Soluzioni agli esercizi di *Principles of Mathematical Analysis* di W. Rudin

Francesco Sermi

22 agosto 2024

Indice

Capitolo 1

The real and complex number system

① se r è razionale ($r \neq 0$) e x è irrazionale, provare che $r + x$ e rx sono irrazionali

Soluzione: Supponiamo per assurdo che $r \in \mathbb{Q}$ e x sia irrazionale, mentre $r + x$ e rx siano razionali. Allora, $r + x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Ma siccome $r \in \mathbb{Q} \implies \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$ e

$$r + x = \frac{p}{q} + x = \frac{m}{n} \implies x = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - qm}{qn} \implies x \in \mathbb{Q}$$

il che è assurdo.
Procediamo con rx alla solita maniera: se $rx \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{Z} : rx = \frac{m}{n}$. Ma allora, sapendo che $r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ in virtù della sua razionalità, $x = \frac{m}{nr} = \frac{mq}{np} \implies x \in \mathbb{Q}$ il che è nuovamente assurdo. □

② Provare che non esiste razionale q tale che $q^2 = 12$

Soluzione: si osservi il seguente lemma (di cui non daremo dimostrazione)

> **Lemma 1.1** (di Euclide)
> Sia $n \in \mathbb{Z}$ e n è primo.Se $n|ab$ e a è coprimo con b (o viceversa) allora $n|a \lor n|b$

Supponiamo per assurdo che $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 12$. Data la razionalità di q abbiamo che esistono $m, n \in \mathbb{Z} : q = \frac{m}{n}$ e m e n coprimi fra allora. Ciò implica che:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{12} \implies \frac{m^2}{n^2} = 12 \implies m^2 = 12n^2$$

Questo vuol dire che m è pari. Siccome $2|m \implies \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$ e dunque

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 12n^2 \implies k^2 = 3n^2$$

Siccome il lato destro è divisibile per 3 allora si deve avere che anche il lato sinistro è divisibile per 3 e dunque, per il lemma di Euclide, si osserva che si deve avere che $3|k \implies \exists q \in \mathbb{Z} : k = 3q$. Si deduce che

$$k^2 = 9q^2 = 3n^2 \implies n^2 = 3q^2$$

dunque n^2 è divisibile per 3 e, sempre per il lemma di Euclide, n è divisibile per 3. Ma allora si giunge ad un assurdo siccome $m = 2k$ con $3|k$ e $3|n$ contro l'ipotesi di coprimità fra m e n □

Un'ulteriore dimostrazione poteva essere effettuata basandosi sul fatto che $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ dunque, tramite l'esercizio 1, sappiamo che rx è irrazionale se x è irrazionale e r razionale quindi la dimostrazione si riduceva a provare che $\sqrt{3}$ è irrazionale.

③ Provare la seguente proposizione

Proposizione 1.1 Conseguenze degli assiomi moltiplicativi di cui gode il campo $\mathbb{R}$

Gli assiomi moltiplicativi di cui gode $\mathbb{R}$ implicano le seguenti proprietà:

1. Se $x \neq 0$ e $xy = xz \implies y = z$
2. Se $x \neq 0$ e $xy = x \implies y = 1$
3. Se $x \neq 0$ e $xy = 1 \implies y = x^{-1}$
4. Se $x \neq 0$ mostrare che $(x^{-1})^{-1} = x$

Soluzione: per dimostrare la 1, banalmente, si ha che:

$$y \overset{\text{esistenza di un elemento inverso e } x\neq 0}{=} xx^{-1}y \overset{\text{prop. commutativa}}{=} xzx^{-1} \overset{\text{prop. commutativa}}{=} xx^{-1}z = z \implies y = z$$

La 2 segue direttamente dalla prima ponendo $z = 1$, così come la 3 ponendo $z = x^{-1}$. Per la 4 si osserva che siccome $\forall x \neq 0, xx^{-1} = 1$ allora $\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = 1 \implies x\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = x \implies (\frac{1}{x})^{-1} = x$ □

4. Sia $E \subset A$ con A insieme ordinato (totalmente? Il Rudin non ce lo fa sapere ma è abbastanza probabile). Supponiamo che α sia un minorante di E e β sia un maggiorante di E. Provare che $\alpha \leqslant \beta$

Soluzione: per definizione abbiamo che se α è un minorante allora $\forall x \in E, \alpha \leqslant x$ e se β è un maggiorante allora $\forall x \in E, x \leqslant \beta$. Per transitività si ha che $\alpha \leqslant \beta$ □

