Тема 2. Определённый интеграл.

Занятие 5. (30) Определённый интеграл. Основные понятия

добавить несколько примеров.

Пусть ф-ия $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Опр: Назовём разбиением $\{T\}$ отрезка $[a;b]$ мн-во точек $\{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

<рис> [Дороговцев 2], с. 199.

Опр: Назовём диаметром разбиения длину наибольшего интервала разбиения, т.е. $d = \max\limits_i \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Опр: Ф-ия $f(x)$ - интегрируема по Риману на $[a;b]$ (обозначение $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$), если $\exists \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. (*)

Опр: Выражение $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ ($S_n = S_n(f)$) наз-ся интегральной суммой ф-ии $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, отвечающее разбиению $\{x_i\}$.

Замечание: предел (*) не должен зависеть от выбора точек x_i, ξ_i.

Опр: $\overline{S}(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, где $m_i = \inf\limits_{[x_i; x_{i+1}]} f(x)$ - нижняя сумма Дарбу.

$\underline{S}(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$, где $M_i = \sup\limits_{[x_i; x_{i+1}]} f(x)$ - верхняя сумма Дарбу.

$I_* = \sup\limits_{\{T\}} \{\overline{S}(f)\} = \lim\limits_{d \to 0} \overline{S}(f)$ - нижний интеграл Дарбу.

$I^* = \inf\limits_{\{T\}} \{\underline{S}(f)\} = \lim\limits_{d \to 0} \underline{S}(f)$ - верхний интеграл Дарбу.

Th: (критерий Римана интегрируемости ф-ий на отрезке)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{T\}: |\underline{S} - \overline{S}| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.

переформулировка см [Дороговцев 2], с. 206, Th 2 <рис> там же с. 207

Замечание 1: $\exists \lim\limits_{d \to 0} \overline{S} = \lim\limits_{d \to 0} \underline{S} \Leftrightarrow f(x)$ интегрир. по Риману на $[a;b]$.

Замечание 2: $\exists \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\Delta x_i = 0$, $\omega_i(f) = \sup\limits_{[x_i; x_{i+1}]} f(x) - \inf\limits_{[x_i; x_{i+1}]} f(x) \Leftrightarrow f(x)$ интегр. по Р. на $[a;b]$.

Th: Пусть выполнено одно из условий: 1) $f(x)$ непр. на $[a;b]$; 2) $f(x)$ - огр. и монотонна на $[a;b]$; 3) $f(x)$ - огр. и имеет на $[a;b]$ конечное число т. разрыва. Тогда $f(x)$ интегр. по Р. на $[a;b]$.

Опр: Мн-во X наз-ся мн-вом меры нуль (по Лебегу), если $\forall \varepsilon > 0$ сущ-ет конечная или счётная с-ма интервалов, покрывающая все т. мн-ва X, причём сумма длин этих интервалов меньше ε

Th: (критерий Лебега интегрируемости ф-ий на отрезке)

$f(x)$ интегрир. по Риману на $[a;b]$ $\Leftrightarrow$ мн-во её точек разрыва имеет меру нуль.

Утв: (непр-ть интеграла) Если ф-ия $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$, то ф-ии $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ и $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ непр. на этом отрезке.

№1. [Кудр. II], с. 93; [Д], № 2181, 2182, 2186, 2191. (ср. № 2185)

Объяснить интегрируемость ф-ии $f(x)$ и найти интеграл $\underbrace{\int_{\{x\}} f(x)dx}_{\text{с помощью инт. сумм}}$, если:

а) $f(x)=x^2$, $\{x\}=[-1;2]$; <Архимед>

▶ x^2 непр на $[-1;2]$ и, следовательно, интегр. на нём. Поэтому для вычисления предела интегральных сумм S_n при $d\to 0$ можно взять любую послед. разбиений $\{x_n\}$ отрезка $[-1;2]$ с диаметром, стремящимся к нулю. Будем делить данный отрезок на n равных частей, а в кач-ве точек ξ_i выбирать ~~концевые~~ левые точки разбиения x_i. Тогда:

$$\int_{-1}^{2} x^2dx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\left\{\Delta x_i=\frac{3}{n}^{=2-(-1)};\ \xi_i=x_i=-1+\frac{3}{n}i,\ i=\overline{0,n-1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left(-1+\frac{3}{n}i\right)^2}_{1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}}\cdot\frac{3}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[3\frac{n}{n}-\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=3-9+9=3 \ ■$$

б) $f(x)=1+x$, $\{x\}=[-1;4]$;

▶ Предварительные рассуждения аналогичны случаю а).

$\Delta x_i=\frac{5}{n}$; $x_i=-1+\frac{5}{n}i$, $i=\overline{0,n-1}$; $\xi_i=-1+\frac{5}{n}(i+1/2)$;

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5}{n}(i+1/2)\cdot\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}\cdot\left(\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n}{2}\right)=\frac{25}{2}$$

док-во интегрир.: $\exists\{\tau\}$: $f(x)\in\mathcal{R}[-1;4]\Leftrightarrow \overline{S}-\underline{S}<\varepsilon$

$\exists x_i=-1+\frac{5}{n}i$, $\Delta x_i=\frac{5}{n}$

т.к. $(1+x)\uparrow$, то $f_{min}(\xi_i)=x_{i-1}$; $f_{max}(\xi_i)=x_i$

$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5(i-1)}{n}\cdot\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i-1)$; $\overline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5i}{n}\cdot\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i$

$\overline{S}_n-\underline{S}_n=\frac{25}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(i-1)-\sum_{i=0}^{n-1}i\right)=\frac{25}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}$ ■

в) $f(x)=x^3$, $\{x\}=[1;3]$;

▶ $\Delta x_i=\frac{2}{n}$, $\xi_i=x_i=1+\frac{2i}{n}$, $i=\overline{0,n-1}$

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\frac{(2n-1)(5n-4)}{n}\cdot\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}20 \ ■$$

г) $f(x)=\frac{1}{x}$, $\{x\}=[a,b]$, $(0<a<b)$;

▶ $\exists q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$; $\xi_i=x_i=aq^i$ $\left(\lim_{n\to\infty}(aq^{i+1}-aq^i)=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}}_{\to a}-\underbrace{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}}_{\to a}\right]=0\right)$

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}-1\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1}{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ ■$$

д) $f(x)=a^x$, $a>0$, $\{x\}=[0;1]$. е) $f(x)=\ln x$, $\{x\}=[1,2]$

▶ $\xi_i=2^{i/n}$, $\Delta x_i=2^{\frac{i}{n}}-2^{\frac{i-1}{n}}$; ◼

▶ $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$, $i=\overline{0,n-1}$

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a^{k/n}=\frac{1}{n}\,\frac{1-a}{1-a^{1/n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{a-1}{\ln a}$$ ◼

№2. (критерий Коши интегрируемости ф-ий) [Кудр II], с.93.

$f(x)$ интегрир. на $[a;b]$ $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:$ $\forall\underbrace{\{T_1\},\{T_2\}}_{\text{отрезка }[a;b]}^{\text{для любых разбиений}}$ с диаметрами $d_1<\delta$ и $d_2<\delta$ выполняется нер-во $|S_{T_1}-S_{T_2}|<\varepsilon$.

