Soluzioni agli esercizi di *Principles of Mathematical Analysis* di W. Rudin

Francesco Sermi

20 agosto 2024

Indice

Capitolo 1

The real and complex number system

① se r è razionale ($r \neq 0$) e x è irrazionale, provare che $r + x$ e rx sono irrazionali

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $r \in \mathbb{Q}$ e x sia irrazionale, mentre $r + x$ e rx siano razionali. Allora, $r + x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Ma siccome $r \in \mathbb{Q} \implies \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$ e

$$r + x = \frac{p}{q} + x = \frac{m}{n} \implies x = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - qm}{qn} \implies x \in \mathbb{Q}$$

il che è assurdo.
Procediamo con rx alla solita maniera: se $rx \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{Z} : rx = \frac{m}{n}$. Ma allora, sapendo che $r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ in virtù della sua razionalità, $x = \frac{m}{nr} = \frac{mq}{np} \implies x \in \mathbb{Q}$ il che è nuovamente assurdo. □

② Provare che non esiste razionale q tale che $q^2 = 12$

Dimostrazione: si osservi il seguente lemma (di cui non daremo dimostrazione)

> **Lemma 1.1** (di Euclide)
> Sia $n \in \mathbb{Z}$ e n è primo.Se $n|ab$ e a è coprimo con b (o viceversa) allora $n|a \vee n|b$

Supponiamo per assurdo che $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 12$. Data la razionalità di q abbiamo che esistono $m, n \in \mathbb{Z} : q = \frac{m}{n}$ e m e n coprimi fra allora. Ciò implica che:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{12} \implies \frac{m^2}{n^2} = 12 \implies m^2 = 12n^2$$

Questo vuol dire che m è pari. Siccome $2|m \implies \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$ e dunque

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 12n^2 \implies k^2 = 3n^2$$

Siccome il lato destro è divisibile per 3 allora si deve avere che anche il lato sinistro è divisibile per 3 e dunque, per il lemma di Euclide, si osserva che si deve avere che $3|k \implies \exists q \in \mathbb{Z} : k = 3q$. Si deduce che

$$k^2 = 9q^2 = 3n^2 \implies n^2 = 3q^2$$

dunque n^2 è divisibile per 3 e, sempre per il lemma di Euclide, n è divisibile per 3. Ma allora si giunge ad un assurdo siccome $m = 2k$ con $3|k$ e $3|n$ contro l'ipotesi di coprimità fra m e n □

Un'ulteriore dimostrazione poteva essere effettuata basandosi sul fatto che $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ dunque, tramite l'esercizio 1, sappiamo che rx è irrazionale se x è irrazionale e r razionale quindi la dimostrazione si riduceva a provare che $\sqrt{3}$ è irrazionale.

③ Provare la seguente proposizione

Proposizione 1.1 Conseguenze degli assiomi moltiplicativi di cui gode il campo $\mathbb{R}$

Gli assiomi moltiplicativi di cui gode $\mathbb{R}$ implicano le seguenti proprietà:

① Se $x \neq 0$ e $xy = xz \implies y = z$

② Se $x \neq 0$ e $xy = x \implies y = 1$

③ Se $x \neq 0$ e $xy = 1 \implies y = x^{-1}$

④ Se $x \neq 0$ mostrare che $(x^{-1})^{-1} = x$

Dimostrazione: per dimostrare la ①, banalmente, si ha che:

$$y \overset{\text{esistenza di un elemento inverso e } x\neq 0}{=} xx^{-1}y \overset{\text{prop. commutativa}}{=} xzx^{-1} \overset{\text{prop. commutativa}}{=} xx^{-1}z = z \implies y = z$$

La ② segue direttamente dalla prima ponendo $z = 1$, così come la ③ ponendo $z = x^{-1}$. Per la ④ si osserva che siccome $\forall x \neq 0, xx^{-1} = 1$ allora $\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = 1 \implies x\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = x \implies (\frac{1}{x})^{-1} = x$ □

