

# Линейная Алгебра

Чепелин Вячеслав

19.02.2025

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| 1 Линейные отображения .....  | 2  |
| 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения. ....   | 2  |
| 1.2 Матрица линейного отображения. Координатный изоморфизм. Формула замены<br>матрицы линейным отображением при замене базиса. .... | 5  |
| 1.3 Инварианты линейного отображения. ....  | 7  |
| 1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора .....   | 11 |
| 1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от<br>диагонализированной матрицы. ....         | 14 |
| Информация о курсе .....  | 16 |

# 1 Линейные отображения

## 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения.

$U, V$  — линейные пространства над одним полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Отображение  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  называется **линейным** (или гомоморфизмом), если:

$$\forall \lambda \in K \forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$$

**Замечания.**

1.  $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. При фиксированном аргументе и разных отображениях  $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u$  и  $\mathcal{C}u$  являются векторами и их можно складывать и домножать на скаляр.
3.  $\mathcal{A}0_U = 0_V$

$\forall \lambda \in K, \mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  — линейные отображения:

- $\lambda \mathcal{A} : U \rightarrow V$  — **умножение отображения на скаляр**:

$$\forall u \in U : (\lambda \mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u)$$

- $\mathcal{A} + \mathcal{B} : U \rightarrow V$  — **сумма отображений**:

$$\forall u \in U : (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

**Нулевое линейное отображение**  $\mathcal{O} : U \rightarrow V$ :

$$\forall u \in U : \mathcal{O}u = 0_V$$

Заметим, что  $\mathcal{O}$  — нейтральный элемент относительно сложения отображений.

Заметим, что  $-1\mathcal{A} = -\mathcal{A}$  — элемент, обратный  $\mathcal{A}$  относительно сложения отображений.

Оказывается, что выполняются все 8 аксиом линейного пространства, значит обозначим  $L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V)$ , как линейное пространство всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ :

- $\text{Im}(\mathcal{A}) = \{v \in V, v = \mathcal{A}u \mid \forall u \in U\}$  — **образ линейного отображения**, является линейным подпространством.
- $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_V\}$  — **ядро линейного отображения**, является линейным подпространством. Ядро всегда не пустое, так как  $0_U \in \text{Ker}(\mathcal{A})$ .

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim(\text{Im}(\mathcal{A}))$  — **ранг отображения**.

$\text{def } \mathcal{A} = \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}))$  — **дефект отображения**.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ :

- $\mathcal{A}$  — **сюръекция**, если:

$$\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim(V)$$

- $\mathcal{A}$  — **инъекция**, если:

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$$

То есть:

$$\forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_2 \Rightarrow u_1 = u_2$$

$$\mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0_V \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}$  — **биекция (изоморфизм)**, если:

$$\begin{cases} \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{A}$  — **эндоморфизм (линейный оператор)**, если  $U = V$ .
- $\mathcal{A}$  — **автоморфизм**, если является изоморфизмом и эндоморфизмом, то есть:

$$\begin{cases} U = V \\ \text{rg } \mathcal{A} = \dim(V) \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

Пусть  $U = K^n, V = K^m, \mathcal{A} : U \rightarrow V = A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K$ , то есть отображение представляет собой умножение матрицы на вектор. Тогда:

- $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } A = \{y \in K^m \mid y = Ax \forall x \in K^n\} = \text{span}(A_1, \dots, A_n)$  — **образ матрицы**.
- Определение ранга  $A \in M_{m \times n}$  совпадает с определением ранга  $A \in L(K^n, K^m)$ :

$$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A$$

- $A$  — сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$
- $\text{ker } A = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$  — **ядро матрицы**, общее решение СЛОУ  $Ax = 0$ .
- $\text{def } A = \dim \text{Ker } A$  — размерность общего решения СЛОУ  $Ax = 0$ , то есть  $n - \text{rg } A$  — **дефект матрицы**.
- $\dim U = n = \text{def } A + \text{rg } A$

Если отображение  $\mathcal{A} = A$ :

