

Appunti di Complementi di AM 2

Francesco Sermi

Indice

1	Spazi euclidei	3
1.1	Spazio euclideo e prodotto scalare	3
1.2	Il prodotto vettoriale	5
1.3	Topologia di \mathbb{R}^n	9
2	Successioni e funzioni continue	11
2.1	Funzioni continue	12

Capitolo 1

Spazi euclidei

In questo capitolo, ci soffermeremo su alcuni risultati che possono essere ottenuti considerando uno spazio euclideo e sullo studio della sua topologia, siccome molti concetti dell'Analisi 1 devono essere concettualmente rivisti per poter essere generalizzati a spazi di dimensione diversa da 1.

1.1 Spazio euclideo e prodotto scalare

Partiamo ricordando al lettore la definizione di prodotto scalare/hermitiano e di **spazio euclideo**:

Definizione 1.1 (prodotto scalare/hermitiano). dato V spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} (\mathbb{C}) si definisce prodotto scalare (hermitiano) un'applicazione $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$) che gode delle seguenti proprietà:

- ① lineare nella prima componente, ovvero

$$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}, \underline{z}) = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{z}) + \beta \varphi(\underline{w}, \underline{z})$$

- ② lineare nella seconda componente, ovvero

$$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi(\underline{v}, \alpha \underline{w} + \beta \underline{z}) = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta \varphi(\underline{v}, \underline{z})$$

- ③ simmetrica, ovvero

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$$

(sostituendo \mathbb{C} al posto di \mathbb{R} si ottengono le proprietà che rendono identificano un prodotto hermitiano)

Definizione 1.2 (spazio euclideo). uno spazio vettoriale V munito di un prodotto scalare $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (analogamente nel caso di un prodotto hermitiano) definito positivo ($\forall \underline{v} \neq 0, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$) si dice **spazio euclideo**

Oss.: Quando un prodotto scalare/hermitiano è definito positivo, diciamo che è **coercivo**. Durante questo documento capiterà spesso di riferirci a questa proprietà con questo termine

Introduciamo qualche notazione a noi utile:

- E_n : spazio affine euclideo di dimensione finita n ;
- \mathbb{E}_n : spazio vettoriale euclideo, ottenuto fissando un'origine in E_n ;

Sappiamo, dal corso di Geometria, che, fissando una base \mathcal{B} di \mathbb{E}_n , le coordinate di un generico vettore $\underline{x} \in \mathbb{E}_n$ sono univoche e definendo la funzione $\varphi : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\underline{x} \in \mathbb{E}_n \mapsto [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$, dove con $[\underline{x}]_{\mathcal{B}}$ indichiamo il vettore delle coordinate del vettore \underline{x} rispetto alla base \mathcal{B} nello spazio \mathbb{E}_n .

Per comodità, noi vorremmo che questa base fosse anche ortonormale per semplificare la trattazione (l'esistenza è garantita, ovviamente, dal teorema di Lagrange).

Definizione 1.3 (base ortonormale). sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, diciamo che essa è una base ortonormale se

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Oss.: Se con la norma indotta dal prodotto scalare lo spazio è completo, allora \mathbb{E}_n è uno spazio di Hilbert. Indichiamo adesso fissata la base ortonormale $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. Osserviamo che, dati $\underline{v}, \underline{w}$, allora

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \underline{v}_j, \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i \langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Definizione 1.4 (norma). Sia V uno spazio vettoriale reale (o complesso). Si definisce norma un'applicazione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{C}$) che verifica le seguenti condizioni:

- ① $\|\underline{v}\| \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$
- ② $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
- ③ $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$
- ④ $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

(analogamente per uno spazio definito su \mathbb{C} sostituendo \mathbb{C} a \mathbb{R})

Notazione: la norma di un vettore verrà indicata all'interno di questo documento, per comodità, sia con $\|\cdot\|$ e sia con $|\cdot|$

Oss.: Osserviamo che se (V, φ) è uno spazio euclideo allora $\|\cdot\| = \sqrt{\varphi(\cdot, \cdot)}$ è una norma: il prodotto scalare induce una norma su V . Mostreremo più avanti il punto ④ (ovvero la proprietà *meno* banale fra quelle) usando la norma indotta dal prodotto scalare

Sapendo che $\mathbb{E}_n \simeq \mathbb{R}^n$ (quando quest'ultimo è munito di un prodotto scalare definito positivo naturalmente) possiamo effettuare tutte le dimostrazioni in \mathbb{R}^n e queste saranno naturalmente valide in tutti gli spazi euclidei di dimensione finita n .

