Линейная Алгебра

Чепелин Вячеслав

19.02.2025

Содержание

1 Линейные отображения

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения.

U, V — линейные пространства над одним полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Отображение $\mathcal{A} : U \to V$ называется **линейным** (или гомоморфизмом), если:

$$\forall \lambda \in K \forall u_1, u_2 \in V : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

Замечания.

1. $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. При фиксированном аргументе и разных отображениях $\mathcal{A} и \mathcal{B}$, $\mathcal{A}u$ и $\mathcal{B}u$ являются векторами и их можно складывать и домножать на скаляр.
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

$\forall \lambda \in K, \mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ — линейные отображения:

- $\lambda\mathcal{A} : U \to V$ — **умножение отображения на скаляр**:

$$\forall u \in U : (\lambda\mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

- $\mathcal{A} + \mathcal{B} : U \to V$ — **сумма отображений**:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

Нулевое линейное отображение $\mathcal{O} : U \to V$:

$$\forall u \in U : \mathcal{O}u = \mathbb{0}_V$$

Заметим, что $\mathcal{O}$ — нейтральный элемент относительно сложения отображений.

Заметим, что $-1\mathcal{A} = -\mathcal{A}$ — элемент, обратный $\mathcal{A}$ относительно сложения отображений.

Оказывается, что выполняются все 8 аксиом линейного пространства, значит обозначим $L(U, V) = \mathrm{Hom}_K(U, V) = \mathrm{Hom}(U, V)$, как линейное пространство всех линейных отображений из U в V.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$:

- $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{v \in V, v = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\}$ — **образ линейного отображения**, является линейным подпространством.
- $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ — **ядро линейного отображения**, является линейным подпространством. Ядро всегда не пустое, так как $\mathbb{0}_U \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.

$\mathrm{rg}\,\mathcal{A} = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))$ — **ранг отображения**.

$\mathrm{def}\,\mathcal{A} = \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))$ — **дефект отображения**.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$:

- $\mathcal{A}$ — **сюръекция**, если:

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,\mathcal{A} = \dim(V)$$

- $\mathcal{A}$ — **инъекция**, если:

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_V\} \Leftrightarrow \mathrm{def}\,\mathcal{A} = 0$$

То есть:

$$\forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_2 \Rightarrow u_1 = u_2$$

$$\mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}_V \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}$ — **биекция (изоморфизм)**, если:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \mathcal{A} = V \\ \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim V \\ \operatorname{def} \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{A}$ — **эндоморфизм (линейный оператор)**, если $U = V$.
- $\mathcal{A}$ — **автоморфизм**, если является изоморфизмом и эндоморфизмом, то есть:

$$\begin{cases} U = V \\ \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim(V) \\ \operatorname{def} \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

Пусть $U = K^n, V = K^m, \mathcal{A} : U \to V = A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}, a_{ij} \in K$, то есть отображение представляет собой умножение матрицы на вектор. Тогда:
- $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} A = \{y \in K^m \mid y = Ax \forall x \in K^n\} = \operatorname{span}(A_1, ..., A_n)$ — **образ матрицы**.
- Определение ранга $A \in M_{m \times n}$совпадает с определением ранга $A \in L(K^n, K^m)$:

$$\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{span}(A_1, ..., A_n) = \operatorname{rg} A$$

- A — сюръекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$
- $\ker A = \{x \in k^n \mid Ax = 0\}$ — **ядро матрицы**, общее решение СЛОУ $Ax = 0$.
- $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker} A$ — размерность общего решения СЛОУ $Ax = 0$, то есть $n - \operatorname{rg} A$ — **дефект матрицы**.
- $\dim U = n = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$

Если отображение $\mathcal{A} = A$:
- Инъекция, то:

$$\operatorname{def} A = 0 \Leftrightarrow n - \operatorname{rg} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$$

- Изоморфизм, то:

$$\begin{cases} \operatorname{rg} A = n \\ \operatorname{rg} A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$$

Значит матрица квадратная. По теореме об изоморфизме:

$$U \underset{A}{\cong} V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

- Автоморфизм, то:

$$\operatorname{rg} A = n = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

- Эндоморфизм, то:

$$n = m \Leftrightarrow K^n = K^m$$

$\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W)$. $\mathcal{A}\mathcal{B} : U \to V = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — **Произведение (композиция) отображений**. Очевидно, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in L(U, V)$.

