Занятие 5. Монотонная последовательность и её предел.

Опр: Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если для $\forall n \in N$ выполнено:

$x_{n+1} > x_n$, $\{x_n\}$ – возрастающая, $x_n \uparrow$.

$x_{n+1} \geq x_n$, $\{x_n\}$ – неубывающая, $x_n \nearrow$.

$x_{n+1} \leq x_n$, $\{x_n\}$ – невозрастающая, $x_n \searrow$.

$x_{n+1} < x_n$, $\{x_n\}$ – убывающая, $x_n \downarrow$.

Th (Вейерштрасс): Пусть $\{a_n\} \uparrow$ или $\nearrow$ и огр. сверху, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

Пусть $\{a_n\} \downarrow$ или $\searrow$ и огр. снизу, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

№1. [Ф.I], с.72.

Пусть $a>0$. Доказать сх-ть последовательности:

$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}}$, и найти её предел.

$x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$

▶ Заметим, что x_{n+1} получается из x_n по формуле $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$.

ММИ: $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$;] $x_n > x_{n-1} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{a+x_n}}{\sqrt{a+x_{n-1}}} > 1$.

Т.к. $a>0$, то последовательность $\{x_n\}\uparrow$. Докажем, что она ограничена сверху, например, числом $\sqrt{a}+1$. Используем ММИ.

1) $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a}+1$. +

2)] $x_n < \sqrt{a}+1$.

Тогда $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A < \infty$. Для его определения перейдём к пределу в рав-ве: $x_{n+1}^2 = a + x_n$. Имеем, $A^2 = a + A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0 \\ A_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Т.к. интересующий нас предел A не м.б. отрицательным. ■

№2. (среднее арифметико-геометрическое), [Ф.I], с.88.

Пусть даны два положительных числа $a > b$. Положим $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

▶ Из №1.5 следует, что $a_1 > b_1$, в то же время оба они находятся между исходными числами: $a > a_1 > b_1 > b$. Для чисел a_2 и b_2 выполнено: $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$ и т.д. Для a_n и b_n имеем: $a_{n-1} > a_n > b_n > b_{n-1}$.

Т.о. последовательность a_n явл-ся убывающей, а b_n – возрастающей (навстречу одна другой). В то же время: $a > a_n > b_n > b$.

Так что обе последовательности ограничены и, следовательно, обе стремятся к конечным пределам: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

Если в рав-ве $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ перейти к пределу, получаем.

$A = \frac{A+B}{2} \Rightarrow A = B$. Следовательно, обе послед-ти – и ср. арифм. a_n, и ср. геом. b_n – стремятся к общему пределу $\mu = \mu(a,b)$ – среднее арифм.-геометр. ■

Замечание: В данном примере мы не имеем выражение для предела, но, зная, что он $\exists$, легко можем вычислить его с любой степенью точности, т.к. он содержится между последовательностями a_n и b_n (вычисление будет проведено далее во II семестре)

№3. (число e) [Д], №69.

Д послед-ть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\ldots)$ мон. возр. и огр. сверху, а послед-ть $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ мон. убыв. и огр. снизу. Отсюда вывести, что эти послед-ти имеют общий предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

▶ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Б.Н.}}{=} 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$ (*)

$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{n \text{ слагаемых}}$.

Аналогично,

$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{(n+1) \text{ слагаемое}}$.

и прибавл-ся положит. слагаемое

$\Rightarrow \{\text{т.к. } \left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right) \text{ для } \forall k=\overline{1,n}\} \Rightarrow x_n < x_{n+1}$, т.е. $\{x_n\}$ возрастает.

(№1.6)

Далее вспомним, что ранее была доказана ограниченность послед-ти x_n: $x_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Следовательно, данная послед-ть сх-ся. Её предел обозначается числом e. Кроме того, из нашего результата вытекает, что $x_n = (1+1/n)^n$ стремится к e снизу.

Теперь р-им послед-ть $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и изучим отношение:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+1/n)^{n+1}}{(1+1/n-1)^n} = \left(\frac{1+1/n}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \overset{\text{Н.Б.}}{<} \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1$$

Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ убывает.

Далее заметим, что $x_n < y_n$ для $\forall n$ и $0 < y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$ $\quad$ ($\{y_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$ сверху) ■

№4 [Д], №№ 72, 73 $\qquad$ [Кудр I], с. 135

б) см в конце тетр.

Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

а) доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$

[Зорич I], с. 101

▶ Положим, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $s_n = \left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$;

Тогда, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \overset{1-\frac{k}{n}<1}{<} 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} = s_n$

С другой стороны, при любом фиксированном $k < n$, имеем

$e_k < e \iff 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = e_n$

При $n\to\infty$ левая часть этого нер-ва стремится к s_k, а правая к e, поэтому мы можем заключить, что $s_k \le e$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. Но тогда из соотношения $e_n < s_n \le e$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$. ■

Замечание: Последовательность $\{s_n\} = 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ сх-ся к числу e гораздо быстрее последовательности $\{e_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, и поэтому применима к вычислениям существенно лучше. Например, $e - s_5 = 0{,}0016$; $e - e_5 = 0{,}2299$.

б) вывести формулу $e = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}$, где $0<\theta_n<1$.

▶ Оценим разность $e - s_n$:

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!\,(n+1)^2} \overset{\frac{n+2}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{n^2+2n+1}<\frac{1}{n}}{<} \frac{1}{n!\,n}$$

т.е. нами получено: $0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}$. Обозначая $\theta_n = \frac{e-s_n}{\frac{1}{n!\,n}}$, $0<\theta_n<1$, получаем требуемое. ■

[Изобр.], с. 32, № 3.21 а), б)

в) Доказать, что число e иррационально.

▶ Предположим, что e рационально, тогда $e = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Значит число $n!\cdot e$ должно быть целым, а вместе с тем

$$n!\cdot e = n!\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\cdot n}\right) = \underbrace{2\cdot n! + \frac{n!}{2!}+\ldots+1}_{\in\mathbb{Z}} + \frac{\theta_n}{n}$$ и тогда

число $\frac{\theta_n}{n}$ тоже должно быть целым, что невозможно. ■

Замечание: Отметим, что число e не только иррационально, но даже трансцендентно (число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэф.)

д) ◀ $Ae^2+Be+C \ne 0$, если $A,B,C\in\mathbb{Z}$, $A^2+B^2+C^2>0$ ▶ $\exists\, Ae^2+Be+C=0 \iff Ae+Ce^{-1} = -B \in \mathbb{Z}$, что невозможно при $A^2+C^2>0$

см. также [ФII], с. 146–148; [Решетняк, I, 2], с. 147 ■

№5 [Д], № 70.

Доказать, что $0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$

▶ Из №3 имеем $0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$ ■

ср. с № 5.3

№6 [Д], № 71.

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$, и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность стремящаяся к $-\infty$ $\quad (p_n, q_n \notin [-1, 0])$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$.

▶ $\exists\, \{n_k\}$ – произвольная послед. натуральных чисел, стремящаяся к $+\infty$ при $k\to+\infty$. Тогда из нер-ва $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ $\forall \varepsilon>0$, следует, что

$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$ при $n_k > N(\varepsilon)$, т.е. $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$.

Если $\{p_k\}$ – произвольная послед.-ть, стремящаяся к $+\infty$ при $k\to\infty$, то по Th Архимеда $\exists$ послед. натур. чисел $\{n_k\}$, что $n_k \le p_k \le n_k+1$ и $\{n_k\} \to +\infty$.

Имеем $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \le \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \iff \frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} = e$

Далее, $\exists\, \{q_k\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Положим $q_k = -\gamma_k$, имеем

$\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{q_k} = \left(1-\frac{1}{\gamma_k}\right)^{-\gamma_k} = \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_k-1}\right)^{\gamma_k} = \left(1+\frac{1}{\gamma_k-1}\right)^{\gamma_k-1}\left(1+\frac{1}{\gamma_k-1}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e.$ ■

№7. [Д], №74, 75 а) б).