▶ ($\Rightarrow$) Пусть $f(x)$ интегрир. на $[a;b]$ и $I=\int\limits_a^b f(x)dx$

Тогда для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: для $\forall$ разбиения $\{T\}$ с диаметром меньшим δ, вып-ся нер-во $|S_T-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, если $d_1<\delta$, $d_2<\delta$, то

$$|S_{T_1}-S_{T_2}|\le|S_{T_2}-I|+|I-S_{T_1}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Если считать S_T ф-ей, зависящей от разбиения $\{T\}$, то данное условие явл-ся переформулировкой усл-я Коши сх-ти ф-ий. Поэтому, $\exists\lim\limits_{d\to0}S_T$, а следовательно, ф-ия $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. ◼

№3. [Д.], №2193.; ср. [Дор 1], с.101, № VI. 2.19;

а) Пусть ф-ии $f(x)$ и $\varphi(x)$ непр. на $[a;b]$. Док, что $\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$, где $x_i\le\xi_i,\theta_i\le x_{i+1}$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $(i=\overline{0,n-1})$.

▶ Обозначим: $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i$; $\tilde S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i$

Докажем, что $|S_n-\tilde S_n|\xrightarrow[d\to0]{}0$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\varphi(\theta_i)\Delta x_i\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\xi_i)-\varphi(\theta_i)|\Delta x_i$$

$|\varphi(\xi_i)-\varphi(\theta_i)|\le\sup\limits_{x',x''\in[x_i;x_{i+1}]}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=\omega_i(\varphi)$ – колебание ф-ии $\varphi(x)$ на $[x_i;x_{i+1}]$ $\le\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta x_i$

Т.к. $f(x)$ огр., $\omega_i(\varphi)\xrightarrow[d\to0]{}0$, т.к. φ равн. непр. на $[a;b]$, то $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\overbrace{|f(\xi_i)|}^{M}\cdot|\varphi(\xi_i)-\varphi(\theta_i)|\Delta x_i\xrightarrow[d\to0]{}0.$ требуется более аккуратная оценка

$\Rightarrow\lim\limits_{d\to0}\tilde S_n=\lim\limits_{d\to0}S_n=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ ◼

Будет ли утв. иметь место, если ф-ия $\varphi(x)$ лишь интегрируема?

б) Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0;1]$. Док, что $\int\limits_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$, при $n\to\infty$.

в учебнике $\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

▶ Т.к. выражение $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ можно рассматривать, как некоторую интегральную сумму с $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, $\xi_k = \frac{k}{n}$, то выполнено: $\overline{S} \le \int\limits_0^1 f(x)dx \le \underline{S}$

$$\cancel{\overline{S} \le \int\limits_0^1 f(x)dx} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \underline{S} \Rightarrow \left|\int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \underline{S} - \overline{S} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\frac{1}{n}$$

Пусть далее $f(x)\uparrow$, тогда (см. в конце тетр.)

$$M_k = f(x_{k+1}) = f(0) + \frac{f(1)-f(0)}{n}(k+1), \quad m_k = f(x_k) = f(0) + \frac{f(1)-f(0)}{n}\cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S} - \overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(1)-f(0)}{n} \underset{\text{см. в книге и конце тетр}}{=} \frac{f(1)-f(0)}{n} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{1}{n}\cdot c, \text{ где } c = f(1)-f(0).$$ ■

б) [Дор 1], с. 102, № VI.2.2.1.

<u>№4.</u> ср. [Д], №2195

Док., что ф-ия Римана R(x) интегрируема на любом конечном отрезке,

а) используя критерий Лебега;

▶ <вообще говоря, это вопрос, т.к. в любом интервале на $\mathbb{R}$ найдётся рац. точка. Поэтому, наименьший интервал, содержащий все рац. точки – это вся числовая прямая $\mathbb{R}$.>

В № 12.12 было доказано, что $R(x)$ непр. во всех иррац. точках, и терпит разрыв во всех рац. точках. Покроем т. разрыва ф-ии $R(x)$ счётным числом интервалов длины $l_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольно. Тогда суммарная длина $l = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Следовательно, мн-во точек разрыва ф-ии $R(x)$ будет иметь меру нуль. Применив критерий Лебега, получим интегрируемость $R(x)$

б) без использования критерия Лебега.

▶ см. в конце тетр. II ■

Вычислите интеграл от ф-ии R по произвольному отрезку

Используя интегрир. ф-ии $R(x)$, получим $\int\limits_a^b R(x)dx = \lim\limits_{d\to 0}\overline{S} = 0$ (на каждом отрезке разбиения будет лежать иррац. точка)

<u>№5.</u> [Д.], №2197.

Д-ть, что ф-ия Дирихле $D(x)$ не интегрируема на любом отрезке.

▶

На любом сколь угодно малом отрезке разбиения $[x_i; x_{i+1}]$ найдутся как иррац., так и рац. точки. Поэтому, $\lim\limits_{d\to 0}\underline{S} = b-a$, а $\lim\limits_{d\to 0}\overline{S} = 0$.

Поэтому, $\underline{S} \ne \overline{S}$ и ф-ия $D(x)$ не интегрир. на любом отрезке. ■

<u>№6.</u> [Д.], №2196; [С.Х.], с. 93, №18;

Исследуйте след. ф-ии на интегрируемость на сегменте $[0; 1]$:

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \ne 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ ▶ $f(x)$ терпит разрыв в точках $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$ и т. $x=0$. Аналогично №4а) покажем, что это мн-во меры нуль. Следовательно, $f(x)$ интегрир. на $[0;1]$ ■

покрытие конечным числом интервалов см. пункт б).

б) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$

▶ $f(x)$ огр. на $[0;1]$ и имеет разрывы в т. $\{0\}$, $\{\frac{1}{k} \mid k\in\mathbb{N}\}$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда на $[0;\frac{2\varepsilon}{3})$ лежит счётное число точек разрыва: $\{0\}, \{\frac{1}{k} \mid k>\frac{4}{\varepsilon}\}$. А на $[\frac{2\varepsilon}{3};1]$ – конечное число т. разрыва: $\{1;\frac{1}{2};\ldots;\frac{1}{m}\}$, где $m=[\frac{3}{2\varepsilon}]$.

Каждую точку $\{x_k\}$ $\{1;\frac{1}{2};\ldots;\frac{1}{m}\}$ покроем интервалом $(x_k-\frac{\varepsilon}{6m};x_k+\frac{\varepsilon}{6m})$. Т.о., все т. разрыва ф-ии $f(x)$ на сегменте $[0;1]$ м. покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых равна $\frac{2\varepsilon}{3}+m\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. Т.е. $f(x)$ интегрир. на $[0;1]$ ■

№ 7. ср. [Д.], № 2201.

Следует ли из интегрируемости ф-ии $|f(x)|$ интегрируемость ф-ии $f(x)$?

▶ Нет, не следует. Например, $f(x)=\begin{cases} -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \\ 1, & x\in\mathbb{Q}; \end{cases}$ $f(x)$ не интегрир. как ф-ия Дирихле. $|f(x)|\equiv 1$ интегрир. ■

№ 8. [Кудр. II], с. 94

Пусть ф-ия $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$. Док, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$, $0<\varepsilon<b-a$.

▶ Выберем произвольно т. $c\in(a;b)$ и ε: $0<\varepsilon<c-a$ и $0<\varepsilon<b-c$. $a+\varepsilon<c<b-\varepsilon$

Имеем, $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Отсюда, используя утв. о непр. интеграла с перем. верхним пределом, имеем:

$$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx\right]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$$

использована непр. интегралов $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ и $G(x)=\int\limits_x^c f(t)dt$, $f(t)\in\mathcal{R}[a;b]$ ■

№ 9. [Шиб], с. 143 – 144

Покажите некорректность определения интеграла, при котором

а) отрезок разбивается на равные части, а знач. ф-ии берутся в серединах отрезков разбиения;

▶ Р-им $\int\limits_0^1 D(x)\,dx$. Этот интеграл не сущ-ет (см. № 5)

Будем разбивать $[0;1]$ на n равных частей и брать значения ф-ии $D(x)$ в серед. получ. отрезков разбиения. Все полученные т. x_i будут рациональными $\Rightarrow D(x_i)=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}D(x_i)\Delta x_i=1=\int\limits_0^1 D(x)dx$.