④ Sia $E \subset A$ con A insieme ordinato (totalmente? Il Rudin non ce lo fa sapere ma è abbastanza probabile). Supponiamo che α sia un minorante di E e β sia un maggiorante di E. Provare che $\alpha \leqslant \beta$

Dimostrazione: per definizione abbiamo che se α è un minorante allora $\forall x \in E, \alpha \leqslant x$ e se β è un maggiorante allora $\forall x \in E, x \leqslant \beta$. Per transitività si ha che $\alpha \leqslant \beta$ □

⑤ Sia A un insieme non vuoto di numeri reali che è limitato inferiormente. Sia $-A$ l'insieme di tutti i numeri $-x$, con $x \in A$. Mostrare che

$$\inf A = -\sup(-A)$$

Dimostrazione: sia $y \in \mathbb{R}$ un minorante di A. Allora si osserva che, per definizione, $\forall x \in A, y \leqslant x \implies -y \geqslant -x$ dunque $-A$ sarà limitato superiormente. Siccome $\forall E \subset \mathbb{R} \implies \exists \sup E, \inf E \in \mathbb{R}$ allora sappiamo che $-A$ avrà $\sup(-A) \in \mathbb{R}$ che denoteremo con $z = \sup(-A)$ e mostriamo la tesi, ovvero che $\sup(-A) = -\inf A$: dobbiamo mostrare che $-z$ è l'estremo inferiore. Per farlo si osserva che se $w > -z \implies z > -w$ dunque $-w$ non è un maggiorante di $-A$ dunque $\exists y = -x(x \in A$ per def.$) \in -A, z > y > -w \implies -z < -y < w$ ma siccome $-y = -(-x) = x \implies x < w$ dunque w non è un minorante di A. Se invece supponiamo esista $w \in A : w < -z \implies -w > z$ ma $-w \in -A$ il che è assurdo siccome $\nexists w \in -A : w > \sup(-A)$. Dunque possiamo concludere che $\inf A = -\sup(-A)$ siccome abbiamo dimostrato che:

① $-z$ è un minorante di A;

② $\forall x > -z \implies x$ non è un minorante

□

⑥ Fissato $b > 1$

(a) Se $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n > 0, q > 0$ e $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ mostrare che

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = (b^p)^{\frac{1}{q}}$$

Dunque ha senso definire $b^r = (b^m)^{\frac{1}{n}}$

(b) Mostrare che $b^{r+s} = b^r b^s$ se $r, s \in \mathbb{Q}$

(c) Se x è reale, definiamo $B(x)$ come l'insieme di tutti i numeri b^t, dove t è un numero razionale e $t \leqslant x$. Mostrare che

$$b^r = \sup B(r)$$

dunque ha senso definire

$$b^x = \sup B(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

(d) Mostrare che $b^{x+y} = b^x b^y \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: Per mostrare (a) si osserva che, dal teorema 1.21, si deve avere che esistono due numeri reali r_1 e r_2 che identificano univocamente $(b^m)^{\frac{1}{n}}$ e $(b^p)^{\frac{1}{q}}$ rispettivamente. La tesi dunque si ottiene mostrando che $r_1 = r_2$. Si osserva che $(r_1)^n = b^m$ e $(r_2)^q = b^p$ e, siccome r è razionale, possiamo scrivere che $m = rn$ e $p = rq$. Dunque

$$(r_1)^n = b^{rn} \qquad\qquad (r_2)^q = b^{rq}$$

ma elevando la prima eguaglianza da entrambi le parti per q e la seconda per n si ottiene che

$$(r_1)^{nq} = b^{rnq}, (r_2)^{nq} = b^{nqr} \implies r_1 = r_2$$

Per mostrare la (b) si osserva che se $r, s \in \mathbb{Q}$ allora si ha che $\exists m, n, p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$. Dunque

$$b^{r+s} = b^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = b^{\frac{mq+np}{nq}}$$