Доказать неравенства: а) $\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{①}{<} n! \overset{②}{<} e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

▶ ①: 1) $n=1 \Leftrightarrow \frac{1}{e}<1$ (+)

2) Пусть $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n! \Leftrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n(n+1)<(n+1)!$

$\left(\frac{n}{e}\right)^n(n+1) = \left(\frac{n}{e}\right)^n(n+1)\cdot\frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n(n+1)\frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = e\cdot\left(1+\frac1n\right)^{-n}\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ ($\frac1e$, см №3)

$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}<(n+1)!$ др. реш. см в №1.14 (лучше)

②: из №1.11 $\Rightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n\cdot\frac{e\left(\frac n2\right)^n}{e\left(\frac n2\right)^n} = e\left(\frac n2\right)^n\left(1+\frac1n\right)^n\frac1e < e\left(\frac n2\right)^n$ ■

б) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac1n\right)<\frac1n$, где $n\in\mathbb N$.

в) $\left(1+\frac1n\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$

▶ Пусть $a_1=1$; $a_2=\ldots=a_n=a_{n+1}=\frac{n-1}{n}$; $A_n>G_n \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(1+\frac1n\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ ■

▶ из №3 $\Rightarrow \left(1+\frac1n\right)^n<e<\left(1+\frac1n\right)^{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac1n\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac1n\right) \Leftrightarrow n<\frac{1}{\ln(1+1/n)}<n+1 \Leftrightarrow$ б) ■

2) $1+\alpha<e^\alpha$, где $\alpha\in\mathbb R$, $\alpha\neq0$. (при $\alpha=0$ имеем $=$)

▶ Для начала заметим, что при $\alpha\le-1$ нер-во в) очевидно, т.к. $e^\alpha>0$.

1) Покажем, что справедливы нер-ва $\frac{\alpha'}{1+\alpha'}<\ln(1+\alpha')<\alpha'$, где $\alpha'=\frac mn\in\mathbb Q$, $\alpha'\neq0$.

•) Пусть $\alpha'>0$

$\ln(1+\alpha')=\ln\left(1+\frac mn\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n+m}{n+m-1}\right)=\ln\left(1+\frac1n\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right) \overset{\text{пункт б)}}{<} \frac1n+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+m-1}<\frac mn=\alpha'$

С другой стороны $\ln(1+\alpha')>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}>\frac{m}{n+m}=\frac{m/n}{1+m/n}=\frac{\alpha'}{1+\alpha'}$.

••) Пусть $-1<\alpha'<0 \Rightarrow$ берём $-\beta'=\alpha'$, $0<\beta'<1$.

Имеем, $\ln(1+\alpha')=\ln(1-\beta')=-\ln\frac{1}{1-\beta'}=-\ln\left(1+\frac{\beta'}{1-\beta'}\right) \overset{a)\cdot(-1)}{\Longrightarrow} -\frac{\beta'}{1-\beta'}<-\ln\left(1+\frac{\beta'}{1-\beta'}\right)<-\frac{\beta'/(1-\beta')}{1+\beta'/(1-\beta')}$

$\Rightarrow -\frac{\beta'}{1-\beta'}<-\ln\left(1+\frac{\beta'}{1-\beta'}\right)<-\beta' \overset{\alpha'=-\beta'}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha'}{1+\alpha'}<\ln(1+\alpha')<\alpha'$

2) Далее, пусть $\alpha\in\mathbb R$, $0\neq\alpha>-1$. Выберем $\alpha'\in\mathbb Q$, $0\neq\alpha'>-1$: $\alpha'>\alpha$.

Имеем, $\ln(1+\alpha)\overset{\alpha<\alpha'}{<}\ln(1+\alpha')=\ln\left(\frac{\alpha'+2}{2}\cdot\frac{2(\alpha'+1)}{\alpha'+2}\right)=\ln\left(\frac{\alpha'+2}{2}\right)+\ln\left(\frac{2\alpha'+2}{\alpha'+2}\right)=\ln\left(1+\frac{\alpha'}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha'+2}\right)<\underbrace{\frac{\alpha'}{2}+\frac{\alpha'}{\alpha'+2}}_{M(\alpha')}$

Т.к. $M(\alpha')-\alpha'=\frac{\alpha'}{\alpha'+2}-\frac{\alpha'}{2}=\frac{-\alpha'^2}{2(\alpha'+2)}<0 \Rightarrow M(\alpha')<\alpha'$ и можно найти $\alpha'\in\mathbb Q$: выполняется нер-ва $M(\alpha')<\alpha<\alpha'$. Действительно, требуется решить нер-во $\alpha>M(\alpha')=\frac{\alpha'}{2}+\frac{\alpha'}{\alpha'+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha')^2+\alpha'(4-2\alpha)-4\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha'\in\left((\alpha-2)-\sqrt{\alpha^2+4};\ (\alpha-2)+\sqrt{\alpha^2+4}\right)$, но α' также $>\alpha$.

Следовательно, берём α' из интервала $\left(\alpha;\ (\alpha-2)+\sqrt{\alpha^2+4}\right)$. ■

№8. [Д], №№ 79, 80.

Доказать сх-ть следующих последовательностей:

а) $x_n=\left(1-\frac12\right)\left(1-\frac14\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1 \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$. Данная послед. огр. снизу числом 0. ■

$(1+1/2^n)$ похоже на выражение из №7б)

б) $x_n=\left(1+\frac12\right)\left(1+\frac14\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$;

▶ $\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1 \Rightarrow x_n\uparrow$.

$\ln x_n=\ln\left(\left(1+\frac12\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right)=\ln\left(1+\frac12\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\overset{№7б)}{<}\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac12+\frac14+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1/2}{1-1/2}=1$.

$\Rightarrow \ln x_n<1 \Leftrightarrow x_n<e$ — огр. сверху $\Rightarrow \{x_n\}\to$ ■

Ограниченность $\{x_n\}$ м.б. показана так: $\frac12\cdot x_n=\left(1-\frac12\right)\left(1+\frac12\right)\left(1+\frac14\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow x_n=2-\frac{1}{2^n}<2$.

№9. [Д], №90

Д-ть, что мон. послед будет сх-ся, если сх-ся некоторая её п/п.

▶ Требуется д-ть огр. послед $\{x_n\}$. Действительно, пусть $\{x_{n_k}\}$ — п/п $\{x_n\}$, и $\{x_{n_k}\}\to \Rightarrow$ (т.к. x_{n_k} — монот.) $\Rightarrow \{x_{n_k}\}$ — огр. $\Rightarrow \{x_n\}$ — огр., т.к. в неогр. монотонной послед. только конечное* число членов будет огр. const, которая огр. $\{x_{n_k}\}$ ■

№10 [Дор 1], с.34, №II.2.14; №11 [Дор 1], с.35, №II.2.21; с.34, №II.2.30

см №8.12

☆ №12. [Избр.], с.35, №1.17.

Пусть $p>1$ и $x_n=\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\ldots+\sqrt[p]{1}}}$ (n корней). Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сх-ся к положительному корню ур-я $x^p-x-1=0$.

▶ Ясно, что $\{x_n\}\uparrow$. Докажем её ограниченность сверху.

$x_n=\sqrt[p]{1+x_{n-1}}<\{x_{n-1}<x_n\}<\sqrt[p]{1+x_n}<\{x_n>1\}<\sqrt[p]{2x_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n<\sqrt[p]{2x_n} \Leftrightarrow x_n^{p-1}<2 \Rightarrow x_n<2^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \{x_n\}$ — огр. $\Rightarrow \{x_n\}$ сх-ся.

Перейдём к пределу при $n\to\infty$ в рекуррентном соотношении:

$x_{n+1}=\sqrt[p]{1+x_n}$. Обозначив предел $\{x_n\}$ через x, получим:

$x=\sqrt[p]{1+x} \Leftrightarrow x^p-x-1=0$

Т.к. $x_n>0$ для $\forall n$, то и $x>0$, а следовательно $\{x_n\}$ сх-ся к положительному корню ур-я $x^p-x-1=0$. ■

см. [IMC], 2003, №1; №16 [Mehmet,3], с.4, [Olymp CMC], 2013г.

☆ №15 [Дор 1], с.32, №II.2.4 ■ см [i. expr]

☆ №14 [Дор 1], с.33, №II.2.9; [Квант 77].

☆ №13 [Ляшко], с.100, №1.107 см тетр с/с.

Пусть $x_n=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+n\sqrt{1+n}}}}$ ◁ сущ-ет предел $\lim x_n$, и найдите этот предел.

4:7

10:12

Занятие 6. Критерий Коши существования предела последовательности.