Заметим, что $\int\limits_0^{\sqrt{2}} D(x)\,dx$ по упрощённому „определению" будет равен 0, т.к. серединам отрезков будут отвечать иррац. числа.

Имеем, $[0;1]\subset[0;\sqrt{2}]$ и $D(x)\geq 0$, но $\int\limits_0^1 D(x)\,dx>\int\limits_0^{\sqrt{2}} D(x)dx$. Противоречие. ■

см. также [С.Х.], с. 43, № 19;

б) не требуется стремления максимума длин отрезков разбиения к нулю;

▶ см [Ш.б], с 144 (описано) $\exists f(x)$ не const на отрезке разбиения $\beta=\min\limits_{d\subset[a;b]}\left(\max\limits_{x\in d} f(x)-\min\limits_{x\in d} f(x)\right)>0$ d — отрезок с д...

$S_n(T_1)-S_n(T_2)>\alpha\cdot\beta$, $S_n(T_1)$ и $S_n(T_2)$ — инт. суммы отличающиеся только ...

№10 ср. [Д.], №2203;

Пусть $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$, $\varphi(x)\in\mathcal{R}[a;b]$. Обязательно ли $\varphi(f(x))\in\mathcal{R}[a;b]$?

▶ Пусть $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0;\end{cases}$ $f(x)=R(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 1/n, & x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\end{cases}$ $\Rightarrow\varphi(f(x))=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}...\end{cases}$

№11 (см в конце тетр.)

№13 [Д.], №2200, 2202;

а) Пусть $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$. Док., что $|f(x)|\in\mathcal{R}[a;b]$, причём $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|d...$

▶

$\exists x',x''\in[x_{k-1};x_k]$. $\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le|f(x')-f(x'')|\Rightarrow\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]}\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]}|f(x...$

А т.к. для ф-ии $f(x)$ выполнен критерий Римана интегр. ф-ий на отрезке (...) то он будет выполнен и для $|f(x)|$. Следовательно, $|f(x)|\in\mathcal{R}[a;b]$.

Далее, т.к. $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ для $\forall x\in[a;b]$, то $-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|d...$

т.е. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$. ■

см [Ф.II], с.106.

б) Пусть $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$ и $c\le f(x)\le d$ для $\forall x\in[a;b]$; пусть $\varphi(y)\in C[c;d]$. Док., что $\varphi(f(x))...$

▶

Выберем произвольные числа $\varepsilon>0$ и $\sigma>0$. Т.к. $\varphi(y)\in C[c;d]$, то по числу ε $\exists\eta$ ... в любом интервале значений y с длиной $<\eta$ $\omega(\varphi)<\varepsilon$ (колебание ф-ии φ). Значком i' отмечены инт. с колеб. $<\eta$, — i'' — $\ge\eta$

Далее, т.к. $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$ по числам η и σ найдётся число $\delta(\eta,\sigma)$, что при диаме... разбиения $<\delta$, сумма длин тех из них (интервалов), для которых колебание ф-ии $f\ge\eta$ ($\omega(f)\ge\eta$), сама меньше ... (см №12)

Для прочих интервалов имеем: $\omega_i(f)<\eta$, а следовательно, по самому выбору чис... (см начало) $\omega_i''(\varphi(f))<\varepsilon$. Т.о., для ф-ии $\varphi(f(x))$ колебания могут оказаться $\ge\varepsilon$ лишь в некот... из интервалов первой группы, сумма длин которых $<\sigma$. По крит. из №12, $\varphi(f(x))\in\mathcal{R}[a...$

(критерий сущ-я опред. интеграла)

№12. [ФII], с 105 Док., что для сущ-я опред. интеграла (ф-ии $f(x)$ на $(a;b)$) н.и д., чтобы по з...ным числам $\varepsilon>0$, $\sigma>0$ м.б. найти такое $\delta(\varepsilon,\sigma)>0$, что при диам. разбиения $d<\delta$, сумма $\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}$ длин тех интервалов, которым отвечают колебания $\omega_{i'}\ge\varepsilon$ сама $<\sigma$.

▶ $\Rightarrow$ $f(x)\in\mathcal{R}\Rightarrow\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i=0$. Далее из нер-ва $\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i\ge\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\ge\varepsilon\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}$ (сумма по всем интерв.); ... счёт выбора δ можно сделать сумму $\sum\limits_i\omega_i\Delta x<\varepsilon\cdot\sigma\Rightarrow\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma$

$\Leftarrow$ $\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}+\sum\limits_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}+\varepsilon\sum\limits_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sigma+\varepsilon(b-a)$ (const, const) где Ω — колеб. ф-ии f ... значком i' отмечены инт... $\varepsilon'\Rightarrow f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$ ■

[Демидович 1], с 99, №VI.1.17; №16 [олимпиада], 1999.5; №15 [С.Г.К.Т., с 25, №35];

Left margin (cut off): произ- ... $\{\frac{1}{k}|k>\frac{4}{\varepsilon}\}$? ... , все ... интервалов, ■ ... Дирихле. ■ ... в силу предела ..., имеем: $...dx=\int_a^b f(x)dx$ ... $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$ ... разбиения; ... отрез- ... $=\frac{1}{...}\int_0^1 D(x)dx$ ... среди- ■

Занятие 6. (31) Вычисление определённых интегралов.

Th: (Ньютона - Лейбница) Пусть $f(x)\in C[a;b]$ и $F'(x)=f(x)$. Тогда справедливо следующее рав-во: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Th: (интегрирование по частям) Пусть $u(x), v(x)\in C^1[a;b]$. Тогда справедлива формула: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$.

Th: (формула замены переменной) Предположим, что: $f(x)\in C[a;b]$, $\varphi(t)\in C^1[\alpha;\beta]$, где $\alpha=\varphi^{-1}(a)$, $\beta=\varphi^{-1}(b)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \left\{\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt\end{matrix}\right\} = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Утв: (обобщение ф-лы Н-Л) Пусть $f(x)\in \mathcal{R}[a;b]$, $f(x)$ терпит разрывы $I^{\text{го}}$ рода во внутр. точках $c_i\in(a;b)$, $i=\overline{1,n}$, и м.б. в т. a и b. Кроме того, $F'(x)=f(x)$ за исключ. т. разр. Тогда справедлива ф-ла: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0)-F(a+0)+\sum\limits_{i=1}^{n}[F(c_i-0)-F(c_i+0)]$.

№1 [Д.], №2219, 2222, 2223; 2226, 2230; [С.Х.], с. 47, №49.

С помощью определённых интегралов найти пределы следующих сумм:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$;

▷ Р-им выражение $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$ $\left(=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\right)$ как интегральную сумму $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$ для ф-ии $f(x)=x$, соответствующую разбиению $\{T\}$ сегмента $[0;1]$ на n равных частей и выбору $\xi_k=\frac{k}{n}$.
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$. ■

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}$;

▷ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}=\left\{\Delta x=\frac{1}{n};\ \xi_k=\frac{k}{n};\ f(x)=\sin\pi x\right\}=\int\limits_0^1\sin\pi x\,dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ ■

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p$, $p>0$;

▷ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\left\{\Delta x=\frac{1}{n};\ \xi_k=\frac{k}{n};\ f(x)=x^p\right\}=\int\limits_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$. ■

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$, $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$;

▷ $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{1}{b-a}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ ■

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{1+1/(kn)}$.

