

Soluzioni agli esercizi di *Principles of Mathematical Analysis* di W.  
Rudin

Francesco Sermi

25 agosto 2024

# Indice

## Capitolo 1

The real and complex number system \_\_\_\_\_ Pagina 2 \_\_\_\_\_

## Capitolo 2

Basic topology \_\_\_\_\_ Pagina 10 \_\_\_\_\_

# Capitolo 1

## The real and complex number system

- ① se  $r$  è razionale ( $r \neq 0$ ) e  $x$  è irrazionale, provare che  $r + x$  e  $rx$  sono irrazionali

**Soluzione:** Supponiamo per assurdo che  $r \in \mathbb{Q}$  e  $x$  sia irrazionale, mentre  $r + x$  e  $rx$  siano razionali. Allora,  $r + x = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Ma siccome  $r \in \mathbb{Q} \implies \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$  e

$$r + x = \frac{p}{q} + x = \frac{m}{n} \implies x = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - qm}{qn} \implies x \in \mathbb{Q}$$

il che è assurdo.

Procediamo con  $rx$  alla solita maniera: se  $rx \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{Z} : rx = \frac{m}{n}$ . Ma allora, sapendo che  $r = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  in virtù della sua razionalità,  $x = \frac{m}{nr} = \frac{mq}{np} \implies x \in \mathbb{Q}$  il che è nuovamente assurdo.  $\square$

- ② Provare che non esiste razionale  $q$  tale che  $q^2 = 12$

**Soluzione:** si osservi il seguente lemma (di cui non daremo dimostrazione)

**Lemma 1.1 (di Euclide)**

Sia  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n$  è primo. Se  $n|ab$  e  $a$  è coprimo con  $b$  (o viceversa) allora  $n|a \vee n|b$

Supponiamo per assurdo che  $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 12$ . Data la razionalità di  $q$  abbiamo che esistono  $m, n \in \mathbb{Z} : q = \frac{m}{n}$  e  $m$  e  $n$  coprimi fra allora. Ciò implica che:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{12} \implies \frac{m^2}{n^2} = 12 \implies m^2 = 12n^2$$

Questo vuol dire che  $m$  è pari. Siccome  $2|m \implies \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$  e dunque

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 12n^2 \implies k^2 = 3n^2$$

Siccome il lato destro è divisibile per 3 allora si deve avere che anche il lato sinistro è divisibile per 3 e dunque, per il lemma di Euclide, si osserva che si deve avere che  $3|k \implies \exists q \in \mathbb{Z} : k = 3q$ . Si deduce che

$$k^2 = 9q^2 = 3n^2 \implies n^2 = 3q^2$$

dunque  $n^2$  è divisibile per 3 e, sempre per il lemma di Euclide,  $n$  è divisibile per 3. Ma allora si giunge ad un assurdo siccome  $m = 2k$  con  $3|k$  e  $3|n$  contro l'ipotesi di coprimità fra  $m$  e  $n$   $\square$

Un'ulteriore dimostrazione poteva essere effettuata basandosi sul fatto che  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  dunque, tramite l'esercizio 1, sappiamo che  $rx$  è irrazionale se  $x$  è irrazionale e  $r$  razionale quindi la dimostrazione si riduceva a provare che  $\sqrt{3}$  è irrazionale.

- ③ Provare la seguente proposizione

**Proposizione 1.1** Conseguenze degli assiomi moltiplicativi di cui gode il campo  $\mathbb{R}$ 

Gli assiomi moltiplicativi di cui gode  $\mathbb{R}$  implicano le seguenti proprietà:

- ① Se  $x \neq 0$  e  $xy = xz \implies y = z$
- ② Se  $x \neq 0$  e  $xy = x \implies y = 1$
- ③ Se  $x \neq 0$  e  $xy = 1 \implies y = x^{-1}$
- ④ Se  $x \neq 0$  mostrare che  $(x^{-1})^{-1} = x$

**Soluzione:** per dimostrare la ①, banalmente, si ha che:

$$y \stackrel{\text{esistenza di un elemento inverso e } x \neq 0}{=} xx^{-1}y \stackrel{\text{prop. commutativa}}{=} xzx^{-1} \stackrel{\text{prop. commutativa}}{=} xx^{-1}z = z \implies y = z$$

La ② segue direttamente dalla prima ponendo  $z = 1$ , così come la ③ ponendo  $z = x^{-1}$ . Per la ④ si osserva che siccome  $\forall x \neq 0, xx^{-1} = 1$  allora  $\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = 1 \implies x\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = x \implies (\frac{1}{x})^{-1} = x$   $\square$

- ④ Sia  $E \subset A$  con  $A$  insieme ordinato (totalmente? Il Rudin non ce lo fa sapere ma è abbastanza probabile). Supponiamo che  $\alpha$  sia un minorante di  $E$  e  $\beta$  sia un maggiorante di  $E$ . Provare che  $\alpha \leq \beta$

**Soluzione:** per definizione abbiamo che se  $\alpha$  è un minorante allora  $\forall x \in E, \alpha \leq x$  e se  $\beta$  è un maggiorante allora  $\forall x \in E, x \leq \beta$ . Per transitività si ha che  $\alpha \leq \beta$   $\square$

- ⑤ Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali che è limitato inferiormente. Sia  $-A$  l'insieme di tutti i numeri  $-x$ , con  $x \in A$ . Mostrare che

$$\inf A = -\sup(-A)$$

**Soluzione:** sia  $y \in \mathbb{R}$  un minorante di  $A$ . Allora si osserva che, per definizione,  $\forall x \in A, y \leq x \implies -y \geq -x$  dunque  $-A$  sarà limitato superiormente. Siccome  $\forall E \subset \mathbb{R} \implies \exists \sup E, \inf E \in \mathbb{R}$  allora sappiamo che  $-A$  avrà  $\sup(-A) \in \mathbb{R}$  che denoteremo con  $z = \sup(-A)$  e mostriamo la tesi, ovvero che  $\sup(-A) = -\inf A$ : dobbiamo mostrare che  $-z$  è l'estremo inferiore. Per farlo si osserva che se  $w > -z \implies z > -w$  dunque  $-w$  non è un maggiorante di  $-A$  dunque  $\exists y = -x (x \in A \text{ per def.}) \in -A, z > y > -w \implies -z < -y < w$  ma siccome  $-y = -(-x) = x \implies x < w$  dunque  $w$  non è un minorante di  $A$ . Se invece supponiamo esista  $w \in A : w < -z \implies -w > z$  ma  $-w \in -A$  il che è assurdo siccome  $\nexists w \in -A : w > \sup(-A)$ . Dunque possiamo concludere che  $\inf A = -\sup(-A)$  siccome abbiamo dimostrato che:

- ①  $-z$  è un minorante di  $A$ ;
- ②  $\forall x > -z \implies x$  non è un minorante

$\square$

- ⑥ Fissato  $b > 1$

- (a) Se  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n > 0, q > 0$  e  $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  mostrare che