Teorema 1.1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo. Allora

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos \hat{\theta}$$

dove $\hat{\theta}$ è l'angolo convesso fra i due vettori \underline{v} e \underline{w}

Dimostrazione. consideriamo due vettori $\underline{v} \in \mathbb{E}_2$ con $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$. Prendiamo per semplicità $\underline{v} = \underline{e}_1$ e si osserva che

$$\langle \underline{e}_1, \underline{w} \rangle = \cos \hat{\theta}$$

Questo segue banalmente dall'interpretazione geometrica del prodotto scalare canonico.

Per estendere la validità di questo risultato a tutti i $\underline{v} \neq \underline{e}_1$ si osserva che $\exists R \in \text{SO}(\mathbb{E}_2) : R\underline{e}_1 = \underline{v}$ e dunque, considerando $R^{-1}(\underline{w})$ (l'esistenza di un'inversa è garantita dal fatto che $R \in \text{SO}(2)$) e sappiamo che:

$$\langle \underline{e}_1, R^{-1}(\underline{w}) \rangle = \langle R\underline{e}_1, (R \circ R^{-1})\underline{w} \rangle = \cos \hat{\theta}$$

e, siccome a questo punto, dati due vettori qualunque \underline{v} e \underline{w} non di norma unitaria, possiamo utilizzare il ragionamento precedente osservando che:

$$\left\langle \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}, \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \right\rangle = \cos \hat{\theta}$$

ma allora, si osserva che:

$$\frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \frac{1}{\|\underline{w}\|} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \cos \hat{\theta} \implies \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos \hat{\theta}$$

dunque la tesi (in \mathbb{E}_2). Per generalizzare questo concetto a qualunque spazio, noi sappiamo che possiamo considerare il piano $\pi = \text{Span}(\underline{v}, \underline{w})$ e considerare il loro angolo $\hat{\theta}$ convesso giacente in questo piano. \square

Proposizione 1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_n, |\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$$

Dimostrazione. Consideriamo $\lambda \in \mathbb{R}$ e sappiamo che, per coercività del prodotto scalare, che:

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_n, \langle \underline{v} + \lambda \underline{w}, \underline{v} + \lambda \underline{w} \rangle > 0$$

ma per bilinearità del prodotto scalare abbiamo che

$$\langle \underline{v} + \lambda \underline{w}, \underline{v} + \lambda \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + 2\lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle > 0$$

dunque l'equazione in λ

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + 2\lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = 0$$

non deve avere soluzione, il che implica che

$$\Delta = 4\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 - 4\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle < 0 \implies \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 < \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \implies |\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| < \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$$

□

Proposizione 1.2 (Disuguaglianza triangolare).

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_n,$

$$\textcircled{1} \quad |\underline{v} + \underline{w}| \leq |\underline{v}| + |\underline{w}|$$

$$\textcircled{2} \quad ||\underline{v}| - |\underline{w}|| \leq |\underline{v} - \underline{w}|$$

Dimostrazione. osserviamo che

$$|\underline{v} + \underline{w}|^2 = \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + 2\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = |\underline{v}|^2 + 2\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + |\underline{w}|^2 \stackrel{\text{dis. di Cauchy-Schwarz}}{\leq} |\underline{v}|^2 + 2|\underline{v}| |\underline{w}| + |\underline{w}|^2$$

dunque

$$|\underline{v} + \underline{w}|^2 \leq |\underline{v}|^2 + 2|\underline{v}| |\underline{w}| + |\underline{w}|^2 = (|\underline{v}| + |\underline{w}|)^2 \implies |\underline{v} + \underline{w}| \leq |\underline{v}| + |\underline{w}|$$

e si ottiene la tesi del punto $\textcircled{1}$.

