

Metodi Matematici I

Francesco Sermi

Pisa, 7 febbraio 2025

Notazioni

Riporto all'inizio del libro le notazioni adottate all'interno di questo documento:

\mathbb{C} campo dei numeri complessi

\times prodotto cartesiano

Span insieme delle combinazioni lineari dei vettori

dim dimensione dello spazio vettoriale

Ker kernel di un'applicazione lineare

Im immagine di un'applicazione lineare

Indice

1	Prima lezione	4
2	Seconda lezione	8

CAPITOLO 1

Prima lezione

Facciamo qualche piccolo richiamo agli spazi vettoriali finiti-dimensionali. E' doveroso riportare la definizione di spazio vettoriale.

Definizione 1.1 (spazio vettoriale). Sia dato un campo \mathbb{K} e un insieme V su cui sono definite due operazioni $+$: $V \times V \rightarrow V$ che soddisfa le proprietà di gruppo abeliano e \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- ① $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (x + y) = \alpha x + \alpha y$
- ② $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \alpha(\beta x) = \beta(\alpha x).$

Diremo che la tupla $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Oss.: Dalla proprietà di gruppo abeliano segue che esiste un elemento neutro rispetto all'operazione $+$ e un elemento neutro rispetto all'operazione \cdot .

Notazione: all'interno di questi appunti, spesso, faremo riferimento a V come spazio vettoriale, sottintendendo naturalmente le operazioni $+$ e \cdot definite su di esso. Inoltre, se non specificato, supporremo di lavorare con dei \mathbb{C} -spazi vettoriali, ovvero spazi vettoriali definiti sul campo \mathbb{C} .

Iniziamo considerando il più "semplice" degli spazi vettoriali, ovvero \mathbb{C}^n : tale spazio vettoriale è costituito dalle n -uple di numeri $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i \in \mathbb{C}$. Questo può essere uno spazio vettoriale prendendo la $+$ e \cdot definite come

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) &= (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\ \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_n).\end{aligned}$$

Definizione 1.2 (combinazione lineare). Sia $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ un insieme di vettori appartenenti a V \mathbb{K} -spazio vettoriale. Diremo che

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in V$$

è una combinazione lineare dei vettori $x_1, \dots, x_n \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n$. L'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di x_1, \dots, x_n è detto $\text{Span}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Proposizione 1.1. $\text{Span}(\{x_1, \dots, x_n\})$ è un sottospazio vettoriale di V .

Introduciamo adesso il concetto di vettori linearmente indipendenti

Definizione 1.3 (vettori linearmente indipendenti). Sia $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ un insieme di vettori. Diremo che essi sono linearmente indipendenti se l'equazione

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

ha come unica soluzione quella banale, ovvero $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = 0$.

Oss.: Se l'equazione non ha soluzione banale, allora uno qualunque di quei vettori è in funzione degli altri: infatti, se supponiamo che $\alpha_i \neq 0$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ allora

$$\begin{aligned} \alpha_i x_i &= -(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n) \implies \\ \implies x_i &= -\frac{1}{\alpha_i} (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n). \end{aligned}$$

Definizione 1.4 (dimensione di uno spazio vettoriale). Sia V uno spazio vettoriale. Diremo che $\dim(V) = n$ è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare in V e diremo che esso è la dimensione dello spazio.

Naturalmente dobbiamo distinguere vari casi:

- ① se \exists massimo numero di vettori linearmente indipendenti, allora $\exists n \in \mathbb{N} : \dim(V) = n$;
- ② se \nexists massimo numero di vettori linearmente indipendenti, allora $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_n$ vettori linearmente indipendenti. In tal caso diremo che $\dim(V) = \infty$.

Definizione 1.5 (base di uno spazio vettoriale). Sia V uno spazio vettoriale. Diremo che un insieme $\{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ di vettori linearmente indipendenti è una base di V se

$$\forall v \in V, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} : v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m. \quad (\star)$$

Oss.: Naturalmente la (\star) implica banalmente che $\text{Span}(\{x_1, \dots, x_m\}) = V$, ovvero i vettori x_1, \dots, x_n "generano" tutto lo spazio.