- Инъекция, то:

$$\text{def } A = 0 \Leftrightarrow n - \text{rg } A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = n$$

- Изоморфизм, то:

$$\begin{cases} \text{rg } A = n \\ \text{rg } A = m \end{cases} \Leftrightarrow n = m$$

Значит матрица квадратная. По теореме об изоморфизме:

$$U \underset{A}{\cong} V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

- Автоморфизм, то:

$$\text{rg } A = n = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

- Эндоморфизм, то:

$$n = m \Leftrightarrow K^n = K^m$$

$\mathcal{A} \in L(W, V), \mathcal{B} \in L(U, W)$ .  $\mathcal{A}\mathcal{B} : U \rightarrow V = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  — **Произведение (композиция) отображений**. Очевидно, что  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in L(U, V)$ .

Свойства:

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — изоморфизмы  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  — изоморфизм.
2.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2, (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$  — левая и правая дистрибутивность.
3.  $\forall \lambda \in K : \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})$

4.  $\mathcal{C} \in L(V, \Omega) : \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$

Тогда  $\text{End}(V)$  — множество всех эндоморфизмов на  $V$ , является ассоциативной унитарной алгеброй. Нейтральным элементом для произведения служит  $E_V: \forall v \in V : E_V v = v$

Если  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  — изоморфизм, то  $\exists \mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$  — тоже изоморфизм.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = E_U$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = E_V$$

$\forall v_1 = \mathcal{A}u_1, \lambda v_2 = \mathcal{A}u_2:$

$$\mathcal{A}u_1 + \lambda \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = v_1 + \lambda v_2$$

$$u_1 + \lambda u_2 = \mathcal{A}^{-1}v_1 + \lambda \mathcal{A}^{-1}v_2 = \mathcal{A}^{-1}(v_1 + \lambda v_2)$$

Значит  $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  — изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$  — множество всех автоморфизмов.

Значит  $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End}(V) \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} \in \text{Aut}(V)$  — **обратный оператор** к  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = E_V$$

Пусть  $U_0 \subseteq U$  — линейное подпространство,  $\mathcal{A} \in L(U, V)$ .

Тогда  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$  — **сужение линейного отображения** на линейное подпространство  $U_0$ .

$$\forall u \in U_0 : \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$$

$\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$  — линейное отображение.

**Утверждение.** Если  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  — изоморфизм, то  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, \text{Im } \mathcal{A}_0)$  — изоморфизм.

Доказательство:

- Сюръекция — очевидно.
- Инъекция:  $\text{Ker } \mathcal{A}_0 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_0 = \{0_{U_0}\}$

Значит  $\mathcal{A}_0$  — изоморфизм.

Q.E.D.

**Теорема о ранге и дефекте линейного отображения:**

$$\forall \mathcal{A} \in L(U, V) : \dim(V) = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$$

Доказательство:

Пусть  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A} \subseteq U$  — линейное подпространство.

Пусть  $U_1 \subseteq U$  — линейное подпространство и прямое дополнение  $U_0: U_0 \oplus U_1 = U$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} \in L(U_1, \text{Im } \mathcal{A}_1)$$

$$\forall u \in U \exists! u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{A}_1 \Rightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}_1$$

Покажем, что  $\mathcal{A}_1$  — изоморфизм:

- Сюръекция — очевидно.
- Инъекция:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subseteq U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subseteq \text{Ker } \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subseteq U_0 \cap U_1 = \{0_U\}$$

$\mathcal{A}_1$  — изоморфизм, значит:

$$\dim U_1 = \dim \text{Im } \mathcal{A}_1 = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}$$

$$U_0 \oplus U_1 = U \Leftrightarrow \dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \text{def } \mathcal{A} + \text{rg } \mathcal{A}$$

Q.E.D.

