INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Practica # 1“Simulación de la Serie Trigonométrica de Fourier”

Alumnos:

García García Marcos Ricardo
Zamorano Aparicio José Eduardo

Grupo:

3CV5

Materia:

Teoría de Comunicaciones y señales

Profesora:

Arzate Gordillo Jacqueline

ESCOM Escuela Superior de Cómputo

1. Objetivo

El alumno analizará, comprenderá y verificará la STF de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTISIM.

2. Antecedentes

Serie trigonométrica de Fourier

Toda serie funcional que se pueda expresar en la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

Donde T ∈ R+, a0, a1, a2, . . . , b1, b2, . . . son constantes reales, se denomina serie trigonométrica y los an, bn son los coeficientes de la misma. Dado un número real x0, observemos que si en la serie se sustituye la variable x por cualquier número de la forma x0 +kT con k ∈ Z, la serie numérica obtenida es la misma cualquiera que sea k, puesto que:

$$\begin{aligned} & a_n \cos \frac{2\pi n}{T}(x_0 + kT) + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{T}(x_0 + kT) = \\ = \quad & a_n \cos \left(\frac{2\pi n}{T} x_0 + 2kn\pi \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n}{T} x_0 + 2kn\pi \right) \\ = \quad & a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x_0 + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{T} x_0 \end{aligned}$$

Por esta razón, se puede afirmar que si la serie trigonométrica converge en el punto x0, entonces también converge en todo punto de la forma x0 +kT, y que su suma es la misma en cualquiera de dichos puntos.

En consecuencia, si la serie trigonométrica converge, su suma será una función periódica, de período T.

Definición 1.1 Sea f una función integrable en [0, T]. Se llaman coeficientes de Fourier de f a los números.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La serie trigonométrica que tiene estos coeficientes se denomina serie de Fourier de f en [0, T].

Cuando la función f es además periódica de período T, la serie citada se denomina simplemente serie de Fourier de f. Para construir la serie de Fourier de una función sólo hay que calcular sus coeficientes, y para ello, de acuerdo con la Definición 1, basta con que f sea integrable. Pero hasta ahora no se ha expuesto ningún argumento que permita decidir nada acerca de la convergencia de esta serie, ni tampoco, si la suma eso no la función f.

Series de Fourier de funciones pares y de funciones impares

En el cálculo de la serie de Fourier correspondiente a una función f, es posible evitar trabajo innecesario al determinar los coeficientes de la serie cuando la función f considerada sea o bien una función par o bien una función impar, como veremos a continuación:

Si f es una función integrable en [0, T], y además periódica de período T, su serie de Fourier es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

Y sus coeficientes se obtienen empleando las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\;\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Que también se pueden expresar (considerando la periodicidad de f) en la forma.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\;\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Así, se tiene que:

- Cuando f es par, al calcular los coeficientes an las funciones a integrar son funciones pares, ya que tanto f como los cosenos lo son; sin embargo, al calcular los bn las funciones a integrar son impares, porque f es par y los senos impares.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Y por tanto la serie de Fourier obtenida es una serie cosenoidal, es decir, es de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x$$

- Cuando f es impar, al calcular los coeficientes an las funciones a integrar son funciones impares, ya que f es impar y los cosenos pares; sin embargo, al calcular los bn las funciones a integrar son pares, porque tanto f como los senos son impares.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\ \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}x\,dx \qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Y por tanto la serie de Fourier obtenida es una serie senoidal, es decir, es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}x.$$

3. Desarrollo

Observe la función f(t) mostrada en la figura 1. La serie trigonométrica de esta función, está dada por la ecuación (1).

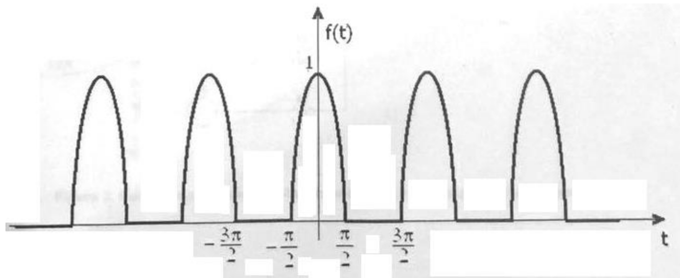


Figura 1

$$f(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cos t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi\left(1-n^2\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos nt \qquad \ldots(1)$$

La S.T.F. establece que, cualesquier funcion f(t) periodica esta compuesta por un grupo infinito de sinusoides de frecuencias ω_0, 2 ω_0, 3 ω_0, … , n ω_0, … etc,