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = (b^p)^{\frac{1}{q}}$$

Dunque ha senso definire  $b^r = (b^m)^{\frac{1}{n}}$

- (b) Mostrare che  $b^{r+s} = b^r b^s$  se  $r, s \in \mathbb{Q}$
- (c) Se  $x$  è reale, definiamo  $B(x)$  come l'insieme di tutti i numeri  $b^t$ , dove  $t$  è un numero razionale e  $t \leq x$ . Mostrare che

$$b^r = \sup B(r)$$

dunque ha senso definire

$$b^x = \sup B(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

(d) Mostrare che  $b^{x+y} = b^x b^y \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Soluzione:** Per mostrare (a) si osserva che, dal teorema 1.21, si deve avere che esistono due numeri reali  $r_1$  e  $r_2$  che identificano univocamente  $(b^m)^{\frac{1}{n}}$  e  $(b^p)^{\frac{1}{q}}$  rispettivamente. La tesi dunque si ottiene mostrando che  $r_1 = r_2$ . Si osserva che  $(r_1)^n = b^m$  e  $(r_2)^q = b^p$  e, siccome  $r$  è razionale, possiamo scrivere che  $m = rn$  e  $p = rq$ . Dunque

$$(r_1)^n = b^{rn} \quad (r_2)^q = b^{rq}$$

ma elevando la prima eguaglianza da entrambi le parti per  $q$  e la seconda per  $n$  si ottiene che

$$(r_1)^{nq} = b^{rnq}, (r_2)^{nq} = b^{nrq} \implies r_1 = r_2$$

Per mostrare la (b) si osserva che se  $r, s \in \mathbb{Q}$  allora si ha che  $\exists m, n, p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{m}{n}$  e  $s = \frac{p}{q}$ . Dunque

$$b^{r+s} = b^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = b^{\frac{mq+np}{nq}}$$

come prima sappiamo che esisteranno  $r_1$  e  $r_2$  univocamente determinati tali che  $r_1 = b^{r+s}$  e  $r_2 = b^r b^s$  e vogliamo mostrare che  $r_1 = r_2$ . Adesso si osserva che

$$(b^{r+s})^{nq} = b^{mq+np} = (r_1)^{nq}$$

e

$$(b^r b^s)^{nq} = (b^r)^{nq} (b^s)^{nq} = (b^{\frac{m}{n}})^{nq} (b^{\frac{p}{q}})^{nq} = b^{mq} b^{pn} = b^{mq+np}$$

dunque  $(b^{r+s})^{nq} = (b^r b^s)^{nq} \implies b^{r+s} = b^r b^s$ .

Per mostrare la (c) bisogna innanzitutto osservare che, definendo  $B(x)$  come sopra si ha che, dati  $t, s \in B(x), t \leq s \implies b^t \leq b^s$ . Si può mostrare questo fatto in maniera abbastanza semplice ricordando come viene definita la relazione d'ordine  $\leq$  sui razionali:

**Lemma 1.2**  $b^x$  è crescente con  $x \in \mathbb{Q}$

$b^x$  ristretta ai razionali è una funzione crescente

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $s, t \in \mathbb{Q}$  con  $s \leq t$ . Siccome  $s$  e  $t$  sono razionali, allora esisteranno  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$  tali che  $s = \frac{m}{n}$  e  $t = \frac{p}{q}$ . Dunque abbiamo che  $s \leq t \iff mq \leq np$ . Abbiamo che  $b^s = (b^m)^{\frac{1}{n}}$  e  $b^t = (b^p)^{\frac{1}{q}}$  e sappiamo che questi numeri identificano in maniera univoca, grazie al teorema 1.21, due distinti numeri reali (tranne nel caso in cui  $s = t$ ). Si osserva che se  $r_1 = (b^m)^{\frac{1}{n}} \implies (r_1)^n = b^m \implies (r_1)^{nq} = b^{mq} < b^{np} = (r_2)^{nq} \implies r_1 < r_2$  (prendere la radice non cambia la direzione della disuguaglianza siccome possiamo sfruttare l'identità  $b^n - a^n = (b-a) \sum_{i=1}^n b^{n-i} a^{i-1}$  e osservare che  $b^n \geq a^n \iff b \geq a$ )  $\square$

Se consideriamo  $B(r)$  con  $r$  razionale, allora si ha banalmente che  $b^r \in B(r)$  e dev'essere l'estremo superiore: infatti, se consideriamo  $t > r \implies b^t > b^r$ , dunque  $b^t > b^r \geq b^x \implies b^t > b^x \forall x : b^x \in B(r)$  dunque  $t$  è un maggiorante di  $B(r)$ . Mostriamo che  $\forall b^x < b^r : b^x$  non è un maggiorante di  $B(r)$ : se per assurdo  $\exists \alpha < b^r : \alpha$  è maggiorante, allora  $\forall b^y \in B(r), b^y \leq \alpha < b^r$  il che è assurdo siccome  $b^r \in B(r)$  e avremmo che  $b^r \leq \alpha < b^r \implies b^r < b^r$ .

Per mostrare la (d) si osserva che dobbiamo mostrare, per il punto precedente, che  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) = b^x b^y$ . Per fare ciò faremo uso del seguente lemma

**Lemma 1.3** Unicità del sup e inf

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto limitato superiormente (inferiormente). Allora  $\sup A$  ( $\inf A$ ) esiste ed è unico

**Dimostrazione:** l'esistenza del  $\sup A$  è garantita dall'assioma di completezza (o di Dedekind) dei reali. Per dimostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che il sup non sia unico ed esistano  $m = \sup A$   $m' = \sup A$  con  $m \neq m'$ . Allora, per come è definito il sup, dobbiamo avere che  $m \leq m'$  e  $m' \leq m$  (siccome sia  $m$  e  $m'$  sono dei maggioranti e, per la precisione, il minore dei maggioranti)  $\implies m = m'$   $\square$

Torniamo all'esercizio e definiamo, prima di procedere, la sezione di Dedekind prodotto  $B(x)B(y) = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \in B(x), t \in B(y) : x = st\}$  e si osserva che  $\forall b^s \in B(x)$  e  $\forall b^t \in B(y) \implies b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$  siccome  $s \leq x$  e  $t \leq y$  dunque  $s+t \leq x+y$  dunque  $B(x)B(y) \subseteq B(x+y)$ . Tuttavia si osserva che  $\forall z \in \mathbb{R} : b^z \in B(x+y)$  possiamo considerare invece i numeri razionali che soddisfano la seguente proprietà  $t-x < p < y$  e consideriamo a questo punto  $q = t-p$  da cui avremo che  $t-x < p \implies t-p < x \implies q < x$  ma allora  $t = p+q$ , dunque:

$$b^t = b^{p+q} \text{ per quanto visto sopra} = b^p b^q \implies b^t \in B(x)B(y) \implies B(x+y) \subseteq B(x)B(y)$$

In conclusione, abbiamo quindi mostrato che  $B(x)B(y) = B(x+y)$ . Ora però dobbiamo mostrare che  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y)$ : si osserva innanzitutto che  $\sup B(x+y) = \sup B(x)B(y) \leq \sup B(x) \sup B(y)$ . Mostriamo che il  $\sup B(x) \sup B(y)$  è estremo superiore dell'insieme  $B(x)B(y)$ , osservando che

- ①  $\sup B(x) \sup B(y) \geq \sup B(x)B(y) \geq x \implies \sup B(x) \sup B(y) \geq x \forall x \in B(x)B(y)$  dunque  $\sup B(x) \sup B(y)$  è maggiorante.
- ②  $\forall x < \sup B(x) \sup B(y) : x$  non è un maggiorante. Per mostrare questo fatto si mostra che  $\sup B(x)B(y) = \sup B(x) \sup B(y)$  per assurdo, supponendo (in virtù di quanto detto prima) che  $\sup B(x)B(y) < \sup B(x) \sup B(y) \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < \sup B(x)$  e, sempre ragionando alla stessa maniera, possiamo concludere che  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(x)} < \sup B(y)$ : si osserva che la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$  non è un maggiorante di  $B(x)$  (per definizione di  $\sup B(x)$ ) di cui la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$  è minore e dunque  $\exists r \in \mathbb{Q} : b^r \in B(x) : \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < b^r \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y) \implies \exists s \in \mathbb{Q} : b^s \in B(y) : \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < b^s$  (perché, ragionando come prima, se la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y)$  deve esistere un numero razionale per cui la disuguaglianza è stretta). Ma allora si giunge ad un assurdo siccome  $\sup B(x)B(y) = \sup B(x+y) < b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$  che è un assurdo.

