Finanzas e Ingeniería Económica

Unidad 2: Tasas de Interés

Fuente: www.e-financebook.com

Autor: Senmache S. José

Agenda

- I. Tasa de Interés Efectiva.
- II. Conversión de tasas de Interés Nominal y Efectiva
- III. Ejercicios de Aplicación.



Tasa de Interés Efectiva



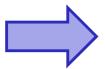
Tasa de Interés Efectiva

Es la tasa que realmente actúa sobre el capital de la operación financiera.

Se obtiene a partir de una regla de tres simple: si el capital inicial "C" representa al 100%, que porcentaje representa el Interés ganado "I" en dicho período de tiempo. A esa representación porcentual se le llama Tasa de Interés Efectiva.

Capital (C) \rightarrow 100%

Interés (I) → X %



$$TEP = I * 100\%$$

A X% se le llamará:

Tasa de Interés Efectiva del Período (TEP)

Tasa Nominal y Tasa efectiva

Pero sabemos que:

$$I = S - C$$

Entonces:

$$TEP = \left(\frac{S - C}{C}\right) * 100\%$$

$$TEP = \left(\frac{S}{C} - 1\right) *100\%$$

Tasa de Interés Efectiva

Sin embargo, y debido a que el uso del 100% dificultaría las deducciones algebraicas que se requieren para expresar todas las identidades financieras, los financistas solemos reemplazar esta "compañía" en la fórmula por: "La tasa de interés siempre ingresa a las fórmulas expresada en tanto por ciento, es decir dividida entre 100 ", con lo cual la fórmula quedaría como sigue:

TEP =
$$\frac{S}{C}$$
 - 1

Como convertimos Tasas Nominales en Efectivas?

Fácil, sólo necesitamos reemplazar el valor futuro a tasas de interés nominal en la definición que acabamos de enunciar; de este modo:

$$S = C * \left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n}$$

$$TEP = \frac{S}{C} - 1$$

$$TEP = \left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n} - 1$$

$$TEP = \left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n} - 1$$

Tasa de Interés Efectiva

Por lo tanto, la Tasa de Interés que describe la acumulación real de los intereses de una operación financiera dada en un periodo de tiempo, es la Tasa Efectiva, y se describe por la siguiente igualdad:

TEP =
$$\left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{11} - 1$$

Siendo:

"m": número de capitalizaciones de la tasa nominal en el tiempo en que quedó expresada, y

"n": número de capitalizaciones realizadas en el tiempo de la inversión.

Fórmulas a utilizar

1) Convertir Tasas Nominales en Efectivas:

TEP =
$$\left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n} - 1$$

2) Convertir Tasas Efectivas en Nominales:

$$TN = m * \left(\sqrt[n]{1 + TEP} - 1 \right)$$

Problemas

Desarrolle los problemas presentados a continuación

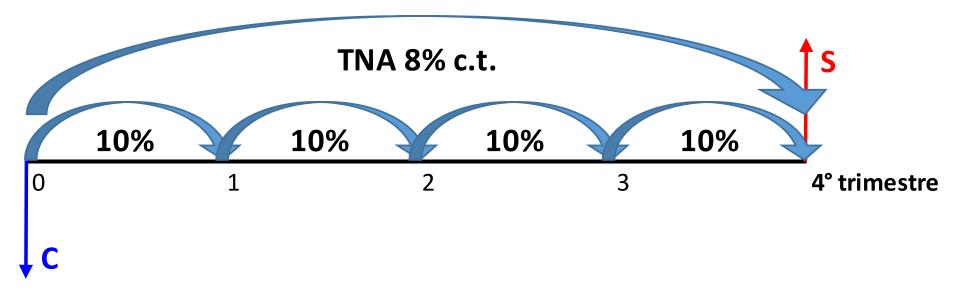




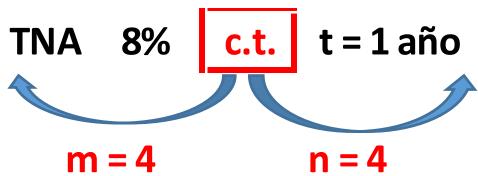
Se deposita S/. 1,000.00 a una Tasa Nominal Anual (TNA) de 8% capitalizable trimestralmente (c.t.).