Свойства:
1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ — изоморфизм.
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$, $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$ — левая и правая дистрибутивность.
3. $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})$

4. $\mathcal{C} \in L(V, \Omega) : \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$

Тогда $\mathrm{End}(V)$ — множество всех эндоморфизмов на V, является ассоциативной унитальной алгеброй. Нейтральным элементом для произведения служит E_V: $\forall v \in V : \mathrm{E}_V v = v$

Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфизм, то $\exists \mathcal{A}^{-1} : V \to U \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$ — тоже изоморфизм.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathrm{E}_U$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathrm{E}_V$$

$\forall v_1 = \mathcal{A}u_1, \lambda v_2 = \mathcal{A}u_2$:

$$\mathcal{A}u_1 + \lambda\mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = v_1 + \lambda v_2$$
$$u_1 + \lambda u_2 = \mathcal{A}^{-1}v_1 + \lambda\mathcal{A}^{-1}v_2 = \mathcal{A}^{-1}(v_1 + \lambda v_2)$$

Значит $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V)$ — множество всех автоморфизмов.

Значит $\mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{End}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$ — **обратный оператор** к $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathrm{E}_V$$

Пусть $U_0 \subseteq U$ — линейное подпространство, $\mathcal{A} \in L(U, V)$.

Тогда $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid_{U_0} : U_0 \to V$ — **сужение линейного отображения** на линейное подпространство U_0.

$$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$$

$\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$ — линейное отображение.

Утверждение. Если $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфизм, то $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \mid_{U_0} \in L(U_0, \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_0)$ — изоморфизм.

Доказательство:
- Сюръекция — очевидно.
- Инъекция: $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}_0 \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}_0 = \{\mathbb{0}_U\}$

Значит $\mathcal{A}_0$ — изоморфизм.

Q.E.D.

Теорема о ранге и дефекте линейного отображения:

$$\forall \mathcal{A} \in L(U, V) : \dim(V) = \mathrm{def}\,\mathcal{A} + \mathrm{rg}\,\mathcal{A}$$

Доказательство:

Пусть $U_0 = \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \subseteq U$ — линейное подпространство.

Пусть $U_1 \subseteq U$ — линейное подпространство и прямое дополнение U_0: $U_0 \oplus U_1 = U$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid_{u_1} \in L(u_1, \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_1)$$

$$\forall u \in U \exists!\, u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathrm{rg}\,\mathcal{A} = \mathrm{rg}\,\mathcal{A}_1$$

Покажем, что $\mathcal{A}_1$ — изоморфизм:
- Сюръекция — очевидно.
- Инъекция:

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{Ker}\mathcal{A}_1 \subseteq U_1 \\ \operatorname{Ker}\mathcal{A}_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A}_1 \subseteq U_0 \cap U_1 = \{\mathbb{0}_U\}$$

$\mathcal{A}_1$ — изоморфизм, значит:

$$\dim U_1 = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}_1 = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{rg}\mathcal{A}$$

$$U_0 \oplus U_1 = U \Leftrightarrow \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{A}$$

Q.E.D.

Следствие (характеристика автоморфизма).

$$\mathcal{A} \in \operatorname{Aut}(V) \Leftrightarrow \operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim V (\text{то есть } \operatorname{Im}\mathcal{A} = V) \Leftrightarrow \operatorname{def}\mathcal{A} = 0 (\text{то есть } \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_V\})$$

1.2 Матрица линейного отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены матрицы линейным отображением при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ — базис U

$\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ — базис V

$$u \in U \xleftrightarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n, u = \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i$$

$$v \in V \xleftrightarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m, v = \sum_{j=1}^{m} v_j \eta_j$$

Пусть $v \in V = \mathcal{A}u, u \in U$:

$$v = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}\xi_i, \mathcal{A}\xi_i \in V$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}\xi_1, ..., \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\operatorname{rg}\mathcal{A} = \operatorname{rg}(\mathcal{A}\xi_1, ..., \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \xleftrightarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

$A = (A_1, ..., A_n) = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ — **матрица линейного отображения** $\mathcal{A}$ в базисах ξ, η пространств U и V соответственно.