Опр: последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна, если
$\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$

Th (критерий Коши) (критерий Больцано-Коши): $\{x_n\} \to \iff \{x_n\}$ — фундаментальна.

Замечание: критерий Коши можно переформулировать так: числовая послед. сх-ся т. и т.т., когда её значения безгранично сближаются между собой по мере возрастания их номеров. То есть числ. послед. не может „попасть" в ε-трубку с „несближившимися" членами. И, наоборот, если числ. послед. „попала" в ε-трубку, то её члены заведомо сблизились между собой.

Отрицание критерия Коши: (не всегда требуется д-ть, что ч.п. сх-ся)
$\exists \varepsilon>0: \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N} \quad |x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon.$
$\exists \varepsilon>0: \forall n \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N}: |x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon$ (найдётся такой член, который выйдет из ε-трубки)

№1. [Д.], № 82, 84, 85

Пользуясь К.К., доказать сх-ть следующих последовательностей:

а) $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M$, $k=0,1,2,\ldots$ и $|q|<1$.

для $\forall \varepsilon>0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, имеем:

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k q^k\right| < M \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} q^k\right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |q|^k \leq M \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |q^k| =$$
$$= M \frac{|q|^{n+1}}{1-q} < \varepsilon, \text{ для } \forall n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{M}}{\ln |q|} - 1\right] + 1. \ \blacksquare$$

б) $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

для $\forall \varepsilon>0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, имеем:

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

ср. [КудрI], с. 134;
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ для } \forall n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$$

в) $x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1-1/3^p}{1-1/3} < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

$\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, для $\forall n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 3}\right] + 1$. $\blacksquare$

г) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right| < \left\{\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right\} < \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots - \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$
$N(\varepsilon) = [\frac{1}{n}] + 1$. $\blacksquare$

[Кудр I], с. 153, № 143, 4)
д) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$. $|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ $\blacksquare$

е) [Свирид. Фёд.], с. 47.; см. также [Зорич I], с. 84; (убрал, т.к. $\exists$ № 6.9)

№2 [Дороговцев, I], с. 41, № II.3.23; ср. [Д], № 83

Предположим, что для послед-ти $\{a_n\}$ справедливы нер-ва $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}, n \geq 1$.
Доказать, что послед-ть $\{a_n\}$ сх-ся.

для $\forall \varepsilon>0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, имеем:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \leq$$
$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^{n+p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \text{ при } n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 2} + 1\right] + 1.$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ — фундаментальная $\Rightarrow \{a_n\}$ — сх-ся. $\blacksquare$

№3 [А]

Используя К.К., доказать расходимость следующих последовательностей:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; (частичная сумма гармонического ряда)

$\exists \varepsilon>0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N}: \ |x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon$

$$|x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \{p=n\} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \overset{\frac{1}{2n}\text{ — самое маленькое слагаемое}}{>} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \ \blacksquare$$

б) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$.

$$|x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\ln k} > \frac{p}{\ln(n+p)} \overset{\ln \alpha < \alpha,\ \alpha>0}{>} \frac{p}{n+p} = \{p=n\} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon \ \blacksquare$$

в) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k}\right]$. (см. к/р 1) 2) [Кудр I], с. 153, № 147, 9);

№4 [Д], № 92

Если $\{x_n\} \to a$, то что можно сказать о пределе $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

1) Пусть $a \neq 0$. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1$.

Используя К.К.:
$\Delta \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right| = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right|$. Т.к. $\{x_n\} \to$, то $\forall \varepsilon>0, \forall n \geq N(\varepsilon), p=1 \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| < \varepsilon'$
x_n — фиксир., $\neq 0$

2) $a=0$. Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

$x_n^{(1)} = q^n$, $q \neq 0$, $|q|<1$: $\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q \in (-1,1) \setminus \{0\}$; $x_n^{(2)} = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; $x_n^{(3)} = \frac{(-1)^n}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

$x_n^{(4)} = \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots, \frac{1}{(2n-1)!}, \frac{1}{(2n)!}, \ldots$: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}^{(4)}}{x_{2n-1}^{(4)}} = \frac{1/2n}{1/(2n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$; $\frac{x_{2n+1}^{(4)}}{x_{2n}^{(4)}} = \frac{2n}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \nexists \lim$

Другой пример можно получить, построив послед-ть: $x_n^{(6)} = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n^{(5)} = \{q_1, q_2, q_1^2, q_2^2, \dots, q_1^n, q_2^n, \dots\}$, $|q| < 1$. $\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(5)} = 0$; $\frac{x_{2n}^{(5)}}{x_{2n-1}^{(5)}} = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n$; $\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{q_1^{n+1}}{q_2^n} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

От противного можно д-ть, что $\nexists \{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. (на дом)

№5 [Д], №86

Опр: Последовательность $\{x_n\}$ имеет ограниченное изменение, если

$\exists C > 0: |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \dots)$

а) Д-ть, что последовательность с ограниченным изменением сх-ся.

▶ Р-им послед. $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}|$. Ясно, что $\{y_n\}$ – монотонно возрастает и огр. сверху $\Rightarrow \{y_n\} \to \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}\ |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$.

С др. стороны $|y_{n+p} - y_n| = |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \geq$

$\geq |x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \dots + x_{n+p} - x_{n+p-1}| = |x_{n+p} - x_n|$

$\Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall p \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \{x_n\}$ – сходится. ■

б) Привести пример сх-ся послед-ти, не имеющей огр. изменения.

см [А]

▶ Таким примером яв-ся последовательность $x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n}$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, однако $\{x_n\}$ не имеет огр. изменения

при $\forall M > 0$ нер-во $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{2n} - x_{2n-1}| = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2n-1} >$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) =$

$= \ln(n+1) > M$ при $n \geq [e^M - 1] + 1$ ■

в) [Кудр. I], с. 166, №270 з)

№6. [Дороговцев 1], с. 41, №II 3.24

Предположим, что для послед. $\{a_n\}$ сущ-ет $\alpha \in (0,1)$: $|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}|$, $n \geq 2$.

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сх-ся.

▶

для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, имеем:

$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq \alpha^{n+p-2} |a_2 - a_1| + \alpha^{n+p-3} |a_2 - a_1| + \dots + \alpha^{n-1} |a_2 - a_1| =$

$= |a_2 - a_1| (\alpha^{n-1} + \dots + \alpha^{n+p-2}) < |a_2 - a_1| (\alpha^{n-1} + \dots + \alpha^{n+p-2} + \dots) = |a_2 - a_1| \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} < \varepsilon$,

можно д-ть и то, что у послед. $\{a_n\}$ огр. изменение $\Rightarrow \{a_n\}$ сх-ся.

при $n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|a_2 - a_1|}}{\ln \alpha} + 1\right] + 1$ ■

№7. [Сад. Подк], с. 12, №49.

Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где $n \in \mathbb{N}$?

▶ Предположим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$. Тогда по к.к. $\sin(n+2) - \sin n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

но $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1) \Rightarrow \cos n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

т.к. $\{\sin 2n\}$ – п/п $\{\sin n\}$, а если $\exists \lim$, то все п/п должны сх-ся к этому пределу.

Далее, $\sin 2n = 2 \sin n \cdot \cos n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sin n \to 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, что невозможно в силу $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ ■

№8. [Шиб.], с. 16.; ср. [Дороговцев 1], с 41, №II.3.25

~~Займём~~ Ослабим критерий **Коши, потребовав** выполнение нер-ва $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ не для произвольного $p \in \mathbb{N}$, а лишь для некоторого фиксированного $p \in \mathbb{N}$.

Можно ли утверждать сх-ть послед-ти, удовлетворяющей новому критерию?

Переформулировав вопрос можно спросить, сх-ся ли послед, для которой абс. величина разности её членов, с номерами, отличающимися на константу, стремится к нулю при стремлении их номеров к бесконечности.

▶ Контрпример. Р-им последовательность $\{x_n\} = \{\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n, \dots\}$.

$|x_{n+p} - x_n| = \ln(n+p) - \ln n = \ln \frac{n+p}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при фиксир. $p \in \mathbb{N}$.

Отсюда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)$, $p \in \mathbb{N}$ – фиксир. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Однако понятно, что послед-ть $\{x_n\}$ – расх-ся ввиду неогр. возрастания ф-ии $\ln n$ при $n \to \infty$. ■

№9. [Дор. 2], с.77 (добавить)

№10. [Рудин], с. 71

☆ (док-во, используя к.к.)