- a) ¿Cuál será el interés generado en un año y cuál su respectiva Tasa Efectiva Anual (TEA) equivalente?
- b) ¿Cuál sería la Tasa Efectiva Semestral (TES), pero ahora utilizando la fórmula para conversión de tasas de interés?

Rptas. TEA 8.243% y TES 4.04%



C = S/. 1,000.00 i = TNA 8% c.t. Tiempo = 1 año S = ??



Ejemplo 1 - a

Como m = 4, entonces:

$$i' = TNT = TNA = 8\%$$
.

$$i' = 2\%$$

Utilizando la fórmula de valor futuro a tasa nominal:

$$S = C * (1 + i')^{n}$$

 $S = 1,000.00 * (1 + 2%)^{4}$
 $S = 1,082.43$

Ejemplo 1 - a

Luego, aplicando el primer principio fundamental:

$$I = S - C$$
 $I = 1,082.43 - 1,000.00$
 $I = 82.43$

Finalmente, calculamos la Tasa Efectiva Anual:

$$TEA = 82.43 = 0.08243 \dots 0$$
:
 $1,000.00$
 $TFA = 8.243 \%$

Ejemplo 1 - a

Sin embargo, podríamos calcular la Tasa Efectiva Anual utilizando la fórmula deducida hace unos momentos:

TEA =
$$(1 + \frac{TNA}{M})^n - 1$$

m

TEA = $(1 + \frac{8\%}{M})^4 - 1$

M = 4

 $m = 4$
 $m = 4$

$$TEA = 8.243216\% (8.243 \%)$$

Como podemos observar, este último resultado es mucho más preciso que el anterior (método empírico); esto, debido a que al hallar el valor futuro, ya efectuamos un redondeo a 2 decimales, mientras que en este último cálculo NO!!!

Ejemplo 1 - b

Para este caso, debemos tomar en cuenta que el tiempo en el que se desea evaluar la tasa de rendimiento efectivo es de un semestre, por lo que la variable tiempo cambiaría:

TES =
$$(1 + \frac{TNA}{M})^n - 1$$

m
TES = $(1 + \frac{8\%}{M})^2 - 1$
TNA 8% c.t. $t = 1$ semestre
 $m = 4$
TFS = 4.04%

Ahora utilizaremos de forma directa la fórmula que convierte tasas nominales en efectivas y viceversa.

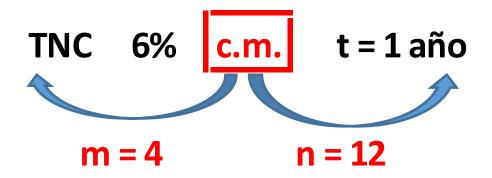
¿Cuál sería la Tasa Efectiva Anual (TEA) equivalente a una Tasa Nominal Cuatrimestral (TNC) de 6% con capitalización mensual (c.m.)?

Rpta. 19.56181715%

i = TNC 6% c.m.

i' = TEA ?? %

Aplicando nuestra metodología:



TEA =
$$(1 + \frac{TNC}{1})^n - 1$$

m
TEA = $(1 + \frac{6\%}{1})^{12} - 1$
4
TEA = 19.56181715%

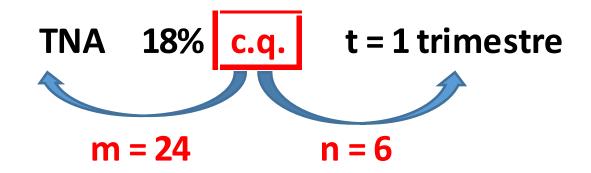
¿Cuál sería la Tasa Efectiva Trimestral (TET) equivalente a una Tasa Nominal Anual (TNA) de 18% con capitalización quincenal (c.q.)?