Dunque  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) \implies b^{x+y} = b^x b^y \forall x, y \in \mathbb{R}$  □

- ⑦ Fissato  $b > 1, y > 0$ ; provare che esiste un unico reale  $x$  tale che  $b^x = y$  utilizzando la seguente "scaletta":
  - (a)  $\forall n \in \mathbb{N}, b^n - 1 \geq n(b-1)$
  - (b) Dunque  $b-1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$
  - (c) Se  $t > 1$  e  $n > \frac{b-1}{t-1}$  allora  $b^{\frac{1}{n}} < t$
  - (d) Se  $b^w < y$  allora  $b^{w+\frac{1}{n}} < y$  per  $n$  sufficientemente grande (*suggerimento*: per vedere questo applicare  $t = yb^{-w}$  a (c))
  - (e) se  $b^w > y$  allora  $b^{w-\frac{1}{n}} > y$  per  $n$  sufficiente grande
  - (f) Sia  $A$  l'insieme di tutti i  $w$  tali che  $b^w < y$  e mostrare che  $x = \sup A$  soddisfa  $b^x = y$
  - (g) Provare che  $x$  è unico

**Soluzione:** per mostrare la (a) possiamo usare la seguente identità e osservare che  $b^i > 1 \forall i \in \mathbb{N} : i \geq 0 \implies$

$$\sum_{i=0}^{n+1} b^i \geq \sum_{i=0}^{n+1} 1 = n+1$$

$$b^{n+1} - 1 = (b-1)(b^n + b^{n-1} + \dots + b + 1) \geq (b-1)(n+1)$$

Potevamo altrimenti ragionare per induzione osservando che  $b^{n+1} - 1 = (b^{n+1} + b) - (b-1) = b(b^n - 1) - (b-1) \geq bn(b-1) - (b-1) = (b-1)(bn-1) \geq (b-1)(n+1)$  e osservare che la tesi è banalmente vera per  $n=0$ .

Per mostrare la (b) possiamo usare il seguente lemma:

#### Lemma 1.4

Sia  $b > 1$  allora  $b^{\frac{1}{n}} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $b^p = \beta > 1$  con  $p \in \mathbb{N}$  e per il teorema 1.21 sappiamo che esiste un unico numero  $y \in \mathbb{R}$  tale che  $y^p = \beta$  che indichiamo con  $\beta^{\frac{1}{p}}$  dunque possiamo avere due possibili alternative:  $\beta^{\frac{1}{p}} < 1$  o  $\beta^{\frac{1}{p}} > 1$  ma si osserva che se per assurdo  $\beta^{\frac{1}{p}} < 1 \implies (\beta^{\frac{1}{p}})^p < 1$  per gli assiomi di campo, il che è in contraddizione col fatto che  $\beta > 1$ .

**Oss:-**

Si osservi che  $\beta^{\frac{1}{p}} \neq 1$  siccome implicherebbe che  $\frac{1}{p} = 0$  il che è impossibile

□

Dunque, siccome  $b^{\frac{1}{n}} > 1$ , vale la proprietà che abbiamo mostrato prima: ponendo  $t = b^{\frac{1}{n}} \implies t^n - 1 \geq n(t - 1)$  ovvero  $b - 1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$ .

Per mostrare la (c) si osserva che se  $t > 1$  e  $n > \frac{b-1}{t-1}$  allora sappiamo che  $b - 1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \geq \frac{b-1}{t-1}(b^{\frac{1}{n}-1} - 1) \implies 1 > \frac{b^{\frac{1}{n}-1}-1}{t-1} \implies b^{\frac{1}{n}} - 1 \leq t - 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < t$ .

Per mostrare la (d) si osserva che se  $b^w < y \implies yb^{-w} > 1$  dunque è possibile applicare la (c) utilizzando  $t = yb^{-w}$  dunque  $b^{\frac{1}{n}} < yb^{-w} \implies b^{\frac{1}{n}+w} < y$  naturalmente per  $n > \frac{b-1}{yb^{-w}-1}$ .

La dimostrazione per (e) è simile tuttavia cambia la "partenza", infatti la proprietà che abbiamo usato per mostrare (d) richiede che  $t > 1$  e si osserva che se  $b^w > y \implies \frac{b^w}{y} > 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < \frac{b^w}{y} \implies b^{w-\frac{1}{n}} > 1$ .

Per mostrare (f) si osserva che  $A = \{w \in \mathbb{R} : b^w < y\}$  è sicuramente non vuoto e ammette un sup  $A$ : si osserva innanzitutto che se  $y > 1$  allora  $0 \in A$  dunque non è vuoto, se  $y = 1$  si osserva che  $b^{-1} = \frac{1}{b} < 1 \implies -1 \in A$  e se  $0 < y < 1$  si ha che  $\frac{1}{y} > 1$  e possiamo mostrare tramite il seguente lemma:

**Lemma 1.5**  $y = b^x$  non è limitata superiormente

Sia  $b > 1$ . Allora l'insieme

$$\mathcal{S} = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato superiormente

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che sia limitato superiormente allora  $\exists \sup \mathcal{S} := \alpha$  allora  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha > b^n$ . Per caratterizzazione del sup  $\mathcal{S}$  si ha che  $\forall x < \alpha, x$  non è un maggiorante, dunque  $\frac{\alpha}{b} < \alpha$  non è maggiorante, dunque esiste  $k \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{b} < b^k \implies \alpha < b^{k+1}$  il che è assurdo □

Tramite questo lemma sappiamo che deve esistere dunque un  $n \in \mathbb{N} : b^n > \frac{1}{y} \implies b^{-n} < y \implies -n \in A$ . A questo punto mostriamo che  $x = \sup A$  soddisfa  $b^x = y$ : supponiamo che  $b^x < y \implies b^{x+\frac{1}{n}} < y \implies x + \frac{1}{n} \in A$  dunque questo contraddice la definizione di estremo superiore ( $x$  non è un maggiorante); se invece  $b^x > y \implies b^{x-\frac{1}{n}} > y \implies x - \frac{1}{n}$  è a sua volta un maggiorante quindi contraddice la definizione di estremo superiore (non è soddisfatta la proprietà secondo cui  $\forall x < \sup \mathcal{S}, x$  non è maggiorante. Dunque l'unica possibilità è che  $b^x = y$ . Per mostrare che  $x$  è unico supponiamo per assurdo che  $\exists x$  e  $x'$  tali che  $x \neq x'$  e  $b^x = b^{x'} = y$ . Abbiamo due possibilità:  $x' > x$  oppure  $x > x'$  e, senza perdita di generalità, mostriamo solamente che si giunge ad una contraddizione se  $x' > x$  (la dimostrazione è equivalente nell'altro caso): si consideri il sistema

$$\begin{cases} b^x = y \\ b^{x'} = y \end{cases}$$

allora dividendo membro a membro avremo che  $b^{x'-x} = 1$  ma siccome  $x' - x > 0 \implies b^{x'-x} > 1$ , il che è assurdo (il fatto che  $b^w > 1$  se  $w > 0$  segue dal fatto che un qualunque numero razionale<sup>1</sup> positivo possa essere scritto come  $\frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$  e sappiamo che  $b^m > 1$  e, per il lemma 1.4, concludiamo che  $(b^m)^{\frac{1}{n}} > 1$ ). □