come prima sappiamo che esisteranno r_1 e r_2 univocamente determinati tali che $r_1 = b^{r+s}$ e $r_2 = b^r b^s$ e vogliamo mostrare che $r_1 = r_2$. Adesso si osserva che

$$(b^{r+s})^{nq} = b^{mq+np} = (r_1)^{nq}$$

e

$$(b^r b^s)^{nq} = (b^r)^{nq}(b^s)^{nq} = (b^{\frac{m}{n}})^{nq}(b^{\frac{p}{q}})^{nq} = b^{mq}b^{pn} = b^{mq+np}$$

dunque $(b^{r+s})^{nq} = (b^r b^s)^{nq} \implies b^{r+s} = b^r b^s$.
Per mostrare la (c) bisogna innanzitutto osservare che, definendo $B(x)$ come sopra si ha che, dati $t, s \in B(x), t \leqslant s \implies b^t \leqslant b^s$. Si può mostrare questo fatto in maniera abbastanza semplice ricordando come viene definita la relazione d'ordine $\leqslant$ sui razionali:

Lemma 1.2 b^x è crescente con $x \in \mathbb{Q}$

b^x ristretta ai razionali è una funzione crescente

Dimostrazione: Supponiamo che $s, t \in \mathbb{Q}$ con $s \leqslant t$. Siccome s e t sono razionali, allora esisteranno $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $s = \frac{m}{n}$ e $t = \frac{p}{q}$. Dunque abbiamo che $s \leqslant t \iff mq \leqslant np$. Abbiamo che $b^s = (b^m)^{\frac{1}{n}}$ e $b^t = (b^p)^{\frac{1}{q}}$ e sappiamo che questi numeri identificano in maniera univoca, grazie al teorema 1.21, due distinti numeri reali (tranne nel caso in cui $s = t$). Si osserva che se $r_1 = (b^m)^{\frac{1}{n}} \implies (r_1)^n = b^m \implies (r_1)^{nq} = b^{mq} < b^{np} = (r_2)^{nq} \implies r_1 \leqslant r_2$ (prendere la radice non cambia la direzione della disuguaglianza siccome possiamo sfruttare l'identità $b^n - a^n = (b-a)\sum_{i=1}^{n} b^{n-i}a^{i-1}$ e osservare che $b^n \geqslant a^n \iff b \geqslant a$) □

Se consideriamo $B(r)$ con r razionale, allora si ha banalmente che $b^r \in B(r)$ e dev'essere l'estremo superiore: infatti, se consideriamo $t > r \implies b^t > b^r$, dunque $b^t > b^r \geqslant b^x \implies b^t > b^x \, \forall x : b^x \in B(r)$ dunque t è un maggiorante di $B(r)$. Mostriamo che $\forall b^x < b^r : b^x$ non è un maggiorante di $B(r)$: se per assurdo $\exists \alpha < b^r : \alpha$ è maggiorante, allora $\forall b^y \in B(r), b^y \leqslant \alpha < b^r$ il che è assurdo siccome $b^r \in B(r)$ e avremmo che $b^r \leqslant \alpha < b^r \implies b^r < b^r$.
Per mostrare la (d) si osserva che dobbiamo mostrare, per il punto precedente, che $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) = b^x b^y$. Per fare ciò faremo uso del seguente lemma

Lemma 1.3 Unicità del sup e inf

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto limitato superiormente (inferiormente). Allora $\sup A$ ($\inf A$) esiste ed è unico

Dimostrazione: l'esistenza del $\sup A$ è garantita dall'assioma di completezza (o di Dedekind) dei reali. Per dimostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che il sup non sia unico ed esistano $m = \sup A$ $m' = \sup A$ con $m \neq m'$. Allora, per come è definito il sup, dobbiamo avere che $m \leqslant m'$ e $m' \leqslant m$ (siccome sia m e m' sono dei maggioranti e, per la precisione, il minore dei maggioranti) $\implies m = m'$ □