Las sinusoides componentes de f(t), según la ecuación (1) son:

$$\frac{1}{\pi},\quad \left(\frac{1}{2}\right)\cos t,\quad \frac{2}{3\pi}\cos 2t,\quad -\frac{1}{15\pi}\cos 4t,\quad \frac{2}{35\pi}\cos 6t,\quad -\frac{2}{63}\cos 8t,\quad \ldots,$$
$$\frac{2}{\pi\left(1-n^2\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos nt, \ldots$$

En la figura 2 se muestra la generación de f(t) mediante algunos de estos componentes, usando un circuito electrónico. Estrictamente f(t) solo esta aproximada, pues tendrían que sumarse un grupo infinito de términos en el sistema para representarla de manera exacta.

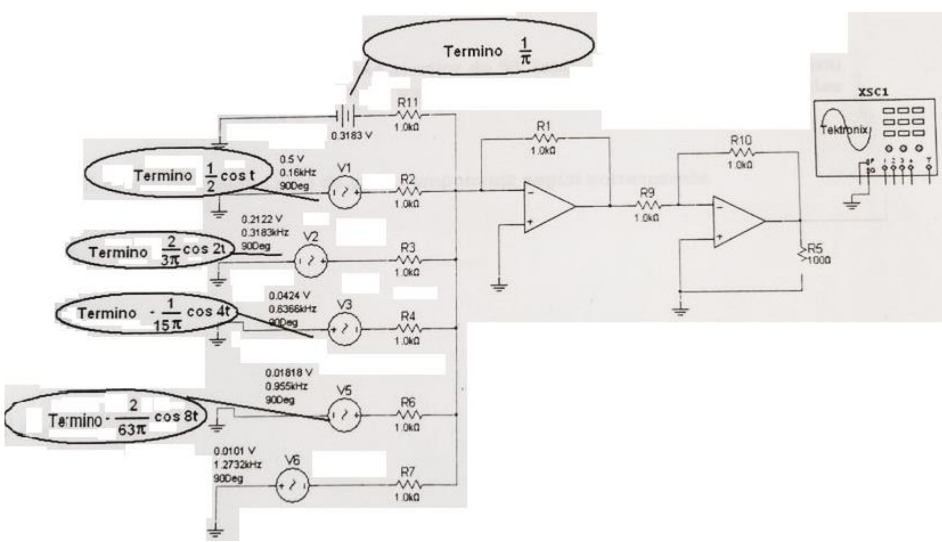


Figura 2 Configuración sumador-inversor-inversor con amplificadores operacionales

Actividad 3.1

Usando el programa de simulación de circuitos, MULTISIM, construya virtualmente el circuito de la figura 2. Para ello siga las indicaciones siguientes:

a. Cada fuente de voltaje alterno (equivalente a un término en la sumatoria sinosoidal de Fourier), ajustar a una frecuencia en Hz, convirtiendo a rad7seg a Hz, usando la formula siguiente:

$$\omega = 2\pi f$$

Así para el n-ésimo término f_n:

$$fn = \frac{n\omega}{2\pi} \qquad con \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ω = *frecuencia en radianes por segundo*

f = *frecuencia en hertz*

NOTA: para facilitar la visualización desde el osciloscopio, se adecuó la frecuencia de cada termino (fuente de voltaje alterno) en Hz a KHz. Véase figura 3.

b. Ajuste en el recuadro de fase el valor de 90, (este significa una función seno desfasada 90 grados, pues cada uno de los términos en la serie son señales coseno). Véase figura 3.

c. Ajuste la amplitud pico de cada componente según corresponda. Véase figura 3.