см. также [Фор. 1], с. 99, № VI. 1.1 и с. 302-3

$\blacktriangleright$ $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{kn}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{kn\cdot 2^{k/n} \pm 2^{k/n}}{1+kn} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k/n} - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{1+kn}$

$0 < \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{1+kn} \overset{\ominus \text{при } n=1}{\leq} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{1+n} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k/n} = \left\{\Delta x = \frac{1}{n};\ \xi_k = \frac{k}{n};\ f(x) = 2^x\right\} = \int\limits_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$. $\blacksquare$

<u>№2.</u> [Д.] №2211, 2213, 2239, 2242, 2243, 2245, 2246, 2249; 2269, 2279 [Фроловиев 1], с 99, № VI. 2 [Кудр. II], с 99; с 95, [ВоС I], [Д.], № 2218

Найти следующие определённые интегралы:

а) $\int\limits_0^2 |x-1|\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)\,dx + \int\limits_1^2 (x-1)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1$. $\blacksquare$

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $(0 \leq \varepsilon < 1)$;

$\blacktriangleright$ Р-им неопр интеграл: $x \neq \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \left\{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt\right\} = \int \frac{2}{\left(1+\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt =$

$= \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}} + C = \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)$

$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} =$

$\frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) \xrightarrow[x\to\pi-0]{} \frac{\pi}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}$

$\xrightarrow[x\to\pi+0]{} -\frac{\pi}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}$

$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\Big|_0^{\pi-0} + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\Big|_{\pi+0}^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ $\blacksquare$

в) $\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = -e^{-x}\cdot x\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$ $\blacksquare$

г) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$;

$\blacktriangleright$ $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = -\int\limits_{1/e}^{1} \ln x\,dx + \int\limits_1^e \ln x\,dx = -x(\ln x - 1)\Big|_{1/e}^{1} + x(\ln x - 1)\Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}$ $\blacksquare$

д) $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$;

$\blacktriangleright$ $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx = x\cdot\arccos x\Big|_0^1 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1$. $\blacksquare$

е) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$;

$\blacktriangleright$ $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{5-4x} \\ x &= \frac{-t^2+5}{4} \\ dx &= -\frac{t}{2}dt \end{aligned}\right\} = \int\limits_1^3 \frac{\frac{5-t^2}{4}\cdot\frac{t}{2}}{t}dt = \frac{1}{8}\int\limits_1^3 (5-t^2)\,dt =$

$= \frac{1}{8}\left(5t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{8}\left(15 - 9 - 5 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ $\blacksquare$

ж) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad (a>0);$

$\cos t \geq 0$, при $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$

▶ $$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x=a\sin t,\ t=\arcsin\frac{x}{a}\in[0;\frac{\pi}{2}] \\ dx=a\cos t\,dt\end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\,dt =$$
$$= a^4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^4\pi}{16}$$ ■

з) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx;$

▶ $$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right\} = 2\int\limits_0^1\frac{\arcsin t}{t\cdot\sqrt{1-t^2}}\cdot t\,dt = 2\int\limits_0^1 \arcsin t\, d(\arcsin t) = \frac{\pi^2}{4}.$$ ■

и) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1};$

▶ $$\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1\frac{d(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|\Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1/2)}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{=-\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{2}\ln\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ ■

к) $\int\limits_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx;$

▶ $$\int\limits_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{10}\left[5+\cos 2x+2\sin 2x\right]\Big|_0^\pi = \frac{3}{5}(e^\pi-1).$$ ■

л) $\int\limits_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx;$

▶ $$\int\limits_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx = \int\limits_0^1\frac{1-x}{5-2x}\,dx + \int\limits_1^2\frac{x-1}{5-2x}\,dx + \int\limits_2^3\frac{x-1}{1}\,dx + \int\limits_3^4\frac{x-1}{2x-5}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-5+2x+3\ln|2x-5|\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\left(5-2x-3\ln|2x-5|\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_2^3 + \frac{1}{4}\left(2x-5+3\ln|2x-5|\right)\Big|_3^4 = 2+\frac{9}{4}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 5$$ ■

м) $\int\limits_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx;$

▶ $$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \left\{\begin{matrix} t=x-1/x \\ dt=(1+1/x^2)\,dx\end{matrix}\right\} = \int\frac{d(x-1/x)}{2+(x-1/x)^2} \overset{x\neq 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

и, следовательно, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x\neq 0.$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

не нужно

то непрерывная (на всей числовой оси) ф-ия $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если } x<0, \end{cases}$ для док-ва интегрир. подынт. ф-ии.

$$\int\limits_{-1}^2\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int\limits_{-1}^0\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx + \int\limits_0^2\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{0-0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_{0+0}^2 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$ ■

н) $\int\limits_0^1 e^x \arcsin e^{-x}\,dx$;

$-\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{(1/t)^2-1}} = \int \frac{d(1/t)}{\sqrt{(1/t)^2-1}} = \ln\left|\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right| + C$

▶ $\int e^x \arcsin e^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = e^{-x} \\ dx = -\frac{1}{t}dt \end{array}\right\} = -\int \frac{\arcsin t}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}\arcsin t - \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} =$

$= \frac{1}{t}\arcsin t + \ln\left|\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right| + C = e^x \arcsin e^{-x} + \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right| + C.$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 e^x \arcsin e^{-x}\,dx = \left(e^x\arcsin e^{-x} + \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)\right)\Big|_0^1 = e\cdot\arcsin e^{-1} - \frac{\pi}{2} + \ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right).$ ■

о) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$;

$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x\to\pi-0]{} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $\xrightarrow[x\to\pi+0]{} -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

▶ $\int \frac{dx}{3+\cos x} = \left\{\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x\neq\pi+2\pi k \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array}\right\} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$

$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x} = \int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{3+\cos x} + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\pi-0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\Big|_{\pi+0}^{2\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ■

п) $\int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$; ▶ $I = \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi}|\sin x|\,dx = 100\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = 200\sqrt{2}$ (т.к. ф-ия $|\sin x|$ периодическая с периодом $T=\pi$.) ■

см также: [А], с. 276.

№3. [Д.], № 2309, 2310, 2311, 2313, 2315; [ВоС I], с. 238;

Вычислить определённые интегралы от ограниченных разрывных ф-ий:

а) $\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$;

▶ $\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx = \left\{\begin{array}{l} 0\quad 1\quad 3 \\ x-x^3>0 \Leftrightarrow x<1 \\ x\in(0;3) \end{array}\right\} = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_1^3 dx = 1 - 3 + 1 = -1.$ ■

б) $\int\limits_0^2 [e^x]\,dx$; ср. 25.2.2)

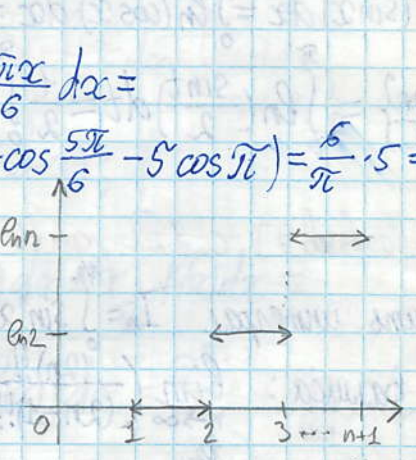
▶ $\int\limits_0^2[e^x]\,dx = \int\limits_{0=\ln 1}^{\ln 2}\underbrace{[e^x]}_{=1}dx + \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\underbrace{[e^x]}_{=2}dx + \ldots + \int\limits_{\ln 7}^{2}\underbrace{[e^x]}_{=7}dx = x\Big|_0^{\ln 2} + 2x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} + \ldots + 7x\Big|_{\ln 7}^{2} = 14 - \ln 7!$ ■