Supponendo di aver mostrato che ogni spazio vettoriale ammette una base (che supponiamo già assodato), mostriamo la dimensione dello spazio coincide con il numero di vettori che costituiscono una base.

Lemma 1.0.1 (dello scambio). Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_m\}$ un insieme di vettoriali linearmente indipendenti e sia $0 \neq w \in \text{Span}(\mathcal{B})$. Allora sappiamo che $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tali che

$$w = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Allora per qualche $i \in \{1, \dots, m\}, \alpha_i \neq 0$, dunque preso $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{x_i\}) \cup \{w\}$ avremo che

- ① \mathcal{B}' è un insieme di vettori linearmente indipendenti;
- ② $\text{Span}(\mathcal{B}') = \text{Span}(\mathcal{B})$.

Corollario 1.0.1. Se $A = \{u_1, \dots, u_k\}$ linearmente indipendente e $B = \{w_1, \dots, w_h\}$ linearmente indipendente con $B \subset \text{Span}(A)$ allora $\exists B' \subset A$ con $\#B = \#B' = h$ tale che

- ① $A' = (A \setminus B') \cup B$ è ancora linearmente indipendente;
- ② $\text{Span}(A') = \text{Span}(A)$

Proposizione 1.2. Sia V uno spazio vettoriale. Allora $\dim(V) = n \iff \exists \mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ base di V .

Dimostrazione.

\Leftarrow : segue banalmente dalla definizione di base.

\Rightarrow : dalla definizione di dimensione, abbiamo chiaramente che $m \leq n$. Supponiamo per assurdo che $m \neq n$, ovvero $m < n$: in tal caso possiamo trovare $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ vettori linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{y_1, \dots, y_m\}$ base di V . In tal caso preso $x_i \in C$ allora

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} : \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = x_i.$$

Sappiamo che $\exists \alpha_i \neq 0$ per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$ (se così non fosse allora $x_i = 0$ e questo contraddice l'ipotesi che i vettori $\{x_1, \dots, x_m\}$ siano linearmente indipendenti). Supponiamo, senza perdita di generalità, che $\alpha_i \neq 0$, dunque

$$y_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{i-1} y_{i-1} + \alpha_{i+1} y_{i+1} + \dots + \alpha_m y_m - x_i).$$

Possiamo dunque sostituire a y_i il vettore x_i e, per il lemma precedente, sappiamo che $\{y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m\}$ è ancora una base di V . Ma allora, sostituendo i vettori di $\{x_1, \dots, x_m\}$ all'interno della base \mathcal{B} , abbiamo un assurdo siccome questo implica che $\forall k > m, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tali che

$$x_k = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m.$$

il che contraddice l'ipotesi che l'insieme x_1, \dots, x_n sia un insieme linearmente indipendente di vettori. \square

Fissando una base $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$, possiamo definire un isomorfismo non canonico tra V e \mathbb{C}^n .

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^n \\ \psi & & \psi \\ x & \longleftrightarrow & (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \parallel & & \\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n & & \end{array}$$

Proposizione 1.3. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V , allora $\varphi : V \mapsto \mathbb{C}^n$ tale che, preso $V \ni x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $x \xrightarrow{\varphi} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Dimostrazione. Dalle formule della dimensione di un'applicazione lineare (che verranno dimostrate più avanti) segue banalmente che $\dim(V) = \dim(\text{Im})(\varphi)$ siccome $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ chiaramente. \square

Definizione 1.6 (applicazione lineare). Siano V, W spazi vettoriali sul medesimo campo \mathbb{K} . Allora diremo che $A : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare se

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A(v_1) + \alpha_2 A(v_2) \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V$$

Oss.: Per ogni applicazione lineare $A0 = 0$. Ciò segue dal fatto che $A(0) = A(0) + A(0) \implies A(0) = 0$.

