UNSAdA UNIVERSIDAD NACIONAL • SAN ANTONIO de ARECO

Trabajos Prácticos

Segundo Semestre 2024

Álgebra Lineal

Docente Responsable
Abel Horacio Klobouk

Docentes S.A. de Areco
María Virginia Nobal
Abel Klobouk

Docentes Baradero
Claudia Federici
Sebastián Liudart

Docente Bragado
M. Emilia Amarante

Docente C. del Señor
Cesar Acosta

23 de Septiembre de 2024

Práctica 0 : Matrices y determinantes (Revisión de temas)

1 Matrices

1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular: $A+B$, $2A-B$, $-3A+5C$, $(A+B)+2C$, $A+(B+2C)$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ y $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Calcualr las correspondientes matrices traspuestas.

   (b) Calcular:

      i. $2A-3B^t$
      ii. $A \cdot B$
      iii. $B \cdot A$
      iv. $B \cdot C - A^t$

   (c) Dadas la matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ y $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

   (d) Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ entonces:

      i. $A \cdot A^t$ es una matriz cudrada, ¿de cuánto por cuánto?. Analizar lo misno para $A^t \cdot A$.
      ii. Probar que $(A \cdot B^t) = B^t \cdot A^t$.

3. (a) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ y $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, analizar con estas matrices la validez de las fórmulas "diferencia de cuadrados" y "cuadrado de un binomio", es decir:

      i. $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$.
      ii. $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

   (b) Considere nuevamente la matriz A y una leve generalización de la matrz B, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & k \\ -k & 2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que $A \cdot B = b \cdot A$, es decir, que a y B conmuten. Para ese o esos valores de k ¿valen las fórmulas del ítem anterior?.

4. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles, y en el caso que lo sean, exhibir su inversa:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

   (e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   (f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (h) $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   (j) $J = G + H$

5. Verificar que las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son inversibles y calcular:

(a) A^{-1} y B^{-1}.

(b) $(A \cdot B)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que:

(a) Si $ad - bc \neq 0$ entonces A es inversible con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) Si $ad - bc = 0$ entonces A es singular.

2 Determinantes

1. Calcular los siguientes determinates:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ 12 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular: $\det(A \cdot B)$, $\det(A + B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5 \cdot B - A^5)$

3. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular:

(a) $\det(2A)$

(b) $\det((4A)^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$

4. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales A es una matriz inversible:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ ' & 1k & \\ 0 & 02 & \end{pmatrix}$

Práctica I : Rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Hallar la ecuación vectorial de las rectas en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen :

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=3\}$

   (b) Pasan por $P_0=(2;-1)$ y por $P_1=(-2;-4)$

   (c) Pasa por $(3;1)$ y por el origen.

   (d) Tiene vector director $V=(2;-2)$ y pasa por $(5;6)$

   (e) Pasa por $(3;0)$ y es paralela a la recta
   $$(x,y)=\lambda(1;2)+(-1;4) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

   (f) Pasa por $(3;0)$ y es perpendicular a la recta
   $$(x,y)=\lambda(1;2)+(-1;4) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Hallar la ecuación vectorial de las rectas en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen :

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=2 \quad \text{y} \quad -x+y-z=0\}$

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-3y+z=0 \quad \text{y} \quad -x+2y-z=1\}$

   (c) Pasan por $P_0=(0;-1;-1)$ y por $P_1=(-2;-1;1)$

   (d) Pasa por $(2;-1;4)$ y por el origen.

   (e) Tiene vector director $V=(1;-3;-2)$ y pasa por $(1;0;0)$

   (f) Pasa por $(1;2;3)$ y es paralela a la recta
   $$(x,y,z)=\lambda(1;2;0)+(-1;2;2) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

   (g) Pasa por $(-1;2;-3)$ y es perpendicular al plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y-2z=1\}$

3. Hallar vectores unitarios paralelos a:

   (a) $(2;-1)$

   (b) $(1;3)$

   (c) $(-2;2;0)$

   (d) $(0;0;1)$

4. Hallar vectores unitarios perpendiculares a cada ítem del punto anterior.

5. Hallar rectas que pasan por $(1;2;3)$ y son perpendiculares a:

   (a) el plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+z=5\}$

   (b) las rectas:
   $$(x,y,z)=\lambda(-2;-2;2)+(3;2;-3) \quad \text{y} \quad (x;y;z)=\mu(0;0;1)+(1;0;0) \quad \text{con} \quad \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

6. Determinar la ecuación de los siguientes planos:

   (a) Pasa por el punto $(-1;1;3)$ y es normal al vector $V=(-1;2;-1)$

   (b) Pasa por el punto $(2;-2;5)$ y es normal al vector $V=(0;-2;1)$

(c) Pasa por el punto $(2;0;-3)$ y es normal al vector $V = (1;1;-3)$

7. Hallar el plano que pasa por (1;2;3) y es paralelo a:

   (a) el plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 5\}$

   (b) las rectas

$$(x,y,z) = \lambda(-2;-2;2) + (3;2;-3) \qquad \text{y} \qquad (x;y;z) = \mu(0;0;1) + (1;0;0) \qquad \text{con} \qquad \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

8. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A = (1;0;0)$ y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (2;1;-3)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + 4z - 9 = 0$.