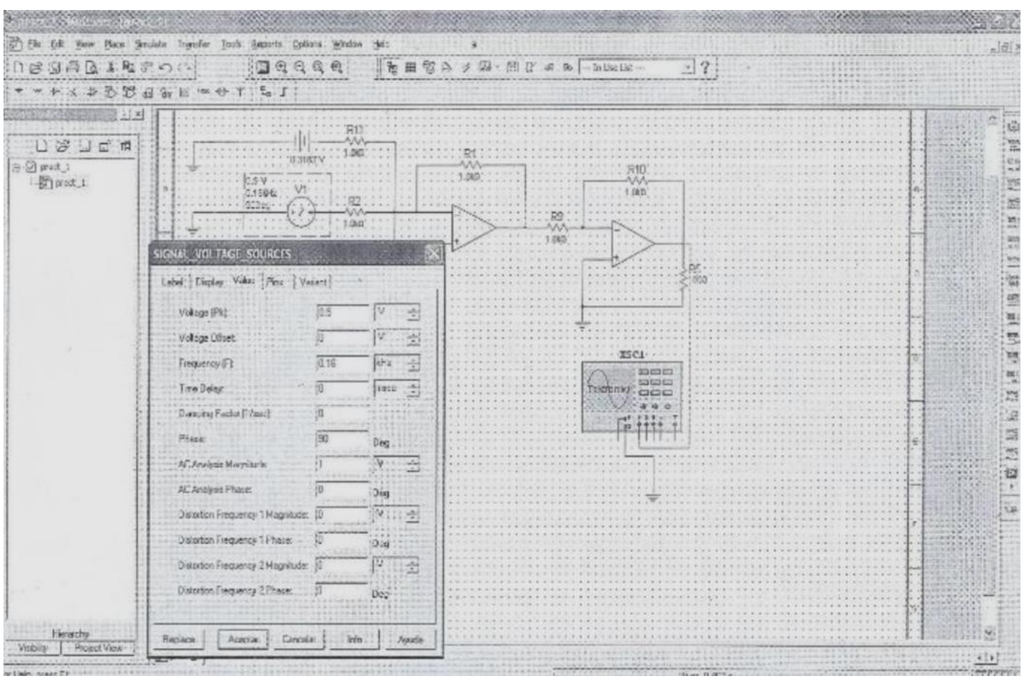


Figura 3

d. Conecte el osciloscopio tektronix a la salida del circuito y ajuste los controles hasta observar claramente la forma de la señal de voltaje de salida (puede usar el botón auto set ubicado en la caratula del osciloscopio). Véase figura 4.

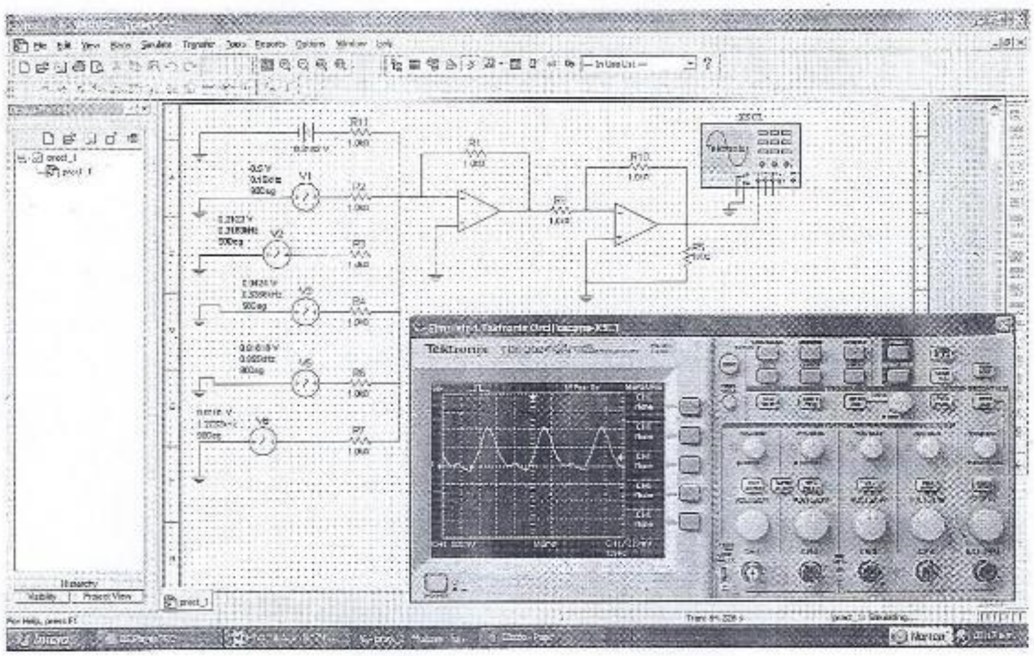


Figura 4(a)