Так как A_i — координатный изоморфизм, то по свойствам изоморфизма:

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}\xi_1, ..., \mathcal{A}\xi_n) = \operatorname{rg}(A_1, ..., A_n) = \operatorname{rg}(A)$$

$$(\mathcal{A}\xi_1, ..., \mathcal{A}\xi_n) = (\eta_1, ..., \eta_m)A$$

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V), e = (e_1, ..., e_n)$ — базис V

$\mathcal{A}e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) = (e_1, ..., e_n)A.$

A — квадратная **матрица оператора** $\mathcal{A}$ в базисе e

Утверждение. $\dim U = n, \dim V = m$:

$$L(U, V) \cong M_{m\times n}$$

Доказательство:

- Взаимнооднозначность — уже есть
- Линейность — проверим:

$$\lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$$

Где A и B — соответствующие матрицы для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в базисах (ξ, η).

$$i = 1...n : (\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}\left(a_{ji} + \lambda b_{ji}\right)\eta_j$$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}) \leftrightarrow \left(a_{ji} + \lambda b_{ji}\right)_{m\times n} = \left(a_{ji}\right)_{(m\times n)_\lambda}\left(b_{ji}\right)_{m\times n} = A + \lambda B$$

Утверждение. $\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W); \omega, \eta, \xi$ — базисы W, V, U; A — матрица $\mathcal{A}$ в базисах (ω, η); B — матрица $\mathcal{B}$ в базисах $(\xi, \omega) \Rightarrow AB$ — матрица $\mathcal{A}\mathcal{B}$ в базисах (ξ, η).

Доказательство:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\xi_i = \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}\omega k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathcal{A}\omega_k = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a(jk)\eta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} a(jk)b_{ki}\right)\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(AB)_{ji}\eta_j$$

Следствие. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ — изоморфизм, A — матрица $\mathcal{A}$ в базисах $(\xi, \eta) \Rightarrow A^{-1}$ — матрица $\mathcal{A}^{-1}$ в базисах (η, ξ).

Пусть X — матрица $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathrm{E}_V \Leftrightarrow AX = E$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathrm{E}_V \Leftrightarrow XA = E$$

$\mathcal{A}$ — изоморфизм $\Leftrightarrow \dim V = \dim V = n = \mathrm{rg}\,\mathcal{A} = \mathrm{rg}\,A \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}$

$\mathcal{A} \in L\left(\underset{\xi}{U}, \underset{\eta}{V}\right)$

$v = \mathcal{A}u$

$v \overset{\eta}{\leftrightarrow} \mathsf{v} \in K^m$

$u \overset{\xi}{\leftrightarrow} \mathsf{u} \in K^n$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathsf{v}\eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{u}_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{u}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathsf{u}_i\eta_j$$

$$\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathsf{u}_i \Leftrightarrow \mathsf{v} = A\mathsf{u}$$

Значит $\mathsf{v} = A\mathsf{u}$ — форма записи отображения $\mathcal{A}$ в базисах (ξ, η), где u — координаты u в ξ, а v — координаты v в η.

Теорема (Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса).

$\mathcal{A} \in L(U, V), \xi, \xi'$ — базисы U, η, η' — базисы U:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{A} \underset{\xi,\eta}{\longleftrightarrow} A \\ \mathcal{A} \underset{\xi',\eta'}{\longleftrightarrow} A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A' = T_{\eta\to\eta'}^{-1} A T_{\xi\to\xi'}$$

Доказательство:

Построим схему отображений:

$$\begin{array}{ccc} U_\xi & \overset{\mathcal{A}}{\to} & V_\eta \\ {\scriptstyle T_{\xi\to\xi'} \leftrightarrow \mathrm{E}_U} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \mathrm{E}_V \leftrightarrow T_{\eta\to\eta'}} \\ U_{\xi'} & \overset{\mathcal{A}'}{\to} & V_{\eta'} \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathrm{E}_V^{-1} \mathcal{A} \mathrm{E}_V \Leftrightarrow A' = T_{\eta\to\eta'}^{-1} A T_{\xi\to\xi'}$$

Следствие. $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$; e, e' — базисы V:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A \\ \mathcal{A} \underset{e'}{\leftrightarrow} A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A' = T_{e\to e'}^{-1} A T_{e\to e'}$$

Квадратные матрицы A и B — **подобны**, если $\exists$ невырожденная матрица C такая, что

$B = C^{-1}AC$

Значит матрицы операторов в разных базисах подобны.