а) Предположим, что $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$. Д-ть, что послед. $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ сх-ся т. и т.т., когда сх-ся послед. $y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$;

▶ Т.к. послед-ти x_n и y_n не убывают, достаточно установить их огр.

Пусть $y_n \to \Rightarrow y_n$ – огр. $x_n = a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_n + \dots + a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1} =$ ($2^{n+1} - 1 > n$)

$= a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + \underbrace{(a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1})}_{2^n} \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n} = y_n \Rightarrow x_n \leq y_n$ для $\forall n$.

Далее, пусть $x_n \to \overset{x_n\text{-фунд.}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}\quad |x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ (*)

Докажем, что $|2^{n+1} \cdot a_{2^{n+1}} + \dots + 2^{n+p'} \cdot a_{2^{n+p'}}| < \varepsilon'$, т.е. $|2a_{2^{n+1}} + \dots + 2^{p'} a_{2^{n+p'}}| < \frac{\varepsilon'}{2^n}$.

Выберем p в нер-ве (*), такое, что $p + n = 2^{n+p'}$ (это всегда можно, т.к. p – произвольно)

Используем нер-ва: $2a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n} + a_{2^n+1}$; $4a_{2^{n+2}} \leq a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1} + a_{2^{n+1}+2} + a_{2^{n+1}+3}$;

$8a_{2^{n+3}} \leq a_{2^{n+2}} + a_{2^{n+2}+1} + \dots + a_{2^{n+2}+7}$; ...; $2^{p'} a_{2^{n+p'}} \leq a_{2^{n+p'-1}} + a_{2^{n+p'-1}+1} + \dots + a_{2^{n+p'}-1}$.

Следовательно, $|2a_{2^{n+1}}+\ldots+2^{p'}a_{2^{n+p'}}| \le |a_{2^n}+\ldots+a_{2^{n+p'}-1}| \le |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2^n}$, $\quad n+1\le 2^n$

т.е. послед. y_n – сходится по К.К. ■

<u>Замечание:</u> поразительная особенность данного утверждения состоит в том, что довольно „редкая" п/п последовательности $\{x_n\}$ определяет её сходимость или расходимость.

II способ. см. [Рудин].

▶ Пусть $x_n \to \Rightarrow x_n$ – огр. Возьмём $n > 2^k$, тогда

$$x_n \ge a_1+a_2+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2^{k-1}+1}+\ldots+a_{2^k}) \ge \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\ldots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}y_k$$

$\Rightarrow \underbrace{2x_n \ge y_k}_{\text{что } x_n \le y_n \text{ доказано ранее}}$ для $\forall k$ найдётся такое $n\in\mathbb{N}$, т.е. послед-ти $\{x_n\}$ и $\{y_k\}$ или обе ограничены, или обе не ограничены ■

б) Доказать, что послед. $x_n = 1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}$ сх-ся при $p>1$ т. и т.т., когда $p>1$.

▶ $x_n = 1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p} \to \overset{a)}{\Leftrightarrow} y_n = 1+2\cdot\frac{1}{2^p}+4\frac{1}{(2^2)^p}+\ldots+2^n\frac{1}{(2^n)^p} \to$

Но последовательность $y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2^{k(1-p)}$ яв-ся при $n\to\infty$ бесконечно убывающей геом. прогрессией, поэтому, она сх-ся т. и т.т., когда $2^{(1-p)}<1$, т.е. при $1-p<0 \Leftrightarrow p>1$. ■

в) Доказать, что послед. $x_n = \frac{1}{2(\ln 2)^p}+\frac{1}{3(\ln 3)^p}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^p}$ сх-ся т. и т.т., когда $p>1$.

▶ $x_n \to \overset{a)}{\Leftrightarrow} y_n = 2\frac{1}{2(\ln 2)^p}+4\cdot\frac{1}{4(\ln 4)^p}+\ldots+2^n\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} \to$,

но $y_n = \frac{1}{(\ln 2)^p}+\frac{1}{(\ln 4)^p}+\ldots+\frac{1}{(\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p}\cdot\left(1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}\right) \to \overset{\text{из пункта а)}}{\Leftrightarrow} p>1$ ■

<u>№10</u> (<u>теорема Штольца</u>) [И.П.], с.89; [ФI], с.67.

Пусть $\{y_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, причём $\exists N$: для $\forall n\ge N$ выполнено $y_{n+1}>y_n$. Кроме того, пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ (конечный или бесконечный, но одного знака). Д-ть, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

▶] $\exists \lim \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = a<\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n\ge N(\varepsilon)$ $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2} \overset{\forall n\ge N(\varepsilon)}{\Rightarrow} a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}, \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ldots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $x_n-x_N=(x_n-x_{n-1})+\ldots+(x_{N+1}-x_N)\in\left(\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_{n-1}+\ldots+y_{N+1}-y_N);\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(-\text{''}-)\right)=$

$=\left(\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_N);\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_N)\right)\Rightarrow$

т.к. $y_{n+1}-y_n>0$ для $\forall n\ge N$.

$\Rightarrow a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<a+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, т.к. $\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_N-ay_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)$, то

$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ (т.к. (x_N-ay_N) – фиксир., а $y_n\to+\infty$)

для $\forall\varepsilon>0\ \exists\tilde{N}(\varepsilon)$: $\forall n\ge\tilde{N}(\varepsilon)$.

Случай бесконечного предела просто приводится к рассмотренному случаю переворачиванием дроби, т.к. в данном случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0=\lim\frac{y_n}{x_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\pm\infty$ ■

<вставить Th Коши> см [И.П. I], с. 95

<u>№11</u> [ФI], с.83; [A], с.60, №118; [Дороговцев 87], с.226

Найти следующие пределы, используя Th Штольца:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$;

▶] $x_n=1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}$; $y_n=n$. Тогда по Th Ш. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ■

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, где $k\in\mathbb{N}$;

▶] $x_n=1^k+2^k+\ldots+n^k$, $y_n=n^{k+1}$. Тогда по Th Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}\overset{\text{б.Н.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k\ldots}=\frac{1}{k+1}$$ ■

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)$; где $k\in\mathbb{N}$;

2) [Дор. 1], с.27, №II.1.28, 3)
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;
▶ $x_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
$y_n=\sqrt{n}$
$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}(n-n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$ ■

▶] $S_n=\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)=\frac{\overbrace{(k+1)(1^k+2^k+\ldots+n^k)-n^{k+1}}^{x_n}}{\underbrace{(k+1)\cdot n^k}_{y_n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\ldots}{(k+1)\cdot k\cdot n^{k-1}+\ldots}=\frac{1}{2}$$ ■

☆ <u>№12</u> [Дороговцев 87], с.226.

Пусть $a_1=1$ и $a_{n+1}=a_n(1+|\sin a_n|)^{-1}$, $n\ge1$; Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=?$

☆ №13 [Дор 1], с.28, №II.1.32.
☆ №14 [Дор 1], с.30, №II.1.95

▶ $(1+|\sin a_n|)^{-1}\le1\Rightarrow 0<a_{n+1}\le a_n$, $n\ge1 \overset{\text{Th о мон. послед.}}{\Longrightarrow} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\to a\ge0$

Для данного предела a с использованием непр-ти имеем рав-во:

$a=a(1+|\sin a|)^{-1}\Leftrightarrow 1+|\sin a|=1\Leftrightarrow|\sin a|=0\Leftrightarrow a=0$. $\quad 0\le a_n<1,\ n>1$

Далее имеем: $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1+|\sin a_{n-1}|}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{|\sin a_{n-1}|}{a_{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\Rightarrow$ по Th Штольца: $\quad x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}\right)$, $y_n=n$.

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}\right)=\frac{1}{na_n}-\frac{1}{na_1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=1$. ■

8:3
24:5

Занятие 7. Предельные точки последовательности и множества. Верхние и нижние пределы последовательности

(добавить несколько задач)

Опр: Число ξ (или символ ∞) называется частичным пределом послед-ти $\{x_n\}$, если $\exists$ п/п $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Опр: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ – верхний предел послед-ти $\{x_n\}$ (наибольший частичный предел).
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ – нижний предел послед-ти $\{x_n\}$ (наименьший частичный предел).