Il punto $\textcircled{2}$ si ottiene come corollario del primo punto osservando che

$$|\underline{v}| = |\underline{v} + \underline{w} - \underline{w}| \leq |\underline{v} + \underline{w}| + |\underline{w}| \implies |\underline{v}| - |\underline{w}| \leq |\underline{v} + \underline{w}|$$

ma ragionando in maniera identica sul vettore \underline{w} si osserva che

$$|\underline{w}| = |\underline{w} - \underline{v} + \underline{v}| \leq |\underline{w} - \underline{v}| + |\underline{v}| \implies |\underline{w}| - |\underline{v}| \leq |\underline{w} - \underline{v}| = |\underline{v} - \underline{w}|$$

dunque possiamo concludere che

$$||\underline{v}| - |\underline{w}|| \leq |\underline{v} - \underline{w}|$$

ottenendo la tesi

□

Oss.: Come avevo detto in una osservazione, ogni prodotto scalare definito positivo induce sempre una norma. La dimostrazione qua sopra non fa uso di nessuna proprietà specifiche del prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^n , dunque può essere usata per ogni norma indotta dal prodotto scalare definito positivo di qualunque spazio euclideo

1.2 Il prodotto vettoriale

In \mathbb{R}^3 (ma in generale in qualunque spazio euclideo di dimensione 3) è anche possibile definire l'operazione di prodotto vettoriale, molto utile per trattare (come vedremo più avanti) l'orientazione delle superfici.

Fissando una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di \mathbb{E}_3 , definendo questa operazione $\times : V \times V \rightarrow V$ assegnando i prodotti elementari secondo l'invarianza per permutazioni cicliche, ponendo che

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$

e, per invarianza per permutazioni cicliche, dovremo avere che

$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$$

Le permutazioni non cicliche invece fanno variare il segno dunque avremo, per il vettore \underline{e}_1

$$\begin{cases} \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \\ \underline{e}_1 \times \underline{e}_3 = -\underline{e}_2 \\ \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Le regole che abbiamo visto possono essere anche facilmente ottenute tramite la cosiddetta *regola della mano destra*: indicando la direzione del primo vettore con il pollice (in questo caso \underline{e}_1) e con l'indice il secondo vettore (in questo caso \underline{e}_2), ottenendo sul pollice la direzione del terzo vettore.

Vogliamo inoltre che questo prodotto vettoriale sia *bilineare*.

Dati adesso due vettori \underline{v} e $\underline{w} \in E_3$ abbiamo che $\underline{v}, \underline{w} \in \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ dunque avremo che:

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \quad \underline{w} = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + y_3 \underline{e}_3$$

e studiamo quali saranno le coordinate del prodotto vettoriale fra questi due:

$$\begin{aligned} \underline{v} \times \underline{w} &= (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \times (y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + y_3 \underline{e}_3) = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) + (x_1 y_3 - x_3 y_1)(\underline{e}_1 \times \underline{e}_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)(\underline{e}_2 \times \underline{e}_3) \end{aligned}$$

dunque definiamo una matrice C di questa forma:

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

e ne consideriamo i minori:

$$M_{ij}(C) = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = x_i y_j - x_j y_i \quad (1.3)$$

dunque otteniamo una nuova formula:

$$\underline{v} \times \underline{w} = M_{12}(C)(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) + M_{23}(C)(\underline{e}_2 \times \underline{e}_3) + M_{13}(C)(\underline{e}_1 \times \underline{e}_3) = M_{12}(C)\underline{e}_3 + M_{23}(C)\underline{e}_1 - M_{13}(C)\underline{e}_2$$

usando le proprietà del determinante, sappiamo che $M_{13}(C) = -M_{31}(C)$ dunque

$$\underline{v} \times \underline{w} = M_{12}(C)\underline{e}_3 + M_{23}(C)\underline{e}_1 + M_{31}(C)\underline{e}_2$$

abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione

Proposizione 1.3. dati i vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$ allora $\exists x_1, \dots, x_3, y_1, \dots, y_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ e $\underline{w} = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + y_3 \underline{e}_3$. Posta la matrice C tale che

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\underline{v} \times \underline{w} = M_{23}(C)\underline{e}_1 + M_{31}(C)\underline{e}_2 + M_{12}(C)\underline{e}_3 \quad (1.4)$$

Oss.: si noti come i numeri siano tutti disposti secondo permutazioni cicliche: questo può essere un buon trucco per ricordarsela.