Práctica II : Estructuras algebraicas

3 Grupos, anillos y cuerpos.

1. Verificar que las siguientes esctructuras son de grupo:
   (a) $(\mathbb{Z},+)$.
   (b) $(\mathbb{Q},+)$.
   (c) $(\mathbb{R},+)$.
   (d) $(\mathbb{Q},\times)$.
   (e) $(\mathbb{R},\times)$.
2. Verificar que $(\mathbb{Z},+,\times)$ tiene esctructura de anillo.
3. Verificar que las matrices reales cuadradas de orden n con la operación de suma y de producto de matrices, es decir $(\mathbb{R}^{n\times n},+,\times)$, en un anillo.
4. Verificar que las siguientes esctructuras son de cuerpo:
   (a) $\mathbb{Q},+,\times)$.
   (b) $\mathbb{R},+,\times)$.

4 Números Complejos. (Optativo.)

Definiciones. Forma binómica.

Hasta el momento, considerando sólo a los Números Reales, ecuaciones tan simples como $x^2+1=0$ tienen como solución al conjunto vacío. Por ello es que se propone la existencia de un nuevo número al que llamaremos *número imaginario* y lo denotaremos como i. Dicho número satisface que $i^2=-1$; observar que ninguno de los números conocidos hasta el momento cumple tal condición.
A partir de aquí puede definirse un nuevo conjunto numérico, el de los Números Complejos $(\mathbb{C})$, como $\mathbb{C}=\{a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\}$; a es llamada *parte real* y b la *parte imaginaria* del número compejo. Observar que los Números Reales pueden ser considerados Complejos con parte imaginaria nula, es decir que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
La suma y producto de números complejos se realiza de igual manera que la suma o productos de binomios.

- La suma y resta: $(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$.
- El producto: $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1ia_2+b_1b_2i^2=$
  $=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

Podemos graficar a los Números Complejos en un plano cuyos ejes cartesianos representan (por convención) la parte real e imaginaria de forma tal que el complejo $a+bi$ es representado por el punto $(a;b)$.

1. Resolver las siguientes operaciones (aproxime cuando sea necesario).
   (a) $(2+i)(3-2i)^2$
   (b) $(2i)^5$
2. Resolver las siguientes operaciones siendo $z_1=1+i$, $z_2=i$ y $z_3=2+3i$:

(a) z_1^2+4
(b) $2z_2^2$
(c) z_1^2+5
(d) $z_2+(3-2i)$
(e) $3z_1^2$
(f) $2z_2-i$
(g) $(z_1+z_2)^2$
(h) $z_1z_2+z_3$
(i) $z_1(z_2+z_3)$

3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, busque la manera de transformar la expresión $\frac{a+bi}{c+di}$ en una equivalente de la forma $e+fi$ con $e, f \in \mathbb{R}$. Suegerencia: observar que $(c+di)(c-di) \in \mathbb{R}$.

4. Realizar el cociente entre los siguientes complejos:

(a) $z_1 = 4+5i \quad ; \quad z_2 = i$
(b) $z_1 = 1+i \quad ; \quad z_2 = -1+2i$
(c) $z_1 = \sqrt{3}-i \quad ; \quad z_2 = 3+2i$
(d) $z_1 = i \quad ; \quad z_2 = 1+i$
(e) $z_1 = 1+i \quad ; \quad z_2 = i-1$
(f) $z_1 = 1-3i \quad ; \quad z_2 = -2+6i$

Práctica III : Espacios vectoriales

1. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentra sobre una recta que no pasa por el origen, ¿constituye un espacio vectorial? Justificar la respuesta.

2. Sea V el primer cuadrante del plano xy; esto es, sea $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$

   (a) Si u y v está en V, ¿está $(u+v)$ en V? ¿Por qué?

   (b) Encuentre un vector específico w en V y un escalar específico c tal que $(c.w)$ no esté en V.

3. Sea W la unión del primer y tercer cuadrante del plano xy, esto es $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y \geq 0\}$

   (a) Si u está en W y c es cualquier escalar, ¿está $c.u$ en W? ¿Por qué?