в) $\int\limits_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx$;

▶ $\int\limits_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx = \int\limits_0^1 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx + \ldots + \int\limits_5^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx =$

$= \frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} - 5\cos\pi\right) = \frac{6}{\pi}\cdot 5 = \frac{30}{\pi}$ ■

г) $\int\limits_1^{n+1}\ln[x]\,dx,\quad n\in\mathbb{N}$;



▶ $\int\limits_1^{n+1}\ln[x]\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_k^{k+1}\ln[x]\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln k\int\limits_k^{k+1}dx = \ln n!$ ■

д) $\int\limits_{\{E\}}|\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx$, $\{E\}$ – мн-во тех значений $[0;4\pi]$, для которых подынтегр. ф-ия знач. имеет смысл;

▶ $\int\limits_{\{E\}}|\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx = \int\limits_0^{\pi}|\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx =$ $= 2\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx$ и т.д. периодичн. sin и cos

$\int\cos x\sqrt{\sin x}\,dx = \int\sqrt{\sin x}\,d(\sin x) = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$

$= \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx + \int\limits_{2\pi}^{5\pi/2}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx - \int\limits_{5\pi/2}^{3\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx =$

$= \frac{4}{3}\left(\sin^{3/2}x\Big|_0^{\pi/2} - \sin^{3/2}x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{8}{3}.$ ■

е) $\int\limits_0^{4\pi} x\,\mathrm{sgn}\,(\sin x)\,dx$. ср. ЭК) [Дор 1], с.101, № $\overline{\text{VI}}$.2.16;

▶ $$\int\limits_0^{4\pi} x\,\mathrm{sgn}\,(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\,dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\,dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} x\,dx = -2\pi^2. \quad ■$$

<u>№4.</u> [Д.], №2257;

Доказать, что если $f(x) \in C[0;1]$, то

а) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; ▶ $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt$. ■

б) $\int\limits_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

▶ Р-им $$\int\limits_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(\sin x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} x - \frac{\pi}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t \cdot f\left[\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right] dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \overbrace{t \cdot f(-\cos t)}^{\text{нечётная ф-ия}}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad ■$$

<u>№5.</u> [Д.], №2263; [Избр], с81, №1.22;

Найти следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$;

▶ $$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} x \underbrace{\frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}}_{f(\sin x)}\,dx \overset{№4б}{=} \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \mathrm{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}. \quad ■$$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$. (в элем. ф-иях не берётся.) (вопрос о сх-ти данного интеграла)

▶ $$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx \overset{\text{аналогично №4(а)}}{=} \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx \Rightarrow 2\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} t = 2x \\ dx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt}_{= 2\int \ln(\sin t)\,dt \text{ (т.к. } \sin t \text{ симметр. отн. } \frac{\pi}{2})} - \frac{\pi}{2} \ln 2 \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad ■$$

<u>№6.</u> [Дороговцев 2], с. 222.; ср [Д.], №2281

Вычислить интеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и доказать формулу Валлиса: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$.

▶ $$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(\cos x) = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}; \quad I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1;$$

$$\Rightarrow I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (*)$$

$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$
$\Downarrow$

Далее, поскольку имеют место нер-ва $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, то из формул $(*)$

имеем: $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\dfrac{1}{2n(2n+1)} \Rightarrow \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n}$ $(**)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$$ (из нер-ва $(**)$ и Th о двух эквивалентах). ■

№7. [Кудр II.], с. 97;

Вычислить интеграл Дирихле $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$, $n\in\mathbb{N}$. $\quad \sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\sin x + 2\sin x \sum_{k=1}^{n-1}\cos 2kx = \sin(2n-1)x$

▶ Имеем, $\displaystyle \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos 2kx = \frac{\sin(2n-1)x}{2\sin x} \overset{\int_0^{\pi/2}}{\Rightarrow}$ $\quad \int\cos 2kx\,dx = 0,\ k\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos 2kx\right]dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{2\sin x} \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}.$$ ■

№8. [Кудр II], с. 99.

Д-ть рав-во $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}dt$;

▶ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = \left\{\begin{aligned} x &= \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ dx &= \frac{1}{2\cos^2(t/2)}dt\end{aligned}\right\} \ominus$

$$\ominus \int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t/2)}{\operatorname{tg}(t/2)}\cdot\frac{dt}{2\cos^2 t/2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}dt$$ ■

№9. [С.К.], с. 21, №10 а); [Дороговцев 1], с. 99, № VI 2.2. в) з)

Вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; $\quad$ более общий случай см [Дороговцев 1], с. 99, № VI, 2.3. (№31.10)

▶ $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}\overset{\{x=-x\}}{} + \int_0^1\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_0^1\frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)} + \int_0^1\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} =$$

б) [Физтех], 1993.6.2; $$= \int_0^1\left[\frac{1}{e^{-x}+1} + \frac{1}{e^x+1}\right]\frac{dx}{x^2+1} = \int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$ ■

☆ б) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$, $n\in\mathbb{N}$; $\quad$ №10 [Дор-1], с. 99, № VI. 2.3. Пусть $f(x)\in C[-a;a]$ и чётна. Док, что $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx$;

▶ Док-во аналогично №9.а: разбиваем на 2 интеграла и замена. ■

▶ Обозначим: $f(x) = \dfrac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}$. Имеем $f(x) = f(\pi - x)$;

$$\int_0^{\pi}xf(x)dx = \int_0^{\pi/2}xf(x)dx \overset{x=\pi-x,\ dx=-dx}{+} \int_{\pi/2}^{\pi}xf(x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi}[(\pi-x)+x]f(x)dx = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)dx =$$

$$= \pi\int_{\pi/2}^{3\pi/4}f(x)dx \overset{x=\frac{3\pi}{2}-x}{+} \pi\int_{3\pi/4}^{\pi}f(x)dx = \pi\int_{3\pi/4}^{\pi}\left[f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+f(x)\right]dx = \frac{\pi^2}{4}.$$ ■

№16 [Дор 1], с. 103 № VI 2.31, 32

☆ №17 [Olymp ΠΝC], 2013г. ср. [Olymp. Selected], №5

☆ 2) См. далее.

☆ **№11** [Физтех. Олимп.], с. 20, № 2002.2 $\quad$ ☆ б) [Putnam], 2005 A5; $\quad$ ☆ б) [IMC], 97.1, №1

☆ №12 а) [Дороговцев 1], с. 99, № VI. 2 ...

№9 2) [IMC], 96, №2

а) Зная, что $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$, вычислить $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-x^3)}{x}dx$;

№13 [Кузнецов], с. 116–118: $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}$

▶ Пусть $\displaystyle I_k = \int_0^1\frac{\ln(1-x^k)}{x}dx = \left\{\begin{aligned} y &= x^k \\ \frac{dy}{y} &= \frac{k}{x}dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{ky}\end{aligned}\right\} = \frac{1}{k}\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy \Rightarrow I_k = \frac{1}{k}I_1$

$$I = \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int_0^1\frac{\ln(1-x^2)-\ln(1-x)}{x}dx = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}I_1,\ \text{а}\ I_3 = \frac{1}{3}I_1 = -\frac{2}{3}I = -\frac{\pi^2}{18}$$ ■

☆ №14 [Физтех], 1998.4, №15 [Физтех], 1994.5.1 $\quad$ (27:22)

Занятие 7. (32) Оценки интегралов. Теоремы о среднем.

Опр: $\exists f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$, тогда выраж. $M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ наз-ся средним знач. ф-ии $f(x)$ на $[a;b]$.