Corollario 1.1.1 (matrice del prodotto vettoriale). siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$ e siano x_1, \dots, x_3 e y_1, \dots, y_3 le rispettive coordinate rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di \mathbb{E}_3 . Allora

$$\underline{v} \times \underline{w} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \underline{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \underline{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \underline{e}_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Dimostrazione. si osservi che, procedendo con uno sviluppo di Laplace lungo la terza colonna abbiamo che:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \underline{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \underline{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 M_{23}(C) - \underline{e}_2 M_{13}(C) + \underline{e}_3 M_{12}(C) = M_{23}(C)\underline{e}_1 + M_{31}(C)\underline{e}_2 + M_{12}(C)\underline{e}_3$$

□

Proposizione 1.4 (matrice del prodotto misto). siano dati i vettori $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ e $\underline{w} = y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2 + y_3\underline{e}_3$ e $\underline{z} = \xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}_2 + \xi_3\underline{e}_3$. Allora

$$\langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{z} \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \xi_1 \\ x_2 & y_2 & \xi_2 \\ x_3 & y_3 & \xi_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Dimostrazione. sappiamo che $\underline{v} \times \underline{w} = M_{23}(C)\underline{e}_1 + M_{31}(C)\underline{e}_2 + M_{12}(C)\underline{e}_3$ dunque $\langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{z} \rangle = M_{23}(C)\xi_1 + M_{31}(C)\xi_2 + M_{12}(C)\xi_3$. D'altra parte definendo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \xi_1 \\ x_2 & y_2 & \xi_2 \\ x_3 & y_3 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

allora si osserva che

$$\langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{z} \rangle = \text{cof}_{13}(M)\xi_1 + \text{cof}_{23}(M)\xi_2 + \text{cof}_{33}(M)\xi_3 = \det(M)$$

dunque la tesi. □

Corollario 1.1.2 ($\underline{v} \times \underline{w} \perp \text{Span}(\underline{v}, \underline{w})$). Dati due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$ allora

$$\underline{v} \times \underline{w} \perp \text{Span}(\underline{v}, \underline{w})$$

Dimostrazione. dalla proposizione 1.4 sappiamo che

$$\langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{v} \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

per proprietà del determinante. Similmente per il vettore \underline{w} . Dunque abbiamo che $\underline{v} \times \underline{w} \perp \underline{v}$ e $\underline{v} \times \underline{w} \perp \underline{w}$ che implica che $\underline{v} \times \underline{w}$ è perpendicolare a qualunque combinazione lineare dei vettori \underline{v} e \underline{w} , quindi $\underline{v} \times \underline{w} \perp \text{Span}(\underline{v}, \underline{w})$ ovvero la tesi. □

Corollario 1.1.3 (norma del prodotto vettoriale). Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$ con $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ e $\underline{w} = y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2 + y_3\underline{e}_3$. Allora, ponendo

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = \sqrt{M_{23}(C)^2 + M_{12}(C)^2 + M_{31}(C)^2}$$

Dimostrazione. Osserviamo, per la proposizione 1.4, che

$$\begin{aligned} \langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle &= \det \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{v} \times \underline{w} \end{pmatrix} = M_{23}(C)(\underline{v} \times \underline{w})_1 + M_{31}(C)(\underline{v} \times \underline{w})_2 + M_{12}(C)(\underline{v} \times \underline{w})_3 = \\ &= M_{23}(C)^2 + M_{31}(C)^2 + M_{12}(C)^2 \end{aligned}$$

dunque $|\underline{v} \times \underline{w}| = \sqrt{M_{23}(C)^2 + M_{31}(C)^2 + M_{12}(C)^2}$ □

Proposizione 1.5. Sia $R \in \text{SO}(3)$ e siano dati $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$. Allora

$$R(\underline{v} \times \underline{w}) = R\underline{v} \times R\underline{w} \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Sia $\underline{u} \in \mathbb{E}_3$ e consideriamo il seguente prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\langle R\underline{v} \times R\underline{w}, R\underline{u} \rangle &= \det \begin{pmatrix} R\underline{v} & R\underline{w} & R\underline{u} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(R \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