- ⑧ Mostrare che non è possibile definire una relazione d'ordine sull'insieme dei numeri complessi che renda il campo (dei numeri complessi) ordinato

**Soluzione:** supponiamo per assurdo che possa essere introdotta una relazione d'ordine che renda il campo dei numeri complessi un campo ordinato, allora vuol dire che:

- ①  $i > 0$   
②  $i < 0$

<sup>1</sup>nel caso dei reali si considera la sezione di Dedekind e dunque si prende un razionale appartenente alla sezione su cui valgono le considerazioni che ora sto per enunciare

ma allora se supponiamo che  $i > 0$  allora  $i \cdot i > 0 \cdot i \implies -1 > 0$  ma questo contraddice completamente il fatto  $1 > 0$  in un campo ordinato e dunque  $-1 < 0$ . Se invece  $i < 0 \implies (-i) > 0 \implies (-i) \cdot (-i) > 0 \implies -1 > 0$  che è nuovamente assurdo. Naturalmente si è escluso il caso  $i = 0$  per ragioni banali.  $\square$

- ⑨ Supponiamo che  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  e definiamo su di essi una relazione d'ordine tale che  $z < w$  se  $a < c$  e anche se  $a = c$  ma  $b < d$ . Mostrare che questo trasforma l'insieme dei numeri complessi in un insieme ordinato. Questo ordine possiede anche la proprietà del sup?

**Soluzione:** Mostriamo che questa relazione d'ordine soddisfa le proprietà: dati due numeri complessi  $z$  e  $w$  si osserva che i numeri reali sono un campo ordinato, dunque avremo sempre che  $a < c$  oppure  $a > c$  oppure  $a = c$  (nel primo caso avremo che  $z < w$  e nel secondo caso  $z > w$ ). L'unico caso non banale è  $a = c$  che possiamo risolvere "guardando" le componenti immaginarie dei numeri complessi, che saranno a loro volta sempre dei numeri reali che, essendo ordinati, avremo sempre che  $b < d$  oppure  $b > d$  oppure  $b = d$  (nel primo caso avremo  $z < w$  e nel secondo  $z > w$ ). Se  $b = d$  allora si deve concludere che  $z = w$ : abbiamo quindi dimostrato che, dati due elementi  $z, w \in \mathbb{C}$  vale sempre uno dei seguenti predicati:

$$z < w$$

$$z = w$$

$$z > w$$

Adesso dobbiamo mostrare che se  $z < w$  e  $w < u$  allora  $z < u$ . Sia adesso  $u = e + fi$  e sapendo che  $z < w$  si pongono davanti a noi due possibilità:

- $a < c$
- $a = c \wedge b < d$

e ragionando similmente con  $w < u$  dobbiamo concludere che ci sono due sole possibilità:

- $c < e$
- $c = e \wedge d < f$

e adesso guardiamo a tutte le possibili configurazioni (4 in totale):

1.  $a < c \wedge c < e \implies a < e \implies z < u$  (per la transitività della relazione d'ordine  $<$ )
2.  $a < c \wedge (c = e \wedge b < d) \implies a < e \implies z < u$  (siccome  $c = e$ )
3.  $(a = c \wedge b < d) \wedge (c < e) \implies a < e \implies z < u$  (siccome  $a = c < e$ )
4.  $(a = c \wedge b < d) \wedge (c = e \wedge d < f) \implies b < d < f \implies b < f \implies z < u$

Per mostrare che questo insieme non possiede la proprietà dell'estremo superiore, consideriamo l'insieme definito nella seguente maniera

$$A = \{a + bi \in \mathbb{C} : a \leq 0\}$$

si osserva che tutti i numeri immaginari con parte reale positiva sono dei maggioranti dunque  $A$  è limitato superiormente. Supponiamo per assurdo che  $\exists C \in \mathbb{C} : C \geq x \forall x \in A$  allora questo implica necessariamente che  $\text{Re}(C) > 0$  (altrimenti non potrebbe essere un maggiorante di ogni elemento dell'insieme  $A$ ) ma si osserva che fallisce miseramente la proprietà caratterizzante del sup secondo cui  $\forall x < C, x$  non è maggiorante siccome qualunque numero nella forma  $\frac{\text{Re}(C)}{n} + bi$  con  $n \in \mathbb{N}$  sarà minore di  $C$  ma sarà un maggiorante di  $A$ .  $\square$

- ⑩ Supporre che  $z = a + bi$  e  $w = u + iv$  e

$$a = \left( \frac{|w| + u}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \left( \frac{|w| - u}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

provare che  $z^2 = w$  se  $v \geq 0$  e che  $(\bar{z})^2 = w$  se  $v \leq 0$ . Concludere che ogni numero complesso (con una eccezione) ha due radici complesse



**Soluzione:** calcoliamo  $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \frac{|w|+u}{2} - \frac{|w|-u}{2} + 2\left(\frac{|w|^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u + 2i\left(\frac{u^2+v^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u + i|v|$ .  
Distinguiamo due casi:

$$z^2 = \begin{cases} u + iv = w & \text{se } v \geq 0 \\ u - iv = \bar{w} & \text{se } v \leq 0 \end{cases}$$

adesso calcoliamo  $(\bar{z})^2 = (a-bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$  e procedendo come prima si deduce che  $(\bar{z})^2 = u - |v|i$ :

$$(\bar{z})^2 = \begin{cases} u + iv = w & \text{se } v \leq 0 \\ u - iv = \bar{w} & \text{se } v \geq 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo ottenuto quanto richiesto. Per mostrare che ogni numero complesso ha due radici si osservi che nell'esercizio abbiamo mostrato che  $z$  definito come mostrato soddisfa il fatto che  $z^2 = w$ . Ora se  $v > 0$  allora si ha che le radici di  $w$  sono  $z$  e  $-z$  mentre se  $v < 0$  allora si ha che le radici sono  $\bar{z}$  e  $-\bar{z}$ . Se invece  $v = 0 \implies z^2 = a \implies z = \pm\sqrt{a}$  mentre se  $u = v = 0 \implies z = \bar{z} = 0$   $\square$

- (11) Se  $z$  è un numero complesso, mostrare che esiste un numero  $r \geq 0$  e un numero complesso  $w \in \mathbb{C}$  con  $|w| = 1$  tale che  $z = rw$ . Sono  $r$  e  $w$  identificati unicamente da  $z$

**Soluzione:** Se si considera  $w = \frac{z}{|z|} \implies |w| = 1$  e si considera  $r = |z|$  dunque  $z = rw = |z|\frac{z}{|z|} = z$  e questi sono univocamente determinati se  $z \neq 0$  (in tal caso  $r = 0$  ma  $w = a + bi \forall a, b \in \mathbb{R}$ )  $\square$

- (12) Se  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  mostrare che:

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

**Soluzione:** si procede per induzione sul numero di termini, osservando che per  $n = 1$  e  $n = 2$  è banalmente vero. Mostriamo che  $n \implies n + 1$ :

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |\alpha + z_{n+1}|$$

dove con  $\alpha = z_1 + \dots + z_n$ . Siccome nell'ultimo valore assoluto abbiamo solamente "due" numeri, deve valere l'ipotesi induttiva, dunque:

$$|\alpha + z_{n+1}| \leq |\alpha| + |z_{n+1}| \stackrel{\text{ip. induttiva}}{\leq} |z_1| + \dots + |z_{n+1}|$$

