Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. F называется **первообразной** функции f, если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R}$: $F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f, то $F - G = const$.

Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0, то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0, то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f.

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b\rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \int f(x)dx$$

Формально: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две *загадочные* формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \displaystyle\int (af) = a \int f$
3. $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \displaystyle\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b \rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

   Тогда: $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x.

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \subset R^m$ **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y-x), t \in [0, 1]\} = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — **выпукла** на промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Надграфик $(f, \langle c, d \rangle) = \{(x, y) : x \in \langle c, d \rangle, y \geq f(x)\}$

Замечание. f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow$ Надграфик $(f, \langle a, b\rangle)$ - выпуклый в R^2.

<u>Лемма (о трех хордах)</u>

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \leq (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1))$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}x_3 + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

f - **<u>строго выпукла</u>** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

<u>Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)</u>

f - выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

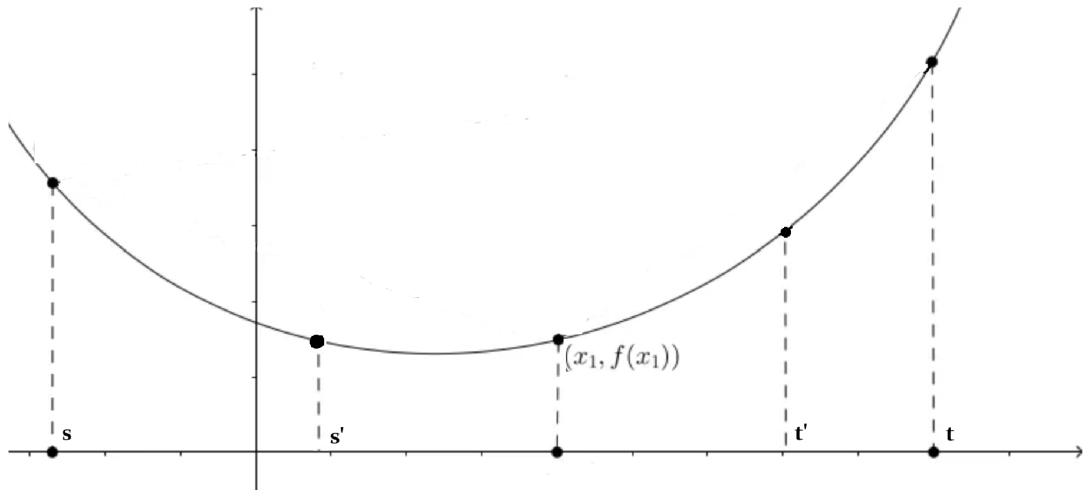
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1. Посмотрю на данные выражения: $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ и $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \leq \dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1, $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1, $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1), f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.

Возьму t на отрезке (x_1, x_2). Посмотрю на $\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ и $\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограниченна снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t \to x_1+0} \frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t \to x_2-0} \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр на (a, b).

Следствие 2. f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об одностор дифф-ти вып. функции). и берем рациональное число на таком интеравле.

todo: добавить рисунок выпуклая вниз, выпуклая вверх

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Тогда

f - вып. вниз $\Leftrightarrow$ График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$, тогда по предыдущей теореме: $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: Дано множество A выпуклое в R^2. Прямая L называется **опорной** к A в точке x_0, если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

1) f - дифф на (a, b), непр на $\langle a, b \rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b).

2) f непр на $\langle a, b \rangle$, f - дважды дифф на (a, b). Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b).

Доказательство:

1) $\Rightarrow$ очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.
$\Leftarrow$ Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$ по теореме Лагранжа. $\dfrac{f(x_2) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$ по теореме Лагранжа.

Так как $c_1 < c_2$, а f' возрастает, то нужное неравенство выполняется.

2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Правило Лопиталя.

Лемма (об ускоренной сходимости)

Пусть даны $f, g : D \in R \to R$, a - предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists U(a), f, g \neq 0$ в $U(a) \cap D$ - выколотой.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Тогда:

$$\forall (x_n) : x_n \to a, x_n \in D, x_n \neq a, \exists (y_n) : y_n \to a, y_n \in D, y_n \neq a : \lim_{k \to \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k} \text{ и } \lim_{k \to \infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k}$$

Доказательство:

Давайте будем выбирать такие y_k, что:

$$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \text{ и } \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$$

Очевидно, что мы сможем выбрать такие y_k. А из этого уже следует то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: утверждение верно, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a, b)

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Тогда: $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Доказательство:

Замечание о корректности: тк $g' \neq 0$, то g - строго положительно или отрицательно в какой-то окрестности a.

