

Pendolo fisico

Giosué Aiello, Domenico Fenili, Francesco Sermi

Novembre 2023

Indice

1	Scopo dell'esperienza	2
2	Cenni teorici	2
3	Apparato sperimentale e strumenti	3
4	Descrizione delle misure	3
5	Analisi dei dati	4
6	Conclusioni	7

1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo di questa esperienza è quello di misurare il periodo di un pendolo fisico in funzione della distanza del perno di rotazione dal centro di massa.

2 Cenni teorici

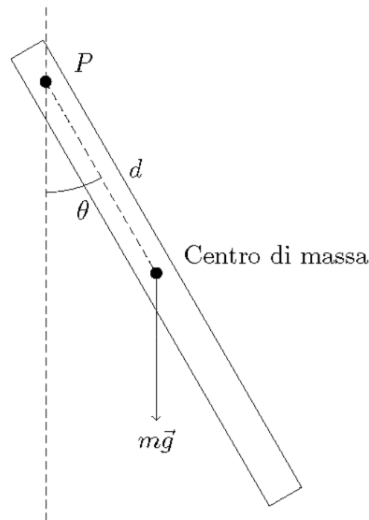


FIGURA (1) – Schema del nostro apparato sperimentale

Un oggetto fissato ad un punto di sospensione P (che dista d dal centro di massa) e soggetto alla gravità costituisce un pendolo fisico. Se questo corpo viene spostato di un angolo θ dalla sua posizione di equilibrio, il momento torcente della forza di gravità (rispetto al punto di sospensione P) vale:

$$\tau = -mgd \sin \theta \quad (1)$$

che, per $\theta \ll 10^\circ - 15^\circ$ possiamo esprimere $\sin(\theta)$ utilizzando la formula di espansione in serie di Taylor al primo ordine:

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta + o(\theta^3) \approx \theta$$

Pertanto possiamo riscrivere il momento torcente della forza di gravità come:

$$\tau = -mgd\theta$$

E per la seconda equazione cardinale si ha che:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad (2)$$

e sapendo che il momento angolare di un pendolo fisico risulta essere pari a $L = I\omega$ e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si ha che:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Combinando la (1) e la (2):

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \theta = 0 \quad (3)$$

Siamo dinanzi ad un'equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti omogenea di un moto armonico con pulsazione ω_0 e periodo di oscillazione T_0 dati da:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Utilizzando il teorema degli assi paralleli, possiamo concludere che il momento di inerzia dell'oggetto fisico risulta essere:

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2$$

Possiamo quindi riscrivere la formula del periodo di oscillazione nella seguente maniera:

$$T(d) = \sqrt{\frac{m(l^2 + d^2)}{mgd}} = \sqrt{\frac{l^2}{12} + d^2 \over gd} \quad (4)$$

3 Apparato sperimentale e strumenti

- Strumenti
 - Metro a nastro, risoluzione 0.1 cm;
 - Calibro ventesimale, risoluzione 0.05 mm;
 - Cronometro, risoluzione 0.01 s.
- Materiali
 - Asta metallica forata;
 - Un supporto di sospensione;

4 Descrizione delle misure

In primis, abbiamo misurato la lunghezza dell'asta $l = (105.0 \pm 0.1)$ cm con il metro a nastro. Successivamente abbiamo misurato tutte le distanze L dei vari buchi rispetto ad una delle due estremità della sbarra che abbiamo scelto e "tenuto" per tutte le altre misurazioni di L e, sempre rispetto alla stessa estremità che avevamo scelto per misurare, abbiamo misurato la distanza del centro di massa della sbarra (che risulta essere $d_c = (52.5 \pm 0.1)$ cm). Queste misurazioni sono state effettuate con il metro a nastro, visto che le incertezze derivanti dalla misurazione col metro erano, in relazione alle grandezze da noi misurate, già molto piccole e quindi non è stato necessario misurarle col calibro per avere delle misure ancora più precise.

Successivamente abbiamo iniziato a misurare i periodi di oscillazione τ misurando quanto occorreva al pendolo a compiere 10 oscillazioni, per poter ridurre l'errore sul periodo di oscillazione effettivo, di fatto "spalmando" l'incertezza su ben 10 oscillazioni: questo è stato fatto perché l'incertezza sulla misura delle oscillazioni **non corrisponde** al tempo di reazione di un essere umano. Queste misurazioni sono state effettuate con il cronometro e sono state ripetute 7 volte per ogni foro.

L'unica accortezza che abbiamo deciso di seguire per ogni misura è stato quello di far partire il pendolo da un angolo per cui era ragionevole supporre valida l'approssimazione dei piccoli angoli mostrata nei "Cenni teorici", cercando di mantenere invariato l'angolo fra la verticale e il punto iniziale in cui si trovava l'asta.