5. Sia A un insieme non vuoto di numeri reali che è limitato inferiormente. Sia $-A$ l'insieme di tutti i numeri $-x$, con $x \in A$. Mostrare che
$$\inf A = -\sup(-A)$$

Soluzione: sia $y \in \mathbb{R}$ un minorante di A. Allora si osserva che, per definizione, $\forall x \in A, y \leqslant x \implies -y \geqslant -x$ dunque $-A$ sarà limitato superiormente. Siccome $\forall E \subset \mathbb{R} \implies \exists \sup E, \inf E \in \mathbb{R}$ allora sappiamo che $-A$ avrà $\sup(-A) \in \mathbb{R}$ che denoteremo con $z = \sup(-A)$ e mostriamo la tesi, ovvero che $\sup(-A) = -\inf A$: dobbiamo mostrare che $-z$ è l'estremo inferiore. Per farlo si osserva che se $w > -z \implies z > -w$ dunque $-w$ non è un maggiorante di $-A$ dunque $\exists y = -x(x \in A \text{ per def.}) \in -A, z > y > -w \implies -z < -y < w$ ma siccome $-y = -(-x) = x \implies x < w$ dunque w non è un minorante di A. Se invece supponiamo esista $w \in A : w < -z \implies -w > z$ ma $-w \in -A$ il che è assurdo siccome $\nexists w \in -A : w > \sup(-A)$. Dunque possiamo concludere che $\inf A = -\sup(-A)$ siccome abbiamo dimostrato che:

1. $-z$ è un minorante di A;
2. $\forall x > -z \implies x$ non è un minorante

□

6. Fissato $b > 1$

   (a) Se $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n > 0, q > 0$ e $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ mostrare che
   $$(b^m)^{\frac{1}{n}} = (b^p)^{\frac{1}{q}}$$
   Dunque ha senso definire $b^r = (b^m)^{\frac{1}{n}}$

   (b) Mostrare che $b^{r+s} = b^r b^s$ se $r, s \in \mathbb{Q}$

   (c) Se x è reale, definiamo $B(x)$ come l'insieme di tutti i numeri b^t, dove t è un numero razionale e $t \leqslant x$. Mostrare che
   $$b^r = \sup B(r)$$
   dunque ha senso definire
   $$b^x = \sup B(x)$$
   $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) Mostrare che $b^{x+y} = b^x b^y \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluzione: Per mostrare (a) si osserva che, dal teorema 1.21, si deve avere che esistono due numeri reali r_1 e r_2 che identificano univocamente $(b^m)^{\frac{1}{n}}$ e $(b^p)^{\frac{1}{q}}$ rispettivamente. La tesi dunque si ottiene mostrando che $r_1 = r_2$. Si osserva che $(r_1)^n = b^m$ e $(r_2)^q = b^p$ e, siccome r è razionale, possiamo scrivere che $m = rn$ e $p = rq$. Dunque

$$(r_1)^n = b^{rn} \qquad\qquad (r_2)^q = b^{rq}$$

ma elevando la prima eguaglianza da entrambi le parti per q e la seconda per n si ottiene che

$$(r_1)^{nq} = b^{rnq}, (r_2)^{nq} = b^{nqr} \implies r_1 = r_2$$

Per mostrare la (b) si osserva che se $r, s \in \mathbb{Q}$ allora si ha che $\exists m, n, p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$. Dunque

$$b^{r+s} = b^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = b^{\frac{mq+np}{nq}}$$

come prima sappiamo che esisteranno r_1 e r_2 univocamente determinati tali che $r_1 = b^{r+s}$ e $r_2 = b^r b^s$ e vogliamo mostrare che $r_1 = r_2$. Adesso si osserva che

$$(b^{r+s})^{nq} = b^{mq+np} = (r_1)^{nq}$$

e

$$(b^r b^s)^{nq} = (b^r)^{nq}(b^s)^{nq} = (b^{\frac{m}{n}})^{nq}(b^{\frac{p}{q}})^{nq} = b^{mq}b^{pn} = b^{mq+np}$$

dunque $(b^{r+s})^{nq} = (b^r b^s)^{nq} \implies b^{r+s} = b^r b^s$.
Per mostrare la (c) bisogna innanzitutto osservare che, definendo $B(x)$ come sopra si ha che, dati $t, s \in B(x), t \leqslant s \implies b^t \leqslant b^s$. Si può mostrare questo fatto in maniera abbastanza semplice ricordando come viene definita la relazione d'ordine $\leqslant$ sui razionali:

> **Lemma 1.2** b^x è crescente con $x \in \mathbb{Q}$
>
> b^x ristretta ai razionali è una funzione crescente

Dimostrazione: Supponiamo che $s, t \in \mathbb{Q}$ con $s \leqslant t$. Siccome s e t sono razionali, allora esisteranno $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $s = \frac{m}{n}$ e $t = \frac{p}{q}$. Dunque abbiamo che $s \leqslant t \iff mq \leqslant np$. Abbiamo che $b^s = (b^m)^{\frac{1}{n}}$ e $b^t = (b^p)^{\frac{1}{q}}$ e sappiamo che questi numeri identificano in maniera univoca, grazie al teorema 1.21, due distinti numeri reali (tranne nel caso in cui $s = t$). Si osserva che se $r_1 = (b^m)^{\frac{1}{n}} \implies (r_1)^n = b^m \implies (r_1)^{nq} = b^{mq} < b^{np} = (r_2)^{nq} \implies r_1 \leqslant r_2$ (prendere la radice non cambia la direzione della disuguaglianza siccome possiamo sfruttare l'identità $b^n - a^n = (b-a)\sum_{i=1}^{n} b^{n-i}a^{i-1}$ e osservare che $b^n \geqslant a^n \iff b \geqslant a$) □

Se consideriamo $B(r)$ con r razionale, allora si ha banalmente che $b^r \in B(r)$ e dev'essere l'estremo superiore: infatti, se consideriamo $t > r \implies b^t > b^r$, dunque $b^t > b^r \geqslant b^x \implies b^t > b^x \, \forall x : b^x \in B(r)$ dunque t è un maggiorante di $B(r)$. Mostriamo che $\forall b^x < b^r : b^x$ non è un maggiorante di $B(r)$: se per assurdo $\exists \alpha < b^r : \alpha$ è maggiorante, allora $\forall b^y \in B(r), b^y \leqslant \alpha < b^r$ il che è assurdo siccome $b^r \in B(r)$ e avremmo che $b^r \leqslant \alpha < b^r \implies b^r < b^r$.
Per mostrare la (d) si osserva che dobbiamo mostrare, per il punto precedente, che $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) = b^x b^y$. Per fare ciò faremo uso del seguente lemma

> **Lemma 1.3** Unicità del sup e inf
>
> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto limitato superiormente (inferiormente). Allora $\sup A$ ($\inf A$) esiste ed è unico

Dimostrazione: l'esistenza del $\sup A$ è garantita dall'assioma di completezza (o di Dedekind) dei reali. Per dimostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che il sup non sia unico ed esistano $m = \sup A$ $m' = \sup A$ con $m \neq m'$. Allora, per come è definito il sup, dobbiamo avere che $m \leqslant m'$ e $m' \leqslant m$ (siccome sia m e m' sono dei maggioranti e, per la precisione, il minore dei maggioranti) $\implies m = m'$ □

Torniamo all'esercizio e definiamo, prima di procedere, la sezione di Dedekind prodotto $B(x)B(y) = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \in B(x), t \in B(y) : x = st\}$ e si osserva che $\forall b^s \in B(x)$ e $\forall b^t \in B(y) \implies b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$ siccome $s \leqslant x$ e $t \leqslant y$ dunque $s + t \leqslant x + y$ dunque $B(x)B(y) \subseteq B(x+y)$. Tuttavia si osserva che $\forall z \in \mathbb{R} : b^z \in B(x+y)$ possiamo considerare invece i numeri razionali che soddisfano la seguente proprietà $t - x < p < y$ e consideriamo a questo punto $q = t - p$ da cui avremo che $t - x < p \implies t - p < x \implies q < x$ ma allora $t = p + q$, dunque:

$$b^t = b^{p+q} \overset{\text{per quanto visto sopra}}{=} b^p b^q \implies b^t \in B(x)B(y) \implies B(x+y) \subseteq B(x)B(y)$$

In conclusione, abbiamo quindi mostrato che $B(x)B(y) = B(x+y)$. Ora però dobbiamo mostrare che $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y)$: si osserva innanzitutto che $\sup B(x+y) = \sup B(x)B(y) \leqslant \sup B(x) \sup B(y)$. Mostriamo che il $\sup B(x) \sup B(y)$ è estremo superiore dell'insieme $B(x)B(y)$, osservando che

1. $\sup B(x) \sup B(y) \geqslant \sup B(x)B(y) \geqslant x \implies \sup B(x) \sup B(y) \geqslant x \, \forall x \in B(x)B(y)$ dunque $\sup B(x) \sup B(y)$ è maggiorante.