Th (принцип Больцано-Вейерштрасса):
Если послед-ть огр., то у неё есть хотя бы один конечный частичный предел.

Th: Рав-во $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ явл-ся н. и д. условием существования предела (конечного или бесконечного) послед-ти $\{x_n\}$.

№1 [Д], №№ 101–106

Для послед-ти $\{x_n\}$ найти $\inf\limits_n x_n$, $\sup\limits_n x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, если:

а) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$;

$\blacktriangleright$ $\inf\limits_n x_n = x_1 = 0$; $\sup\limits_n x_n = x_\infty = 1$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ (т.к. послед. сх-ся). $\blacksquare$

б) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$;

$\blacktriangleright$
$x_{2k+1} = 2 + \frac{3}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2 = \overline{\lim} x_n$;
$x_{2k} = -2 - \frac{3}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} -2 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
Других частичных пределов у послед-ти $\{x_n\}$ нет.
$\inf\limits_n x_n = x_2 = -3{,}5$; $\sup\limits_n x_n = x_1 = 5$. $\blacksquare$

в) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;

$\blacktriangleright$
$x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} + 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
$x_{2k} = \frac{1}{2k} + 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
$\inf\limits_n x_n = x_1 = -1$; $\sup\limits_n x_n = x_2 = 1{,}5$; $\blacksquare$

г) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos\frac{\pi n}{2}$;

$\blacktriangleright$
$x_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $\quad x_{4k+1} = 1$;
$x_{4k+2} = 1 - \frac{4k+2}{4k+3} \to 0 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $\quad x_{4k+3} = 1$;
$\sup\limits_n x_n = 2$; $\inf\limits_n x_n = 0$; $\blacksquare$

д) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

$\blacktriangleright$
$x_{4k} = 2$; $x_{4k+1} = 6 = \sup\limits_n x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
$x_{4k+2} = -4 = \inf\limits_n x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $x_{4k+3} = 0$; $\blacksquare$

е) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos\frac{2\pi n}{3}$;

$\blacktriangleright$
$x_{3k} = \frac{3k-1}{3k+1} \cdot \underbrace{\cos 2\pi k}_{1} = \frac{3k-1}{3k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 = \sup\limits_n x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
$x_{3k+1} = \frac{3k}{3k+2} \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3k}{3k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2} = \inf\limits_n x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$
$x_{3k+2} = \frac{3k+1}{3k+3} \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3k+1}{3k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2}$ $\blacksquare$

ж) $x_n = (-1)^n n$

$\blacktriangleright$
$x_{2n} = n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup\limits_n x_n = +\infty$;
$x_{2n+1} = -n \Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf\limits_n x_n = -\infty$ $\blacksquare$

Замечание: Под $\sup\limits_n x_n$ ($\inf\limits_n x_n$) понимается наибольший (наименьший) член послед. $\{x_n\}$.

№ 2. [Д], № 112, 114

Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, если:

а) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\frac{\pi n}{4}$;

$\blacktriangleright$
$\max\limits_{n=2k} \sin\frac{\pi n}{4} \overset{n=8k+2}{=} \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\min\limits_{n=2k+1} \sin\frac{\pi n}{4} \overset{n=8k+5}{=} \sin\left(2\pi k + \frac{5\pi}{4}\right) \overset{n=8k+7}{=} \sin\left(2\pi k + \frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = e + 1$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\blacksquare$

[ВОСI], с.84, №135 в), г)

в) $x_n = \left(1 + \sin\frac{\pi n}{4}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi n}{6}\right)$.

$\blacktriangleright$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overset{n=18+24k}{=} 4$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$. $n = 24k,\ 6+24k,\ 12+24k,\ 14+24k,\ 22+24k$; $\blacksquare$

г) $x_n = n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ (см. №5.7)

$\blacktriangleright$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$ $\blacksquare$

б) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$;

$\blacktriangleright$
$x_{2k} = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;
$x_{2k+1} = \sqrt[2k+1]{1 + 2^{-(2k+1)}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $\blacksquare$

№4 [Шиб.], с. 14–15. №3 [Дор.2], с.72

Построить последовательность, частичные пределы которой –

а) все целые числа;

▶ Такой последовательностью будет следующая:

$x_n = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 2, -2, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Любое целое число встречается в ней бесконечное число раз. ■

б) все числа из отрезка $[0;1]$;

▶ Р-им последоват-ть, построенную из конечных десятичных дробей:

$x_n = \{0,1; 0,2; \dots; 0,9; 0,01; 0,02; \dots; 0,99; 0,001; 0,002; \dots; 0,999; \dots\}$.

Докажем, что x_n содержит п/п, имеющие своим пределом любое заданное действит. число на отрезке $[0;1]$. Действительно, послед-ть x_n составлена из следующих др. за др. серий: записаны все меньшие 1 десятые доли, сотые доли, тысячные и т.д. Р-им $\forall a \in (0,1)$. В серии с номером m $\left(\frac{1}{10^m}, \frac{2}{10^m}, \dots, \frac{10^m-1}{10^m}\right)$ найдётся такое число $k \in \mathbb{N}$, $k < 10^m$, для которого $\left|a - \frac{k}{10^m}\right| < \frac{1}{10^m}$.

(заметим также, что каждая последующая серия содержит все числа предыд. серии)

Выписывая из послед. серий с номерами m $(m=1,2,\dots)$ члены послед. x_n, которые отличаются от числа a по абс. величине не более, чем на $\frac{1}{10^m}$, получим послед., сх-ся к числу a.

К числу 0 сх-ся п/послед. $\{0,1; 0,01; 0,001; \dots\}$. К числу 1: $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$ ■

др. примером будет послед.: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots\}$ см [АI], с.53 №99.

в) все действит. числа;

▶ Обобщим послед. из пункта б), а именно запишем послед-ть:

$x_n = \{0,1; 0,2; \dots; 0,9; 0,01; 0,02; \dots; 1,99; 0,001; 0,002; \dots; 2,999; \dots\}$

Первая серия состоит из всех десятых долей, меньших 1. Вторая – из всех сотых, меньших 2. Третья – из всех тысячных долей, меньших 3 и т.д.

Пусть $a \in [0, +\infty)$ – произвольное действит. число. По Th Архимеда $\exists n \in \mathbb{N}$, что $n > a$ ($n-1 \le a < n$). Тогда построение п/п, сх-ся к a, начнём с серии, имеющей номер n. (заметим, что каждая послед. серия содержит все числа предыд. серии). В остальном процедура построения п/п такая же, что и в пункте б).

Если после каждого члена послед. x_n вписать член с противоположн. знаком, то получим послед-ть, которая содержит п/п, сход-ся к $\forall a \in \mathbb{R}$ ■

Замечание: интересным явл-ся факт, что и отрезок $[0;1]$ и действит. прямая $\mathbb{R}$ имеют мощности континуум, а послед-ти, их приближ. счетны с любой степенью точности

№5. [Д.], №122. 121, а) Постр. пример ч.п., имеющей в кач-ве своих час. пред. числа $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

▶ $x_n = \{a_1 - \frac{1}{2}; a_2 - \frac{1}{2}; \dots; a_n - \frac{1}{2}; a_1 - \frac{1}{4}; \dots; a_n - \frac{1}{4}; \dots; a_1 - \frac{1}{2^n}, \dots, a_n - \frac{1}{2^n}; \dots\}$ ■

б) Построить пример числовой послед., для которой все члены данной послед.: $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ явл-ся её частичными пределами. Какие ещё частичные пределы обязательно имеет построенная послед-ть?

▶ Составим послед-ть с членами: $a_1, a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3, a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4, \dots$, которая имеет своими частичными пределами члены послед. $\{a_n\}$ и частичные пределы послед. $\{a_n\}$. ■

№6. [Д.], №124, см [АI], с.54, №103

Док., что послед. x_n и $y_n = x_n \cdot \sqrt[n]{n}$ имеют одни и те же частичные пределы.

▶ Пусть α – частичный предел послед-ти $\{x_n\}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} \cdot \sqrt[k_n]{k_n} = \{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{k_n} = 1\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$.

Пусть β – частичный предел послед-ти $\{y_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_{l_n} = \beta$.

Т.к. $\sqrt[n]{n} > 0$, то определена п/п послед. $\{x_n\}$ $x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}}$, а следовательно, и п/п $x_{l_n} = \frac{y_{l_n}}{\sqrt[l_n]{l_n}}$, которая имеет своим пределом число β. ■

№7. [Д], №№ 127, 128.