Torniamo all'esercizio e definiamo, prima di procedere, la sezione di Dedekind prodotto $B(x)B(y) = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \in B(x), t \in B(y) : x = st\}$ e si osserva che $\forall b^s \in B(x)$ e $\forall b^t \in B(y) \implies b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$ siccome $s \leqslant x$ e $t \leqslant y$ dunque $s + t \leqslant x + y$ dunque $B(x)B(y) \subseteq B(x+y)$. Tuttavia si osserva che $\forall z \in \mathbb{R} : b^z \in B(x+y)$ possiamo considerare invece i numeri razionali che soddisfano la seguente proprietà $t - x < p < y$ e consideriamo a questo punto $q = t - p$ da cui avremo che $t - x < p \implies t - p < x \implies q < x$ ma allora $t = p + q$, dunque:

$$b^t = b^{p+q} \overset{\text{per quanto visto sopra}}{=} b^p b^q \implies b^t \in B(x)B(y) \implies B(x+y) \subseteq B(x)B(y)$$

In conclusione, abbiamo quindi mostrato che $B(x)B(y) = B(x+y)$. Ora però dobbiamo mostrare che $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y)$: si osserva innanzitutto che $\sup B(x+y) = \sup B(x)B(y) \leqslant \sup B(x) \sup B(y)$. Mostriamo che il $\sup B(x) \sup B(y)$ è estremo superiore dell'insieme $B(x)B(y)$, osservando che

1. $\sup B(x) \sup B(y) \geqslant \sup B(x)B(y) \geqslant x \implies \sup B(x) \sup B(y) \geqslant x \, \forall x \in B(x)B(y)$ dunque $\sup B(x) \sup B(y)$ è maggiorante.

2. $\forall x < \sup B(x) \sup B(y) : x$ non è un maggiorante. Per mostrare questo fatto si mostra che $\sup B(x)B(y) = \sup B(x) \sup B(y)$ per assurdo, supponendo (in virtù di quanto detto prima) che $\sup B(x)B(y) < \sup B(x) \sup B(y) \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < \sup B(x)$ e, sempre ragionando alla stessa maniera, possiamo concludere che $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(x)} < \sup B(y)$: si osserva che la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$ non è un maggiorante di $B(x)$ (per definizione di $\sup B(x)$ di cui la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$ è minore) e dunque $\exists r \in \mathbb{Q} : b^r \in B(x) : \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < b^r \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y) \implies \exists s \in \mathbb{Q} : b^s \in B(y) : \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < b^s$ (perché, ragionando come prima, se la quantità $\frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y)$ deve esistere un numero razionale per cui la disuguaglianza è stretta). Ma allora si giunge ad un assurdo siccome $\sup B(x)B(y) = \sup B(x+y) < b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$ che è un assurdo.

Dunque $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) \implies b^{x+y} = b^x b^y \, \forall x, y \in \mathbb{R}$ □

7. Fissato $b > 1, y > 0$; provare che esiste un unico reale x tale che $b^x = y$ utilizzando la seguente "scaletta":
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, b^n - 1 \geqslant n(b-1)$
   (b) Dunque $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$
   (c) Se $t > 1$ e $n > \frac{b-1}{t-1}$ allora $b^{\frac{1}{n}} < t$
   (d) Se $b^w < y$ allora $b^{w+\frac{1}{n}} < y$ per n sufficientemente grande (*suggerimento*: per vedere questo applicare $t = yb^{-w}$ a (c))
   (e) se $b^w > y$ allora $b^{w-\frac{1}{n}} > y$ per n sufficiente grande
   (f) Sia A l'insieme di tutti i w tali che $b^w < y$ e mostrare che $x = \sup A$ soddisfa $b^x = y$
   (g) Provare che x è unico