2. $\forall x < \sup B(x) \sup B(y) : x$ non è un maggiorante. Per mostrare questo fatto si mostra che $\sup B(x)B(y) = \sup B(x) \sup B(y)$ per assurdo, supponendo (in virtù di quanto detto prima) che $\sup B(x)B(y) < \sup B(x) \sup B(y) \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < \sup B(x)$ e, sempre ragionando alla stessa maniera, possiamo concludere che $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(x)} < \sup B(y)$: si osserva che la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$ non è un maggiorante di $B(x)$ (per definizione di $\sup B(x)$ di cui la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$ è minore) e dunque $\exists r \in \mathbb{Q} : b^r \in B(x) : \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < b^r \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y) \implies \exists s \in \mathbb{Q} : b^s \in B(y) : \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < b^s$ (perché, ragionando come prima, se la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y)$ deve esistere un numero razionale per cui la disuguaglianza è stretta). Ma allora si giunge ad un assurdo siccome $\sup B(x)B(y) = \sup B(x+y) < b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$ che è un assurdo.

Dunque $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) \implies b^{x+y} = b^x b^y \, \forall x, y \in \mathbb{R}$ □

7. Fissato $b > 1, y > 0$; provare che esiste un unico reale x tale che $b^x = y$ utilizzando la seguente "scaletta":
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, b^n - 1 \geqslant n(b-1)$
   (b) Dunque $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$
   (c) Se $t > 1$ e $n > \frac{b-1}{t-1}$ allora $b^{\frac{1}{n}} < t$
   (d) Se $b^w < y$ allora $b^{w+\frac{1}{n}} < y$ per n sufficientemente grande (*suggerimento*: per vedere questo applicare $t = yb^{-w}$ a (c))
   (e) se $b^w > y$ allora $b^{w-\frac{1}{n}} > y$ per n sufficiente grande
   (f) Sia A l'insieme di tutti i w tali che $b^w < y$ e mostrare che $x = \sup A$ soddisfa $b^x = y$
   (g) Provare che x è unico

Soluzione: per mostrare la (a) possiamo usare la seguente identità e osservare che $b^i > 1 \forall i \in \mathbb{N} : i \geqslant 0 \implies \sum_{i=0}^{n+1} b^i \geqslant \sum_{i=0}^{n+1} 1 = n + 1$

$$b^{n+1} - 1 = (b-1)(b^n + b^{n-1} + \ldots + b + 1) \geqslant (b-1)(n+1)$$

Potevamo altrimenti ragionare per induzione osservando che $b^{n+1} - 1 = (b^{n+1} + b) - (b-1) = b(b^n - 1) - (b-1) \geqslant bn(b-1) - (b-1) = (b-1)(bn-1) \geqslant (b-1)(n+1)$ e osservare che la tesi è banalmente vera per $n = 0$.
Per mostrare la (b) possiamo usare il seguente lemma:

Lemma 1.4
Sia $b > 1$ allora $b^{\frac{1}{n}} > 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione: Supponiamo che $b^p = \beta > 1$ con $p \in \mathbb{N}$ e per il teorema 1.21 sappiamo che esiste un unico numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^p = \beta$ che indichiamo con $\beta^{\frac{1}{p}}$ dunque possiamo avere due possibili alternative: $\beta^{\frac{1}{p}} < 1$ o $\beta^{\frac{1}{p}} > 1$ ma si osserva che se per assurdo $\beta^{\frac{1}{p}} < 1 \implies (\beta^{\frac{1}{p}})^p < 1$ per gli assiomi di campo, il che è in contraddizione col fatto che $\beta > 1$.

Oss:-

Si osservi che $\beta^{\frac{1}{p}} \neq 1$ siccome implicherebbe che $\frac{1}{p} = 0$ il che è impossibile