Что можно утверждать о сх-ти послед.-ей $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, если:

а) $\{x_n\}$ – сх-ся, $\{y_n\}$ – расходится;

▶ Предположим, что $\{x_n+y_n\}\to$, тогда $x_n-(x_n+y_n)=-y_n\to$, но это не так, ибо $y_n\not\to \Rightarrow \{x_n+y_n\}\not\to$

Произведение $\{x_n\cdot y_n\}$ может сх-ся ($x_n=\frac{1}{n}, y_n=n$) так и расх-ся ($x_n=\frac{1}{n}, y_n=n^2$) ■

б) $\{x_n\}, \{y_n\}$ – расходятся; [Избр], № I.1.19.

▶ $\{x_n+y_n\}$ может как сх-ся ($x_n=n,\ y_n=-n;\ x_n+y_n\equiv 0\to$), так и расх-ся ($x_n=n,\ y_n=n\Rightarrow x_n+y_n=2n\not\to$)

$\{x_n\cdot y_n\}$ может сх-ся ($x_n=n^{(-1)^n}, y_n=n^{(-1)^{n+1}}\Rightarrow x_n\cdot y_n\equiv 1\to$),

так и расх-ся ($x_n=n,\ y_n=n\Rightarrow x_n\cdot y_n=n^2\not\to$). ■

№8. [Дороговцев 1], с. 89, №№ II.3.5 – II.3.7

а) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что её п/п $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$ сх-ся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

▶ Не обязательно. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=a_2$.

Если $a_1\neq a_2$, то $\{a_n\}\not\to$. Пример: $a_n=(-1)^n$

Если $a_1=a_2$, то $\{a_n\}\to$ ■

б) Послед-ть $\{a_n\}$ такова, что её п/п $\{a_{2n}\}, \{a_{2n+1}\}, \{a_{3n}\}$ сх-ся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

▶ Сходится. Последовательности $\{a_{2n}\}, \{a_{2n+1}\}$ – есть п/п $\{a_{3n}\}$, а т.к. $\{a_{3n}\}\to$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}\Rightarrow \{a_n\}\to$ ■

в) Привести пример не имеющей предела послед-ти $\{a_n\}$, для которой сх-ся каждая из послед-тей $\{a_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$, $m\geq 2$ – фиксир. число.

▶ Примером такой послед. служит $a_n=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ – простое число}\\ 0, & \text{если } n \text{ – составное.}\end{cases}$

Каждая из послед-тей $\{a_{mk}\}$ состоит из нулей, исключая, быть может, первый член. ■

№9 [Дороговцев 1], с. 39, № II.3.9.

Построить пример послед., для которой мн-во всех част. пределов есть $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\geq 1\right\}\cup\{0\}$

▶ Требуемую послед. можно получить, занумеровав все числа таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots & 1, & \dots\\ 1/2, & 1/2, & 1/2 & \dots & 1/2, & \dots\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 1/m & 1/m & 1/m & \dots & 1/m & \dots\\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$

Каждое число вида $\{1/n\}$ встречается в таблице бесконечно много раз. $\{0\}$ – предельная точка послед-ти $\{\frac{1}{n}\}$. ср. с 7.5б, 7.10, а) ■

№10. [Дороговцев 1], с. 39, № II.3.10.

Док., что каждое из следующих мн-в не м.б. мн-вом всех частичных пределов послед-ти.

Док-во от противного.

а) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\geq 1\right\}_{n\in\mathbb{N}}$; ▶ число 0 также должно быть частичным пределом. ■ требуется взять диагональную п/п.

б) $(0;1)$; ▶ числа 0 и 1 также должны быть частичными пределами. ■

в) $\mathbb{Q}$; ▶ любое иррациональное число также должно быть частичн. пределом. ■

г) $\mathbb{R}$; ▶ значения $-\infty$ и $+\infty$ также должны быть частичными пределами ■

№11 [Дор. 2], с. 73, Th 16; упр 86; №12 [Дор. 1], с. 39, № II.3.3

№13 [Кудр. курс МА. I], с. 89.

Доказать, что:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{m\geq n} x_m\}=\inf\limits_{n}\{\sup\limits_{m\geq n} x_m\}$;

см. также [Зорич I], с. 91.

послед $S_n=\sup\limits_{m\geq n} x_m$ – невозрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Докажем, что S – частичный предел. Для чисел $n\in\mathbb{N}$, используя опр. верхней грани по инд. подберём числа $k_n\in\mathbb{N}$ ($k_n<k_{n+1}$) так, что: $S_n\geq x_{k_n}\geq S_n-\frac{1}{n}$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-\frac{1}{n})=S$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}=S$, т.е. S – частичный предел. Это наибольший част. предел, т.к. $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}:\ S+\varepsilon>S_n=\sup\limits_{m\geq n} x_m\geq x_m$ при $\forall m\geq n$. Нер-во $S+\varepsilon>x_m$ при $m\geq n$ означает, что ни один частичный предел послед. $\{x_n\}$ не м.б. больше $S+\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ произвольно, поэтому он не м.б. больше S.

▶ Первое рав-во представляет собой определение $\overline{\lim}$. Верхний предел достигается на наибольшей п/п x_n.

Заметим, что при возрастании n $\sup\limits_{m\geq n} x_m$ (монот. ф-ия) не возрастает, следовательно, в пределе и получается inf.

другое определение:] A – мн-во всех частичных пределов послед-ти $\{x_n\}$, тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\begin{cases}+\infty, & \text{если } +\infty\in A \text{ (или } A \text{ не огр. сверху)};\\ \sup A, & \text{если } A \text{ – огр. сверху и } A\neq\{-\infty\};\\ -\infty, & \text{если } A=\{-\infty\};\end{cases}$$

■

б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{\inf\limits_{m\geq n} x_m\}=\sup\limits_{n}\{\inf\limits_{m\geq n} x_m\}$;

▶ Док-во аналогично пункту а) ■

№22. [Избр.], с. 37, 1.26;

№14. [Дор. 1], с. 38, № II.3.1(в); см. с/с.

№15. [Дор. 1], с. 39, № II.3.11;

№16. [Дор. 1], с. 42, № II.3.27;

№17. [IMC], 1996, № 4;

№18 [Дор. 83], с. 138, № 23;

№19 [П.С.], с. 37, № 98;

№20 [Зорич I], с. 104, № 8.

№21 [Дор. 88], с. 163, № 8

5:5

25:14

Занятие 8. Вычисление пределов последовательностей.

(добавить несколько задач)

Утв:

1) Сх-ся ч.п. не может иметь более одной предельной точки;
2) Пусть $\{x_{k_n}\}$ – п/п $\{x_n\}$, тогда $\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_{k_n}$ $\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n \ge \varlimsup_{n\to\infty} x_{k_n}\right)$; $(\exists \lim x_n)$
3) Если $\exists \varliminf_{n\to\infty} x_n$, то $\exists$ п/п $\{x_{k_n}\}$: $\lim x_{k_n} = \varliminf_{n\to\infty} x_n$ $\left(\lim x_{k_n} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n\right)$;
4) $\varliminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n$; 5) $\dfrac{1}{\varliminf x_n} = \varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$.

№1 [Д], №131;

Доказать, что:

а) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \overset{①}{\le} \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \overset{②}{\le} \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$

построить примеры, на которых достигаются строгие нер-ва.

Замечание: Отметим, что послед-ти $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ могут расх-ся. В сходящихся послед. достигаются равенства (вместо нер-в).

▶ символ $(n\to\infty)$ опускается.

Предположим, что $\varliminf(x_n+y_n)$ достигается на п/п $\{x_{k_n}+y_{k_n}\}$ (которая по предположению сх-ся); $\varliminf x_{k_n}$ достигается на $\{x_{m_{k_n}}\}$ (которая по предположению сх-ся), т.е. $\varliminf(x_n+y_n)=\lim(x_{k_n}+y_{k_n})$; $\varliminf x_{k_n}=\lim x_{m_{k_n}}$.