Утв: Если $f(x)\in C[a;b]$, то $\exists\,\xi\in(a;b):\ M[f]=f(\xi)$.

Th: (первая Th о среднем)

1) $f(x),\varphi(x)\in\mathcal{R}[a;b]$;
2) $\varphi(x)$ знакопостоянна на $[a;b]$;

$\Rightarrow \exists\,\mu\in[\inf\limits_{[a;b]} f(x);\ \sup\limits_{[a;b]} f(x)]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\cdot\int_a^b\varphi(x)\,dx.$

3) если, дополнительно, $f(x)\in C[a;b]$, то $\exists\,\xi\in[a;b]:\ \mu=f(\xi)$.

Th: (вторая Th о среднем)

1) $f(x),\varphi(x)\in\mathcal{R}[a;b]$;
2) $\varphi(x)$ монот. на $[a;b]$;

$\Rightarrow\exists\,\xi\in[a;b]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$

3) $\varphi(x)\ge0,\ \varphi(x)\searrow\ \Rightarrow\exists\,\xi_1\in[a;b]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^{\xi_1}f(x)\,dx.$

4) $\varphi(x)\ge0,\ \varphi(x)\nearrow\ \Rightarrow\exists\,\xi_2\in[a;b]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_{\xi_2}^b f(x)\,dx.$

№1. [Д], №2316; [Дороговцев1], с. 108, № VI.2.66;

Определить знаки следующих определённых интегралов:

а) $\int_0^{2\pi} x\cdot\sin x\,dx$;

точный ответ $I=-2\pi$

$$\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx\overset{\text{II Th}}{=}\underbrace{0\cdot\int_0^\xi\sin x\,dx}_{\text{не нужно, т.к. } x\uparrow}+2\pi\int_\xi^{2\pi}\sin x\,dx=2\pi(-\cos x)\Big|_\xi^{2\pi}=2\pi(-1+\cos\xi)\le0.$$

б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$;

точный ответ $I\approx1,418$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\overset{\{t=x-\pi\}}{=}\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_0^\pi\frac{\overbrace{\sin(t+\pi)}^{-\sin t}}{t+\pi}\,dt=\int_0^\pi\sin x\left(\frac1x-\frac{1}{x+\pi}\right)dx=$$

$\frac{\sin x}{x}>0,\ x\in(0;\pi)$; $<0,\ x\in(\pi;2\pi)$

$$=\int_0^\pi\sin x\left(\frac1x-\frac1{x+\pi}\right)dx=\pi\int_0^\pi\underbrace{\frac{\sin x}{(x+\pi)x}}_{>0}\,dx\overset{\text{I Th.}}{=}\pi\frac{\sin\xi}{\xi}\int_0^\pi\frac{dx}{x+\pi}=\pi\frac{\overbrace{\sin\xi}^{>0}}{\xi}\cdot(\ln2\pi-\ln\pi)>0$$

в) $\int_{-2}^2 x^3 2^x\,dx;=\int_{-2}^0 x^3 2^x\,dx+\int_0^2 x^3 2^x$;

$$\int_{-2}^0 x^3 2^x\,dx=\left\{\begin{matrix}t=-x\\ dt=-dx\end{matrix}\right\}=-\int_2^0(-t)^3\cdot2^{-t}\,dt=-\int_0^2 t^3\frac{1}{2^t}\,dt$$

$$\Rightarrow\int_{-2}^2x^3 2^x\,dx=\int_0^2x^3\left(2^x-\frac1{2^x}\right)dx>0,\ \text{т.к. } x^3>0,\ 2^x-\frac{1}{2^x}>0 \text{ при } x\in(0;2).$$

2) $\int_0^{2\pi}x^a\sin x\,dx,\ a>0$;

$$\int_0^{2\pi}x^a\sin x\,dx=\int_0^\pi+\int_\pi^{2\pi}\overset{\langle x=\pi+u\rangle}{=}\int_0^\pi x^a\sin x\,dx+\int_0^\pi(\pi+u)^a(-\sin u)\,du=\int_0^\pi(\underbrace{x^a-(\pi+x)^a}_{<0})\underbrace{\sin x}_{\ge0}\,dx<0$$

г) $\int_0^{2\pi}x^{a+1}\cos x\,dx$; $a>0$

$$\int_0^{2\pi}x^{a+1}\cos x\,dx\overset{\text{по частям}}{=}-(a+1)\int_0^{2\pi}x^a\sin x\,dx>0\ \text{(см 2))}$$

№2. [Д], №2317

Определить, какой интеграл больше:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10}x\,dx$ или $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; (половинное интегр. нер-в)

▶ $0<\sin x<1$ при $x\in(0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin^{10}x<\sin^2 x \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{10}x\,dx < \int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx.$ ■

б) $\int\limits_0^1 e^{-x}dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$;

▶ $e^{-x}<e^{-x^2}$ при $x\in(0;1) \Rightarrow \int\limits_0^1 e^{-x}dx < \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx.$ ■

в) $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

▶ $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx = \left\{\begin{matrix} t=x-\pi \\ dt=dx\end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2}\cos^2(t+\pi)\,dt = \int\limits_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2}\cos^2 t\,dt \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx > \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ ■

$e^{-(t+\pi)^2}<e^{-t^2}$

№3. [С.Х.], с.73, №1.; [Д], №2319;

Найти среднее значение ф-ии на заданном сегменте:

а) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ на $[-1;2]$;

▶ $M[f]=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}\operatorname{sgn}x\,dx = -\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0}\operatorname{sgn}x\,dx+\frac{1}{3}\int\limits_0^2 dx=\frac{1}{3}$; В данном случае разр-ая ф-ия $\operatorname{sgn}x$ не принимает на $[-1;2]$ зна[чения] 1/3 ни в какой точке. ■

б) $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi)$ на $[0,2\pi]$;

$\frac{1}{4\pi}\Big[\underbrace{-\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0}+\cos\varphi\cdot 2\pi\Big]$

▶ $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)\,dx=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big[-\cos(2x+\varphi)+\underbrace{\cos(-\varphi)}_{\text{const} = \cos\varphi}\big]\,dx=\frac{\cos\varphi}{2}$ ■

в) $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ на $[0;2]$;

▶ $M[f]=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\frac{2}{e^x+1}dx=\int\limits_0^2 dx-\int\limits_0^2\frac{e^x}{e^x+1}dx=2-\ln|e^x+1|\Big|_0^2=2+\ln\frac{2}{e^2+1}$ ■

$\pm e^x$

г) $f(x)=\frac{p}{1-\varepsilon\cos x}$ на $[0;2\pi]$, $0<\varepsilon<1$ (ср. значение длины фокального радиуса-вектора эллипса)

$\int\limits_0^{\pi}+\int\limits_{\pi}^{2\pi}$ $\{t=2\pi-x\}$

▶ $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos x}dx=\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1-\varepsilon\cos x}=\left\{\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{matrix}\right\}=$

$=\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2\,dt}{(1+t^2)(1-\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2})}=\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2\,dt}{1+t^2+\varepsilon(t^2-1)}=\frac{2p}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)t^2}=\frac{2p}{\pi(1+\varepsilon)}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)^2+t^2}=$

$=\frac{2p}{(1+\varepsilon)\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}}\Big|_0^{\infty}=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$ – малая полуось эллипса. ■

$\frac{\pi}{2}-0$

см. также №31.2 б)

p – фокальный параметр

ε – эксцентриситет

№6. [Д.], №2322.