□

Dunque, siccome $b^{\frac{1}{n}} > 1$, vale la proprietà che abbiamo mostrato prima: ponendo $t = b^{\frac{1}{n}} \implies t^n - 1 \geqslant n(t-1)$ ovvero $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$.
Per mostrare la (c) si osserva che se $t > 1$ e $n > \frac{b-1}{t-1}$ allora sappiamo che $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \geqslant \frac{b-1}{t-1}(b^{\frac{1}{n}-1} - 1) \implies 1 > \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{t-1} \implies b^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant t - 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < t$.
Per mostrare la (d) si osserva che se $b^w < y \implies yb^{-w} > 1$ dunque è possibile applicare la (c) utilizzando $t = yb^{-w}$ dunque $b^{\frac{1}{n}} < yb^{-w} \implies b^{\frac{1}{n}+w} < y$ naturalmente per $n > \frac{b-1}{yb^{-w}-1}$.
La dimostrazione per (e) è simile tuttavia cambia la "partenza", infatti la proprietà che abbiamo usato per mostrare (d) richiede che $t > 1$ e si osserva che se $b^w > y \implies \frac{b^w}{y} > 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < \frac{b^w}{y} \implies b^{w-\frac{1}{n}} > 1$.
Per mostrare (f) si osserva che $A = \{w \in \mathbb{R} : b^w < y\}$ è sicuramente non vuoto e ammette un $\sup A$: si osserva innanzitutto che se $y > 1$ allora $0 \in A$ dunque non è vuoto, se $y = 1$ si osserva che $b^{-1} = \frac{1}{b} < 1 \implies -1 \in A$ e se $0 < y < 1$ si ha che $\frac{1}{y} > 1$ e possiamo mostrare tramite il seguente lemma:

Lemma 1.5 $y = b^x$ non è limitata superiormente

Sia $b > 1$. Allora l'insieme

$$\mathcal{S} = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato superiormente

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che sia limitato superiormente allora $\exists \sup \mathcal{S} := \alpha$ allora $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha > b^n$. Per caratterizzazione del $\sup \mathcal{S}$ si ha che $\forall x < \alpha, x$ non è un maggiorante, dunque $\frac{\alpha}{b} < \alpha$ non è maggiorante, dunque esiste $k \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{b} < b^k \implies \alpha < b^{k+1}$ il che è assurdo □

Tramite questo lemma sappiamo che deve esistere dunque un $n \in \mathbb{N} : b^n > \frac{1}{y} \implies b^{-n} < y \implies -n \in A$. A questo punto mostriamo che $x = \sup A$ soddisfa $b^x = y$: supponiamo che $b^x < y \implies b^{x+\frac{1}{n}} < y \implies x + \frac{1}{n} \in A$ dunque questo contraddice la definizione di estremo superiore (x non è un maggiorante); se invece $b^x > y \implies b^{x-\frac{1}{n}} > y \implies x - \frac{1}{n}$ è a sua volta un maggiorante quindi contraddice la definizione di estremo superiore (non è soddisfatta la proprietà secondo cui $\forall x < \sup \mathcal{S}, x$ non è maggiorante. Dunque l'unica possibilità è che $b^x = y$.
Per mostrare che x è unico supponiamo per assurdo che $\exists x$ e x' tali che $x \neq x'$ e $b^x = b^{x'} = y$. Abbiamo due possibilità: $x' > x$ oppure $x > x'$ e, senza perdita di generalità, mostriamo solamente che si giunge ad una contraddizione se $x' > x$ (la dimostrazione è equivalente nell'altro caso): si consideri il sistema

$$\begin{cases} b^x = y \\ b^{x'} = y \end{cases}$$

allora dividendo membro a membro avremo che $b^{x'-x} = 1$ ma siccome $x' - x > 0 \implies b^{x'-x} > 1$, il che è assurdo (il fatto che $b^w > 1$ se $w > 0$ segue dal fatto che un qualunque numero razionale[1] positivo possa essere scritto come $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ e sappiamo che $b^m > 1$ e, per il lemma 1.4, concludiamo che $(b^m)^{\frac{1}{n}} > 1$). □

8. Mostrare che non è possibile definire una relazione d'ordine sull'insieme dei numeri complessi che renda il campo (dei numeri complessi) ordinato

Soluzione: supponiamo per assurdo che possa essere introdotta una relazione d'ordine che renda il campo dei numeri complessi un campo ordinato, allora vuol dire che:

1. $i > 0$
2. $i < 0$

[1] nel caso dei reali si considera la sezione di Dedekind e dunque si prende un razionale appartenente alla sezione su cui valgono le considerazioni che ora sto per enunciare

ma allora se supponiamo che $i > 0$ allora $i \cdot i > 0 \cdot i \implies -1 > 0$ ma questo contraddice completamente il fatto $1 > 0$ in un campo ordinato e dunque $-1 < 0$. Se invece $i < 0 \implies (-i) > 0 \implies (-i) \cdot (-i) > 0 \implies -1 > 0$ che è nuovamente assurdo. Naturalmente si è escluso il caso $i = 0$ per ragioni banali. $\square$

9 Supponiamo che $z = a + bi$ e $w = c + di$ e definiamo su di essi una relazione d'ordine tale che $z < w$ se $a < c$ e anche se $a = c$ ma $b < d$. Mostrare che questo trasforma l'insieme dei numeri complessi in un insieme ordinato. Questo ordine possiede anche la proprietà del sup?