Далее имеем, $\boxed{\varliminf x_n + \varliminf y_n \le} \varliminf x_{k_n} + \varliminf y_{k_n}$ (переход к п/п). $\varliminf x_{k_n} = \lim x_{m_{k_n}}$

$\varliminf x_{k_n} + \varliminf y_{k_n} = \lim x_{m_{k_n}} + \boxed{\varliminf y_{k_n} \le \lim x_{m_{k_n}} + \varliminf y_{m_{k_n}}}$ (т.к. $\varliminf y_{k_n} \le \varliminf y_{m_{k_n}}$)
в сх-ся послед. все п/п сх-ся и к тому же числу.

Т.к. $\{x_{k_n}+y_{k_n}\}\to$, то $\{x_{m_{k_n}}+y_{m_{k_n}}\}\to$ и $\lim(x_{m_{k_n}}+y_{m_{k_n}}) = \lim(x_{k_n}+y_{k_n})$

Т.к. $\{x_{m_{k_n}}+y_{m_{k_n}}\}\to$ и $\{x_{m_{k_n}}\}\to$ (по предположению), то и $\{y_{m_{k_n}}\}\to$ (по №7.6 а))

Следовательно, $\varliminf y_{m_{k_n}} = \lim y_{m_{k_n}}$, или $\varliminf x_n + \varliminf y_n \le \lim x_{m_{k_n}} + \lim y_{m_{k_n}}$,

$\lim x_{m_{k_n}} + \lim y_{m_{k_n}} = \lim(x_{m_{k_n}}+y_{m_{k_n}}) \overset{\text{из}}{=} \lim(x_{k_n}+y_{k_n}) = \varliminf(x_n+y_n) \Rightarrow ①$

$\varliminf(x_n+y_n) - \varlimsup y_n = \varliminf(x_n+y_n) + \varliminf(-y_n) \overset{\text{по } ①}{\le} \varliminf[(x_n+y_n)-y_n] = \varliminf x_n \Rightarrow ②$ ■

Строгие нер-ва достигаются при $x_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sin^2\frac{\pi n}{2}$; $y_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\cos^2\frac{\pi n}{2}$.

б) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$;

▶ Док-во аналогично пункту а) ■

№2. (аналог № 7.7, а) для произведения) Имеется ввиду, какие доп. усл-я требуется наложить на $\{x_n\}$, чтобы из сх-ти ей и $\{x_n\cdot y_n\}$ вытекала сх-ть послед-ти $\{y_n\}$.

Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \ne 0$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n y_n$. Доказать, что послед-ть $\{y_n\}$ сх-ся.

Показать, что, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, то из сх-ти послед $\{x_n\cdot y_n\}$ может не вытекать сх-ть послед. $\{y_n\}$. $\lim y_n = \lim\frac{x_n\cdot y_n}{x_n} = \frac{\lim x_n y_n}{\lim x_n} < \infty$

▶ $\exists \{y_n\}\not\to$. Тогда $\infty < \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} y_n = a\cdot\lim y_n \not\to$.

Пример ко второй части вопроса: $x_n=\frac1n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $y_n=(-1)^n\not\to$, но $x_n y_n = \frac{(-1)^n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ■

№3. [Д], №132

Пусть $x_n\ge 0$ и $y_n\ge 0$ для $\forall n\in\mathbb{N}$.

Доказать, что $\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n \overset{①}{\le} \varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \overset{②}{\le} \varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

Построить примеры, на которых выполняются строгие нер-ва.

▶ Пусть $x_n>0$, $y_n>0$ (начиная с некоторого номера), т.к. случаи $x_n\equiv 0$ и $y_n\equiv 0$ – тривиальны.

Следовательно, $\varliminf x_n>0$, $\varliminf y_n>0$.

Предположим, что $\varliminf(x_n\cdot y_n)=\lim(x_{k_n}\cdot y_{k_n})$, $\varliminf x_{k_n} = \lim x_{m_{k_n}}$.

Аналогично №1 имеем:

$\varliminf x_n\cdot\varliminf y_n \le \varliminf x_{k_n}\cdot\varliminf y_{k_n} = \lim x_{m_{k_n}}\cdot\varliminf y_{k_n} \le \lim x_{m_{k_n}}\cdot\varliminf y_{m_{k_n}}$

Т.к. $\{x_{m_{k_n}}\cdot y_{m_{k_n}}\}$ – п/п сх-ся ч.п. $\{x_{k_n}\cdot y_{k_n}\}$, то она также сх-ся и к тому же пределу $\Rightarrow \varliminf(x_n\cdot y_n)=\lim(x_{k_n}\cdot y_{k_n})=\lim(x_{m_{k_n}}\cdot y_{m_{k_n}})$

Итак, ч.п. $\{x_{m_{k_n}}\}\to$ и $\lim x_{m_{k_n}}>0$ (по первому предположению).

ч.п. $\{x_{m_{k_n}}\cdot y_{m_{k_n}}\}\to \Rightarrow$ (по №2) $\{y_{m_{k_n}}\}\to \Rightarrow \varliminf y_{m_{k_n}} = \lim y_{m_{k_n}}$. ①

поэтому,

$\varliminf x_n\cdot\varliminf y_n \le \lim x_{m_{k_n}}\cdot\lim y_{m_{k_n}} = \lim(x_{m_{k_n}}\cdot y_{m_{k_n}}) = \lim(x_{k_n}\cdot y_{k_n}) = \varliminf(x_n y_n)$

$\varliminf(x_n\cdot y_n)\cdot\dfrac{1}{\varlimsup y_n} = \varliminf(x_n\cdot y_n)\cdot\varliminf\dfrac{1}{y_n} = \varliminf\left(x_n y_n\dfrac{1}{y_n}\right) = \varliminf x_n \Rightarrow ②$

Строгие нер-ва выполняются, например, на: $x_n=2+(-1)^n$; $y_n=2-(-1)^n+\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2}$.

б) Доказать, что $\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

▶ Док-во аналогично пункту а) ■

№4. [Д], №133.

Доказать, что если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то какова бы ни была послед $\{y_n\}$, имеем:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;

▶ Т.к. $\exists \lim x_n$, то $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$, но по №1, б, имеем:
$\overline{\lim}(x_n+y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$, $\overline{\lim}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \Rightarrow$ т.к. $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, в данных нер-вах выполняются рав-ва и $\overline{\lim}(x_n+y_n) = \lim x_n + \overline{\lim}\, y_n$. ■

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, $x_n \geq 0$.

▶ Док-во аналогично пункту а), используя №3, б. ■

№5. [Д], №134.

Доказать, что если для некоторой послед $\{x_n\}$, какова бы ни была послед. $\{y_n\}$, имеет место тождество A, то $\{x_n\}$ – сх-ся.

а) A: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$;

▶ Выберем в кач-ве $\{y_n\}$, $y_n = -x_n$. По условию задачи для такой $\{y_n\}$ выполнено: $\overline{\lim}(x_n - x_n) = \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}(-x_n) \Leftrightarrow 0 = \overline{\lim}\, x_n - \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n \Rightarrow \{x_n\}$ – сх-ся. ■

б) A: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n \cdot y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $x_n \geq 0$.

▶ Выберем $y_n = -1$. Получим: $\overline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$
$\Rightarrow \{x_n\}$ – сх-ся. ■

$\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

№6. [Д], №135.

Доказать, что если $x_n > 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1$, то послед. $\{x_n\}$ – сх-ся.

▶ Используем, что $\overline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n} \Rightarrow \overline{\lim}\, x_n \cdot \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n} = 1$.

Следовательно имеем: $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n \Rightarrow \{x_n\}$ – сх-ся. ■

~~№~~ (малая теорема Теплица) [AI], с.58; см также [Вор 2.], с 61–63

Р-им послед. A_{nm}, зависящую от двух индексов, удовлетворяющую условиям:

1) $A_{nm} \geq 0$, для $\forall n, m \in \mathbb{N}$. 2) $A_{n1} + \ldots + A_{nn} = 1$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ для $\forall$ фиксир. $m \in \mathbb{N}$.

А также ч.п. $\{\tilde{x}_n\}$, такую, что 4) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a < \infty$.

Доказать, что послед. $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm} x_m$ сх-ся и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$.