Usando il teorema di Binet abbiamo che

$$\langle R\underline{v} \times R\underline{w}, R\underline{u} \rangle = \det \left(R \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{pmatrix} \right) = \det(R) \det \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che $R \in \text{SO}(3)$ dunque $\det(R) = 1$ e siccome sappiamo che R è un'isometria allora

$$\langle R(\underline{v} \times \underline{w}), R\underline{u} \rangle = \det \begin{pmatrix} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{pmatrix} = \langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{u} \rangle = \langle R(\underline{v} \times \underline{w}), R\underline{u} \rangle$$

ma allora $\langle R\underline{v} \times R\underline{w}, R\underline{u} \rangle = \langle R(\underline{v} \times \underline{w}), R\underline{u} \rangle \implies \langle R(\underline{v} \times \underline{w}) - (R\underline{v} \times R\underline{w}), R\underline{u} \rangle = 0$. Ma allora, per la coercività del prodotto scalare, abbiamo necessariamente che

$$R(\underline{v} \times \underline{w}) = R\underline{v} \times R\underline{w}$$

□

Proposizione 1.6. Se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v} \perp \underline{w}$ e $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$ allora

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = 1$$

Dimostrazione. Dati \underline{v} e \underline{w} con $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}\}$ è una base. Siccome appartengono a \mathbb{R}^3 e sono perpendicolari, allora sappiamo che $\exists R \in \text{SO}(3) : R\underline{v} = \underline{e}_1, R\underline{w} = \underline{e}_2$ e $R(\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{e}_3$ dunque

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = 1 = |R\underline{e}_1 \times R\underline{e}_2| = |R(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2)| = |\underline{v} \times \underline{w}| \implies |\underline{v} \times \underline{w}| = 1$$

□

Corollario 1.1.4 (modulo del prodotto vettoriale di vettori perpendicolari). siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$ e $\underline{v} \perp \underline{w}$ allora:

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| |\underline{w}|$$

Dimostrazione. siccome $\underline{v} \perp \underline{w}$ allora $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \perp \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|}$. Ma allora possiamo applicare a questi due vettori la proposizione precedente, dunque:

$$\left| \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \times \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} \right| = 1 = \frac{1}{|\underline{v}| |\underline{w}|} |\underline{v} \times \underline{w}| \implies |\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| |\underline{w}|$$

□

Proposizione 1.7 (area del parallelogramma). Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{E}_3$. Allora

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| |\underline{w}| \sin \hat{\theta}$$

dove $\hat{\theta}$ è l'angolo convesso fra i due vettori

Dimostrazione. possiamo "ortogonalizzare" il vettore \underline{v} usando il procedimento di Grand-Schmit, dunque

$$\begin{aligned}|\underline{v} \times \underline{w}|^2 &= \left| \left(\underline{v} - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{w}|^2} \underline{w} \right) \times \underline{w} \right|^2 = \left| \underline{v} - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{w}|^2} \underline{w} \right|^2 |\underline{w}|^2 = \left\langle \underline{v} - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{w}|^2} \underline{w}, \underline{v} - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{w}|^2} \underline{w} \right\rangle |\underline{w}|^2 = \\ &= |\underline{w}|^2 \left(\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2 \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{w}|^2} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \frac{(\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle)^2}{|\underline{w}|^4} \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \right) = \\ &= |\underline{w}|^2 \left(\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2 \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2}{|\underline{w}|^2} + \frac{(\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle)^2}{|\underline{w}|^2} \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \right) = \\ &= |\underline{w}|^2 \left(\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - \frac{(\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle)^2}{|\underline{w}|^2} \right)\end{aligned}$$