$\square$

- (13) Se  $x, y$  sono complessi, mostrare che

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

**Soluzione:** si osserva che  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|$  ma ragionando similmente con  $|y| = |y + x - x| \leq |x - y| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x - y|$ . Siccome i reali sono ordinati dovremo avere che  $|y| > |x|$  oppure  $|x| > |y|$  dunque abbiamo che  $||x| - |y|| = |x| - |y|$  oppure  $||x| - |y|| = |y| - |x|$ . In ogni caso abbiamo ottenuto in entrambi i casi una relazione dove  $|x - y|$  maggiore entrambe le due espressioni, dunque:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$\square$

- (14) Se  $z \in \mathbb{C}$  è un numero complesso tale che  $|z| = 1$  (dunque  $z\bar{z} = 1$ ) calcolare

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

**Soluzione:** si osserva che, ponendo  $z = a + bi$ ,  $|1 + z|^2 = (a + 1)^2 + b^2$  mentre  $|1 - z|^2 = (1 - a)^2 + b^2$ , dunque

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = (a + 1)^2 + b^2 + b^2 + (1 - a)^2 = 2b^2 + (a + 1)^2 + (a - 1)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2 = 2|z|^2 + 2 = 4$$

$\square$

- (15) Sotto quali condizioni è valida l'equazione nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?

**Soluzione:** nella dimostrazione di Cauchy-Schwarz abbiamo visto che l'eguaglianza sussiste se  $b_i = 0 \forall i$  e anche se i termini  $a_i$  sono proporzionali a quelli  $b_i$  (in pratica se i vettori  $a$  e  $b$  sono linearmente dipendenti).  $\square$

(16) Mostrare che se  $k \geq 3, x, y \in \mathbb{R}^k, |x - y| = d > 0$  e  $r > 0$  allora

(a) se  $2r > d$  ci sono infiniti  $z \in \mathbb{R}^k$  tali che

$$|z - x| = |z - y| = r$$

(b) se  $2r = d$  allora esiste un unico  $z \in \mathbb{R}^k$  che soddisfa la proprietà sopra

(c) se  $2r < d$  allora non esiste nessuno  $z \in \mathbb{R}^k$

**Soluzione:** ancora niente  $\square$

(17) Mostrare che

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

se  $x \in \mathbb{R}^k$  e  $y \in \mathbb{R}^k$ . Interpretare questo risultato in virtù dei parallelogrammi

**Soluzione:**

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y$$

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y$$

dunque  $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ . Se  $x$  e  $y$  sono i lati di un parallelogramma, questo risultato ci dice che le sue diagonali  $x + y$  e  $x - y$  soddisfano il fatto che la somma delle loro norme è uguale alla somma del doppio delle norme dei due lati  $x$  e  $y$   $\square$

(18) Se  $k \geq 2$  e  $x \in \mathbb{R}^k$ , mostrare che esiste un unico  $y \in \mathbb{R}^k$  tale che  $y \neq 0$  ma  $x \cdot y = 0$ . E' vero per  $k = 1$ ?

**Soluzione:** siccome il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^k$  è non degenere, dalla formula delle dimensioni del radicale possiamo considerare il sottospazio generato dal vettore  $x$  che indichiamo con  $U$  (che avrà dimensione 1) e il radicale  $U^\perp$  (che avrà dimensione  $k - 1$ ). Dunque, siccome  $U^\perp$  è un sottospazio vettoriale, esiste sicuramente un elemento  $y$  tale che  $x \cdot y = 0$ .  $\square$

# Capitolo 2

## Basic topology

Per affrontare alcuni esercizi di questo capitolo farò uso del seguente teorema presente nel libro (di cui comunque riporto la dimostrazione) per poter usufruire di una serie di lemmi molto utili:

**Teorema 2.1** Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile

Sia  $S$  una famiglia numerabile di insiemi numerabili  $S_i$ . Allora

$$\bigcup_i S_i$$

è numerabile

**Dimostrazione:** la dimostrazione si basa sul fatto è possibile che costruire una successione tale che  $x_{nk} = s_k \in S_n$  ovvero "mappa" ogni  $nk$  (non è un prodotto: il numero è composto dalle cifre di  $n$  e le cifre di  $k$  accostate) nel  $k$ -elemento dell'insieme  $S_n$ . In questa maniera possiamo vedere che:

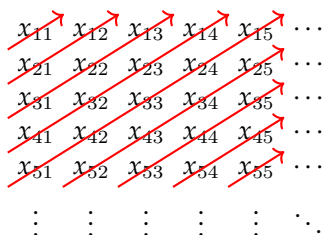


Figura 2.1: Gli elementi appartenenti all'elemento  $S_i$  si trovano tutti disposti sulla riga  $i$ -esima

e dunque si osserva che possiamo "arrangiare" questi elementi in una sequenza del tipo

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, \dots$$

e definire una funzione  $f : \mathbb{N} \mapsto \bigcup_i S_i$  tale che  $1 \mapsto x_{11}$ ,  $2 \mapsto x_{21}$ ,  $3 \mapsto x_{12}$  e così via. □

**Teorema 2.2**  $\mathbb{Z}[x]$  è equipotente a  $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}[x]$$

**Dimostrazione:** sia  $a \in \mathbb{Z}[x]$ , ovvero un polinomio a coefficienti interi. Possiamo innanzitutto definire una funzione  $p : \mathbb{N} \mapsto Q$  dove  $Q \subset \mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri primi (che comunque è un insieme infinito, ma non

daremo dimostrazione di ciò). Definendo  $P_n = \{a \in \mathbb{Z}[x] : \deg a \leq n\}$  Possiamo quindi definire una mappa tale che

$$f(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = 2^{a_0} 3^{a_1} \dots p(n+1)^{a_n}$$

e il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura che la fattorizzazione di ogni numero è unica. Definiamo a questo punto

$$P = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$$

e si tratta di un'unione numerabile di insiemi numerabili, dunque numerabile per il teorema 2.1 (di questo documento).  $\square$

#### Oss:-

Un'altra possibile dimostrazione riguarda il fatto che ogni polinomio di grado  $n$  è identificato univocamente dai suoi coefficienti (in virtù del principio di uguaglianza fra polinomi) e dunque  $\forall p \in \mathbb{Z}[x], \deg p \leq n$  possiamo definire una mappa  $f : \mathbb{Z}_{\leq n}[x] \mapsto \mathbb{Z}^n$  che associa ad ogni polinomio il vettore  $n$ -esimo delle sue coordinate e per "generare" tutto  $P$  è necessario considerare l'unione infinita (ma numerabile) degli  $\mathbb{Z}^n$  che sarà ancora numerabile siccome unione numerabile di insiemi numerabili.

#### Teorema 2.3 Chiusura "distributiva" rispetto all'unione

Siano  $E$  e  $F$  due insiemi, allora  $(E \cup F)' = E' \cup F'$

**Dimostrazione:** mostriamo che  $E' \cup F' \subseteq (E \cup F)'$ : per fare ciò si osserva che  $x$  è punto limite di  $E' \cup F'$  allora questo vuol dire che o  $x \in E'$  oppure  $x \in F'$  e, facendo la dimostrazione nel caso di  $x \in E'$ , si deduce  $\forall r > 0, \exists x' \in E \setminus \{x\} : d(x, x') < r$  ma a maggior ragione, siccome  $E \subseteq E \cup F$ , si dovrà avere che  $\forall r > 0, \exists x' \in (E \cup F) \setminus \{x\} : d(x, x') < r$ . Dunque  $E' \cup F' \subseteq (E \cup F)'$ .