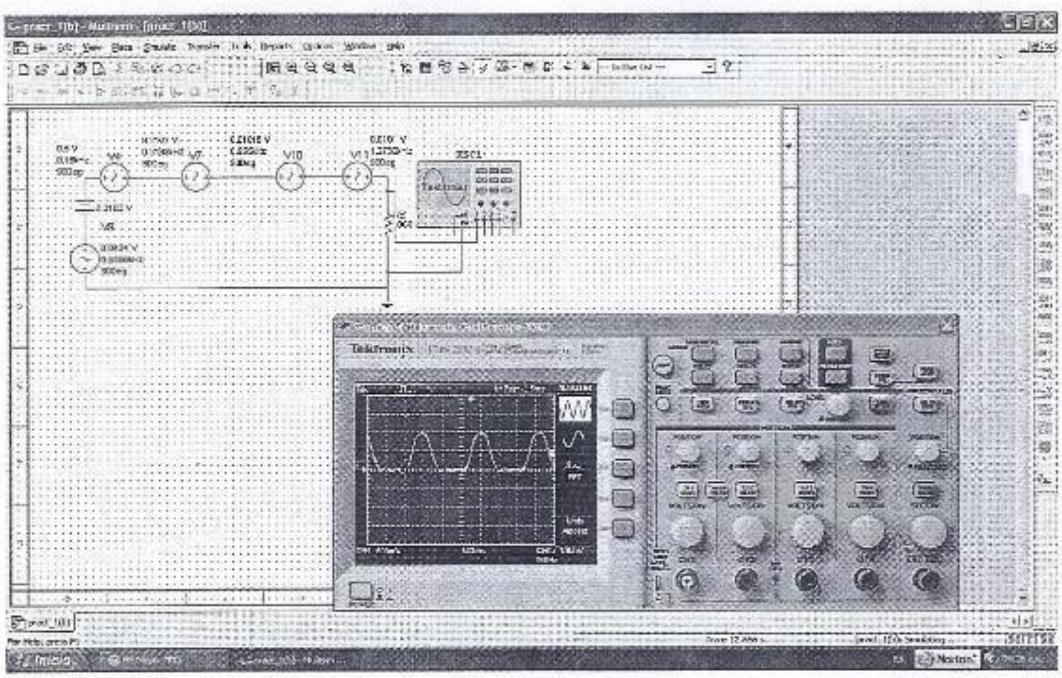


Figura 4(b)

Diseñamos nuestro circuito en MULTISIM:

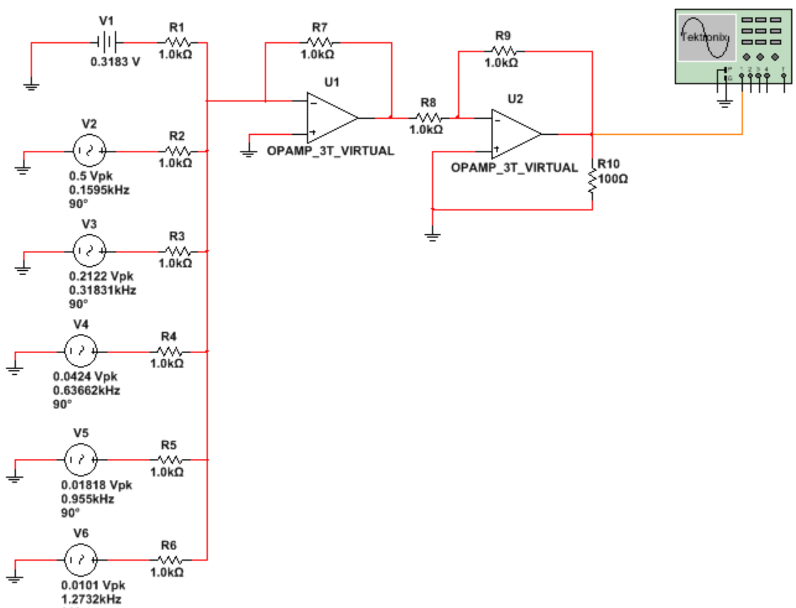


Imagen 1 Circuito elaborado en MULTISIM

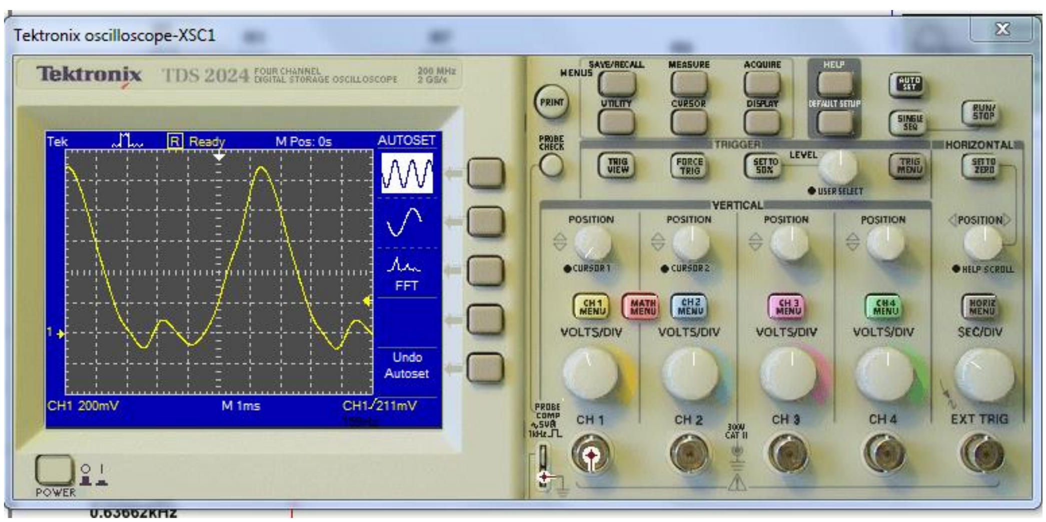


Imagen 2 Señal obtenida

Actividad 3.2

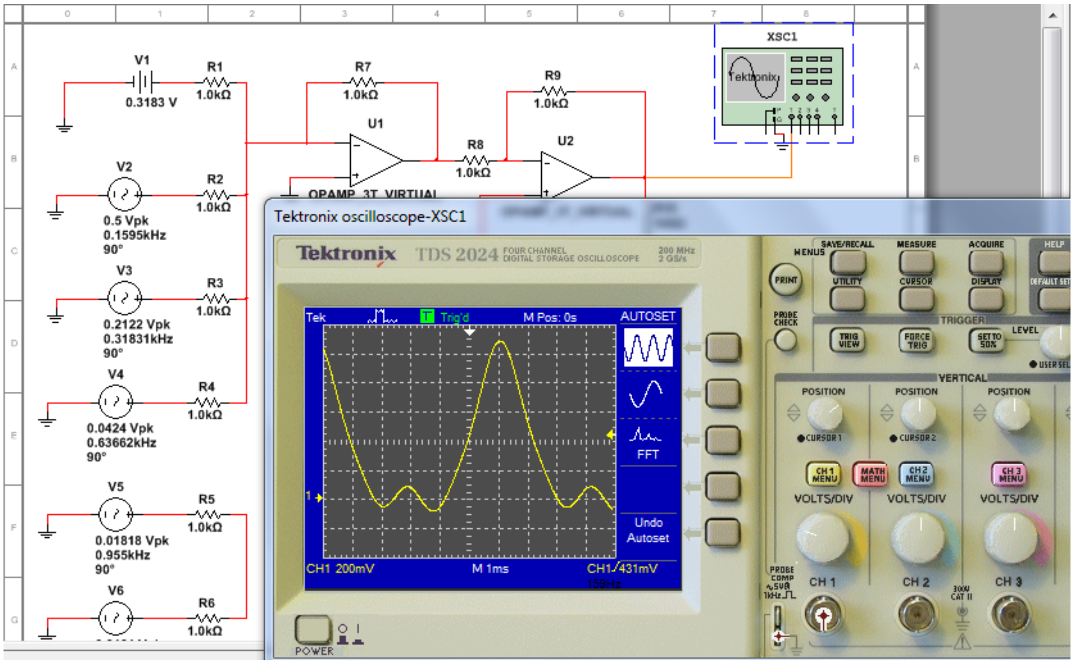
Compare la señal del osciloscopio con la de la figura 1 y escriba sus conclusiones.

Comparando la señal de la figura 1 podemos decir que se muestra un tanto diferente a la obtenida debido a que está compuesta por un número infinito de coeficientes, lo cual hace que sea una señal "ideal", para obtener una señal mejor necesitaríamos un número infinito de fuentes de voltaje de corriente alterna para simular esos coeficientes, por lo tanto, al hacerlo sólo con algunos coeficientes (5), decimos que sólo estamos aproximándonos a la serie de Fourier de la función.