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	16.09	95.0
2	15.90	
3	15.73	
4	15.93	
5	15.89	
6	15.67	
7	16.00	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	15.31	85.0
2	15.42	
3	15.30	
4	15.56	
5	15.29	
6	15.50	
7	15.53	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	15.75	75.0
2	15.66	
3	15.73	
4	15.61	
5	15.67	
6	15.80	
7	15.67	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	18.33	65.0
2	18.49	
3	18.33	
4	18.31	
5	18.17	
6	18.21	
7	18.36	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	38.09	55.0
2	38.02	
3	38.24	
4	37.77	
5	37.95	
6	38.24	
7	38.18	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	22.80	45.0
2	22.59	
3	22.63	
4	22.72	
5	22.68	
6	22.74	
7	22.78	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	16.77	35.0
2	16.64	
3	16.77	
4	16.73	
5	16.80	
6	16.68	
7	16.52	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	15.57	25.0
2	15.69	
3	15.67	
4	15.60	
5	15.59	
6	15.57	
7	15.59	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	15.69	15.0
2	15.69	
3	15.66	
4	15.73	
5	15.95	
6	15.76	
7	15.69	

Numero prova	τ (s) ± 0.01	L (cm) ± 0.1
1	16.26	5.0
2	16.37	
3	16.22	
4	16.29	
5	16.31	
6	16.35	
7	16.45	

TABELLA (1) – Tabelle con le misure da noi effettuate

5 Analisi dei dati

Per minimizzare le incertezze sul periodo di oscillazione (che **non** coincidono con la risoluzione del cronometro o al tempo di reazione di un individuo medio), abbiamo considerato i vari valori di τ misurati ad una certa distanza dal centro di massa, ne abbiamo calcolato il valor medio e la deviazione standard e li abbiamo entrambi divisi per il numero di oscillazioni che il pendolo effettuava durante la misurazione, distribuendo l'errore della singola oscillazione su tutte quelle compiute. I valori ottenuti da queste interpolazioni sono riportati nella tabella accanto.

Valore medio (s)	Deviazione standard (s)
1.59	0.09
1.54	0.08
1.57	0.04
1.83	0.07
3.8	0.1
2.27	0.05
1.67	0.06
1.56	0.03
1.57	0.06
1.63	0.05

TABELLA (2) – Tabella dei valori medi con relativa deviazione standard

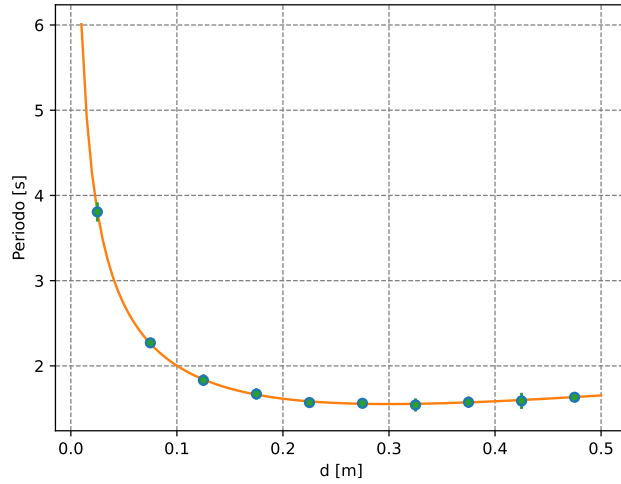
Le misure effettuate sulla distanza L fra il perno di rotazione e l'estremità della sbarra da noi scelta sono state convertite in metri e per determinare la distanza d del perno di oscillazione abbiamo calcolato il valore assoluto della sottrazione fra la distanza del perno di rotazione rispetto ad una delle estremità e la distanza del perno di rotazione rispetto alla stessa estremità. In formula:

$$d = |L - d_c|$$

Pertanto l'errore presente nella differenza va considerato come somma in quadratura delle incertezze legate alle due misure:

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_{d_c}^2} \approx 0.001 \text{ m}$$

Fatte queste premesse sulle grandezze che abbiamo misurato e sulle loro relative incertezze, per verificare la validità del nostro modello teorico abbiamo utilizzato la tecnica del fit lineare usando l come parametro libero (di cui è possibile vedere il grafico sotto riportato) tramite la libreria `scipy` di Python.



dove T_i è l'i-esimo valore medio da noi calcolato con i τ da noi misurati e corrisponde al valore medio riportato all'i-esimo riga della tabella 5 e, conseguentemente, r_i rappresenta il relativo residuo rispetto al modello teorico di cui noi cerchiamo di verificare la validità.

Tracciandone il grafico con le relative incertezze, riportato di fianco, si osserva che i residui fluttuano attorno allo zero nelle barre di errore, mostrandoci che non erano presenti degli errori sistematici dovuti al nostro apparato sperimentale oppure che questi hanno influito superficialmente nelle nostre misure.