По Гейне. Возьму $(x_n) : x_n \to a, x_n \neq a$. Берем y_n из Лопиталя.

Теорема Коши: $\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, где $\xi_k \in (x_k, y_k)$.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

1.4 Определенный интеграл.

def: **Фигура** - это ограниченное подмножество в R^2. ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — назовем **площадью**, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$, так как: $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$.
2. σ(вертик отрезок) $= 0$, так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой $= \forall \varepsilon > 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — **ослабленная площадь**, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где } A = \bigcup\limits_{\text{конеч}} P^k, \text{где } P_k$ - прямоугольник)
2. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где} A = \bigcup P^k, \text{где } P_k$ - прямоугольник)

todo: написать отличие.

def: **Срезка** - $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ $(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непр., σ- осл. адд площадь, тогда определенный интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\text{ПГ}(f^+,[a, b])) - \sigma(\text{ПГ}(f^-,[a, b]))$$

Простейшие свойства:

1. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогда $\int\limits_a^b f \geq 0$

2. Если $f = c$ (константа), тогда $\int\limits_a^b c = c \cdot (a - b)$

3. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$

4. $\int\limits_a^a f = 0$

Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$

2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b g(x)$.

   Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.

3. $(b - a)\min_{[a,b]} f \leq \int\limits_a^b f \leq (b - a)\max\limits_{[a,b]} f$

   Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]}$

4. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

   Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.

5. **Теорема о среднем**

   Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

$$\int\limits_a^b f = f(c)(b - a)$$

   Доказательство:

   $a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

$$\min f \leq \frac{1}{b - a}\int\limits_a^b f \leq \max f$$

   А мы знаем, что функция непрерывна, тогда по теореме о промежуточном значении:

$$\exists\, c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

.

Q.E.D.

Интеграл с переменным верхним пределом - $\Phi : [a,b] \to R : \Phi(x) = \int\limits_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом - $\psi : [a,b] \to R : \psi(x) = \int\limits_x^b f$

для $f \in C([a,b])$.

Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a,b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$y > x : \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim\limits_{y\to x+0} f(c),$
где c лежит между x, y из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производна равна $f(x)$. Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a,b])$, F - первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b)-c) - (F(a)-c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ.

Замечание: Откажемся от соглашения $a \leq b$ и введем для $d < c$:

$$\int\limits_c^d = -\int\limits_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F\Big|_a^b + \beta F\big|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла. Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a, b])$. Тогда $\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Доказательство:

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int\limits_a^b (fg' + f'g) = fg\Big|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a, b\rangle),\ \varphi\langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle,\ \varphi \in C^1,\ [p, q] \subset \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

F - первообразная f, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

1:09 мат анализ кохась лекция 2. Я ничего не понял про нижние два замечания

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p, q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a,b]$ $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a,b])$ обе возрастают. Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$, то есть

$$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \leq (b-a)\int\limits_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x, y \in [a,b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

Q.E.D.

Пример (Ш. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n = \dfrac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt$

$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_b^a - \int\limits_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \left[\begin{array}{l} f = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \\ g = \cos t \end{array}\right] = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \dfrac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} \sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2)$ - многочлен, от π^2, где $\deg P \leq n$.

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$. Тогда $q^n H_n = \dfrac{q^n}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \, dt = q^n P(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \le \dfrac{q^n}{n!} 4^n \pi = \dfrac{(4q)^n}{n!} \pi \to 0$, но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

def: $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ **кусочно-непрерывной.**

$\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$. Такая функция будет непрерывны на $[a, b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

def: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ - **почти первообразная** функции f.

F - непр и $\exists A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$. $\forall x \in [a, b] \backslash A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

f - кусочно-непрерывно на $[a, b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int\limits_a^b = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$

Утверждение. Если f - кусочно - непрерывна тогда: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Утверждение очевидно по определению.