Замечание.

$$\left.\begin{matrix} v = \mathcal{A}u \underset{(\xi,\eta)}{\longleftrightarrow} \mathsf{v} = A\mathsf{u} \\ v = \mathcal{A}u \underset{(\xi',\eta')}{\longleftrightarrow} \mathsf{v}' = A'\mathsf{u}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mathsf{v}' = T_{\eta\to\eta'}^{-1}\mathsf{v} \\ \mathsf{u} = T_{\xi\to\xi'}\mathsf{u}' \end{cases}$$

$$\mathsf{v}' = T_{\eta\to\eta'}^{-1}\mathsf{v} = T_{\eta\to\eta'}^{-1}A\mathsf{u} = T_{\eta\to\eta'}^{-1} A T_{\xi\to\xi'}\mathsf{u}' = A'\mathsf{u}'$$

Значит форма записи линейного отображения не зависит от выбора базиса.

1.3 Инварианты линейного отображения.

Инвариант — некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$ — линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$. Пусть $e_1, ..., e_n$ — базис v.

Как мы знаем, $\exists! D$ n-форма, такая что $D(e_1, ..., e_n) = 1$. Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n)$$

Замечание. $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) = D(Ae_1, ..., Ae_n) = \det A$ — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

Теорема.

$$\forall \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \det \mathcal{A} = \det A$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, ..., e_n)$ базис V. Тогда:

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[\text{вз. однозначно}]{} A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$\begin{aligned}\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_{i_1}, ..., \sum_{i=1}^n a_{in}e_{i_n}\right) = \\ = \sum_{i_1=1}^n ... \sum_{i_n=1}^n a_{i_{11}} \cdot ... \cdot a_{i_{nn}} D\left(e_{i_1}, ..., e_{i_n}\right) = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_1 1} \cdot ... \cdot a_{i_n n} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, ..., e_n) = \det A\end{aligned}$$

Q.E.D.

Замечание. A и B подобные матрицы, то $\det A = \det B$.

Замечание. $\det \mathcal{A}$ — инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

Следствие 1. $\forall n$-форма f на V:

$$\forall \xi_1, ..., \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1 ...., \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, ..., \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем $e = (e_1, ..., e_n)$ — базис V. $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$. Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) \overset{\text{из доказательства теоремы}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \det A f(e_1, ..., e_n)$$

На самом деле $\alpha = f(e_1, ..., e_n)$, поэтому:

$$\forall \xi_1, ..., \xi_n : g(\xi_1, ..., \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, ..., \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что g - полилинейное, т.к. f полилинейное и $\mathcal{A}$ - линейное отображение. Также g - антисимметричное, т.к. f - антисимметричное. откуда g — n-форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, ..., e_n) = f(\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, ..., e_n)$$

откуда:

$$g(\xi_1, ..., \xi_n) = g(e_1, ..., e_n) D(\xi_1, ..., \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, ..., \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, ..., \xi_n)$$

Q.E.D.

Замечание. Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть $\mathcal{A} = A_{n\times n}$ — линейный оператор умножения. $f = D$, $B_j \in K^n$. Тогда:

$$\det(AB_1, ..., AB_N) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть e - базис V. Тогда $\mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A, \mathcal{B} \overset{e}{\leftrightarrow} B$. Также $\mathcal{A}\mathcal{B} \overset{e}{\leftrightarrow} AB$ по свойству. откуда:

$$\det \mathcal{A}\mathcal{B} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

Следствие 3. $\mathcal{A} \in \operatorname{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\mathcal{A} \in \operatorname{Aut}(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) \\ \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) \\ \operatorname{rg} \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \overset{e}{\leftrightarrow} A, \det A \neq 0 \\ \operatorname{rg} A = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует $\mathcal{A}^{-1}$. А также $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$. откуда по свойству 3 получаем, что $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$

Q.E.D.