**Следствие (характеристика автоморфизма).**

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{A} = \dim V (\text{то есть } \text{Im } \mathcal{A} = V) \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0 (\text{то есть } \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_V\})$$

## 1.2 Матрица линейного отображения. Координатный изоморфизм.

**Формула замены матрицы линейным отображением при замене базиса.**

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) — \text{базис } U$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) — \text{базис } V$$

$$u \in U \xleftarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in K^n, u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$v \in V \xleftarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m, v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

Пусть  $v \in V = \mathcal{A}u, u \in U$ :

$$v = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A} \xi_i, \mathcal{A} \xi_i \in V$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A} \xi_1, \dots, \mathcal{A} \xi_n)$$

$$\text{rg } \mathcal{A} = \text{rg}(\mathcal{A} \xi_1, \dots, \mathcal{A} \xi_n)$$

$$\mathcal{A} \xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \xleftarrow[\text{координатный изоморфизм}]{} A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m$$

$A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$  — **матрица линейного отображения**  $\mathcal{A}$  в базисах  $\xi, \eta$  пространств  $U$  и  $V$  соответственно.

Так как  $A_i$  — координатный изоморфизм, то по свойствам изоморфизма:

$$\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{rg}(\mathcal{A} \xi_1, \dots, \mathcal{A} \xi_n) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg}(A)$$

$$(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_m)A$$

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \Leftrightarrow (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)A.$$

$A$  — квадратная **матрица оператора**  $\mathcal{A}$  в базисе  $e$

**Утверждение.**  $\dim U = n$ ,  $\dim V = m$ :

$$L(U, V) \cong M_{m \times n}$$

Доказательство:

- Взаимнооднозначность — уже есть
- Линейность — проверим:

$$\lambda \in K : \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \stackrel{?}{\leftrightarrow} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}$$

Где  $A$  и  $B$  — соответствующие матрицы для  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в базисах  $(\xi, \eta)$ .

$$i = 1 \dots n : (\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}) \leftrightarrow (a_{ji} + \lambda b_{ji})_{m \times n} = (a_{ji})_{(m \times n)_\lambda} (b_{ji})_{m \times n} = A + \lambda B$$

**Утверждение.**  $\mathcal{A} \in L(W, V)$ ,  $\mathcal{B} \in L(U, W)$ ;  $\omega, \eta, \xi$  — базисы  $W, V, U$ ;  $A$  — матрица  $\mathcal{A}$  в базисах  $(\omega, \eta)$ ;  $B$  — матрица  $\mathcal{B}$  в базисах  $(\xi, \omega) \Rightarrow AB$  — матрица  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  в базисах  $(\xi, \eta)$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B}\xi_i &= \mathcal{A}(\mathcal{B}\xi_i) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^p b_{ki}\omega_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^p b_{ki}\mathcal{A}\omega_k = \sum_{k=1}^p b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk}\eta_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki}\right)\eta_j = \sum_{j=1}^m (AB)_{ji}\eta_j \end{aligned}$$

**Следствие.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  — изоморфизм,  $A$  — матрица  $\mathcal{A}$  в базисах  $(\xi, \eta) \Rightarrow A^{-1}$  — матрица  $\mathcal{A}^{-1}$  в базисах  $(\eta, \xi)$ .

Пусть  $X$  — матрица  $\mathcal{A}^{-1}$ . Тогда:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = E_V \Leftrightarrow AX = E$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = E_V \Leftrightarrow XA = E$$

$\mathcal{A}$  — изоморфизм  $\Leftrightarrow \dim U = \dim V = n = \text{rg } \mathcal{A} = \text{rg } A \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}$

$$\mathcal{A} \in L\left(\begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix}, \begin{matrix} V \\ \eta \end{matrix}\right)$$

$$v = \mathcal{A}u$$

$$v \stackrel{\eta}{\leftrightarrow} v \in K^m$$

$$u \xleftrightarrow{\xi} u \in K^n$$

$$\sum_{j=1}^m v \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A} \xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} u_i \eta_j$$

$$v = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \Leftrightarrow v = Au$$

Значит  $v = Au$  — форма записи отображения  $\mathcal{A}$  в базисах  $(\xi, \eta)$ , где  $u$  — координаты  $u$  в  $\xi$ , а  $v$  — координаты  $v$  в  $\eta$ .