Per mostrare che  $(E \cup F)' \subseteq E' \cup F'$  vogliamo mostrare che  $\forall x, x \in (E \cup F)' \implies x \in E' \cup F'$  e per mostrare questo possiamo anche far vedere la contronominale, ovvero che se  $x \notin E' \cup F' \implies x \notin (E \cup F)'$ : siccome  $x \notin E' \cup F'$  allora vuol dire che  $\exists r > 0 : \forall y \in E : d(x, y) > r$  e  $\exists s > 0 : \forall y \in F : d(x, y) > s$  e, dunque, ponendo  $t = \min(r, s)$  abbiamo che tutti gli elementi di  $E \cup F$  soddisfano la seguente proposizione  $d(x, y) > t$ .  $\square$

#### Corollario 2.1 Proprietà della chiusura di un insieme

Siano  $E$  e  $F$  due insiemi, allora  $\overline{E \cup F} = \bar{E} \cup \bar{F}$

**Dimostrazione:** possiamo facilmente vedere che  $\overline{E \cup F} = (E \cup F) \cup (E \cup F)' = E \cup F \cup E' \cup F' = \bar{E} \cup \bar{F}$ .  $\square$

- ① Mostrare che l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme

**Soluzione:** possiamo effettuare due dimostrazioni di questo fatto: una costruttiva e una per assurdo. Procediamo con la prima: per definizione, se  $\emptyset \subset A$  allora  $\forall x, x \in \emptyset \implies x \in A$  ma siccome, per definizione dell'insieme vuoto<sup>1</sup>,  $x \notin \emptyset$  allora la proposizione  $x \in \emptyset$  è falsa ma la proposizione  $x \in A$  è vera per ogni  $x \in A$  e per le tabelle di verità dell'implicazione concludiamo che l'implicazione  $x \in \emptyset \implies x \in A$  è vera, dunque  $\emptyset \subset A$ .

Procediamo adesso per assurdo: supponiamo invece che  $\emptyset \not\subset A$ , ovvero  $\exists x, x \in \emptyset \wedge x \notin A$ , ma questo è assurdo siccome, per definizione di insieme vuoto, non esiste un elemento che appartiene all'insieme.  $\square$

- ② Un numero complesso è detto *algebrico* se esistono degli interi  $a_0, \dots, a_n$  non tutti nulli tali che

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Mostrare che l'insieme dei numeri algebrici è numerabile. *Suggerimento:* per ogni intero positivo  $N$  esistono solo un numero finito di equazioni con

$$n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = N$$

<sup>1</sup>gli assiomi ZFC affermano che esiste un insieme  $A$  (che denotiamo con  $\emptyset$ ) che soddisfa la proprietà  $\forall x, x \notin A$

**Oss:-**

Nella soluzione mostrata qua sotto presento una soluzione senza usare il suggerimento qua presentato siccome non riuscivo a mostrare come fosse vero. Comunque l'idea di base rimane sempre la stessa, siccome non c'è bisogno di passare per  $\mathbb{Z}^k$  e osservare che l'unione di tutti gli insiemi  $N \in \mathbb{N} : n + |a_0| + \dots + |a_n| = N$  prende ogni soluzione

**Soluzione:** identifichiamo ogni equazione di grado  $n$  come  $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  con  $a_k \in \mathbb{Z}$  e, dunque, in virtù del principio di identità di polinomi ogni equazione è identificata univocamente. Per un noto teorema della teoria sappiamo che<sup>2</sup>  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^n \sim \mathbb{Z}[x]$  (sopra abbiamo mostrato che  $\mathbb{Z}[x] \sim \mathbb{Z}^n$ ) dunque  $N \sim \mathbb{Z}[x]$ . Sappiamo che ogni equazione possiede al massimo  $n$  soluzioni, dunque possiamo definire per ogni polinomio (che identifichiamo con  $a$ )  $p$  l'insieme  $R_p$  delle radici associate che sarà dunque finito. Dunque definiamo

$$\mathcal{A} = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^k} R_a$$

ma si tratta di un'unione numerabile (siccome i polinomi  $p$  sono in "numero" numerabili) di insiemi al più numerabili dunque  $\mathcal{A}$  è numerabile.  $\square$

③ Provare che esistono dei numeri reali che sono algebrici

**Soluzione:** Si procede per assurdo, dunque neghiamo la nostra tesi (che è  $\exists x \in \mathbb{R} : x$  non è algebrico) e supponiamola vera, ovvero  $\forall x \in \mathbb{R}, x$  è algebrico. Ma allora risulta che  $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$  dove  $\mathcal{A}$  denota l'insieme dei numeri algebrici. Ma allora questo contraddice il teorema 2.8 (*Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile  $A$  è numerabile*). Dunque  $\exists x \in \mathbb{R} : x$  non è algebrico.  $\square$

④ L'insieme dei numeri irrazionali è numerabile?

**Soluzione:** No, infatti se supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri irrazionali, che denotiamo con  $\mathbb{U}$ , è numerabile. Allora, siccome  $\mathbb{Q}$  è numerabile, si deve avere che  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{U}$  è numerabile (siccome unione di insiemi numerabili) il che è assurdo.  $\square$

⑤ Costruire un insieme dei numeri limitato con esattamente 3 punti limite

**Soluzione:** Consideriamo l'insieme dei numeri nella forma  $a + \frac{1}{n}$  dove  $a \in 1, 2, 3$  e  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , che è banalmente limitato (si ha che  $|x| < 5$ ). Inoltre si osserva che gli unici punti limite sono  $\{1, 2, 3\}$ : infatti si osserva che i punti appartenenti all'insieme  $\{1, 2, 3\}$  rispettano la definizione  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tilde{N} > 0 : d(a + \frac{1}{\tilde{N}}, a) < \varepsilon$ . Per mostrare ciò, fissiamo  $\tilde{N} > 0$  e notiamo che  $|a + \frac{1}{\tilde{N}} - a| = |\frac{1}{\tilde{N}}| = \frac{1}{\tilde{N}}$  e se vogliamo rendere questa quantità minore di  $\varepsilon$  si deve avere che  $\frac{1}{\tilde{N}} < \varepsilon \implies \tilde{N} > \frac{1}{\varepsilon}$ . Mostriamo adesso che non esistono altri punti limite: ponendo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$  si osserva che se  $x \notin (1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4]$  allora per  $r > 0$  (sufficientemente piccolo)  $N_r(x) \cap (1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4] = \emptyset$ , mentre se  $x \in (m, m+1], m \in \{1, 2, 3\}$  allora si osserva che possiamo definire  $y = x - m \implies 0 < y \leq 1 \implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k+1} < y \leq \frac{1}{k}$  dunque si distinguono due casi: se  $y = \frac{1}{k}$  allora possiamo scegliere

$$r = \begin{cases} \min\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) & \text{se } k \geq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

altrimenti se  $\frac{1}{k+1} < y < \frac{1}{k}$  allora possiamo scegliere  $r$  nella seguente maniera:

$$r = \min\left(\frac{1}{k} - y, y - \frac{1}{k+1}\right)$$

e osservare che se per esempio  $r = \frac{1}{k} - y$  (ovvero l'elemento più "vicino" a  $x$  è  $m + \frac{1}{k}$ ) allora abbiamo che  $d(x, m + \frac{1}{k}) = |x - m - \frac{1}{k}| = |y - \frac{1}{k}| > r$  dunque  $x$  è un punto isolato.  $\square$

<sup>2</sup>per mostrare l'equipotenza fra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  possiamo costruire la seguente funzione bigettiva:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } 2 \mid n \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } 2 \nmid n \end{cases}$$

- ⑥ Sia  $E'$  l'insieme di tutti i punti limite di un insieme  $E$ . Mostrare che  $E'$  è chiuso. Mostrare che  $E$  e  $\bar{E}$  hanno gli stessi punti limite (si ricordi che  $\bar{E} = E \cup E'$ ).  $E$  e  $E'$  hanno gli stessi punti limite?