Dimostrazione: per mostrare la (a) possiamo usare la seguente identità e osservare che $b^i > 1 \forall i \in \mathbb{N} : i \geqslant 0 \implies \sum_{i=0}^{n+1} b^i \geqslant \sum_{i=0}^{n+1} 1 = n + 1$

$$b^{n+1} - 1 = (b-1)(b^n + b^{n-1} + \ldots + b + 1) \geqslant (b-1)(n+1)$$

Potevamo altrimenti ragionare per induzione osservando che $b^{n+1} - 1 = (b^{n+1} + b) - (b-1) = b(b^n - 1) - (b-1) \geqslant bn(b-1) - (b-1) = (b-1)(bn-1) \geqslant (b-1)(n+1)$ e osservare che la tesi è banalmente vera per $n = 0$.
Per mostrare la (b) possiamo usare il seguente lemma:

Lemma 1.4
Sia $b > 1$ allora $b^{\frac{1}{n}} > 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione: Supponiamo che $b^p = \beta > 1$ con $p \in \mathbb{N}$ e per il teorema 1.21 sappiamo che esiste un unico numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^p = \beta$ che indichiamo con $\beta^{\frac{1}{p}}$ dunque possiamo avere due possibili alternative: $\beta^{\frac{1}{p}} < 1$ o $\beta^{\frac{1}{p}} > 1$ ma si osserva che se per assurdo $\beta^{\frac{1}{p}} < 1 \implies (\beta^{\frac{1}{p}})^p < 1$ per gli assiomi di campo, il che è in contraddizione col fatto che $\beta > 1$.

Oss:-

Si osservi che $\beta^{\frac{1}{p}} \neq 1$ siccome implicherebbe che $\frac{1}{p} = 0$ il che è impossibile

$\square$

Dunque, siccome $b^{\frac{1}{n}} > 1$, vale la proprietà che abbiamo mostrato prima: ponendo $t = b^{\frac{1}{n}} \implies t^n - 1 \geqslant n(t-1)$ ovvero $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$.
Per mostrare la (c) si osserva che se $t > 1$ e $n > \frac{b-1}{t-1}$ allora sappiamo che $b - 1 \geqslant n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \geqslant \frac{b-1}{t-1}(b^{\frac{1}{n}-1} - 1) \implies 1 > \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{t-1} \implies b^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant t - 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < t$.
Per mostrare la (d) si osserva che se $b^w < y \implies yb^{-w} > 1$ dunque è possibile applicare la (c) utilizzando $t = yb^{-w}$ dunque $b^{\frac{1}{n}} < yb^{-w} \implies b^{\frac{1}{n}+w} < y$ naturalmente per $n > \frac{b-1}{yb^{-w}-1}$.
La dimostrazione per (e) è simile tuttavia cambia la "partenza", infatti la proprietà che abbiamo usato per mostrare (d) richiede che $t > 1$ e si osserva che se $b^w > y \implies \frac{b^w}{y} > 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < \frac{b^w}{y} \implies b^{w-\frac{1}{n}} > 1$.
Per mostrare (f) si osserva che $A = \{w \in \mathbb{R} : b^w < y\}$ è sicuramente non vuoto e ammette un $\sup A$: si osserva innanzitutto che se $y > 1$ allora $0 \in A$ dunque non è vuoto, se $y = 1$ si osserva che $b^{-1} = \frac{1}{b} < 1 \implies -1 \in A$ e se $0 < y < 1$ si ha che $\frac{1}{y} > 1$ e possiamo mostrare tramite il seguente lemma:

Lemma 1.5 $y = b^x$ non è limitata superiormente

Sia $b > 1$. Allora l'insieme

$$\mathcal{S} = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato superiormente

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che sia limitato superiormente allora $\exists \sup \mathcal{S} := \alpha$ allora $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha > b^n$. Per caratterizzazione del $\sup \mathcal{S}$ si ha che $\forall x < \alpha, x$ non è un maggiorante, dunque $\frac{\alpha}{b} < \alpha$ non è maggiorante, dunque esiste $k \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{b} < b^k \implies \alpha < b^{k+1}$ il che è assurdo $\square$