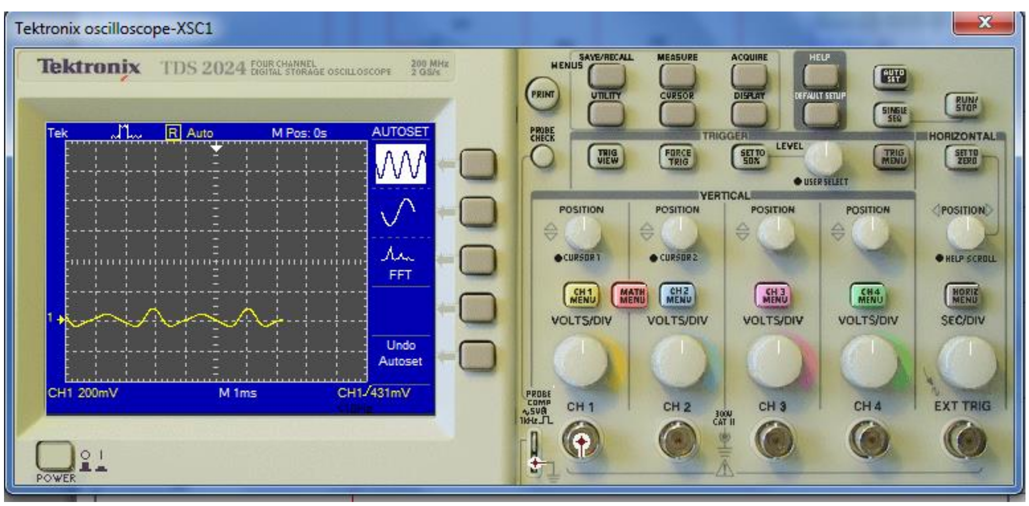
Actividad 3.3

Modifique el circuito de la figura 1, de tal manera que sólo se sumen unos armónicos seleccionados. Por ejemplo, las primeras 3 componentes (n=1, 2,3) y posteriormente las 3 componentes de mayor frecuencia (por ejemplo n=10, 15,16).

a. Para n=1, 2,3



b. Para n=10, 15,16



Compare ambos resultados

¿A qué conclusiones llega?

Podemos deducir que los primeros coeficientes son los que definen la forma de la señal de la función tienen un mayor peso a las del inciso b y los de mayor frecuencia estilizan la forma de la señal.

¿Cuáles son las componentes que definen la forma de f(t)?

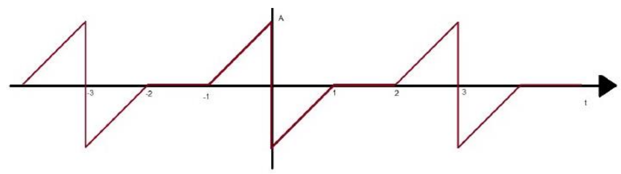
Los del inciso a, al contar con una frecuencia menor hace que definan la forma de la función.

¿Cuáles son las componentes que únicamente afinan a f(t)?

Las del inciso b afinan la función al contar con una mayor frecuencia, en un número infinito de coeficientes nos ayudan a obtener una señal “ideal”.

Actividad 3.4

Encuentre la STF de la señal mostrada en la figura 5

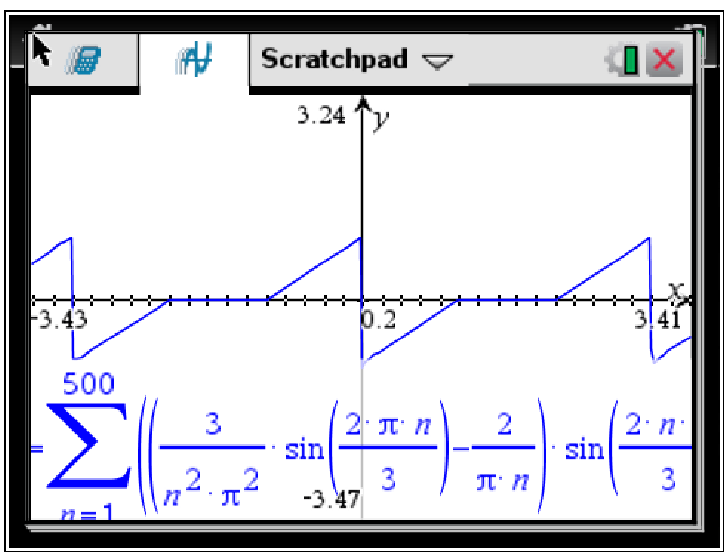


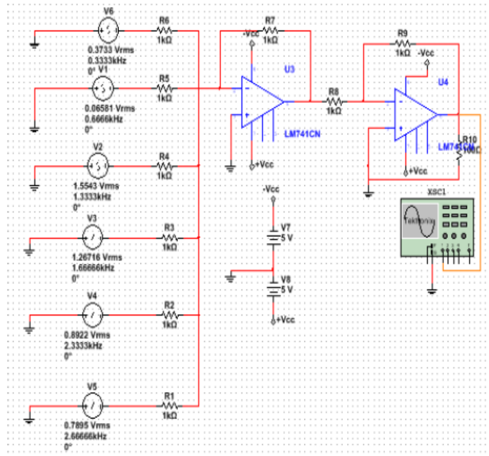
La STF es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{n^2\pi^2}sin\left(\frac{n2\pi}{3}\right) - \frac{2}{n\pi}\right)sin\left(\frac{n2\pi}{3}t\right)\right)$$