**Soluzione:** Per far vedere che  $E'$  sia chiuso dobbiamo far vedere ogni punto limite di  $E'$  appartiene all'insieme  $E'$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $x_0 \in (E')'$  (ovvero sia  $x_0$  un punto limite di  $E'$ ): per definizione, sappiamo che  $x_0$  è un punto limite di  $E'$ , dunque  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$  esiste sicuramente un  $x \in E'$  tale che  $d(x_0, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ , ma siccome  $x$  è un punto limite di  $E$  abbiamo che esiste sicuramente un  $x' \in E$  tale che  $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$  dunque:

$$d(x', x_0) \stackrel{\text{dis. triangolare}}{\leq} d(x', x) + d(x, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dunque abbiamo mostrato che  $x_0$ , punto limite di  $E'$ , è un punto limite di  $E$  dunque, per come è definito  $E'$ , si ha che  $x_0 \in E'$ .

Mostriamo adesso che  $\bar{E}$  e  $E$  hanno gli stessi punti limite: si osserva che  $\bar{E} = E \cup E'$ . Per fare ciò mostreremo che  $E' \subseteq (\bar{E})'$  e  $(\bar{E})' \subseteq E'$ . Per adesso mostriamo che  $(\bar{E})' \subseteq E'$ : sia adesso  $x \in (\bar{E})'$ , dobbiamo mostrare che  $x \in E'$ . Per fare ciò si osserva che, siccome  $x \in (\bar{E})' \implies \forall \varepsilon > 0 \exists x' \in \bar{E} : d(x, x') < \varepsilon$  e distinguiamo adesso due casi:

- $x' \in E$  e in tal caso abbiamo finito, siccome  $d(x, x') < \varepsilon \implies x$  è punto limite di  $E$
- $x' \notin E$  dunque  $x' \in E'$ , ma allora per definizione sappiamo che  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in E : d(x_0, x') < \varepsilon$  dunque fissiamo  $\varepsilon' = \varepsilon - d(x_0, x')$  ma allora  $d(x, x_0) \stackrel{\text{dis. triang.}}{\leq} d(x, x') + d(x', x_0) < d(x_0, x') + \varepsilon - d(x_0, x') = \varepsilon \implies d(x, x_0) < \varepsilon$

Per mostrare che  $E' \subseteq (\bar{E})'$  si osserva che, fissato  $\varepsilon > 0$  se  $x \in E' \implies \exists x' \in E : d(x, x') < \varepsilon$  ma, siccome  $\bar{E} = E \cup E'$ , a maggior ragione dovremo dire che  $\exists x' \in \bar{E} : d(x, x') < \varepsilon$ .

Possiamo dunque concludere che  $E' = (\bar{E})'$ . Per la parte finale dell'esercizio basta prendere un insieme del tipo  $A = \{a + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  con  $a \in \{1, 2, 3\}$  e si osserva che  $A' = \{1, 2, 3\}$  ma  $(A')' = \emptyset$ , concludendo che  $E$  e  $E'$  non hanno sempre gli stessi punti limite.

**Oss:-**

Per mostrare che  $(\bar{E})' \subseteq E'$  potevamo anche procedere per assurdo: supponiamo che  $\exists x \in (\bar{E})' : x \notin E'$  il che implica che  $\exists r > 0 : \nexists x' \in E, x' \in N_r(x)$  e, siccome  $E'$  è chiuso, allora si deve avere che  $x$  non sia un punto limite di  $E'$  (essere chiusi vuol dire che ogni punto limite appartiene all'insieme). Quindi deve esistere un intorno di  $x$  che non contenga punti appartenenti a  $E$  (contraddirrebbe il fatto che  $x$  non sia un punto limite di  $E$ ) e  $E'$  (contraddirrebbe il fatto che  $x$  non possa essere conseguentemente un punto limite di  $E'$ )

□

- ⑦ Sia  $A_1, \dots, A_n$  un sottoinsieme di uno spazio metrico

(a) Se  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$  mostrare che  $\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

(b) Se  $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  mostrare che  $\bar{B} \supseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$

**Soluzione:** Per mostrare la (a) basta mostrare questo facile corollario ottenuto dal teorema 2.2 (di questo documento):

### Corollario 2.2 Chiusura dell'unione finita di insiemi

Sia

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

e sia  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , allora

$$\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

**Dimostrazione:** Procediamo per induzione, osservando che il teorema precedente assicura la validità del caso  $n = 2$  e mostriamo adesso che  $n \implies n + 1$ :

$$\overline{B_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \overline{A_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^n A_i} = \overline{A_{n+1}} \cup \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \stackrel{\text{ip. induttiva}}{=} \bar{A}_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i = \bigcup_{i=1}^{n+1} \bar{A}_i$$

□

Questo conclude la parte (a).

Per quanto riguarda la (b) possiamo anche mostrare un semplice esempio di questo fatto, siccome abbiamo che  $B \supseteq A_i \forall i \implies \bar{B} \supseteq \bar{A}_i$  (siccome  $A_i \subseteq B \implies (A_i)' \subseteq B' \implies \bar{A}_i = A_i \cup A_i' \subseteq B \cup B' = \bar{B}$ ), dunque:

$$\bar{B} \supseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$$

Se  $A_i = r_i$  dove  $\{r_1, \dots\}$  è un'enumerazione dei numeri razionali, allora  $B$  è l'insieme dei numeri razionali. Tuttavia  $\bar{B} = \mathbb{R}$  e  $\bar{A}_i = A_i \forall i$  dunque  $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$  è sempre l'insieme dei numeri razionali □

⑧ Ogni punto di ogni insieme aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  è un punto limite di  $E$ ? Rispondere alla stessa domanda per gli insiemi chiusi in  $\mathbb{R}^2$

**Soluzione:** Si osserva che se  $x \in E$  allora  $\exists r > 0 : \exists x' \in (N_r(x) \setminus x) \cap E$  dove  $N_r(x)$  rappresenta un intorno di raggio  $r$  di  $x$ . Se  $r' \geq r \implies N_r(x) \subset N_{r'}(x)$  tuttavia se  $r' < r$  si può mostrare che esistono infiniti punti: infatti se contenesse punti in un numero finito, allora dovremmo avere che  $\delta = \min_i d(x, x_i) \implies N_\delta(x) \subseteq N_r(x) \subseteq E$  ma  $N_\delta(x)$  contiene solamente  $x$ , dunque siccome ogni intervallo contiene infiniti punti, abbiamo che esistono infiniti intorno di  $x$  non vuoti (questo vale solamente in  $\mathbb{R}$  o in spazi topologici  $T_1$ ).

Per quanto riguarda gli insiemi chiusi, basti vedere che considerando un insieme finito sappiamo che questo è chiuso (siccome unione di elementi, che di fatto sono insiemi chiusi) eppure ogni punto non è un punto limite. □

⑨ Sia  $E^\circ$  l'insieme di tutti i punti di  $E$

- Mostrare che  $E^\circ$  è sempre aperto
- Provare che  $E$  è aperto se e solo se  $E = E^\circ$
- Se  $G \subseteq E$  e  $G$  è aperto allora  $G \subseteq E^\circ$
- Provare che il complemento di  $E^\circ$  è la chiusura del complemento di  $E$
- $E$  e  $\bar{E}$  hanno lo stesso insieme di punti interni?
- $E$  e  $E^\circ$  hanno sempre la stessa chiusura?