Rpta. 4.5852235%

i = TNA 18% c.q.

i' = TET ?? %

Aplicando nuestra metodología:



TET =
$$(1 + \frac{TNA}{1})^{n} - 1$$

m
TET = $(1 + \frac{18\%}{6})^{6} - 1$
24
TET = 4.5852235%

Ahora veamos el caso en el otro sentido, que pasa si por ejemplo tenemos la tasa de interés efectiva y necesitamos expresarla de forma nominal.

Deberíamos aplicar la fórmula de la siguiente manera.

$$TN = m * \left(\sqrt[n]{1 + TEP} - 1 \right)$$

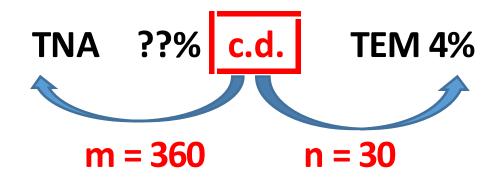
¿Cuál sería la Tasa Nominal Anual (TNA) con capitalización diaria (c.d.) equivalente a una Tasa Efectiva Mensual (TEM) de 4%?

Rpta. 47.09563416%

i' = TEM 4%

i = TNA ??% c.d.

Aplicando nuestra metodología:



$$TNA = m * ((1 + TEM)^{(1/n)} - 1)$$

$$TNA = 360 * ((1 + 4\%)^{(1/30)} - 1)$$

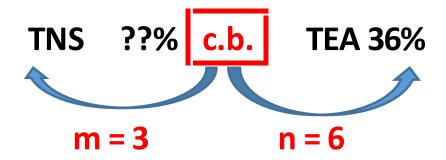
TNA = 47.09563416%

¿Cuál sería la Tasa Nominal Semestral (TNS) con capitalización bimestral (c.b.) equivalente a una Tasa Efectiva Anual (TEA) de 36%?

Rpta. 15.77499683%

i' = TEA 36% i = TNS ??% c.b.

Aplicando nuestra metodología:



TNS =
$$m * ((1 + TEA)^{(1/n)} - 1)$$

TNS =
$$3 * ((1 + 36\%)^{(1/6)} - 1)$$

Ahora, usaremos ambas presentaciones de la fórmula para poder encontrar la equivalencia de una tasa nominal, pero expresada como otra tasa nominal.

Por ejemplo, ¿Cuál sería la Tasa Nominal Bimestral (TNB) con capitalización mensual (c.m.) equivalente a una Tasa Nominal Anual (TNA) de 18% con capitalización diaria (c.d.)?

Rpta. 3.021851842%

 $i_1 = TNA 18\% c.d.$

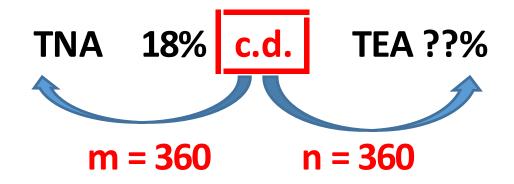
 $i_2 = TNB ??\% c.m.$

Para resolver el problema es necesario elegir una Tasa Efectiva como puente entre la Tasa Nominal dato y la Tasa Nominal incógnita, en nuestro caso elegiré a la Tasa Efectiva Anual (TEA) como puente (ojo, puede elegir la tasa que crea conveniente), por lo que la solución consiste en dar los siguientes dos pasos:

- a) Primero, pasamos la Tasa Nominal Anual (TNA) de 18% con capitalización diaria (c.d.) a la Tasa Efectiva Anual (TEA) utilizada como puente.
- b) Luego, pasamos la Tasa Efectiva Anual (TEA) a Tasa Nominal Bimestral (TNB) con capitalización mensual (c.m.).

.... comencemos.....

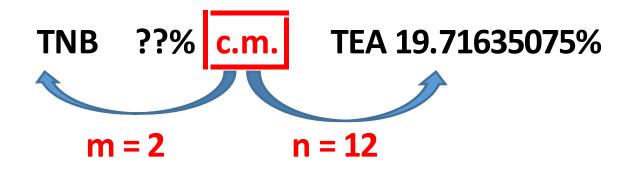
Ejemplo 6 - a



TEA =
$$(1 + INA)^n - 1$$

m
TEA = $(1 + I8\%)^{360} - 1$
360
TEA = 19.71635075%

Ejemplo 6 - b



TNB =
$$m * ((1 + TEA)^{(1/n)} - 1)$$

TNB =
$$2 * ((1 + 19.71635075 %)^{(1/12)} - 1)$$

TNB = 3.021851842%

Como convertimos Tasas Efectivas en otras Efectivas?