▶ Для $\forall \varepsilon > 0$ рассм. при достаточно больших n модуль разности:

$$\left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}\tilde{x}_m - a\right| = \left\{\sum_{m=1}^{n} A_{nm} = 1\right\} = \left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}(\tilde{x}_m - a)\right| \leq \sum_{m=1}^{n} A_{nm} \cdot |\tilde{x}_m - a| \quad (*)$$

получение оценок из условий 3) и 4):

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a \Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$ (выбрано выше) $\exists N_x(\varepsilon): \forall n \geq N_x(\varepsilon)$ $|\tilde{x}_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1). Далее, т.к. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a < \infty$, то $\{\tilde{x}_n\}$ – огр., т.е. $\exists M > 0$: $|\tilde{x}_n| \leq M$, а $|\tilde{x}_n - a| \leq |\tilde{x}_n| + |a| \leq 2M$ (2), для $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ и $A_{nm} \geq 0 \Leftrightarrow$ для фиксир $\varepsilon > 0$ $\exists N_A(\varepsilon) \geq N_x(\varepsilon)$: $0 \leq A_{nm} < \frac{\varepsilon}{4N_x M}$ (3) для $\forall m = \overline{1, N_x}$ и $\forall n > N_A$.

Продолжаем оценку (оценивание) выражения (*), используя оценки (1)–(3). $\exists n \geq N_A(\varepsilon)$.

$$\sum_{m=1}^{n} A_{nm}|\tilde{x}_m - a| = A_{n1}|\tilde{x}_1 - a| + \ldots + A_{nN_x}|\tilde{x}_{N_x} - a| + A_{nN_x+1}|\tilde{x}_{N_x+1} - a| + \ldots + A_{nn}|\tilde{x}_n - a| \leq$$
$$\leq N_x \frac{\varepsilon}{4N_x M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}\overbrace{(A_{nN_x+1} + \ldots + A_{nn})}^{\leq 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ ■

№9 [Гор], с.30, №II.1.46;

№11. [Д], №138, 139, 140. ; ср. [ВОС I], с.150, №103, 104.

Применить Th Теплица для решения следующих задач:

а) Пусть послед $\{x_n\}$ – сх-ся. Док., что послед-ть средних арифметических $\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ также сх-ся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Построить пример, что обратное не верно.

▶ Берём в Th Теплица $A_{nm} = \frac{1}{n}$, $m = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

$S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm} x_m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \xi_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ■

обратное неверно: например, $x_n = (-1)^n$.

б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Док., что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty$.

▶ Можем считать, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, что $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ (иначе отбрасываем члены $= 0$) (лучше сделать это пунктом 0), а всё остальное сдвинуть вниз)

Докажем далее, что если послед $\{y_n\}$ сх-ся и $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то послед-ть ср. гармонич. $G_n = \frac{n}{1/y_1 + 1/y_2 + \ldots + 1/y_n}$ сх-ся, и $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

▶ Действительно, возьмём в Th Теплица $A_{nm} = \frac{1/y_m}{1/y_1 + 1/y_2 + \ldots + 1/y_n}$, $\tilde{x}_n = y_n$

Все условия Тh будут выполнены. $S_n = \frac{n}{1/y_1 + \ldots + 1/y_n} = G_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ∎

Возвращаясь к нашей задаче, воспользуемся опять Th Теплица. В качестве A_{nm} берём $A_{nm} = \frac{1}{n}$ $(m=\overline{1,n})$, $\tilde{x}_n = \frac{1}{x_n}$. Получим, $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm} \cdot \tilde{x}_m = \frac{1}{G_n}$
Тогда, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{G_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim G_n = \infty$, а т.к. из № 1.10 имеем $G_n \le \xi_n$, то $\xi_n \to \infty$. ∎

в) Д-ть, что если послед. $\{x_n\}$ – сх-ся и $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то послед. средних геометрических сх-ся и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

▶ Используя результаты пунктов а), б) и нер-во из № 1.10 получаем требуемое. ∎

2) [Дор. 2], с. 62, упр. 37; $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n x_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 1 \cdot x_n}{n^2}$

▶ Применить Th Теплица к $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{2}$; $A_{nm} = \frac{2m}{n^2}$; $\sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm} \tilde{x}_n = \frac{a}{2}$. ∎

№ 12 [Д], № 141; ср. [Мар. I], с. 281

Доказать, что если $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$.

▶ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \{№ 10, б)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$. ∎

№ 13. [Д], № 142.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

▶ $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n}$, где $x_n = \frac{n^n}{n!}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$.

Следовательно, по № 11 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. ∎

☆ № 14 [Избр.], с. 37, № 1.23 а)

Доказать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n \ge e$ для любой положит. послед. $\{x_n\}$.

▶ От противного. Пусть для больших n выполнено:
$\left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n < e \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{x_1}{n+1} < \frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1}$.

Откуда, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_1}{k+1} < \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{k} - \frac{x_{k+1}}{k+1}\right) = x_1 - \frac{x_{n+1}}{n+1}$, что неверно, т.к. правая часть нер-ва меньше x_1, а левая больше x_1 (т.к. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots > 1$)

Приведите пример послед. $\{x_n\}$, для которой левый предел равен e?
Верхний предел взят, т.к. он всегда $\exists$ или равен $+\infty$. ∎

№ 7. [ВОС I], с. 166, № 103.

Пусть для послед-ти $\{a_n\}$, ~~послед.~~ составим послед. её средних арифметич. $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
Доказать, независимо от №№ 9, 10, что ~~$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$~~
если $\{a_n\}$ сх-ся, то и $\{b_n\}$ сх-ся к тому же пределу.

▶ Докажем по опр., что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Предположим, что $l = 0$ (Случай $l \ne 0$ сводится к изученному заменой послед. $\{a_n\}$ на $\{a_n - l\}$). Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon): \forall n > N_1(\varepsilon)$ $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмём $N_2 > \frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1}| \cdot 2}{\varepsilon}$ $\left(\Leftrightarrow \frac{|\ldots|}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N$ имеем:

$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \le \frac{|a_1 + \ldots + a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} + \ldots + a_n|}{n} < \frac{|a_1 + \ldots + a_{N_1}|}{N_2} + \frac{|a_{N_1+1}| + \ldots + |a_n|}{n} <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{n - N_1}{n}}_{<1} < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Вывод верен лишь, когда $\{a_n\}$ сх-ся
Далее, предположим, что выполнено $\underline{\lim} a_n > \underline{\lim} b_n$ или $\overline{\lim} b_n > \overline{\lim} a_n$,
тогда из сх-ти послед. $\{a_n\}$, вообще говоря, не будет следовать сх-ть $\{b_n\}$ и рав-во пределов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Если $\{a_n\} \not\to$, то ? (переформул. задачи?) ∎

☆ № 8 [Дороговцев I], с. 40, № II. 3.17 см. также [Зорич I], с. 78.

Усилить утверждение из № 7, доказав, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

▶ Обозначим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = L$. Т.к. лишь конечное число членов будет превышать $(L+\varepsilon)$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon)$ $x_n < L + \varepsilon$.
Имеем, $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n} < \underbrace{\frac{const}{n}}_{\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + (L+\varepsilon)\underbrace{\frac{n-N}{n}}_{<1} < \alpha_n + L + \varepsilon$.
В силу б.м. α_n и произвольности ε, получим $b_n \le L$, для $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le L$.
Нер-во $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$ док-ся аналогично. ∎

☆ № 16. [Избр.], с. 40, 2.16

☆ № 15 [Дор. 1], с. 30, № II. 1.47;

☆ № 10 ср. [Сад. Подк.], с. 14, № 73.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Док., что послед. $z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$

▶ $\exists$ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n, \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда для нахожд. предела $\lim \frac{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{n} = 0$ м.б. воспользоваться Th о пределе послед. средних арифметических

$z_n = \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + (a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1}) + \ldots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} = ab + a\frac{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \ldots + \alpha_n\beta_1}{n}$
$= ab + a\gamma_n^{(1)} + b\cdot\gamma_n^{(2)} + \gamma_n^{(3)}$. Док., что $\gamma_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $i = 1, 2, 3$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon)$: при $n \ge N_0 \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\gamma_n^{(1)}| \le \underbrace{\frac{|\beta_1 + \ldots + \beta_N|}{n}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n \ge N_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Аналогично док., что $|\gamma_n^{(2)}| < \varepsilon$
Далее, т.к. $\{\alpha_n\}$ – огр., то $\exists C > 0$: $|\alpha_n| < C \Rightarrow |\gamma_n^{(3)}| \le C \cdot \frac{|\beta_1| + \ldots + |\beta_n|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. $|\beta_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ∎

9:14
6:8