Sappiamo adesso che $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = |\underline{v}| |\underline{w}| \cos \hat{\theta}$, dunque

$$|\underline{w}|^2 \left(|\underline{v}|^2 - |\underline{v}|^2 \cos^2 \hat{\theta} \right) = |\underline{v}|^2 |\underline{w}|^2 (1 - \cos^2 \hat{\theta}) = |\underline{v}|^2 |\underline{w}|^2 \sin^2 \hat{\theta}$$

ma allora se ne conclude che

$$|\underline{v} \times \underline{w}|^2 = |\underline{v}|^2 |\underline{w}|^2 \sin^2 \hat{\theta} \implies |\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| |\underline{w}| \sin \hat{\theta}$$

e questo conclude la dimostrazione. \square

Oss.: Unendo quest'ultima proposizione con il corollario 1.1.3 possiamo facilmente vedere che

$$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}| |\underline{w}| \sin \hat{\theta} = \sqrt{M_{23}(C)^2 + M_{12}(C)^2 + M_{31}(C)^2}$$

Definizione 1.5 (base positivamente orientata). diremo che tre vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in \mathbb{E}_3$ linearmente indipendenti sono una base positivamente orientata se

$$\det(\underline{v} \quad \underline{w} \quad \underline{z}) > 0$$

Oss.: La base canonica di \mathbb{R}^3 è positivamente orientata, siccome

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I) = 1$$

Proposizione 1.8. Se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, allora l'insieme $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}\}$ è una base positivamente orientata

Dimostrazione. banalmente

$$\det(\underline{v} \quad \underline{w} \quad \underline{v} \times \underline{w}) = \langle \underline{v} \times \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = |\underline{v} \times \underline{w}|^2 > 0$$

\square

Oss.: Una base positivamente orientata si può sempre rappresentare con la regola della mano destra: il vettore \underline{v} è rappresentato dall'indice, il vettore \underline{w} è rappresentato dal dito medio e il pollice invece rappresenta $\underline{v} \times \underline{w}$.

Infine, per concludere per adesso la lista dei teoremi sul prodotto vettoriale, abbiamo che:

Proposizione 1.9. Una base ortonormale $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}\}$ è positivamente orientata se e solo se $\underline{z} = \underline{v} \times \underline{w}$

Dimostrazione.

\Leftarrow : già mostrato per la proposizione 1.8

\Rightarrow : supponiamo di avere la seguente base ortonormale positivamente orientata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, allora abbiamo che questa segue la regola della mano destra, dunque $\underline{i} \times \underline{j} = \alpha \underline{k}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Ma allora, per la proposizione 1.6, abbiamo che $|\alpha \underline{k}| = 1$ (siccome $\underline{v} \perp \underline{w}$) dunque $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$. \square

1.3 Topologia di \mathbb{R}^n

Come visto dal corso di Analisi Matematica del primo anno, possiamo pensare \mathbb{R}^n come uno spazio metrico se consideriamo la distanza indotta dal prodotto scalare.

Possiamo dunque andare a definire le **palle**:

Definizione 1.6 (palle aperte e chiuse). Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e fissiamo $r > 0$. Allora definiamo la palla aperta di raggio r nella seguente maniera

$$B(x, r) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - x| < r\}$$

e la palla chiusa di raggio r nella seguente maniera

$$\mathbf{B}(x, r) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - x| \leq r\}$$

con centro x e raggio r .

Ma cosa vuol dire palla aperta? In generale possiamo definire la nozione di insieme aperto nella seguente maniera:

Definizione 1.7 (insieme aperto). $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto se $\forall y \in A \exists r > 0 : B(y, r) \subset A$

Esercizio 1.1. *Mostrare che $B(x, r)$ è un aperto $\forall x \forall r$*

Svolgimento. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia fissato $r > 0$. Allora scelto $y \in B(x, r)$ sappiamo che preso $\varepsilon = r - |x - y| > 0$ allora possiamo definire la palla $B(y, \varepsilon)$ e prendere $z \in B(y, \varepsilon)$ e osservare che

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < r - |x - y| + |x - y| = r$$

dunque $|z - x| < r$ il che implica che $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$ □

Esercizio 1.2. *Siano $\{A_j : j \in J\}$ una famiglia di aperti (non necessariamente numerabile), allora $\bigcup_{j \in J} A_j$ è un insieme aperto.*

Svolgimento. si osserva che, siccome A_j è un insieme aperto $\forall j$, allora $\forall a \in A_j \implies \exists r > 0 : B(a, r) \subset A_j$, ma allora $B(a, r) \subset \bigcup_{j \in J} A_j$ □

Capitolo 2

Successioni e funzioni continue

In questo capitolo andremo a definire il concetto di successione e vedere il forte collegamento presente fra esse e il concetto di continuità in più variabili.