Пусть $\int\limits_0^x f(t)\,dt = x f(\theta x)$. Найти θ, если:

а) $f(t)=t^n \quad (n>-1)$;

▶ $\int\limits_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\frac{x^n}{n+1} \Rightarrow (\theta x)^n = f(\theta x) = \frac{x^n}{n+1} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ ■

б) $f(t)=\ln t$;

▶ $\int\limits_0^x \ln t\,dt = x(\ln x - 1) \Rightarrow f(\theta x) = \ln(\theta x) = \ln\theta + \ln x = \ln x - 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{e}$ ■

в) $f(t)=e^t$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=?$, $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=?$;

▶ $\int\limits_0^x e^t\,dt = e^x - 1 \Rightarrow e^{\theta x} = f(\theta x) = \frac{e^x-1}{x} \Rightarrow \theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} \overset{\text{Тейлор}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \overset{Л}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}}{1} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x) = 1$. ■

№7. [Д.], №2323, 2324, 2328, 2330, [?]

Пользуясь теоремами о среднем, оценить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$;

▶ $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x} \overset{I^{ая}\,Th}{=} \frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi}$, $\xi\in(0;2\pi)$;

$\frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi} < 4\pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi} - \frac{8\pi}{3} < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\theta$, $|\theta|<1$. ■

б) $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

▶ $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{\xi^9}{\sqrt{1+\xi}} \in \left[0;\frac{1}{\sqrt2}\right]$, $\xi\in[0;1]$; $= \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int\limits_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{10\sqrt{1+\xi}} \in \left[\frac{1}{10\sqrt2};\frac{1}{10}\right]$ Вторая оценка лучше. Точное знач.: ~0,072 ■

в) $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$;

▶ $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\frac{1}{x}\downarrow \text{ на } [100\pi;200\pi],\ II^{ая}\,Th}{=} \frac{1}{100\pi}\int\limits_{100\pi}^{\xi}\sin x\,dx = \frac{1}{100\pi}\left(-\cos x\Big|_{100\pi}^{\xi}\right) = \frac{1}{100\pi}(1-\cos\xi) = \frac{\theta}{50\pi}$, $\theta\in[0;1]$.

$\in\left[0;\frac{1}{50\pi}\right]$

$= \frac{1}{100\pi}\int\limits_{100\pi}^{\xi}\sin x\,dx + \frac{1}{200\pi}\int\limits_{\xi}^{200\pi}\sin x\,dx = \frac{1}{100\pi}(1-\cos\xi) + \frac{1}{200\pi}(\cos\xi - 1) = \frac{1-\cos\xi}{200\pi} = \frac{\theta}{100\pi}$, $\in\left[0;\frac{1}{100\pi}\right]$

$\theta\in[0;1]$. ■

г) $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, $0<a<b$;

▶ $I = \int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \left\{\begin{matrix} x^2=t \\ dx=\frac{dt}{2\sqrt t}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt t}\,dt = \frac{1}{2a}\int\limits_{a^2}^{\xi}\sin t\,dt = \frac{\cos a^2 - \cos\xi}{2a} = \frac{-2\sin\frac{a^2+\xi}{2}\cdot\sin\frac{a^2-\xi}{2}}{2a} \in\left[-\frac{1}{a};\frac{1}{a}\right]$

$\Rightarrow I = \frac{\theta}{a}$, где $|\theta|\le 1$. д) см дальше. ■

№5. [Кудр II], с. 96.; [Дороговцев 1], с. 108, № VI. 2. 64

Доказать следующие нер-ва:

а) $\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}dx < \frac{1}{20}$;

▶ $\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} \overset{x\in[0;1]}{\le} \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} \le x^{19} \overset{\text{интегр. по }[0;1]}{\Longrightarrow} \frac{1}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^{19}dx < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}dx < \int_0^1 x^{19}dx = \frac{1}{20}$ ■

б) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}dx < 1$;

▶ $\frac{2x}{1+x^2} < \frac{2x}{1+x^{13}} < 2x$, $x\in(0,1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \ln 2 = \underbrace{\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx}_{\int_0^1 \frac{dx^2}{1+x^2}} < \int_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}dx < \int_0^1 2x = 1.$ ■

в) $\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{N}$;

▶ $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(0;\frac{1}{2}] \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$ ■

г) $\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \frac{\pi}{4}$;

▶ $e^{\alpha} > 1+\alpha$, $\alpha\ne 0 \Rightarrow e^{-x^2} > 1-x^2$, $e^{x^2} > 1+x^2 \Rightarrow 1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$, $x>0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \int_0^1 (1-x^2)dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ■

д) $\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1)$.

$f_{max} = f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$.

▶ Р-им ф-ию $f(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}$, $x\in[0;1]$, $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{9}$,

$\Rightarrow \frac{4}{9} \le \frac{1}{(x+1)(2-x)} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow \frac{4}{9}(e-1) = \frac{4}{9}\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2}(e-1)$

или I^{ая} Th о средн. ■

№7 [Д.], № 2321, 2233; [Дороговцев 1], с. 109, № VI. 2. 75, VI. 2. 76, VI. 2. 78;

а) Пусть $f(x) \overset{\text{интегр.}}{\in C}[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Рассмотреть пример $f(x) = \operatorname{arctg} x$. (мостик на теорию НИ)

▶ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists b>0:\ \forall x\ge b\quad |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$]\ x>b$, тогда $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\underbrace{\int_0^b f(t)dt}_{=\text{const, т.к. } f(x)\text{ интегрир.}} + \frac{1}{x}\int_b^x f(t)dt = \frac{c}{x} + \frac{f(\xi)}{x}\int_b^x dt = \frac{c}{x} + f(\xi)\left(1-\frac{b}{x}\right)$

$\xi\in(b;x)$, $f(\xi) - f(\xi)\frac{b}{x}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - A\right| = \left|\frac{c}{x} + f(\xi)\left(1-\frac{b}{x}\right) - A\right| \le \underbrace{\frac{|c-f(\xi)b|}{x}}_{\le\frac{\varepsilon}{2}\text{ для дост. больших }x} + \underbrace{|f(\xi)-A|}_{\le\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A$.

$]\ f(x) = \operatorname{arctg} x$; $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt \overset{\text{по частям}}{=} \frac{1}{x}\left[t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]\Big|_0^x =$

$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x$ ■

Применимость правила Лопиталя? см тетр. II в конце.

б) $\exists\, f(x)\in C[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$;

▷ $\int\limits_0^1 f(nx)\,dx = \left\{\begin{matrix} t=nx \\ dx=\frac{dt}{n}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)\,dt.$

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)\,dt = A$ (док-во аналогично пункту а)) ■

в) Пусть $f(x), g(x)\in C[0;+\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot g(x)=b$.
Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)$;

▷ $g(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt = g(x)\cdot x\cdot\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{a} b\cdot a$ ■

г) Привести пример ф-ии $g(x)\in C[0;+\infty)$, для которой сущ-ет предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt$,
но не сущ-ет $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$;

▷ Выберем к/л. периодическую ф-ию. Например, $g(x)=\sin x$.
Ясно, что $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$, но $\frac{1}{x}\int\limits_0^x \sin t\,dt = -\frac{1}{x}\left[\cos t\,\Big|_0^x\right] = \frac{1-\cos x}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. ■

д) $\exists\, f(x), g(x)\in C[0;1]$, причём:
данное усл-е треб-ся для примен. пр-ла Лопит. ($\neq 0$)
1) $\forall x\in[0;1]$ $g(x)>0$; 2) $\lim\limits_{x\to1-0}\int\limits_0^x g(t)\,dt=+\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=a$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\int\limits_0^x f(t)\,dt}{\int\limits_0^x g(t)\,dt}=a$. $\underline{\underline{(*)}}$

$f(x)=g(x)\cdot\overbrace{(a+\alpha(x))}^{const}$

▷ $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=a \Rightarrow f(x)=a\cdot g(x)+\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)\xrightarrow[x\to1-0]{}0 \Rightarrow \int\limits_0^x f(t)\,dt = a\int\limits_0^x g(t)\,dt+\int\limits_0^x \alpha(t)\,dt \xrightarrow[x\to1-0]{} +\infty$. const ??