Figura 5

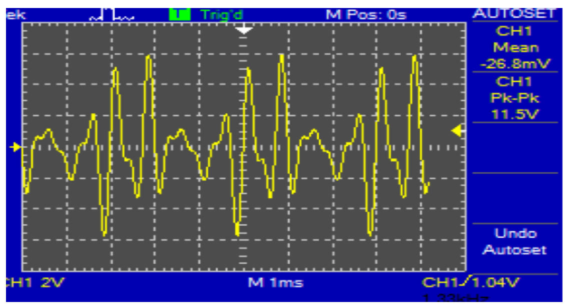
Grafique la expresión resultante en un programa de computadora.





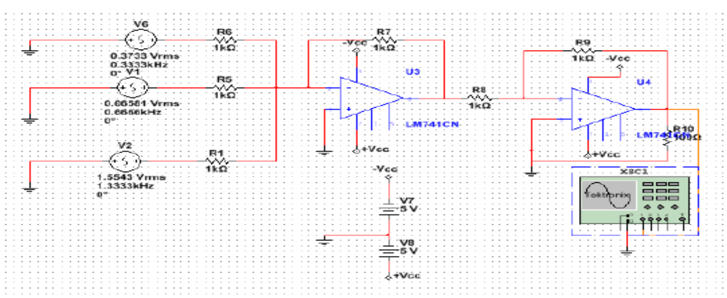
Repita los puntos 3.2 y 3.3 para esta forma de onda g(t)

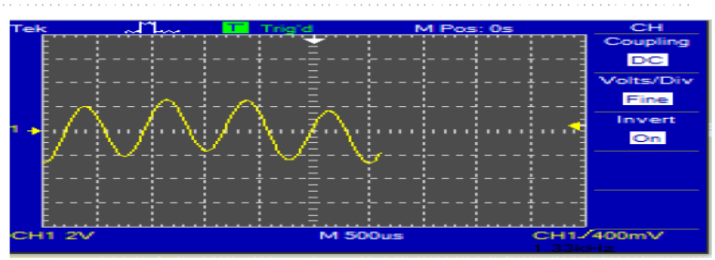
Del punto 3.2 Compare la señal del osciloscopio con la señal de la figura



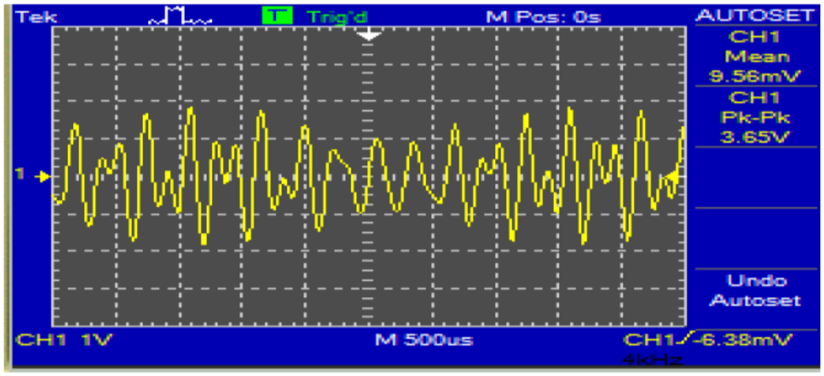
Del punto 3.3 Modifique el circuito de la figura 1, de tal manera que solo se sumen unos armónicos seleccionados.