Ricordiamo al lettore che una successione a valori in un insieme A è una funzione $x_k : \mathbb{N} \rightarrow A$. Vediamo adesso come si definisce il concetto di *successione convergente* in più variabili

Definizione 2.1 (convergenza di una successione). diremo che $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è una successione convergente a $z \in \mathbb{R}^n$ se $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - z| = 0$.

Oss. Naturalmente se $\underline{x}_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$ converge a $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_i} = z_i \forall i \in 1, \dots, n$

Esempio 2.1. Consideriamo la successione $\underline{x}_k = (e^{-k} + 1, (-1)^k)$. Per il precedente teorema questa successione è convergente.

Proposizione 2.1 (Unicità del limite). Il limite di una successione è unico. Se $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n \forall k$ converge a $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ allora z è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che \underline{x}_k converga a \underline{z} e \underline{y} con $\underline{z} \neq \underline{y}$. Allora

$$|\underline{z} - \underline{y}| \leq |\underline{x}_k - \underline{z}| + |\underline{x}_k - \underline{y}| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \implies z = y$$

□

Proposizione 2.2. Se $\underline{x}_k \rightarrow \underline{x}$ allora $|\underline{x}_k| \rightarrow |\underline{x}|$

Dimostrazione. si osserva che, dalla proposizione 1.2, si ha che

$$||\underline{x}_k| - |\underline{x}|| \leq |\underline{x}_k - \underline{x}| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

□

Mostriamo adesso una banale proposizione, le cui conseguenze sono tuttavia banali

Proposizione 2.3 (spazio vettoriale delle successioni convergenti). Se $\underline{x}_k \rightarrow \underline{x}$ e $\underline{y}_k \rightarrow \underline{y}$ allora $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \underline{x}_k + \mu \underline{y}_k \rightarrow \lambda \underline{x} + \mu \underline{y}$

Dimostrazione. osserviamo che

$$|\lambda \underline{x}_k + \mu \underline{y}_k - \lambda \underline{x} - \mu \underline{y}| = |\lambda(\underline{x}_k - \underline{x}) + \mu(\underline{y}_k - \underline{y})|$$

Per la proposizione 1.2 abbiamo che

$$|\lambda(\underline{x}_k - \underline{x}) + \mu(\underline{y}_k - \underline{y})| \leq |\lambda| |\underline{x}_k - \underline{x}| + |\mu| |\underline{y}_k - \underline{y}| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

dunque la tesi

□

Oss. l'importanza di questa dimostrazione sta nel fatto che questo teorema dimostra che l'insieme delle successioni convergenti in \mathbb{R}^n forma uno spazio vettoriale che è chiuso rispetto all'addizione $+\mathbb{R}$ e prendendo come prodotto per scalare $\cdot\mathbb{R}$

Adesso andiamo a mostrare una proprietà che segue direttamente dalla topologia di \mathbb{R}^n (in spazi topologici qualunque non è sempre valido)

Proposizione 2.4 (caratterizzazione degli insiemi chiusi). Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se $\forall \underline{x}_k \rightarrow \underline{z}, \underline{x}_k \in A \forall k$ allora $\underline{z} \in A$. Formalmente

$$(A \subset \mathbb{R}^n \text{ è chiuso}) \iff (\forall \underline{x}_k \rightarrow \underline{z}, \underline{x}_k \in A \forall k \implies \underline{z} \in A)$$

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$: Se A è chiuso, considerando una generica $\underline{x}_k \rightarrow \underline{z}, \underline{x}_k \in A \forall k$, allora $\forall r > 0$ dato che $|\underline{x}_k - \underline{z}| \rightarrow 0 \exists k_r \in \mathbb{N}$ tale che $|\underline{x}_k - \underline{z}| < r \forall k \geq k_r \implies \underline{x}_k \in B(\underline{z}, r) \implies B(\underline{z}, r) \cap A \neq \emptyset \implies \underline{z} \in \bar{A}$. Siccome A è chiuso allora $\bar{A} = A$ dunque $\underline{z} \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Sia $\underline{w} \in \bar{A} \implies B(\underline{w}, \frac{1}{k}) \cap A \neq \emptyset \forall k \geq 1$ quindi esiste una successione \underline{x}_k (potremmo prendere per esempio $\underline{w} - \frac{1}{k}$). Ma allora $|\underline{x}_k - \underline{w}| < \frac{1}{k} \implies \underline{x}_k = \underline{w} \implies \underline{w} \in A$ per la seconda proprietà, ma allora $\bar{A} \subset A \implies \bar{A} = A$ e dunque A è chiuso per definizione. \square