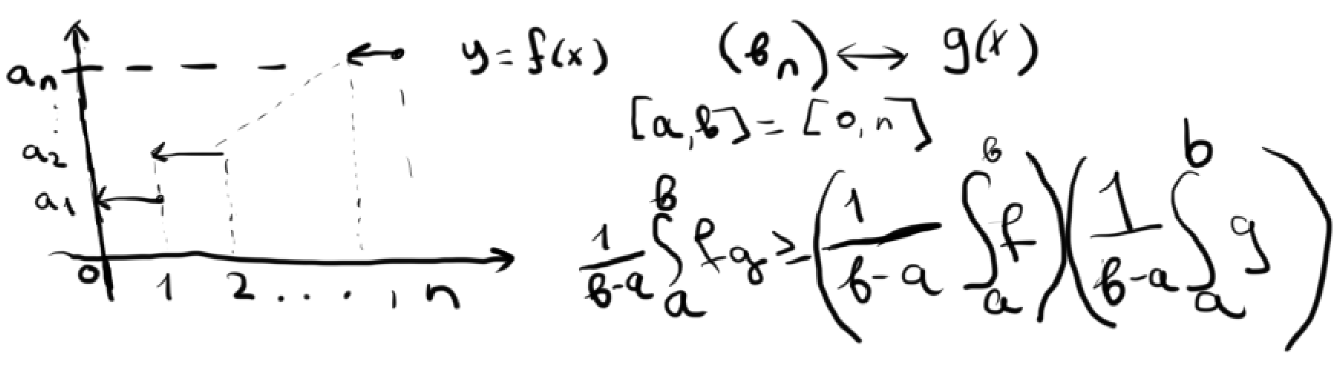
Следствие: Все теоремы, использующие в доказательство только формулу Ньютона-Лейбница у нас уже доказаны!

Пример (Неравенство Чебышева для сумм)

$a_1 \le \dots \le a_n, b_1 \le \dots \le b_n$.

Тогда $\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \ge \left(\dfrac{1}{n} \sum a_i\right) \left(\dfrac{1}{n} \sum b_i\right)$

Доказательство:



Возьмем доску Константина Петровича для лучшего понимания. Давайте возьмем две функции $f(x)$, $g(x)$, как показано на рисунке. Вспомним, что у нас есть неравенство Чебышева, которое записано на правой стороне доски. Тогда очевидно подстановкой в него наших $f(x), g(x)$ и $a = 0, b = n$, мы получим нужное неравенство. Q.E.D.

1.5 Приложение к определенным интегралам.

Введем некоторые обозначения:

$\mathrm{Segm}([a,b])$ - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a,b]$

$\varPhi : \mathrm{Segm}([a,b]) \to \mathbb{R}$ - **функция для промежутка**.

Введем **аддитивные функции для промежутка**:

$$\forall [p,q] \in \mathrm{Segm}[a,b] : \forall c \in (p,q) : \varPhi([p,c]) + \varPhi(c,q) = \varPhi([p,q])$$

def: $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varPhi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - **плотность** $\varPhi$: $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)$:$inf_{\Delta} f \cdot len(\Delta) \le \varPhi(\Delta) \le sup_{\Delta} f \cdot len(\Delta)$

Теорема(о вычисл. а.ф.п.по ее плотности)

Дана плотность $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varPhi : \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)$ - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}(\langle a,b\rangle)$, $\varPhi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} f$

Доказательство:

Н.У.О. считаем, что $\Delta = [a,b]$. Тогда возьмем $F(x)$, такую что:

$$F(x) = \left[\begin{array}{c} 0, x = a \\ \varPhi([a,x]), x \in (a,b) \end{array}\right.$$

Проверим, что F - первообразная f:

$F'_{+}(x) = \dfrac{F(x+h) - F(h)}{h} = \dfrac{\varPhi([a,x+h]) - \Phi([a,x])}{h} = \dfrac{\varPhi(x,x+h)}{h} \in [\min f, \max f]$ на промежутке $x + x_0$ из ее плотности

Получили, что правосторонняя производная f и левостороняя производные существуют.

Q.E.D.

Пример: Площадь криволинейного сектора.

$[a,b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a,b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a,b] \to (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: **Сектор** $[\alpha,\beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, b], 0 \le r \le p(\varphi)\}$

$\varPhi : \Delta = \sigma(\text{Сектора})$, $\Delta \in \mathrm{Segm}([a,b])$

Теорема.