**Soluzione:** Per provare (a) si osserva che se  $x \in E^\circ$  allora  $\exists r > 0 : \exists y \in E : d(x, y) < r$ . Allora, siccome gli intorni di  $r$  sono aperti, allora si deve avere che  $\forall z \in N_r(x) \exists s > 0 : N_s(z) \subseteq N_r(x)$  ma allora  $N_s \subseteq N_r \subset E$  dunque anche  $y \in E^\circ$  ma allora questo vuol dire che  $N_r \subseteq E^\circ$  (per vederlo in maniera esplicita basta considerare  $z \in N_s \implies d(z, y) < s$  e ponendo  $s = r - d(x, y)$  abbiamo che  $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) < r \implies d(x, z) < r$  dunque  $z \in E$  per definizione di intorno, ma questo vuol dire che ogni intorno di  $y \in N_r$  è contenuto dentro  $N_r \subseteq E^\circ$  dunque  $E^\circ$ .

Per provare (b) si osserva che se  $E^\circ$  allora  $p \in E^\circ$  è un punto interno, ma allora  $p \in E \implies E^\circ \subseteq E$ . Se  $p \in E$  e  $E$  aperto allora  $\exists r > 0 : N_r(p) \subseteq E \implies p \in E^\circ$ . Dunque se  $E$  aperto allora  $E = E^\circ$ . Per l'implicazione opposta si osserva che se  $E^\circ = E$  ogni punto di  $E$  è interno (siccome punto di  $E^\circ$ ) dunque  $\exists r > 0 : N_r(p) \subseteq E$ .

Per provare (c) si osserva che se  $G$  aperto allora  $\forall x \in G^\circ \exists r > 0 : N_r(x) \subseteq G \subseteq E \implies x \in E^\circ$ , ma  $G = G^\circ$  dunque  $G \subseteq E^\circ$ .

Per provare la (d) si deve mostrare che  $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$ . Mostriamo innanzitutto che  $(E^\circ)^c \subseteq \bar{E}^c$ : sia  $x \in (E^\circ)^c$  dunque abbiamo sicuramente che  $x$  non sia un punto interno di  $E$  (infatti, anche se ovvio, in tal caso apparterebbe a  $E$ ) ma questo implica necessariamente che<sup>3</sup>  $\forall r > 0 : q \in N_r(x) \wedge q \notin E$  e dunque si ottiene che  $p$  è un punto limite di  $E^c$  ma allora si ha che  $p \in \bar{E}^c$ . Mostriamo adesso che  $\bar{E}^c \subseteq (E^\circ)^c$ , osservando che se  $p \in \bar{E}^c$  allora abbiamo che  $p \in E^c \cup (E^c)'$  e distinguiamo due casi:

- se  $p \in E^c$  allora sicuramente abbiamo che  $p \notin E$  e, a maggior ragione,  $p \notin E^\circ \implies p \in (E^\circ)^c$ .
- se  $p$  è un punto limite di  $(E^c)$ , ovvero  $p \in (E^c)'$ , allora abbiamo che  $\forall r > 0 \exists q \in E^c : q \in N_r(p) \wedge q \in E^c$  ma allora abbiamo che  $q \in (E^\circ)^c$  e  $p$  è un punto limite di  $(E^\circ)^c$  ma siccome  $E^\circ$  è aperto allora  $(E^\circ)^c$  è chiuso e quindi ogni suo punto limite è un elemento dell'insieme dunque  $p \in (E^\circ)^c$ .

<sup>3</sup>negando la seguente proposizione  $\exists r > 0 : N_r(x) \subseteq E$ , osservando che è possibile "spaccare" il simbolo  $\subseteq$  scrivendo che  $N_r(x) \subseteq E = x \in N_r(x) \implies x \in E$ , si ottiene  $\forall r > 0 : q \in N_r(x) \wedge q \notin E$

Dunque concludiamo che  $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$ .

Per provare la (e), si mostra un semplice esempio: consideriamo  $E = \mathbb{Q}$  e si osserva che  $\bar{E} = \mathbb{R}$ . Dunque si osserva che  $E^\circ = \emptyset$  (il fatto è che, per come si definiscono le palle, non possiamo garantire che tutti gli elementi intorno a un numero razionale sia costituito esclusivamente da numeri razionali, siccome ci dovranno essere necessariamente dei numeri irrazionali nel mezzo, pertanto si deve avere che questo è vuoto). Tuttavia se consideriamo la chiusura di  $E$ , abbiamo che  $\bar{E}^\circ = \mathbb{R}$ .

Per gli altri 2 punti sto cercando ancora dei controesempi. □

(10) Sia  $X$  un insieme infinito. Definiamo la funzione  $d(p, q)$  nella seguente maniera:

$$d(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \neq q \\ 0 & \text{se } p = q \end{cases}$$

e mostrare che questa è una metrica. Quali sono gli insiemi aperti? Quali sono quelli chiusi? Quali quelli compatti?

**Soluzione:** Osserviamo che una funzione distanza è definita tale se sussistono le seguenti 3 proprietà:

- $d(p, q) > 0$  se  $p \neq q$ ;  $d(p, p) = 0$
- $d(p, q) = d(q, p)$
- $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$  for any  $r \in X$

si osserva che per come è definita la metrica abbiamo banalmente che  $d(p, q) \geq 0 \forall p, q \in X$  e abbiamo che  $d(p, q) = 0 \iff p = q$ , dunque la prima condizione è rispettata. Inoltre si vede altrettanto banalmente che  $d(p, q) = d(q, p)$ .

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, si osserva che se  $p = q \implies d(p, q) = 0 \leq d(p, r) + d(r, q) \forall r \in X$  (anche se  $r = p = q$  avremo che  $0 \leq 0$ ). Se  $p \neq q$  allora avremo che  $d(p, q) = 1$  ma  $d(p, r) + d(r, q) \geq d(p, q)$ , infatti se  $r = p \vee r = q$  avremo che  $1 \geq d(p, q) = 1$  altrimenti  $d(p, r) + d(r, q) = 2 > d(p, q)$ .

Gli insiemi aperti sono tutti quelli non vuoti: per vedere ciò si osserva che se  $r < 1$  allora l'insieme  $\{x\}$  con  $x \in X$  è aperto siccome  $N_r(x) = \{p \in X : d(x, p) < r\} \subseteq X$  e ogni insieme non vuoto può essere ottenuto come unione di insiemi non vuoti, dunque saranno aperti.

Tuttavia si osserva che se  $E$  è aperto allora  $E^c$  è chiuso e siccome  $X$  è un insieme infinito, se  $E \subset X$  (sottoinsieme proprio) allora  $E^c \neq \emptyset$  e dunque sarà aperto e chiuso. Ma allora  $E = (E^c)^c$  sarà un insieme chiuso. Dunque abbiamo concluso che ogni insieme è aperto e chiuso.

Per quanto riguarda gli insiemi compatti, si osserva che ogni insieme è compatto, siccome  $\{x\} \subseteq N_r(x)$  con  $r \geq 1$  e dunque ogni insieme finito sarà compatto perché unione di compatti. Per gli insiemi infiniti non è così perché se consideriamo gli  $N_r(x)$  come ricoprimento allora questi non potrebbero essere in numero finito siccome ogni sottoricoprimento è in numero infinito siccome contiene sempre un solo punto. □