**Теорема (Формула замены матрицы линейного отображения при замене базиса).**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ ,  $\xi, \xi'$  — базисы  $U$ ,  $\eta, \eta'$  — базисы  $V$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \xleftrightarrow{\xi, \eta} A \\ \mathcal{A} \xleftrightarrow{\xi', \eta'} A' \end{array} \right\} \Rightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Доказательство:

Построим схему отображений:

$$\begin{array}{ccc} U_\xi & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V_\eta \\ T_{\xi \rightarrow \xi'} \uparrow & & \uparrow E_V \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'} \\ U_{\xi'} & \xrightarrow{\mathcal{A}'} & V_{\eta'} \end{array}$$

$$\mathcal{A} = E_V^{-1} A E_U \Leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Следствие.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ;  $e, e'$  — базисы  $V$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A \\ \mathcal{A} \xleftrightarrow{e'} A' \end{array} \right\} \Rightarrow A' = T_{e \rightarrow e'}^{-1} A T_{e \rightarrow e'}$$

Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  — **подобны**, если  $\exists$  невырожденная матрица  $C$  такая, что  $B = C^{-1}AC$

Значит матрицы операторов в разных базисах подобны.

**Замечание.**

$$\left. \begin{array}{l} v = \mathcal{A}u \xleftrightarrow{(\xi, \eta)} v = Au \\ v = \mathcal{A}u \xleftrightarrow{(\xi', \eta')} v' = A'u' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} v \\ u = T_{\xi \rightarrow \xi'} u' \end{cases}$$

$$v' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} v = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} Au = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'} u' = A' u'$$

Значит форма записи линейного отображения не зависит от выбора базиса.

### 1.3 Инварианты линейного отображения.

**Инвариант** — некоторое свойство объекта, которое не меняется при определенных действиях и преобразованиях.

$\mathcal{A}$  — линейное отображение. Ранг и дефект инварианты относительно выбора базиса.

Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ .

Как мы знаем,  $\exists! D$   $n$ -форма, такая что  $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Тогда **определитель линейного оператора**:

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$$

**Замечание.**  $\det \mathcal{A} = D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$  — определение определителя линейного оператора и матрицы соотносятся.

**Теорема.**

$$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V), \det \mathcal{A} = \det A$$

Доказательство:

Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  базис  $V$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xleftrightarrow[\text{вз. однозначно}]{} A = (a_{ij})_{n \times n} \\ \det \mathcal{A} &= D(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_{11}} \cdot \dots \cdot a_{i_{nn}} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{i_{11}} \cdot \dots \cdot a_{i_{nn}} \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} D(e_1, \dots, e_n) = \det A \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Замечание.**  $A$  и  $B$  подобные матрицы, то  $\det A = \det B$ .

**Замечание.**  $\det \mathcal{A}$  — инвариант линейного оператора, он не зависит от базиса.

**Следствие 1.**  $\forall n$ -форма  $f$  на  $V$ :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V : f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Доказательство:

Возьмем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .  $\mathcal{A} \xleftrightarrow[e]{} A$ . Это значит, что мы берем матрицу линейного оператора в данном базисе.

$$f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) \xrightarrow[\text{из доказательства теоремы}]{} \det A f(e_1, \dots, e_n)$$

На самом деле  $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$ , поэтому:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n : g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

Заметим, что  $g$  — полилинейное, т.к.  $f$  полилинейное и  $\mathcal{A}$  — линейное отображение. Также  $g$  — антисимметричное, т.к.  $f$  — антисимметричное. откуда  $g$  —  $n$ -форма. Заметим интересный факт:

$$g(e_1, \dots, e_n) = f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det A \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

откуда:

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot \alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$



Q.E.D.

**Замечание.** Мы можем вывести 9-ое свойство определителя по-другому. Пусть  $\mathcal{A} = A_{n \times n}$  — линейный оператор умножения.  $f = D, B_j \in K^n$ . Тогда:

$$\det(AB_1, \dots, AB_N) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Доказательство:

Пусть  $e$  - базис  $V$ . Тогда  $\mathcal{A} \xrightarrow{e} A, \mathcal{B} \xrightarrow{e} B$ . Также  $\mathcal{A}\mathcal{B} \xrightarrow{e} AB$  по свойству. откуда:

$$\det \mathcal{A}\mathcal{B} = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Q.E.D.