Ahora bien, si deseamos calcular las tasas efectivas equivalentes en los periodos de tiempo 1 y 2 cualesquiera, podríamos escribir las siguientes igualdades, las cuales proceden de la misma tasa nominal con la misma capitalización:

TEP₁ =
$$\left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n_1} - 1$$
TEP₂ = $\left(1 + \frac{TN}{m}\right)^{n_2} - 1$

Como convertimos Tasas Efectivas en otras Efectivas?

Luego, podemos acomodar dichas igualdades:

Como convertimos Tasas Efectivas en otras Efectivas?

Y aplicando transitividad algebraica:

$$^{n2}\sqrt{1 + TEP_2} = ^{n1}\sqrt{1 + TEP_1}$$
 $\binom{n2}{1 + TEP_2}^{n2} = \binom{n1}{1 + TEP_1}^{n2}$
 $1 + TEP_2 = (1 + TEP_1)^{(\frac{n2}{n1})}$

Finalmente:

TEP₂ =
$$\left(1 + \text{TEP}_1\right)^{\left(\frac{n^2}{n^1}\right)} - 1$$

¿Cuál sería la Tasa Efectiva Anual (TEA) equivalente a una Tasa Efectiva Mensual (TEM) de 4%?

Nota: Puede elegir la unidad de tiempo que estime conveniente para expresar n1 y n2, siempre y cuando en ambas se utilice la misma unidad.

Rpta. 60.10322186%

- $TEP2 = (1 + TEP1)^{(n2/n1)} 1$
- $TEA = (1 + TEM)^{(360/30)} 1$
- TEA = $(1 + 4\%)^{(360/30)} 1$
- TEA = 60.10322186%

¿Cuál sería la Tasa Efectiva a 45 días (TE45d) equivalente a una Tasa Efectiva Anual (TEA) de 35%?

Rpta. 3.822557081%

- TEP2 = $(1 + TEP1)^{(n2/n1)} 1$
- $TE45d = (1 + TEA)^{(45/360)} 1$
- $TE45d = (1 + 35\%)^{(45/360)} 1$
- TE45d = 3.822557081%

Problemas

Desarrolle los problemas presentados a continuación





Ejercicio 1

Calcular la Tasa Efectivas Anual (TEA) para depósitos en ahorros en Dólares que ofrecen una Tasa Nominal Anual (TNA) de 6%, si los períodos de capitalización son:

- a) Diario.
- b) Mensual.
- c) Bimestral.
- d) Trimestral.
- e) Semestral.
- f) Anual.

Ejercicio 2

Calcular la Tasas Nominal Anuales (TNA) para préstamos en Nuevos Soles que ofrecen una Tasa Efectiva Anual (TEA) de 27%, si los períodos de capitalización son:

- a) Diario.
- b) Mensual.
- c) Bimestral.
- d) Trimestral.
- e) Semestral.
- f) Anual.

Si partimos del 3° principio fundamental:

$$\mathsf{TEP} = \frac{\mathsf{S}}{\mathsf{C}} - 1$$

Podríamos afirmar entonces:

$$S = C * (1 + TEP)$$

Ahora, si utilizamos la equivalencias de tasas efectivas:

$$TEP_2 = \left(1 + TEP_1\right)^{\left(\frac{n2}{n1}\right)} - 1$$

Conseguiríamos:

$$S = C * (1 + TEP)^{\left(\frac{N^{\circ} \text{ días Trasladar}}{N^{\circ} \text{ días TEP}}\right)}$$

1) Valor Futuro:

$$S = C * (1 + TEP)^{\left(\frac{N^{\circ} \text{ días Trasladar}}{N^{\circ} \text{ días TEP}}\right)}$$