Следствие 4. $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ - *след матрицы.*

Теорема (о следе подобных матриц).

Если A и B подобны, то $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Доказательство:

A и B подобны $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$. Пусть $C^{-1} = S = (s_{ij})$. откуда:

$$\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}s_{ij}$$

Заметим, что $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k\neq j \end{cases}$. Так что получаем, что

$$\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A$$

Q.E.D.

Следствие. $\forall \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr} A'$, где A и A' матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисе e и e' соответственно.

$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A$ — **след оператора**.

Замечание. след оператора инвариантен из следствия выше.

Линейное подпространство $L \subset V$ называется **инвариантным** относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, если $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$.

Теорема 1.

$L \subset V$ - линейное подпространство. L - инвариантно относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$. Тогда $\exists$ базис пространства V матрица, такой что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность $A^1 = k \times k, k = \dim L$.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = \operatorname{span}(e_1, ..., e_k)$ - базис L.

Дополним базис L до базиса V: $V = \operatorname{span}(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$.

Запишем матрицу A по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji} e_j \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

откуда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & * & ... & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & ... & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & * & ... & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & ... & a_{k1} \end{pmatrix}$

Q.E.D.

Теорема 2.

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис пространства V, такое что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & ... & ... & \mathbb{0} \\ \vdots & A^2 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & ... & ... & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис $V \overset{\text{по эквив. условию } \oplus}{=\!=\!=\!=\!=}$ объединение базисов L_i.

$$L_i = \operatorname{span}\left(e_1^i, ..., e_{k_i}^i\right), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого L_i из доказательства прошлой теоремы, все кроме соответствующих строчек для L_i будет зануленно.

Q.E.D.

Замечание. $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \operatorname{End}(L_i)$.

Теорема 3.

$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантны относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \mathcal{A}|_{L_i}$, где $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \xLeftrightarrow[\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}]{} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^{m} v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \operatorname{Im} \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}v_i \in \operatorname{Im} A|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ существует лишь одно разложение через $\operatorname{Im} A|_{L_i}$, что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

$\lambda \in K$ называется **собственным числом** $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, если $\exists v \in V, v \neq 0$. $\mathcal{A}v = \lambda v$. Такой v называют **собственным вектором** собственного числа λ.

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda\varepsilon)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \ker(A - \lambda\varepsilon) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

v — собственный вектор собственного числа λ.

$V_\lambda = \ker(A - \lambda\varepsilon)$ — **собственное подпространство** $\mathcal{A}$ соответствующего собственного числа λ. Это мн-во всех собственных векторов V, отвечающим собственному числу λ и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$ — **геометрическая кратность**.

Свойства.
1. V_λ инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.
2. V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3. $\gamma(\lambda)$ инвариант относительно базиса.

Условие существования собственного числа $\lambda \in K_{\mathcal{A}}$ — собственное число, v — собственный вектор $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda\varepsilon)$ нетривиально $\Leftrightarrow \operatorname{def}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

Т.к. определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ — **характеристический многочлен** оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. det оператора инвариантен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{tr} A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + ... + t_n = \operatorname{tr} A \\ t_1 \cdot ... \cdot t_n = \det A \end{cases}$$

Заметим, что λ — собственное число $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \text{ - корень хар. мн.} \end{cases}$

Замечание. Если все корни хар. мн. $\in K$, то $\begin{cases} \lambda_1 + ... + \lambda_n = \operatorname{tr} A \\ \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

Спектром оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$, $\alpha(\lambda)$ - кратность λ лин. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

Простой спектр — все кратности равны 1.

Теорема 1.

$\forall \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$. $\forall \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Доказательство:

λ с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \ker(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = V_\lambda$ не тривиально $\Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1$.