Nel caso finito-dimensionale non abbiamo "problemi" nel dominio di A , siccome essa è lineare su tutto A : nel caso infinito-dimensionale saremo costretti a restringerci a dei sottospazi.

Ora andiamo naturalmente a dare nuovamente la definizione del kernel e dell'immagine di un'applicazione lineare

Definizione 1.7 (kernel). Siano V, W due spazi vettoriali sul medesimo campo e sia $A : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora definiamo il kernel di A come

$$\text{Ker}(A) = \{x \in V : A(x) = 0\} \subset V.$$

Definizione 1.8 (immagine). Siano V, W due spazi vettoriali sul medesimo campo e sia $A : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora definiamo l'immagine di A come

$$\text{Im}(A) = \{y \in W \mid \exists x \in V : A(x) = y\} \subset W.$$

Proposizione 1.4. $\text{Ker}(A)$ e $\text{Im}(A)$ è un sottospazio vettoriale.

Definizione 1.9 (applicazione suriettiva). Siano V, W due spazi vettoriali sul medesimo campo \mathbb{K} . Allora A è suriettivo $\iff \text{Im}(A) = W$.

Proposizione 1.5. Siano V, W due spazi vettoriali sul medesimo campo \mathbb{K} . Allora A è iniettivo $\iff \text{Ker}(A) = \{0\}$.

Dimostrazione.

\Rightarrow : se A è iniettivo chiaramente segue che $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

\Leftarrow : se $\text{Ker}(A) = \{0\}$ allora avremo che se per assurdo $\exists v, w \in V : A(v) = A(w)$ con $v \neq w$ allora $A(v - w) = 0 \implies v - w \in \text{Ker}(A) \implies v = w$. \square

Teorema 1.1 (della dimensione). Siano V, W due campi vettoriali sul medesimo campo e sia $A : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora avremo che

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)).$$

Oss.: Se $A : V \rightarrow V$ allora è facile vedere che se $\dim(\text{Ker})(A) = 0 \iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff A$ è iniettiva, allora $\dim(V) = \dim(\text{Im}(A))$, ovvero A è suriettivo.

Dimostrazione. Sappiamo che $\text{Ker}(A)$ è un sottospazio vettoriale. Supponiamo allora che $B = \{v_1, \dots, v_r\}$ sia una base di tale sottospazio, allora sappiamo che è possibile completare tale base di $\text{Ker}(A)$ ad una base di V . Sia allora $B' = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di V : per mostrare la tesi è sufficiente mostrare che i vettori $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ generano l'immagine di A . Sappiamo, per definizione, che la base dell'immagine di f è data da $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ma sappiamo che i vettori $f(v_1), \dots, f(v_r)$ sono nulli, quindi l'immagine è generata dai vettori $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$. Verifichiamo adesso che l'immagine di A ha dimensione $n - r$, permettendoci di concludere: per fare ciò osserviamo che l'equazione

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}f(v_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0 &\implies f(\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0 \implies \\ &\implies \alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \text{Ker}(A). \end{aligned}$$

Ma allora questo implica che quest'ultimo vettore è una combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_r che formano una base di $\text{Ker}(A)$, dunque

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \implies -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r + \alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Essendo i vettori v_1, \dots, v_n linearmente indipendenti, si conclude che $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = 0$ dunque $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, permettendoci dunque di affermare che $\dim(\text{Im})(A) = n - r \implies \dim(\text{Im})(A) + \dim(\text{Ker})(A) = n - r + r = n = \dim V$ \square

CAPITOLO 2

Seconda lezione

La scorsa lezione siamo arrivati alla formula della dimensione. Ora, come fatto prima, vogliamo vedere se è possibile studiare l'azione di un'applicazione lineare fra V e W di dimensione, rispettivamente, $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$ tramite gli isomorfismi fra $V \longleftrightarrow \mathbb{C}^n$ e $W \longleftrightarrow \mathbb{C}^m$.