2) Valor Presente:

$$C = \frac{S}{\left(1 + TEP\right)^{\left(\frac{N^{\circ} días \, Trasladar}{N^{\circ} días \, TEP}\right)}}$$

3) Tiempo transcurrido:

$$n = \frac{LN\left(\frac{S}{C}\right)}{LN(1+TEP)} * N^{0} diasTEP$$

4) Tasa de Interés Efectiva:

$$TEP = \left(\frac{S}{C}\right)^{\left(\frac{N^{\circ} \text{días TEP}}{N^{\circ} \text{días Trasladar}}\right)} - 1$$

Problemas

Desarrolle los problemas presentados a continuación





¿Cuál es el monto que se obtendrá por un depósito de S/. 5,000.00, si se mantiene en una cuenta de ahorros que remunera una Tasa Efectiva Anual (TEA) de 6% por un semestre? ¿Cómo calcularía la Tasa Efectiva Semestral (TES)? Rptas. S/. 5,147.82 y 2.956301409%

C = S/. 5,000.00 i' = TEA 6%Tiempo = 1 semestre

Aplicando nuestra fórmula:

$$S = C * (1 + TEP)^{(n trasladar/n TEP)}$$

$$S = C * (1 + TEA)^{(n trasladar/360)}$$

$$S = 5,000.00 * (1 + 6\%)^{(180/360)}$$

$$S = 5,147.82$$

Ahora bien, para calcular la Tasa Efectiva Semestral, podríamos utilizar cualquiera de los siguientes métodos: a) Método empírico:

TEP =
$$\frac{S}{C} - 1$$

TES =
$$\frac{5,147.82}{5,000.00}$$
 - 1
TES = $\frac{2.9564\%}{6}$

b) A través del uso de la fórmula de conversión de tasas:

tasas:
$$TEP_{2} = (1 + TEP_{1})^{\left(\frac{n^{2}}{n^{1}}\right)} - 1$$
$$TES = (1 + TEA)^{\left(\frac{180}{360}\right)} - 1$$

TES =
$$(1 + 1EA)^{(130/360)}$$
 - 1
TES = $(1 + 6\%)^{(180/360)}$ - 1
TES = 2.956301409% (2.9564%)

Este último resultado es más preciso que el anterior, debido a que al hallar el valor futuro redondeamos a 2 decimales, mientras que en este último halla la TES directamente.

¿Cuál es el monto que se obtendrá por un depósito de € 20,000.00, si se mantienen en su cuenta de ahorros a una Tasa Efectiva Mensual (TEM) de 0.2% por 100 días?

Rptas. € 20,133.64

 $C = \{20,000.00\}$

i' = TEM 0.2%

Tiempo = 100 días

Aplicando nuestra fórmula:

$$S = C * (1 + TEP)^{(n trasladar/n TEP)}$$

$$S = C * (1 + TEM)^{(n trasladar/30)}$$

$$S = 20,000.00 * (1 + 0.2\%)^{(100/30)}$$

$$S = 20,133.64$$

A continuación se presenta la oferta de los bancos locales para operaciones de préstamos y depósito:

Año	Tasa	Bco. Fomento	Bco. América
	ACTIVA	TNM 1.8% c.d.	TEM 1.8%
	PASIVA	TEA 5.7%	TNA 5.5% c.d.
<i>)</i>	ACTIVA	TNS 10.2% c.m.	TNB 3.51% c.m.
	PASIVA	TNS 3% c.m.	TNA 6% c.q.

Si Pedro desea decidir en cuál de las instituciones puede depositar US\$ 100,000.00 durante los siguientes dos años.