Soluzione: Mostriamo che questa relazione d'ordine soddisfa le proprietà: dati due numeri complessi z e w si osserva che i numeri reali sono un campo ordinato, dunque avremo sempre che $a < c$ oppure $a > c$ oppure $a = c$ (nel primo caso avremo che $z < w$ e nel secondo caso $z > w$). L'unico caso non banale è $a = c$ che possiamo risolvere "guardando" le componenti immaginarie dei numeri complessi, che saranno a loro volta sempre dei numeri reali che, essendo ordinati, avremo sempre che $b < d$ oppure $b > d$ oppure $b = d$ (nel primo caso avremo $z < w$ e nel secondo $z > w$). Se $b = d$ allora si deve concludere che $z = w$: abbiamo quindi dimostrato che, dati due elementi $z, w \in \mathbb{C}$ vale sempre uno dei seguenti predicati:

$$z < w \qquad\qquad z = w \qquad\qquad z > w$$

Adesso dobbiamo mostrare che se $z < w$ e $w < u$ allora $z < u$. Sia adesso $u = e + fi$ e sapendo che $z < w$ si pongono davanti a noi due possibilità:

- $a < c$
- $a = c \wedge b < d$

e ragionando similmente con $w < u$ dobbiamo concludere che ci sono due sole possibilità:

- $c < e$
- $c = e \wedge d < f$

e adesso guardiamo a tutte le possibili configurazioni (4 in totale):

1. $a < c \wedge c < e \implies a < e \implies z < u$ (per la transitività della relazione d'ordine $<$)
2. $a < c \wedge (c = e \wedge b < d) \implies a < e \implies z < u$ (siccome $c = e$)
3. $(a = c \wedge b < d) \wedge (c < e) \implies a < e \implies z < u$ (siccome $a = c < e$)
4. $(a = c \wedge b < d) \wedge (c = e \wedge d < f) \implies b < d < f \implies b < f \implies z < u$

Per mostrare che questo insieme non possiede la proprietà dell'estremo superiore, consideriamo l'insieme definito nella seguente maniera

$$A = \{a + bi \in \mathbb{C} : a \leqslant 0\}$$

si osserva che tutti i numeri immaginari con parte reale positiva sono dei maggioranti dunque A è limitato superiormente. Supponiamo per assurdo che $\exists C \in \mathbb{C} : C \geqslant x \, \forall x \in A$ allora questo implica necessariamente che $\mathrm{Re}(C) > 0$ (altrimenti non potrebbe essere un maggiorante di ogni elemento dell'insieme A) ma si osserva che fallisce miseramente la proprietà caratterizzante del sup secondo cui $\forall x < C, x$ non è maggiorante siccome qualunque numero nella forma $\frac{\mathrm{Re}(C)}{n} + bi$ con $n \in \mathbb{N}$ sarà minore di C ma sarà un maggiorante di A. $\square$

10 Supporre che $z = a + bi$ e $w = u + iv$ e

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

provare che $z^2 = w$ se $v \geqslant 0$ e che $(\bar{z})^2 = w$ se $v \leqslant 0$. Concludere che ogni numero complesso (con una eccezione) ha due radici complesse

Soluzione: calcoliamo $z^2 = (a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi = \frac{|w|+u}{2} - \frac{|w|-u}{2} + 2\left(\frac{|w|^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u+2i\left(\frac{u^2+v^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u+i|v|$. Distinguiamo due casi:

$$z^2 = \begin{cases} u+iv = w & \text{se } v \geqslant 0 \\ u-iv = \bar{w} & \text{se } v \leqslant 0 \end{cases}$$

adesso calcoliamo $(\bar{z})^2 = (a-bi)^2 = a^2-b^2-2abi$ e procedendo come prima si deduce che $(\bar{z})^2 = u - |v|i$:

$$(\bar{z})^2 = \begin{cases} u+iv = w & \text{se } v \leqslant 0 \\ u-iv = \bar{w} & \text{se } v \geqslant 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo ottenuto quanto richiesto. Per mostrare che ogni numero complesso ha due radici si osservi che nell'esercizio abbiamo mostrato che z definito come mostrato soddisfa il fatto che $z^2 = w$. Ora se $v > 0$ allora si ha che le radici di w sono z e $-z$ mentre se $v < 0$ allora si ha che le radici sono $\bar{z}$ e $-\bar{z}$. Se invece $v = 0 \implies z^2 = a \implies z = \pm\sqrt{a}$ mentre se $u = v = 0 \implies z = \bar{z} = 0$ □