**Следствие 3.**  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Причем  $\det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Доказательство:

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{изоморфизм} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{def } \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in \text{End}(V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \xrightarrow{e} A, \det A \neq 0 \\ \text{rg } A = n \end{cases}$$

Мы знаем, что существует  $\mathcal{A}^{-1}$ . А также  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \varepsilon$ . откуда по свойству 3 получаем, что  $\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}$

Q.E.D.

**Следствие 4.**  $\det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = 1 = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1}$

Вспомним старое определение  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  - след матрицы.

**Теорема (о следе подобных матриц).**

Если  $A$  и  $B$  подобны, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

Доказательство:

$A$  и  $B$  подобны  $\Leftrightarrow \exists C : B = C^{-1}AC$ . Пусть  $C^{-1} = S = (s_{ij})$ . откуда:

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}(AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ij} \cdot a_{jk} \cdot c_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n c_{ki} s_{ij}$$

Заметим, что  $(CS)_{kj} = \delta_{kj}$ , где  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{cases}$ . Так что получаем, что

$$\text{tr } B = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A$$

Q.E.D.

**Следствие.**  $\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr } A'$ , где  $A$  и  $A'$  матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $e$  и  $e'$  соответственно.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), \text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A$  — след оператора.

**Замечание.** след оператора инвариантен из следствия выше.

Линейное подпространство  $L \subset V$  называется **инвариантным** относительно линейного оператора  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\forall v \in L, \mathcal{A}v \in L$ .

**Теорема 1.**

$L \subset V$  - линейное подпространство.  $L$  - инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда  $\exists$  базис пространства  $V$  матрица, такой что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь *ступенчатый вид*, при этом размерность  $A^1 = k \times k, k = \dim L$ .

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$  - базис  $L$ .

Дополним базис  $L$  до базиса  $V$ :  $V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ .

Запишем матрицу  $A$  по определению:

$$\forall e_i \in L : \mathcal{A}e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^k a_{ji} e_j \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{откуда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k1} \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

**Теорема 2.**

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$  базис пространства  $V$ , такое что матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Пусть базис  $V \xrightarrow{\text{по эквив. условию } \oplus}$  объединение базисов  $L_i$ .

$$L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), \dim L_i = k_i$$

Построим матрицу по определению. Не трудно заметить, что для каждого  $L_i$  из доказательства прошлой теоремы, все кроме соответствующих строчек для  $L_i$  будет зануленно.

Q.E.D.

**Замечание.**  $A_i \leftrightarrow A|_{L_i} \in \text{End}(L_i)$ .

**Теорема 3.**

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантны относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , где  $\mathcal{A}|_{L_i} \in L(L_i, V)$

Доказательство:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \xleftrightarrow[\text{из т. об экв. опр. прямой суммы}]{} \forall v \in V : \exists! v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i \in L_i$$

$$\forall v \in V : \text{Im } \mathcal{A} \ni \mathcal{A}v = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}v_i \in \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Тогда всё, что нам осталось проверить это то, что наши пространства дизъюнкты. Но, если присмотреться к тому, что у нас написано, то у нас для любого вектора из  $\text{Im } \mathcal{A}$  существует лишь одно разложение через  $\text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$ , что соответствует эквивалентному определению прямой суммы.

Q.E.D.

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

$\lambda \in K$  называется **собственным числом**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \in V, v \neq 0. \mathcal{A}v = \lambda v$ . Такой  $v$  называют **собственным вектором** собственного числа  $\lambda$ .

$$\lambda \in K : \begin{cases} \mathcal{A}v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)v = 0 \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in \ker(A - \lambda E) \\ v \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$v$  — собственный вектор собственного числа  $\lambda$ .