   (b) Encuentre vectores específicos u y v tales que $u+v$ no esté en W. ¿Esto basta para demostrar que W no es un espacio vectorial?

4. Sea H el conjunto de los puntos que están dentro del círculo unitario del plano xy. Esto es, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   Encuentre un ejemplo específico - dos vectores, o un vector y un escalar - para mostrar que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

5. Dado $W = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 0\}$ indicar cuál de las siguientes propociosiones es verdadera:

   (a) W es un subespacio trivial de $\mathbb{R}^2$

   (b) $(-3;3) \in W$

   (c) $W = \varnothing$

   (d) Ninguna de las anteriores.

6. Decidir en cada caso si W es subespacio de $\mathbb{R}^n$

   (a) $W = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

   (b) $W = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$

   (c) $W = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 4z - 8 = 0\}$

   (d) $W = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$

   (e) $W = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

   (f) $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} = 2a_{12} \wedge a_{21} = -a_{22}\}$

   (g) $W = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : x = z - 3w \wedge y = w - z\}$

   (h) W es el conjunto de todas las matrices pertenecientes a $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que tienen la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

   (i) W es el conjunto de todos los vectores de la forma $(s+3t, s-t, 2s-t, 4t)$ de $\mathbb{R}^4$ con s y t números reales.

7. Determinar si $\vec{v} = (1;2;3)$ es combinación lineal de $\vec{u} = (1;5;6)$ y $\vec{w} = (7;8;4)$

8. Escribir, si es posible a $\vec{w} = (4;3;-1)$ como combinación lineal de $\vec{u} = (1;-3;2)$ y $\vec{v} = (2;-1;1)$

9. Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que:

   (a) $\vec{v} = (k;1;1)$ sea combinación lineal de $\vec{u} = (0;2;1)$ y $\vec{v} = (1;-1;0)$

   (b) $\vec{v_4} = (1;2;3)$ sea combinación lineal de $\vec{v_1} = (2;1;-1)$, $\vec{v_2} = (2;1+k;k)$ y $\vec{v_3} = (2;2;1)$

   (c) $\vec{v_3} = (k;k^2)$ sea combinación lineal de $\vec{v_1} = (1;-1)$ y $\vec{v_2} = (1;1)$

10. Determinar si el conjunto dado de vectores es L.D. o L.I.

    (a) $A = \{(3;1;1),(2;-1;5),(4;0;-3)\}$

    (b) $B = \{(1;1),(2;2)\}$

    (c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix} \right\}$

    (d) $D = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

11. Analizar si el vector $\vec{v} = (2;14;-34;7)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\vec{u} = (1;4;-5;2)$ y $\vec{w} = (1;2;3;1)$.

12. Encuentre el o los valores de h para los cuales y está en el subespacio $\mathbb{R}^3$ generado por v_1, v_2, v_3 si $v_1 = (1;-1;-2)$, $v_2 = (5;-4;-7)$, $v_3 = (-3;1;0)$, $y = (-4;3;h)$

13. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el vector $\vec{u} = (3;k-3;2k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores de $A = \{(2;0;4),(1;0;2)\}$.

14. Sea H el conjunto de todos los vectores de la forma $(s,3s,2s)$. Encuentre un vector v en $\mathbb{R}^3$ tal que $W = \text{Gen}\{v\}$. ¿Por qué muestra esto que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

15. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $(5b+2c;b;c)$ donde b y c son números reales. Encuentre vectores u y v tales que $W = \text{Gen}\{u,v\}$. ¿Por qué muestra esto que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

16. Determine si el conjunto dado de vectores es una base del espacio vectorial indicado. En caso de no serlo, halle el subespacio generado, una base y su dimensión:

    (a) En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1;2),(1;0)\}$

    (b) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1;2;-1),(1;0;2),(2;1;1)\}$

    (c) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1;0;2),(3;-1;4)\}$

    (d) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1;1;1),(3;0;1),(-1;2;3),(0;4;5)\}$

    (e) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(1;0;0),(2;2;0),(3;3;3)\}$

17. ¿Qué valores de $k \in \mathbb{R}$ hacen que el conjunto $\{(1;0;k),(k;1;0),(k+1;1;k)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$?

18. En $\mathbb{R}^3$ se define $A = \{(k;1;k),(k;2;2k),(3k;k;-k)\}$

    (a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto A sea una base de $\mathbb{R}^3$

    (b) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que A genere un subespacio de dimensión 2.