Per quanto riguarda l'elaborazione di questi dati, abbiamo utilizzato il codice scritto in Python presente nella prossima pagina, che tramite una serie di librerie (fra i quali si annovera *Scipy*, *Matplotlib* e *Numpy*) è stato possibile svolgere le operazioni di fit lineare con parametro libero, il calcolo della deviazione standard e del valore medio.

Si cerca di dare una breve spiegazione di questo codice:

```

1 import numpy as np
2 import math
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 from scipy.optimize import curve_fit
5 data = np.loadtxt(fname="dati.txt", dtype=np.
6 float64)
7 class Number:
8     def __init__(self, arr):
9         self.x = arr
10        self.n = 7
11        self.average_value = 0
12    def media(self):
13        sum = 0
14        for x in self.x:
15            sum = sum + x
16        self.average_value = sum/len(self.x)
17        return(self.average_value)
18    def deviazione_standard(self):
19        sum = 0
20        if self.average_value != 0:
21            for x in self.x:
22                sum = sum + pow(x - self.
23                average_value, 2)
24        self.deviazione = math.sqrt(sum * (len
25        (self.x)))
26        return(self.deviazione)

```

La libreria *scipy* ci ha restituito che il miglior fit del nostro grafico risulta essere il valore $\hat{l} = 1.037 \text{ m} \pm 0.002 \text{ m}$ e possiamo notare che se calcoliamo l'errore associato:

$$\frac{l - \hat{l}}{\sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_{\hat{l}}^2}} = \frac{(1.05 - 1.037) \text{ m}}{\sqrt{(0.002^2 + 0.001^2) \text{ m}^2}} \approx 5.8$$

Pertanto possiamo affermare che il valore del *best-fit* \hat{l} ha una buona precisione (in quanto l'errore $\sigma_{\hat{l}}$ induce un errore relativo sulla misura pari a $\sigma_{\%i} = \frac{\sigma_i}{\hat{l}} * 100 \approx 0.2 \%$), tuttavia ha una bassa accuratezza, visto che, rispetto al valore da noi $l = 1.05 \text{ m}$ atteso, dista ben $5.8\sigma_{l-\hat{l}}$.

Abbiamo anche considerato i residui r_i :

$$r_i = T_i - 2\pi\sqrt{\frac{\frac{i}{12} + d_i^2}{gd_i}} \quad (5)$$

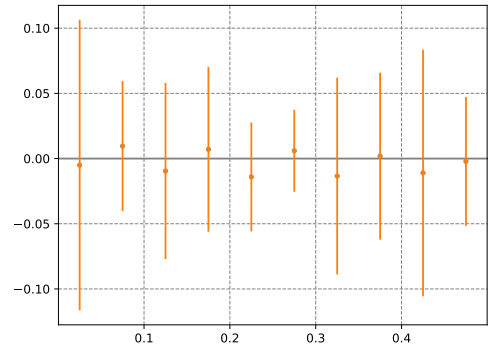


FIGURA (2) – Grafico dei residui

All'inizio del file si includono tutte le librerie necessarie per l'interpolazione dei dati (*numpy* e *math*), per la creazione dei grafici (la classe *pyplot* dalla libreria *matplotlib*) e per effettuare l'analisi tramite fit lineare (la funzione *curve_fit* della libreria *scipy*). Successivamente, abbiamo aperto i dati da noi misurati tramite la funzione *open* di *Python* e abbiamo definito una classe chiamata *Number* con i metodi *media* e *deviazione_standard* che effettuava tutti i calcoli necessari per determinare il valore medio e la deviazione standard dell'array passato al costruttore in cui erano presenti tutte le misurazioni di τ ad una certa distanza dal centro di massa.

Il blocco di codice qua accanto va a definire il vettore T e il vettore `sigma_T` (che contiene le incertezze sugli elementi di T) e iteriamo all'interno del file `data.txt` (che contiene sulle righe n misurazioni dell'oscillazione del pendolo ad una certa distanza d) per andare a "riempire" i due vettori: ogni riga del file viene presa e passata alla classe `Number` su cui vengono eseguite l'operazione di calcolo del valor medio e, successivamente, la misura della deviazione standard della media.

Successivamente definiamo il vettore L che contiene la distanza dei vari fori da un'estremità dell'asta che abbiamo usato nella riga successiva per definire il vettore d che effettivamente contiene la distanza del perno di rotazione dal centro di massa del sistema (e abbiamo avuto l'accortezza di porre le incertezze, come si può vedere nella riga successiva, 0.002m ad ogni cella del vettore `sigma_d`, che contiene le incertezze legate ad ogni elemento del vettore d , il doppio dell'incertezza perché, ogni elemento di L , è stato sottratto a 0.525m a cui era assegnata l'incertezza di 0.001m).