В указанных условия, а так же $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Segm}([a,b])$. Тогда:

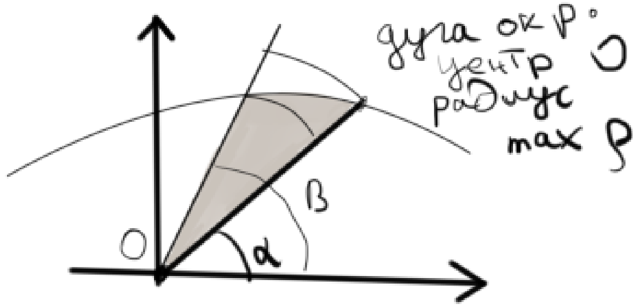
$$\varPhi([\alpha,\beta]) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

Доказательство:

Если мы докажем, что $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ - плотность Φ, тогда по предыдущей теореме, мы получим, что данная формула будет верна. Будем опрделять определение плотности.

$\Delta = [\alpha, \beta]$, откуда Сектор$[\alpha, \beta] \subset$ Криволинейного вектора$(O, \max\rho, [\alpha, \beta])$.

Криволинейный вектор в в данном случае подразумевает сектор окружности, нарисованный на чертеже. Так же на нем вы видите серым - Сектор$[\alpha, \beta]$.



Как мы знаем из геометрии: площадь сектора окружности $= \dfrac{\alpha}{2}R^2$.

Откуда из монотонности площади:

$$\Phi([\alpha, \beta]) \leq \sigma(\text{Крив. вектор}) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]}\rho)^2$$

Аналогично можно оценить нижним сектором. То есть:

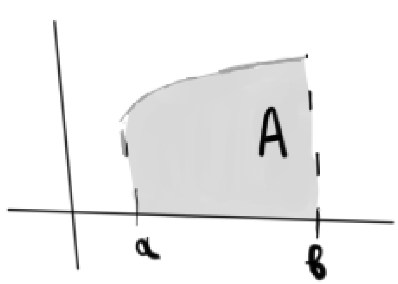
$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min_{[a,b]}\rho)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]}\rho)^2$$

Откуда это и правда плотность, поэтому верно.

Q.E.D.

Кохась: хочу эксперимент

$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int\limits_a^b f\,dx$, где $f \geq 0, f$ - непрерывно. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}$, $\gamma : [p, q] \to R^2$.



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загагулины будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изообpажение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисуночке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int_a^b "y(x)" dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int_p^q y(t)x'(t)dt$$

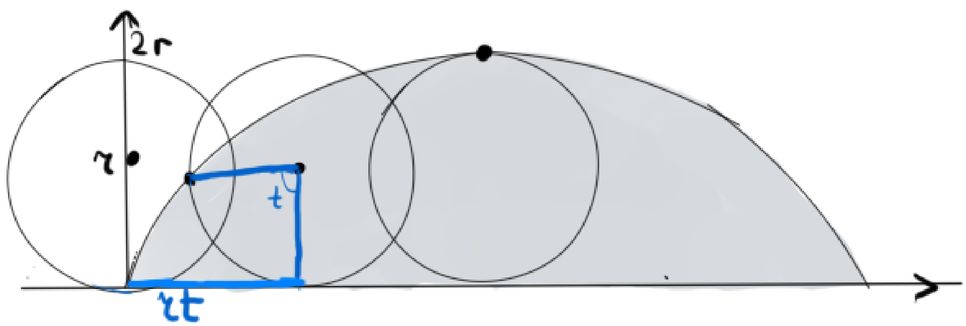
Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

todo: вставить 2 формулы 1.50

Пример:

$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), r \in R \\ y(t) = r(1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ - путь, который описывается данной формулой - **циклоид**.

Фиксируем точку в нуле и катим окружность по нашему полю. Мы знаем, что x монотон-нен



И теперь я хочу найти площадь серого подграфика:

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x)dx = \begin{bmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 = 3\pi r^2$$

Пример (Изопометрическое неравентсво.)

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограниченно.

Пусть $diam(G) = \sup\limits_{a,b \in G} (\rho(a, b))$ - диаметр. $diam(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \le \frac{\pi}{4} d^2$

todo: тут во-первых скипнут рисунок, во-вторых я не осознал 2:20

$\rho(\varphi) = \max(r : (\varphi, r)_{max} \in G)$ - непрерывна.

Упражнение: доказать непрерывность (возможно спросят на экзамене)

$\overline{\varphi} = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \rho^2(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\left(\overline{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right)\, d\overline{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} "AB^2" d\varphi \le \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{d^2\pi}{4}$$

2 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!