19. En $\mathbb{R}^3$ se define $A = \{(2;k;1),(6;1;5),(2k;1;k+2)\}$

(a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto A NO sea una base de $\mathbb{R}^3$

(b) Si $k = 0$ hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.

20. Dado el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$

(a) Escribir A utilizando una ecuación vectorial.

(b) Demostrar que A es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

(c) Encontrar una base de A y determinar la dimensión de A.

21. Dado el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y - z = 0\}$ determinar si algunos de los siguientes conjuntos son bases de A

(a) $\{\ (1;1;0), (2;-2;1)\ \}$

(b) $\{\ (1;1;0), (2;0;4)\ \}$

(c) $\{\ (1;1;0), (-1;0;-2), (0;1;2)\ \}$

Práctica IV : Transformaciones lineales

1. Determinar si la función dada es una transformación lineal:

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x;y) = (x-2y;x)$

   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x;y) = (x^2;0)$

   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x;y;z) = (x \cdot y; y \cdot z; z \cdot x)$

   (d) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, F(x;y;z) = (y;x+z)$

   (e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x;y;z) = (x \cdot y; y \cdot z; z \cdot x)$

   (f) $F : \mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}^{2\times1}, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   (g) $F : \mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1},\ F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Hallar la expresión de las transformaciones lineales definidas por $F(X) = A \cdot X$

   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

   (c) $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Hallar la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales:

   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x;y;z) = (x-2z; y+z; x+4y-6z)$

   (b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5, F(x;y;z) = (0; 3x+5y-4z; x-z; 2y+z; -2x+4y-6z)$

   (c) $F : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^3, F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+c; 4b; c+d)$

4. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumpla :

   (a) $T((1;0)) = (2;3)$ y $T((0;1)) = (-1;2)$

   (b) $T((2;3)) = (1;0)$ y $T((-1;2)) = (0;1)$

5. Indique si cada transformación lineal hallada en el punto anterior es única y escriba las matrices asociadas.

6. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla :

   (a) $T((1;0;0)) = (-1;1;3)$, $T((0;1;0)) = (0;2;1)$ y $T((0;0;1)) = (3;1;1)$

   (b) $T((-1;1;3)) = (1;0;0)$, $T((0;2;-1)) = (0;1;0)$ y $T((3;1;1)) = (0;0;1)$

   (c) $T((1;1;-1)) = (1;1;0)$ y $T((0;-1;1)) = (0;1;1)$

7. Indique si cada transformación lineal hallada en el punto anterior es única y escriba las matrices asociadas.

8. Es posible encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que cumpla :

   (a) $T((1;0)) = (-1;1;0;3)$ y $T((0;1)) = (0;2;2;1)$

   (b) $T((1;0)) = (-1;1;0;3)$, $T((0;1)) = (0;2;2;1)$ y $T((1;2)) = (-1;5;4;5)$

   (c) $T((1;0)) = (-1;1;0;3)$, $T((0;1)) = (0;2;2;1)$ y $T((1;2)) = (4;0;0;5)$

   (d) $T((1;0)) = (-1;1;0;3)$ y $T((0;1)) = (-1;1;0;3)$

9. En los casos donde fue posible, indique si cada transformación lineal hallada en el punto anterior es única y escriba las matrices asociadas.

Práctica V : Autovalores y Autovectores

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Determinar si las matrices del ejercicio anterior son o no diagonalizables. Cuando sea posible, encontrar una matriz C tal que $C^{-1}A_iC$ sea diagonal.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $u = (1,2,0), v = (2,6,0)$ y $w = (-2,-2,-1)$ son autovectores de A.

   (a) Determinar los valores de r, s y t, y los autovalores de A.

   (b) Verificar que A es diagonalizable.

4. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales tales que tengan por valores propios 1 y -1. ¿Son diagonalizables estas matrices? Justificar la respuesta

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & O \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga un autovalor de multiplicidad 2

   (b) ¿A es diagonalizable para los valores de k hallados en el ítem anterior? Justificar

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & O \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & k & -2 \end{pmatrix}$ hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que $(1;-1;0)$ sea autovector de A. Para los valores de k hallados, determinar si A es diagonalizable.

7. Siendo $A = \begin{pmatrix} k & 0 & O \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1;-6;1)$ sea un autovector de A.

   (b) Para los valores de k hallados determinar si A es diagonalizable.

   (c) En caso afirmativo, encontrar la matriz C y comprobar que $C^{-1}A_iC$ sea diagonal.

8. Estudiar para que valores de $b \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} b & 0 & b-5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

9. Hallar la matriz A sabiendo que sus autovalores son 3, 2 y -2 y sus autovectores correspondientes son (1;0;0); (-7;3;1) y (1;-5;5).