Questa proprietà è molto importante, siccome garantisce l'equivalenza fra **chiusura sequenziale** e **chiusura** (che negli spazi topologici non è generalmente garantito) in \mathbb{R}^n .

In \mathbb{R}^n , dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, se vogliamo verificare che sia chiuso sarà dunque necessario verificare che ogni successione \underline{x}_k tali che $\forall k, \underline{x}_k \in A$ avremo che $\underline{x}_k \rightarrow \underline{x} \in A$, ovvero che ogni successione convergente in A converga ad un punto che appartiene ad A .

2.1 Funzioni continue

Definizione 2.2 (funzioni continue). Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^m$ si dice continua in $\underline{z} \in A$ se

$$\forall \underline{x}_k \in A, \underline{x}_k \rightarrow \underline{z}, \lim_{k \rightarrow +\infty} f(\underline{x}_k) = f(\underline{z})$$

Oss. Diremo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ è continua in A se è continua $\forall \underline{x} \in A$.

Andiamo a ricordare un concetto molto importante:

Definizione 2.3 (apertura relativa). Fissato $A \subset \mathbb{R}^n$ diremo che $S \subset A$ è aperto in A se $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che

$$S = A \cap \Omega$$

Teorema 2.1 (teorema C1). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora f è continua $\iff \forall U \subset \mathbb{R}^m$ aperto $f^{-1}(U)$ è aperto in A

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$: se f è continua, supponiamo per assurdo che esista $U \subset \mathbb{R}^m$ aperto tale che $f^{-1}(U)$ non è aperto in A . Allora $\exists \underline{z} \in f^{-1}(U)$ tale che $\forall k \geq 1, B(\underline{z}, \frac{1}{k}) \not\subset f^{-1}(U)$. Ma questo implica che $\exists \underline{x}_k \in A \cap B(\underline{z}, \frac{1}{k})$ tale che $\underline{x}_k \notin f^{-1}(U)$. Ma allora

$$|\underline{x}_k - \underline{z}| < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \implies f(\underline{x}_k) \rightarrow f(\underline{z})$$

ma allora $f(\underline{x}_k) \in U$.¹

Il fatto che $f(\underline{z}) \notin U$ contraddice l'ipotesi iniziale.

$\boxed{\Leftarrow}$: sappiamo che la preimmagine di aperti è aperta in A allora sia $\underline{x}_k \rightarrow \underline{z}$ con $\underline{x}_k \in A$ e $\underline{z} \in A$: se supponiamo, per assurdo, $f(\underline{x}_k) \not\rightarrow f(\underline{z})$ allora $\exists \alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ ed esiste $\sigma > 0 : |f(\underline{x}_{\alpha(k)}) - f(\underline{z})| \geq \sigma$. D'altra parte $f^{-1}(B(f(\underline{z}), \sigma))$ è aperto in A (siccome preimmagine di una palla, che è aperta), dunque esiste $\delta > 0$ tale che $A \cap B(\underline{z}, \delta) \subset f^{-1}(B(f(\underline{z}), \sigma))$ ed esiste $k_0 \geq 1$ tale che $\underline{x}_k \in A \cap B(\underline{z}, \delta) \subset f^{-1}(B(f(\underline{z}), \sigma)) \forall k \geq k_0 \implies |f(\underline{x}_k) - f(\underline{z})| \leq \sigma$ e questo contraddice la precedente disequazione $|f(\underline{x}_{\alpha(k)}) - f(\underline{z})| \geq \sigma$ per k sufficientemente grande. \square

¹se appartenesse a U allora $\underline{x}_k \in f^{-1}(U)$ il che contraddice come abbiamo definito la successione