Tutti questi vettori vengono presi e passati alla funzione `curve_fit()` di `scipy` che si occupa di fare il fit lineare della funzione e le istruzioni successive usano le varie funzioni della libreria `matplotlib` per disegnare i grafici "Distanza-Periodo" e il grafico dei residui (con i relativi errori sulle ascisse e sulle ordinate).

```

24 T = np.ones(len(data))
25 sigma_T = np.ones(len(data))
26 for el in range(0, len(data)):
27     arr = Number(data[el])
28     T[el] = arr.media()
29     sigma_T[el] = arr.deviazione_standard()
30 T = T/10
31 sigma_T = sigma_T/10
32 L = np.array([0.95, 0.85, 0.75, 0.65, 0.55,
33              0.45, 0.35, 0.25, 0.15, 0.05])
34 d = abs(L - 0.525)
35 sigma_d = np.full(d.shape, 0.002)
36 g = 9.81
37 def period_model(d, l):
38     """Modello per il periodo del pendolo.
39     """
40     return 2.0 * np.pi * np.sqrt((l**2.0 /
41                                   12.0 + d**2.0) / (g * d))
42 plt.figure("Periodo")
43 # Scatter plot dei dati.
44 plt.errorbar(d, T, sigma_T, sigma_d, fmt="o")
45 popt, pcov = curve_fit(period_model, d, T,
46                        sigma=sigma_T)
47 l_hat = popt[0]
48 sigma_l = np.sqrt(pcov[0, 0])
49 print(l_hat, sigma_l)
50 x = np.linspace(0.01, 0.5, 100)
51 plt.plot(x, period_model(x, l_hat))
52 plt.errorbar(d, T, yerr=sigma_T, xerr=sigma_d,
53             fmt='.',)
54 plt.xlabel("d [m]")
55 plt.ylabel("Periodo [s]")
56 plt.grid(which="both", ls="dashed", color="gray")
57 r = T - period_model(d, l=1.05)
58 sigma_r = sigma_T
59 plt.savefig("massa_raggio.pdf")
60 plt.show()
61 plt.plot(d, r, linestyle='', marker='.',)
62 plt.axhline(y = 0, color = 'gray', linestyle =
63             '-')
64 plt.errorbar(d, r, sigma_r, sigma_d, fmt=".")
65 plt.show()

```

6 Conclusioni

Si è studiato il moto del pendolo fisico cercando di verificare se il modello teorico da noi scelto, che ricordiamo è della forma:

$$T(d) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + d^2}{gd}}$$

fosse corroborato dalle evidenze sperimentali.

Analizzando i dati tramite fit lineare con la libreria `scipy`, siamo giunti a concludere che il valore del best-fit \hat{l} risulta essere $\hat{l} = (1.037 \pm 0.002)$ m e dista $5.8 \sigma_{l-\hat{l}}$ dal valore atteso $l = (1.05 \pm 0.001)$ m, con una variazione percentuale dal valore atteso del $\Delta\% = \frac{l-\hat{l}}{\hat{l}} * 100 \approx 1.2\%$. Sebbene la variazione percentuale è molto piccola rispetto al valore atteso, non possiamo sicuramente affermare che la nostra misura sia "accurata" perché il nostro valore dista ben 5.8 barre di errore rispetto al valore da noi atteso. Si può ipotizzare che ciò derivi dal fatto che il nostro modello teorico non contemplava gli attriti dell'aria e del perno di rotazione: pertanto la libreria `scipy` ha sottostimato la lunghezza dell'asta per mettere in "accordo" il modello teorico con i T da noi calcolati su cui hanno agito gli attriti dovuti all'aria e alla rotazione attorno al perno (che non sono minimamente contemplati dal nostro modello teorico), oltre al fatto che il pendolo, durante le sue oscillazioni, disperdeva energia muovendosi anche in altre direzioni. Nonostante ciò, si osserva dal grafico dei residui (2) che questi oscillano, nelle barre di errore, intorno allo zero, indicando che non sono presenti degli errori sistematici (oppure che hanno influito minimamente) tali da sovrastimare o sottostimare il periodo del pendolo all'interno del nostro apparato sperimentale.

Nonostante le nostre difficoltà e la poca accuratezza della misura, proprio per la variazione percentuale molto piccola, riteniamo sia comunque giusto considerare adeguato il modello teorico, sebbene sarebbe necessario, per dimostrare in maniera più accurata la reale validità del nostro modello teorico, ripetere nuovamente le misurazioni per cercare di diminuire la distanza in barre di errore fra il valore del best-fit \hat{l} e il valore atteso provando a diminuire gli attriti presenti ed evitare che il pendolo si muova in altre direzioni, disperdendo energia cinetica.