mayor cuerda que se pueda trazar a una circunferencia.

**Arco:** Es la parte de una circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

**Recta secante:** Es la línea que corta a la circunferencia en dos puntos.

**Recta tangente:** Es la línea que toca a la circunferencia en un solo punto. El punto donde toca a la circunferencia se llama punto de tangencia. Una recta tangente siempre es perpendicular al radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro de la circunferencia.

**Círculo:** Es la superficie plana limitada por una circunferencia.

**Área** del círculo:  $A = \pi r^2$

**Longitud** o perímetro de una circunferencia:  $P = 2\pi r$



#### 6.1.1.1. Ecuación de la Circunferencia

**Ecuación Ordinaria** Es la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $C(h, k)$  y radio  $r$ , y está definida por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

**Ecuación Canónica** Es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen  $C(0, 0)$  y radio  $r$ , y está definida por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

#### Ecuación General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde los coeficientes D,E,F son números reales.

**Conversión de forma ordinaria a forma general**  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde:

$$D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2$$

**Ejemplo 41.** Determine la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es  $(1, -2)$  y pasa por el punto  $(3, 5)$ .

**Solución.** :

**Conversión de forma general a forma ordinaria** Se requiere factorizar mediante la técnica de completar cuadrados para expresar un trinomio en la forma de un binomio cuadrado.

**Ejemplo 42.** Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

**Solución.** :

**6.1.1.2. Recta tangente a una Circunferencia**

Es una recta que toca a la circunferencia en un punto, forma un ángulo recto con el radio vector de la circunferencia, que a su vez puede estar contenida en una recta Normal a la recta Tangente.

Ambas rectas son siempre perpendiculares ( $m_1 \cdot m_2 = -1$ )

**Ejemplo 43.** : Hallar la ecuación general de la recta tangente a la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$  en el punto  $Q(5, 2)$

**Solución.** :

**INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA**

Semana 8

Sesión 02

**EJERCICIOS EXPLICATIVOS**

1. Dada:  $4x^2 + 4y^2 + 12x - 1 = 0$ ; determine si es un punto, una circunferencia o un conjunto vacío. Si es una circunferencia, encuentre su centro y radio.

**Solución.** :

$$\text{R.: } C(-3/2; 0); r = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

3. Hallar el radio y el centro de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(4, 7)$ ;  $B(0, 9)$  y  $C(3, 0)$

**Solución.** :

$$\text{R.: } C(0; 4); r = 5$$

2. Determinar los valores de  $k$  para que la recta  $L: 3x - 2y + k = 0$  sea tangente a la circunferencia  $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 39 = 0$

**Solución.** :

$$\text{R.: } \{-38; 14\}$$

4. El diámetro de una circunferencia pasa por la recta  $x - 3y = 6$ ; si dos puntos de la circunferencia son  $A = (8, 6)$  y  $B = (-4, -6)$  Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia.

**Solución.** :

$$\text{R.: } (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 74$$

5. Determinar el punto de tangencia y la ecuación de la circunferencia tangente a la recta:  $L: 3x - 4y + 8 = 0$ . Si su centro es  $(-1; 5)$

**Solución.** :

6. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de dos circunferencias y determine dichos puntos

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 ;$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0 .$$

**Solución.** :

$$R.: Q\left(\frac{4}{5}; \frac{13}{5}\right); C: x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$$

$$R.: y = -2x; (0, 0); (2; -4)$$

## INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

### EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada:  $3x^2 + 3y^2 + 12x - 9y + 10 = 0$ ; determine si es un punto, una circunferencia o un conjunto vacío. Si es una circunferencia, encuentre su centro y radio.

**Solución.** :

2. Halle la ecuación ordinaria de la circunferencia de radio 10; cuyo centro es la intersección de las rectas  $l_1 : 3x - y = 6$ ;  $l_2 : (x, y) = (-2, 5) + \alpha(3, 6)$

**Solución.** :

R.:  $C(-2; 3/2); r = \sqrt{\frac{35}{12}}$

3. Calcular la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es  $C(6, m)$  y pasa por los puntos  $A = (3, 3)$  y  $B = (5, 1)$

**Solución.** :

R.:  $(x - 15)^2 + (y - 39)^2 = 100$

4. Determinar los valores de  $k$  para que la recta  $L : kx + y + k - 15 = 0$  sea tangente a la circunferencia  $C : x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$

**Solución.** :

R.:  $C : x^2 + y^2 - 12x - 8y + 42 = 0$

R.:  $\left\{-\frac{19}{17}; 5\right\}$

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA LA INGENIERÍA

**TAREA DOMICILIARIA**

1. Halle los puntos de intersección de la circunferencia:  $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 10$  y la recta  $x - y = 8$ .
2. La ecuación de una circunferencia es:  $C_2 : 4x^2 + 4y^2 - 16x - 25 = 0$ . Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia  $C_1$  concéntrica a  $C_2$  y que sea tangente a la recta  $L : 5x - 12y - 1 = 0$ .
3. Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices:  $P(-4, -1)$ ;  $Q(12, 7)$  y  $R(-10, 11)$  Dar como respuesta su centro y su radio.
4. Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos  $A = (8, 6)$  y  $B = (-4, -6)$  y cuyo centro está sobre la recta  $x + 2y + 5 = 0$
5. Calcular las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación es:  
 $C : x^2 + y^2 - 32x - 18y + 312 = 0$
6. Se produjo un sismo que afectó a tres ciudades, las coordenadas de las ciudades son:  $P(4, 6)$ ;  $Q(8, 8)$  y  $R(12, 20)$ , si el sismo solo causó daño a estas tres ciudades, siendo su efecto radial. Hallar las coordenadas del epicentro y su radio de acción.
7. Halla la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es  $C = (3, 5)$  y radio  $r = 5$ .
8. Las rectas  $L_1 : x + 2y = 6$  y  $L_2 : 3x - y = 4$  se intersectan en el punto  $P$ . Halle la distancia de este punto a la circunferencia  $2x^2 + 2y^2 - 6x + y = 0$
9. Determine el punto de tangencia y la ecuación general de la circunferencia tangente a la recta  $L : 2x - 3y - 22 = 0$ . Si su centro es  $(1, 2)$ .

**Respuestas**

- 1:  $(3; -5); (7; -1)$
- 2:  $(x - 2)^2 + (y)^2 = \left(\frac{9}{13}\right)^2$
- 3:  $(x - 1)^2 + (y - 9)^2 = 125$
- 4:  $x^2 + y^2 - 18x + 14y - 300 = 0$
- 5:  $(16; 9)$
- 6:  $(1; 17); r = 11,40$
- 7:  $C : x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$
- 8:  $\frac{\sqrt{85} - \sqrt{37}}{4}$
- 9:  $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 47 = 0; (5; -4)$