(11) Se z è un numero complesso, mostrare che esiste un numero $r \geqslant 0$ e un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$ tale che $z = rw$. Sono r e w identificati unicamente da z

Soluzione: Se si considera $w = \frac{z}{|z|} \implies |w| = 1$ e si considera $r = |z|$ dunque $z = rw = |z|\frac{z}{|z|} = z$ e questi sono univocamente determinati se $z \neq 0$ (in tal caso $r = 0$ ma $w = a + bi \, \forall a, b \in \mathbb{R}$) □

(12) Se $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mostrare che:

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$$

Soluzione: si procede per induzione sul numero di termini, osservando che per $n = 1$ e $n = 2$ è banalmente vero. Mostriamo che $n \implies n+1$:

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |\alpha + z_{n+1}|$$

dove con $\alpha = z_1 + \ldots + z_n$. Siccome nell'ultimo valore assoluto abbiamo solamente "due" numeri, deve valere l'ipotesi induttiva, dunque:

$$|\alpha + z_{n+1}| \leqslant |\alpha| + |z_{n+1}| \overset{\text{ip. induttiva}}{\leqslant} |z_1| + \ldots + |z_{n+1}|$$

□

(13) Se x, y sono complessi, mostrare che

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Soluzione: si osserva che $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leqslant |x - y|$ ma ragionando similmente con $|y| = |y + x - x| \leqslant |x - y| + |x| \implies |y| - |x| \leqslant |x - y|$. Siccome i reali sono ordinati dovremo avere che $|y| > |x|$ oppure $|x| > |y|$ dunque abbiamo che $||x| - |y|| = |x| - |y|$ oppure $||x| - |y|| = |y| - |x|$. In ogni caso abbiamo ottenuto in entrambi i casi una relazione dove $|x - y|$ maggiora entrambe le due espressioni, dunque:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

□

(14) Se $z \in \mathbb{C}$ è un numero complesso tale che $|z| = 1$ (dunque $z\bar{z} = 1$) calcolare

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

Soluzione: si osserva che, ponendo $z = a + bi$, $|1 + z|^2 = (a + 1)^2 + b^2$ mentre $|1 - z|^2 = (1 - a)^2 + b^2$, dunque

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = (a + 1)^2 + b^2 + b^2 + (1 - a)^2 = 2b^2 + (a + 1)^2 + (a - 1)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2 = 2|z| + 2 = 4$$

□

(15) Sotto quali condizioni è valida l'equazione nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?

Soluzione: nella dimostrazione di Cauchy-Schwarz abbiamo visto che l'eguaglianza sussiste se $b_i = 0\,\forall i$ e anche se i termini a_i sono proporzionali a quelli b_i (in pratica se i vettori a e b sono linearmente dipendenti). □

(16) Mostrare che se $k \geqslant 3, x, y \in \mathbb{R}^k, |x - y| = d > 0$ e $r > 0$ allora

(a) se $2r > d$ ci sono infiniti $z \in \mathbb{R}^k$ tali che

$$|z - x| = |z - y| = r$$

(b) se $2r = d$ allora esiste un unico $z \in \mathbb{R}^k$ che soddisfa la proprietà sopra

(c) se $2r < d$ allora non esiste nessuno $z \in \mathbb{R}^k$

Soluzione: ancora niente □

(17) Mostrare che

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

se $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^k$. Interpretare questo risultato in virtù dei parallelogrammi

Soluzione:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y$$
$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y$$

dunque $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$. Se x e y sono i lati di un parallelogramma, questo risultato ci dice che le sue diagonali $x + y$ e $x - y$ soddisfano il fatto che la somma delle loro norme è uguale alla somma del doppio delle norme dei due lati x e y □

(18) Se $k \geqslant 2$ e $x \in \mathbb{R}^k$, mostrare che esiste un unico $y \in \mathbb{R}^k$ tale che $y \neq 0$ ma $x \cdot y = 0$. E' vero per $k = 1$?