- a) ¿Que le sugeriría usted para rentabilizar al máximo su inversión y cuánto puede obtener al final de los dos años?
- b) ¿Cuál sería la Tasa Efectiva Anual (TEA) de la operación? Rptas. US\$ 112,227.72 y 5.9375854%

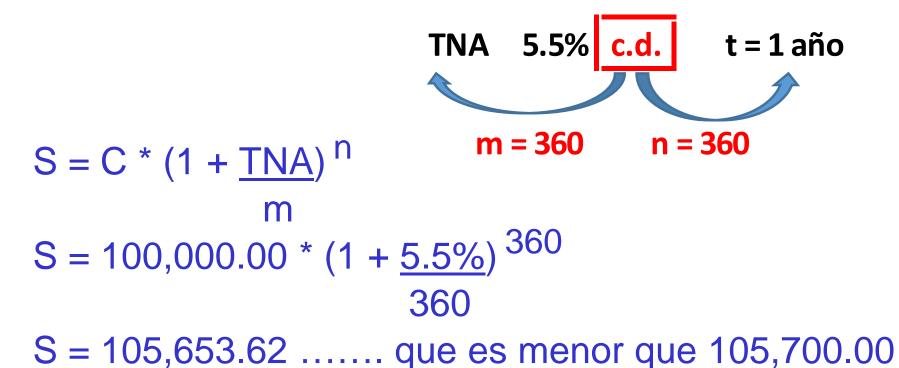
Por ser una inversión y para resolver el caso, tomaremos sólo las tasas pasivas y aplicaremos (para efectos didácticos) una estrategia diferente en cada año.

- 1) Año 1: Elegiremos el banco que nos entregue el mayor valor futuro.
- 1.1) Banco de Fomento: Valor futuro a tasas efectivas.

$$S = C * (1 + TEP)^{(n trasladar/n TEP)}$$

 $S = C * (1 + TEA)^{(n trasladar/360)}$
 $S = 100,000.00 * (1 + 5.7\%)^{(360/360)}$
 $S = 105,700.00$

1.2) Banco de América: Valor futuro a tasas nominales.



Conclusión año 1: Elegimos el Banco de Fomento!!!

Resumiendo hasta aquí:

- ✓ Pedro invierte US\$ 100,000.00.
- ✓ Nosotros le recomendamos colocar su dinero en el Banco de Fomento, el cual le paga una TEA 5.7%.
- ✓ Al final del primer año ya cuenta con US\$ 105,700.00, el cual vamos a reinvertir, en el mismo banco -o en el otro banco- según le convenga.

Ahora si, veamos que sucede en el segundo año.

2) Año 2: Elegiremos el banco con la mayor tasa de interés; sin embargo, en este caso será necesario que ambas tasas estén expresadas en el mismo tiempo y tipo.

Para efectos de comparación, tomaremos en este caso a las Tasas Efectivas Anuales (TEAs):

2.1) Banco de Fomento:

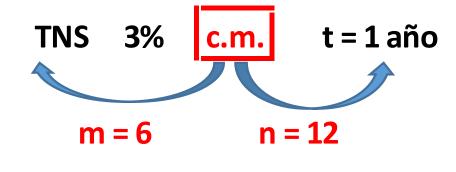
TEA =
$$(1 + \frac{TNS}{1})^n - 1$$

m

TEA = $(1 + \frac{3\%}{1})^{12} - 1$

6

TEA = 6.167781186%



2.2) Banco de América:

TEA =
$$(1 + \frac{TNA}{1})^n - 1$$

m

TEA = $(1 + \frac{6\%}{1})^{24} - 1$

TNA 6.0% c.q. t = 1 año

m = 24

n = 24

TEA = 6.175704426% que es mayor que 6.167781186%

Conclusión año 2: Cambiamos de Banco y elegimos el Banco de América!!!

Ahora, faltaría saber cuanto dinero obtenemos al final del segundo año

Lo calculamos con la fórmula de valor futuro:

$$S = C * (1 + TNA)^{n}$$

m

 $S = 105,700.00 * (1 + 6%)^{24}$
 $S = 112,227.72$

Finalmente, calculamos la TEA de la operación como:

$$TEA = \left(\frac{112,227.72}{100,000.00}\right)^{(360/720)} - 1$$

$$TEA = 5.9375854\%$$

¿Cuál es el monto que deberá cancelar **Pedro** el día de hoy (pre-pagar la deuda), por una deuda cuyo pago por US\$ 12,000.00 vence dentro de 45 días, si se sabe que esta fue contratada a una Tasa Efectiva Anual (TEA) de 15%?