▷ Далее, применив к пределу $(*)$ II-ое правило Лопиталя (все усл-я выполнены) получаем требуемое ■

№4 [?] см тетр. II.

д) $\int\limits_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx$, $(\alpha\geq0,\ 0<a<b)$

▷ ▷ $\exists\, f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x}\in\mathcal{R}[a;b]$, $g'(x)<0\Rightarrow g(x)\downarrow$, $g(x)\in C$.

$I=\int\limits_a^b\frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx = g(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a}\int\limits_a^\xi \sin x\,dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a}(\cos a-\cos\xi)$, $\xi\in(a;b)$.

$-2\frac{e^{-\alpha a}}{a}\leq\frac{e^{-\alpha a}}{a}\underbrace{(\cos a-\cos\xi)}_{\in[-2;2]}\leq 2\frac{e^{-\alpha a}}{a}.$

▷ Далее, т.к. $\alpha\geq0$, то $e^{-\alpha a}\leq1 \Rightarrow -2\frac{1}{a}\leq I\leq 2\frac{1}{a}\Rightarrow I=\frac{2}{a}\cdot\theta$, где $|\theta|\leq1$.

■

№8 [Д.], №2332; [?] ан тетр II <док-во нер-ва К-Б. ан в конце тетр> добавить ан тетр II

а) $f(x)\in C^1[a;b]$, $f(a)=0$, $M=\sup\limits_{[a;b]}|f(x)|$. Док., что $M^2\le(b-a)\int_a^b[f'(x)]^2dx$

$\left[\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt\right]^2\le\int_a^b f^2(t)dt\cdot\int_a^b g^2(t)dt.$

▷ Из нер-ва К.Б. $\Rightarrow\forall x\in(a;b)$ $\left|\int_a^x f'(t)dt\right|\le\sqrt{\int_a^x(f'(t))^2dt}\cdot\sqrt{\int_a^x dt}\Rightarrow\{f(a)=0\}\ |f(x)|\le\sqrt{\int_a^x(f'(t))^2dt}\cdot\sqrt{x-a}$

$<\sqrt{\int_a^b(f'(t))^2dt}\cdot\sqrt{b-a}\Rightarrow M^2=|f(\tilde{x})|^2<\int_a^b(f'(t))^2dt\cdot(b-a)$, где $\tilde{x}$ – т., в которой достиг. sup.

б) ∃ $f(x)\in C[a;b]$, $\exists M,\delta>0$: $\forall[\alpha;\beta]$ $(a\le\alpha<\beta\le b)$ выполнено: $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le M\cdot|\beta-\alpha|^{1+\delta}$. Док., $f(x)\equiv0$ на $[a;b]$

▶ Выберем шаги $\varepsilon_k>0$ $(k\in\mathbb{N})$: $\varepsilon_k\underset{k\to\infty}{\to}0$ и $\alpha+\varepsilon_k<\beta$. Тогда, по усл. $\left|\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon_k}f(x)dx\right|\le M\cdot\varepsilon_k^{1+\delta}$

$\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon_k}f(x)dx\overset{\text{Th о ср.}}{=}f(\xi_k)\cdot\varepsilon_k$, где $\xi_k\in(\alpha;\alpha+\varepsilon_k)\Rightarrow f(\xi_k)\cdot\varepsilon_k\le M\cdot\varepsilon_k^{\delta+1}\Rightarrow f(\xi_k)\le M\cdot\varepsilon_k^{\delta}\Rightarrow$ $\delta>0$

$\Rightarrow|f(\xi_k)|\underset{k\to\infty}{\to}0\Rightarrow$ т.к. $f(x)\in C$ и $\xi_k\underset{k\to\infty}{\to}\alpha$, имеем, $f(\alpha)=0$. Т.к. α – произвольно, то $f(x)\equiv0$ на $[a;b]$

№9. ф.[Д.], №2326.1; 2326.2; 2333; [Дороговцев 1], с. 112, № VI.2.89;

Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$;

▷ $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^nx\,dx=\int_0^{\pi/2-\delta}\sin^nx\,dx+\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}\sin^nx\,dx=I_n^{(1)}+I_n^{(2)}$, для $\forall\delta>0$.

$\forall n\Rightarrow I_n^{(2)}\le\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}dx=\delta\Rightarrow I_n^{(2)}\to0$ при $n\to\infty$.

$\sin^nx<\sin^{n-1}x$, при $x\in(0;\frac{\pi}{2}-\delta)\Rightarrow I_n^{(1)}<I_{n-1}^{(1)}$. С др. стороны имеем: $I_n^{(1)}>0$ $\forall n\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}I_n^{(1)}=c$

∃ $I_n^{(1)}=c+a_n$, $I_{n-1}^{(1)}=c+b_n$, где $\{a_n\},\{b_n\}$ – б.м. послед. $I_n^{(1)}=\sin\xi_n\cdot I_{n-1}^{(1)}$, $0<\xi_n<\frac{\pi}{2}-\delta\Rightarrow$

$\Rightarrow c+a_n=\sin\xi_n(c+b_n)\Rightarrow c=\frac{a_n-b_n\sin\xi_n}{1-\sin\xi_n}\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow I_n^{(1)}\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow I_n=I_n^{(1)}+I_n^{(2)}\underset{n\to\infty}{\to}0.$ ■

Т.к. $I_n^{(1)}<I_{n-1}^{(1)}$, то $a_n<b_n\Rightarrow\frac{a_n-b_n\sin\xi_n}{1-\sin\xi_n}<\frac{b_n(1-\sin\xi_n)}{1-\sin\xi_n}=b_n\underset{n\to\infty}{\to}0$.

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$, где $a>0,b>0$ и $f(x)\in C[0;1]$;

▶ $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx=f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dx}{x}=f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a}$, где $a\varepsilon\le\xi\le b\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}$. ■

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$, $p>0$;

▶ $I_n=\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{n}\int_n^{\xi_n}\sin x\,dx=\frac{\cos n-\cos\xi_n}{n}$, где $n<\xi_n<n+p$

$\left|\frac{\cos n-\cos\xi_n}{n}\right|\le\frac{2}{n}\Rightarrow|I_n|\le\frac{2}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$ ■

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x}{1+x^5}dx\right)$.

$-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+x)^3}\Big|_n^{n+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{(1+n)^3}-\frac{1}{3}\frac{1}{(n+2)^3}$ $\quad-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\Big|_n^{n+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}-\frac{1}{3}\ldots$

▷ $\frac{1}{(x+1)^4}<\frac{x}{1+x^5}<\frac{1}{x^4}\Rightarrow\int_n^{n+1}\frac{dx}{(x+1)^4}<\int_n^{n+1}\frac{x}{1+x^5}dx<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^4}{3(n+1)^3}-\frac{n^4}{3(n+2)^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^4}{3n^3}-\frac{n^4}{3(n+1)^3}\right]=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x}{1+x^5}dx\right)=1$. ■

№14 [ІНС], 2010.1, N…

№15 [Нехнат. АБЗПРС] 2008.2

№10, №11 [Дороговцев 1], с. 110, № VI.2.81; VI.2.82; №12 [Физтех], 2008-1, №4; №13 [ІНС], 1998.1, №6;