Soluzione: siccome il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^k$ è non degenere, dalla formula delle dimensioni del radicale possiamo considerare il sottospazio generato dal vettore x che indichiamo con U (che avrà dimensione 1) e il radicale $U^\perp$ (che avrà dimensione $k-1$). Dunque, siccome $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale, esiste sicuramente un elemento y tale che $x \cdot y = 0$. □

Capitolo 2

Basic topology

Per affrontare alcuni esercizi di questo capitolo farò uso del seguente teorema presente nel libro (di cui comunque riporto la dimostrazione) per poter usufruire di una serie di lemmi molto utili:

Teorema 2.1 Unione contabile di insiemi contabili è contabile

Sia S una famiglia contabile di insiemi contabili S_i. Allora

$$\bigcup_i S_i$$

è contabile

Dimostrazione: la dimostrazione si basa sul fatto è possibile che costruire una successione tale che $x_{nk} = s_k \in S_n$ ovvero "mappa" ogni nk (non è un prodotto: il numero è composto dalle cifre di n e le cifre di k accostate) nel k-elemento dell'insieme S_n. In questa maniera possiamo vedere che:

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & \cdots \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Figura 2.1: Gli elementi appartenenti all'elemento S_i si trovano tutti disposti sulla riga i-esima

e dunque si osserva che possiamo "arrangiare" questi elementi in una sequenza del tipo

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, \cdots$$

e definire una funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \bigcup_i S_i$ tale che $1 \mapsto x_{11}$, $2 \mapsto x_{21}$, $3 \mapsto x_{12}$ e così via. □

① Mostrare che l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme

Soluzione: possiamo effettuare due dimostrazioni di questo fatto: una costruttiva e una per assurdo. Procediamo con la prima: per definizione, se $\emptyset \subset A$ allora $\forall x, x \in \emptyset \implies x \in A$ ma siccome, per definizione dell'insieme vuoto[1], $x \notin \emptyset$ allora la proposizione $x \in \emptyset$ è falsa ma la proposizione $x \in A$ è vera per ogni $x \in A$ e per le tabelle di verità dell'implicazione concludiamo che l'implicazione $x \in \emptyset \implies x \in A$ è vera, dunque $\emptyset \subset A$.
Procediamo adesso per assurdo: supponiamo invece che $\emptyset \not\subset A$, ovvero $\exists x, x \in \emptyset \land x \notin A$, ma questo è assurdo siccome, per definizione di insieme vuoto, non esiste un elemento che appartiene all'insieme. □

[1] gli assiomi ZFC affermano che esiste un insieme A (che denotiamo con $\emptyset$) che soddisfa la proprietà $\forall x, x \notin A$

② Un numero complesso è detto *algebrico* se esistono degli interi $a_0, \cdots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Mostrare che l'insieme dei numeri algebrici è contabile. *Suggerimento*: per ogni intero positivo N esistono solo un numero finito di equazioni con

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N$$

Oss:-

Nella soluzione mostrata qua sotto presento una soluzione senza usare il suggerimento qua presentato siccome non riuscivo a mostrare come fosse vero. Comunque l'idea di base rimane sempre la stessa, siccome non c'è bisogno di passare per $\mathbb{Z}^k$ e osservare che l'unione di tutti gli insiemi $N \in \mathbb{N} : n + |a_0| + \cdots + |a_n| = N$ prende ogni soluzione

Soluzione: identifichiamo ogni equation come $a = (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ con $a_k \in \mathbb{Z}$. Per un noto teorema della teoria sappiamo che[2] $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^n$. Tuttavia sappiamo che ogni equazione possiede al massimo n soluzioni, dunque possiamo definire per ogni polinomio (che identifichiamo con a) p l'insieme R_p delle radici associate che sarà dunque finito. Dunque definiamo

$$\mathcal{A} = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^k} R_a$$

ma si tratta di un'unione contabile di insiemi al più contabili dunque $\mathcal{A}$ è contabile. □

③ Provare che esistono dei numeri reali che sono algebrici

Soluzione: Si procede per assurdo, dunque neghiamo la nostra tesi (che è $\exists x \in \mathbb{R} : x$ non è algebrico) e supponiamola vera, ovvero $\forall x \in \mathbb{R}, x$ è algebrico. Ma allora risulta che $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$ dove $\mathcal{A}$ denota l'insieme dei numeri algebrici. Ma allora questo contraddice il teorema 2.8 (*Ogni sottoinsieme infinito di un insieme contabile A è contabile*). Dunque $\exists x \in \mathbb{R} : x$ non è algebrico. □

④ L'insieme dei numeri irrazionali è contabile?

Soluzione: No, infatti se supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri irrazionali, che denotiamo con $\mathbb{U}$, è contabile. Allora, siccome $\mathbb{Q}$ è contabile, si deve avere che $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{U}$ è contabile (siccome unione di insiemi contabili) il che è assurdo. □

[2]per mostrare l'equipotenza fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possiamo costruire la seguente funzione bigettiva:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } 2 \mid n \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } 2 \nmid n \end{cases}$$