Rpta. 11,792.18

S = US\$ 12,000.00 Tiempo = 45 días i' = TEA 15% C = ??

Utilizaremos la fórmula para valor presente:

$$C = \frac{S}{\left(1 + TEP\right)^{\left(\frac{N^{\circ} días Trasladar}{N^{\circ} días TEP}\right)}}$$

$$C = \frac{S}{(1 + TEA)} (45/360)$$

$$C = \frac{12,000.00}{(1 + 15\%)} (45/360)$$

$$C = 11,792.18$$

Deberá cancelar US\$ 11,792.18

¿En cuánto tiempo un capital de US\$ 1,350.00 acumulará un valor futuro de por lo menos US\$ 1,475.00, si se conoce que se encuentra expuesto a una Tasa Efectiva Semestral de 4%?

Rpta. 407 días

C = US\$1,350.00

S = US\$1,475.00

i = TES 4%

t = ?? días

$$n = \frac{LN\left(\frac{S}{C}\right)}{LN(1+TEP)} * N^{o} diasTEP$$

$$t = LN (1,475.00 / 1,350.00) * 180$$

 $LN (1 + 4\%)$

t = 406.4079982 días

Pero debemos ir al banco en el momento que este abra sus puertas, por lo que la respuesta correcta es 407 días!!!

Juan le prestó S/. 5,000.00 a Pedro -su mejor amigo-. Luego de 180 días, Pedro le devuelve el dinero y como Juan no acepta cobrarle intereses, decide -en señal de agradecimiento- regalarle una parrilla eléctrica cuyo precio de venta es de S/. 450.00 Si lo analiza como si fuera una operación financiera ¿Cuál es la Tasa Efectiva Anual (TEA) que de manera indirecta está pagando el amigo por el préstamo?

Rpta. 18.81%

$$C = 5,000.00$$

$$I = 450.00$$

$$S = C + I = 5,000 + 450.00$$

$$TEP = \left(\frac{S}{C}\right)^{\left(\frac{N^{\circ} dias TEP}{N^{\circ} dias Trasladar}\right)} - 1$$

TEA =
$$(5,450.00 / 5,000.00)^{(360/180)} - 1$$

TEA = 18.81%

¿Cuál es el capital que necesito depositar en una cuenta que remunera con una Tasa Efectiva Trimestral (TET) de 2%, si estoy dispuesto a esperar dos meses y deseo generar intereses de por lo menos US\$ 150.00?

Rpta. 11,287.29

i' = TET 2%

I = 150.00

Tiempo = 2 meses

C = ??

Para resolver este último caso, es necesario deducir la relación que existe entre el Capital (C) y el Interés (I), para lo cual tenemos:

$$I = S - C$$

$$S = C * (1 + TEP)^{(N^{\circ} \text{ días trasladar/N}^{\circ} \text{días TEP})}$$

$$I = C * (1 + TEP)^{(N^{\circ} \text{ días trasladar/N}^{\circ} \text{días TEP})} - C$$

$$I = C * [(1 + TEP)^{(N^{\circ} \text{ días trasladar/N}^{\circ} \text{días TEP})} - 1]$$
Finalmente:
$$C = I$$

$$C = \frac{I}{(1 + TEP)^{(N^{\circ} \text{ días trasladar/N}^{\circ} \text{días TEP})} - 1$$

Ahora si, reemplazamos los datos del problema:

$$C = \frac{1}{(1 + \text{TEP})^{(N^{\circ} \text{ días trasladar/N}^{\circ} \text{días TEP}) - 1}$$

$$C = \frac{150.00}{(1 + 2\%)^{(60/90)} - 1}$$

$$C = 11,287.29$$

Repaso

Desarrolle los siguientes problemas del capítulo Tasa Efectiva del libro www.e-financebook.com:

1, 2, 24, 26, 28, 29, 32, 33, 38, 43, 48, 50, 52, 54, 55, 62, 64, 70, 74.