$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$  — **собственное подпространство**  $\mathcal{A}$  соответствующего собственного числа  $\lambda$ . Это мн-во всех собственных векторов  $V$ , отвечающим собственному числу  $\lambda$  и нулевой вектор.

$\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$  — **геометрическая кратность**.

**Свойства.**

1.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $(\mathcal{A} - \lambda E)$ .
2.  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .
3.  $\gamma(\lambda)$  инвариант относительно базиса.

**Условие существования собственного числа**  $\lambda \in K_{\mathcal{A}}$  — собственное число,  $v$  — собственный вектор  $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda E)$  нетривиально  $\Leftrightarrow \text{def}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{A} - \lambda E) \neq n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$

Т.к. определитель линейного оператора инвариантен, то:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - tE)$  — **характеристический многочлен** оператора  $\mathcal{A}$ .

Т.к.  $\det$  оператора инвариантен  $\chi(t) = \det(A - tE)$ , где  $A$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot t^n + (-1)^{n-1}(\text{tr } A t^{n-1}) + \dots + \det A$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = \text{tr } A \\ t_1 \cdot \dots \cdot t_n = \det A \end{cases}$$

Заметим, что  $\lambda$  — собственное число  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in K \\ \chi(\lambda) = 0 \end{cases}$  — корень хар. мн.

**Замечание.** Если все корни хар. мн.  $\in K$ , то  $\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \end{cases}$

**Спектром** оператора  $\mathcal{A}$  называется множество  $\{(\lambda, \alpha(\lambda))\}$ ,  $\alpha(\lambda)$  — кратность  $\lambda$  лн. оператора в хар. уравнении (*алгебраическая кратность*). Спектр это множество пар.

**Простой спектр** — все кратности равны 1.

**Теорема 1.**

$$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V). \forall \lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A} : 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

Доказательство:

$$\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A} \Leftrightarrow \ker(\mathcal{A} - \lambda E) = V_\lambda \text{ не тривиально} \Leftrightarrow \gamma_1 = \dim V_\lambda \geq 1.$$

Пусть  $\dim V_\lambda = \gamma$ ,  $V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ , значит по теореме 1 об инварианте подпространств существует  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь ступенчатый вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & * \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

$$\dim A^1 = \gamma \times \gamma, V = \text{span}(e_1, \dots, e_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n)$$

При построении матрицы оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}e_i = \lambda e_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \lambda \text{ на } i\text{-ой строчке. Немного распишем:}$$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \det(A - tE) = \\ &= \begin{vmatrix} A^1 - tE_{\gamma \times \gamma} & * \\ 0 & A^2 - tE_{(n-\gamma) \times (n-\gamma)} \end{vmatrix} \quad \text{по 6-ому св-ву определителей} \\ &= |A^1 - tE| |A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \cdot \chi_{A^2}(t) = \\ &= (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ корень } \chi(t), \text{ причем кратность } \geq \gamma, \text{ т.к } \lambda \text{ может оказаться корнем } \chi_{A^2}$$

Q.E.D.

**Теорема 2.**

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A}$ ,  $v_1, \dots, v_n$  соответствуют с.в.  $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  — линейно независимы.

Доказательство:

Докажем по индукции:

- База:  $m = 1 : \lambda_1, v_1 \Rightarrow$  линейно независимы.
- Индукционный переход: Пусть верно для  $m$ , докажем для  $m + 1$ :

От противного: Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$  попарно различные собственные числа.

$v_1, \dots, v_m$  — линейно независимы по предположению.  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$  — линейно зависимы.

Откуда:  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ . С одной стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \lambda_{m+1}v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}v_{m+1} = \mathcal{A} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{A}v_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_{m+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = 0$$

Но мы знаем, что  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы. Откуда эта линейная комбинация тривиальна, но с другой стороны, она такой быть не может, потому что  $\exists \alpha_i \neq 0$ , для которого  $v_i$  не равен нулю, а так же, исходя из того что искомые с.ч. попарно различны, то  $v_{m+1} - v_i \neq 0$ . Откуда комбинация нетривиальна. Противоречие.