Пусть $\dim V_\lambda = \gamma$, V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, значит по теореме 1 об инварианте подпространств существует V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = \operatorname{span}\left(e_1, ..., e_\gamma, e_{\gamma+1}, ..., e_\gamma\right)$$

При построении матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ - λ на i-ой строчке. Немного распишем:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \det(A - tE) = \\ &= \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma\times\gamma} & * \\ \mathbb{0} & A^2 - tE_{(n-\gamma)\times(n-\gamma)} \end{vmatrix} \overset{\text{по 6-ому св-ву определителей}}{=\!=\!=} \\ &= |A^1 - tE\|A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = \\ &= (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda$ корень $\chi(t)$, причем кратность $\geq \gamma$, т.к λ может оказаться корнем χ_{A^2}

Q.E.D.

Теорема 2.

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ попарно различные с.ч $\mathcal{A}$, $v_1, ..., v_n$ соответствуют с.в. $\Rightarrow v_1, ..., v_n$ — линейно независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

- База: $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$ линейно независимы.
- Индукционный переход: Пусть верно для m, докажем для $m + 1$:

От противного: Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_m, \lambda_{m+1}$ попарно различные собственные числа.

$v_1, ..., v_m$ — линейно независимы по предположению. $v_1, ..., v_m, v_{m+1}$ - линейно зависимы. Откуда: $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. С одной стороны:

$$\mathcal{A} v_{m+1} = \lambda_{m+1} v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A} v_{m+1} = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{A} v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_{m+1} - \lambda_i) a_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что $v_1, ..., v_m$ линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что $\exists \alpha_i \neq 0$, для которого v_i не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то $v_{m+1} - v_i \neq 0$. Откуда комбинация нетривиальна. Противоречие.

Q.E.D.

Следствие $\lambda_1, ..., \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, т.е V_{λ_i} дизъюнктны.

Доказательство:

$$\mathbb{0} = v_1 + ... + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов не нулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнктны.

Q.E.D.

Теорема 3

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$. Тогда:

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$$

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица A - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & ... & ... & \mathbb{0} \\ \vdots & A^2 & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & ... & ... & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi(t) = \det(A - tE) \xlongequal{\text{по 6-ому свойству опр.}} \prod\limits_{i=1}^{m} \det(A^i - tE) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(t)$

Q.E.D.

1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ называется **оператором простой структуры (о.п.с)**, если $\exists$ базис пространства V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет диагональный вид.

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора $\mathcal{A}$ будут λ_i, а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характеристического многочлена $\chi \in K \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{ - с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$.

Теорема.

$\forall A \in \operatorname{End}(V)$, если $\sum\limits_{\lambda \text{ -с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$, то тогда:

$$\mathcal{A} \text{ - о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ - с.ч} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ -с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$\sum\limits_{\lambda \text{ -с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(n) = n \Leftrightarrow$ все корни $\chi \in K$, откуда $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис V такой, что матрица диагональна $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{ с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda - \text{ с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

Следствие. Если все корни характ. многочлена $\in K$, а также все $\alpha(\lambda) = 1$ (спектр простой), то $\mathcal{A}$ - о.п.с.

$A_{n \times n}$ называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

Теорема (критерий диагональности матрицы A).

~~это перепишем~~

A подобна диагональной $\Leftrightarrow$ матрица о.п.с $\mathcal{A}$ в некотором базисе

Доказательство:

- $\boxed{\Rightarrow}$

Пусть A - диагонализируемая $\Leftrightarrow$ подобна диагональной $\Leftrightarrow \exists$ невырожд T: $T^{-1}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. V - линейное пространство над полем K. $e = (e_1, ..., e_n)$ - базис V.

Пусть A - матрица в базисе e. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. $v = (v_1, ..., v_n)$ - базис.

Откуда $v_1, ..., v_n = (e_1, ..., e_n)T_{e \to v} \Rightarrow \mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow}) A' = T^{-1}AT = \Lambda$

- $\boxed{\Leftarrow}$

$\mathcal{A}$ о.п.с, A - матрица в некотором базисе $e = (e_1, ..., e_n)$. Возьму $v_1, ..., v_n$ - базис V, где v_i - собственный вектор $\mathcal{A}$. Заметим, что так как $\mathcal{A}$ о.п.с, то такой базис существует.

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из $T_{e\to v}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{v}{\leftrightarrow}) A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$ подобна диагональной

Q.E.D.

Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной

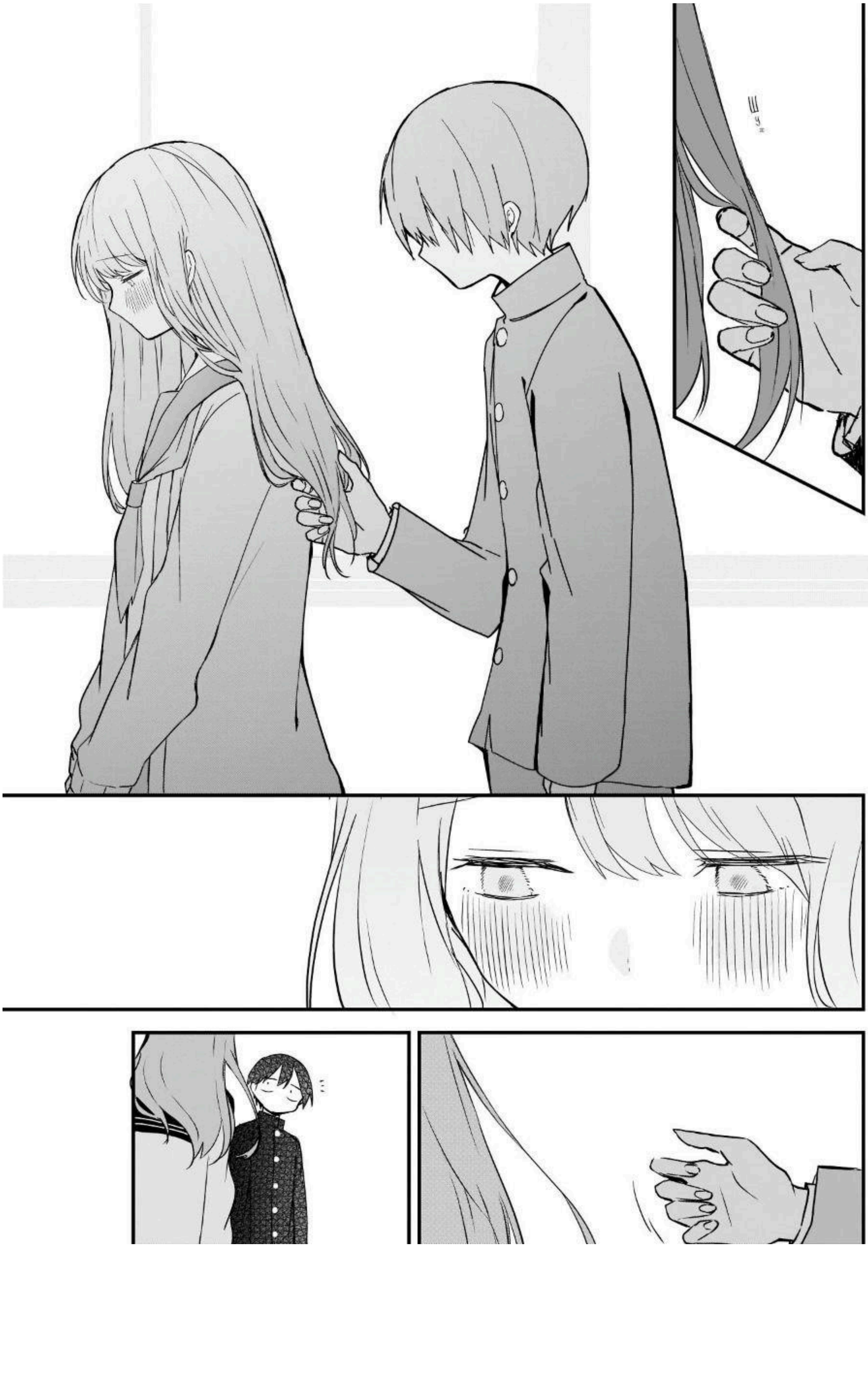
1. Найти спектр: если все корни $\chi \in K$, переходим к 2.
2. Найти все $\gamma(\lambda)$, если $\forall \lambda$ с.ч $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то перейти к 3.
3. $T_{\text{кан.} \to v} = (v_1, ..., v_n)\ T^{-1}AT = \Lambda$

Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3138-M3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадиевна.


Шу..