a. Para n=1, 2,3



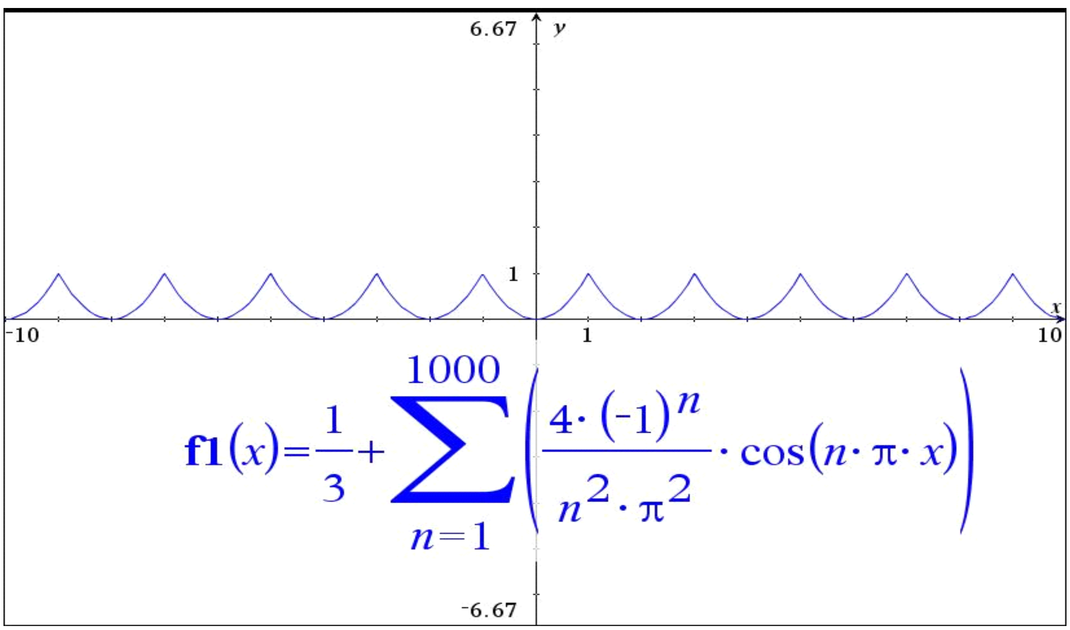


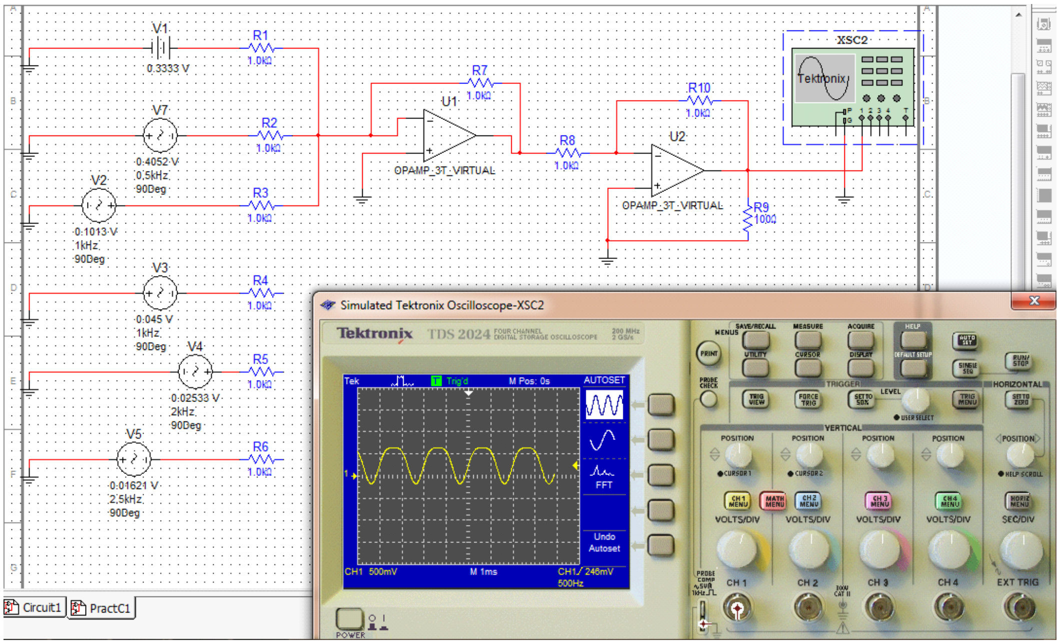
b. Para n=10, 15, 16



Actividad 3.5

Usando su creatividad invente una forma de onda peculiar de h(t), desarrolle su serie exponencial de Fourier. A partir de ella encuentre la serie trigonométrica, grafíquela y repita las actividades 3.1 y 3.2.





Actividad 3.6 Pregunta.

Si quisiera usar el concepto de Serie Trigonométrica de Fourier para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno. ¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de estas funciones para hacer ajustable el periodo de estás?

La magnitud de la frecuencia de las n fuentes de voltaje alterno.

4. Conclusiones

Se puede observar claramente que las señales se van mejorando en cuanto al número de armónicos que le vamos añadiendo, visualizamos que algunos de los primeros coeficientes de la serie de Fourier no son suficientes para poder apreciar en su totalidad la forma de la función original pero más sin embargo se aproxima y se aprecia cómo se empieza a formar la forma de la función mediante sinusoides esto quiere decir que entre más sea el número de elementos de nuestra función, la señal será más exacta.

Referencias

http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier

http://personal.us.es/niejimjim/tema07.pdf