Q.E.D.

**Следствие**  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ , т.е  $V_{\lambda_i}$  дизъюнкты.

Доказательство:

$$0 = v_1 + \dots + v_m, v_i \in V_{\lambda_i}$$

Если в сумме какой-то из векторов не нулевой, то это собственный вектор, а собственные вектора для различных с.ч. линейно независимы. Противоречие. откуда все вектора в сумме нулевые, откуда подпространства дизъюнкты.

Q.E.D.

### Теорема 3

$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Тогда:

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$$

Доказательство:

Смотрим теорему 3 об инв. подпр. Матрица  $A$  - блочно-диагональная:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & A^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A^n \end{pmatrix}$$

Тогда  $\chi(t) = \det(A - tE) \xrightarrow{\text{по 6-ому свойству опр.}} \prod_{i=1}^m \det(A^i - tE) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$

Q.E.D.

## 1.5 Оператор простой структуры (о.п.с). Проекторы. Спектральное разложение. Функция от диагонализированной матрицы.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется **оператором простой структуры (о.п.с)**, если  $\exists$  базис пространства  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе имеет диагональный вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в таком случае собственные числа оператора  $\mathcal{A}$  будут  $\lambda_i$ , а так же собственные вектора этих чисел - соотв. столбики (легко проверить умножением). Отсюда все корни характеристического многочлена  $\chi \in K \Leftrightarrow \sum_{\lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$ .

### Теорема.

$\forall A \in \text{End}(V)$ , если  $\sum_{\lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n$ , то тогда:

$$\mathcal{A} - \text{о.п.с} \Leftrightarrow \forall \lambda - \text{с.ч.} : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Доказательство:

$$\sum_{\lambda - \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n \Leftrightarrow \text{все корни } \chi \in K, \text{ откуда } \mathcal{A} - \text{о.п.с.}$$

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \exists$  базис  $V$  такой, что матрица диагональна  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow \sum_{\lambda - \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = n = \dim V$$

Q.E.D.

**Следствие.** Если все корни характ. многочлена  $\in K$ , а также все  $\alpha(\lambda) = 1$  (спектр простой), то  $\mathcal{A}$  - о.п.с.

$A_{n \times n}$  называется **диагонализируемой**, если она подобна диагональной.

### Теорема (критерий диагональности матрицы $A$ ).

это перенишем

$A$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow$  матрица о.п.с  $\mathcal{A}$  в некотором базисе

Доказательство:

•  $\Rightarrow$

Пусть  $A$  - диагонализируемая  $\Leftrightarrow$  подобна диагональной  $\Leftrightarrow \exists$  невырожд  $T$ :  $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $V$  - линейное пространство над полем  $K$ .  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $V$ .

Пусть  $A$  - матрица в базисе  $e$ . Тогда  $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ .  $v = (v_1, \dots, v_n)$  - базис.

Откуда  $v_1, \dots, v_n = (e_1, \dots, e_n)T_{e \rightarrow v} \Rightarrow \mathcal{A} \xleftrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda$

•  $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$  о.п.с,  $A$  - матрица в некотором базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Возьму  $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$ , где  $v_i$  - собственный вектор  $\mathcal{A}$ . Заметим, что так как  $\mathcal{A}$  о.п.с, то такой базис существует.

Теперь давайте возьмем матрицу перехода из  $T_{e \rightarrow v}$ . Тогда  $\mathcal{A} \xrightarrow{v} A' = T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow A$  подобна диагональной

Q.E.D.

**Алгоритм поиска диагонального представления матрицы подобной диагональной**

1. Найти спектр: если все корни  $\chi \in K$ , переходим к 2.
2. Найти все  $\gamma(\lambda)$ , если  $\forall \lambda$  с.ч  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то перейти к 3.
3.  $T_{\text{кан.} \rightarrow v} = (v_1, \dots, v_n) T^{-1}AT = \Lambda$

## Информация о курсе

Поток — у2024.

Группы М3138-М3139.

Преподаватель — Кучерук Екатерина Аркадиевна.