Tramite questo lemma sappiamo che deve esistere dunque un $n \in \mathbb{N} : b^n > \frac{1}{y} \implies b^{-n} < y \implies -n \in A$. A questo punto mostriamo che $x = \sup A$ soddisfa $b^x = y$: supponiamo che $b^x < y \implies b^{x+\frac{1}{n}} < y \implies x + \frac{1}{n} \in A$ dunque questo contraddice la definizione di estremo superiore (x non è un maggiorante); se invece $b^x > y \implies b^{x-\frac{1}{n}} > y \implies x - \frac{1}{n}$ è a sua volta un maggiorante quindi contraddice la definizione di estremo superiore (non è soddisfatta la proprietà secondo cui $\forall x < \sup \mathcal{S}, x$ non è maggiorante. Dunque l'unica possibilità è che $b^x = y$.
Per mostrare che x è unico supponiamo per assurdo che $\exists x$ e x' tali che $x \neq x'$ e $b^x = b^{x'} = y$. Abbiamo due possibilità: $x' > x$ oppure $x > x'$ e, senza perdita di generalità, mostriamo solamente che si giunge ad una contraddizione se $x' > x$ (la dimostrazione è equivalente nell'altro caso): si consideri il sistema

$$\begin{cases} b^x = y \\ b^{x'} = y \end{cases}$$

allora dividendo membro a membro avremo che $b^{x'-x} = 1$ ma siccome $x' - x > 0 \implies b^{x'-x} > 1$, il che è assurdo (il fatto che $b^w > 1$ se $w > 0$ segue dal fatto che un qualunque numero razionale[1] positivo possa essere scritto come $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ e sappiamo che $b^m > 1$ e, per il lemma 1.4, concludiamo che $(b^m)^{\frac{1}{n}} > 1$). $\square$

8. Mostrare che non è possibile definire una relazione d'ordine sull'insieme dei numeri complessi che renda il campo (dei numeri complessi) ordinato

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che possa essere introdotta una relazione d'ordine che renda il campo dei numeri complessi un campo ordinato, allora vuol dire che:

1. $i > 0$
2. $i < 0$

[1] nel caso dei reali si considera la sezione di Dedekind e dunque si prende un razionale appartenente alla sezione su cui valgono le considerazioni che ora sto per enunciare

ma allora se supponiamo che $i > 0$ allora $i \cdot i > 0 \cdot i \implies -1 > 0$ ma questo contraddice completamente il fatto $1 > 0$ in un campo ordinato e dunque $-1 < 0$. Se invece $i < 0 \implies (-i) > 0 \implies (-i) \cdot (-i) > 0 \implies -1 > 0$ che è nuovamente assurdo. Naturalmente si è escluso il caso $i = 0$ per ragioni banali. □

9 Supponiamo che $z = a + bi$ e $w = c + di$ e definiamo su di essi una relazione d'ordine tale che $z < w$ se $a < c$ e anche se $a = c$ ma $b < d$. Mostrare che questo trasforma l'insieme dei numeri complessi in un insieme ordinato. Questo ordine possiede anche la proprietà del sup?

Dimostrazione: Mostriamo che questa relazione d'ordine soddisfa le proprietà: dati due numeri complessi z e w si osserva che i numeri reali sono un campo ordinato, dunque avremo sempre che $a < c$ oppure $a > c$ oppure $a = c$ (nel primo caso avremo che $z < w$ e nel secondo caso $z > w$). L'unico caso non banale è $a = c$ che possiamo risolvere "guardando" le componenti immaginarie dei numeri complessi, che saranno a loro volta sempre dei numeri reali che, essendo ordinati, avremo sempre che $b < d$ oppure $b > d$ oppure $b = d$ (nel primo caso avremo $z < w$ e nel secondo $z > w$). Se $b = d$ allora si deve concludere che $z = w$: abbiamo quindi dimostrato che, dati due elementi $z, w \in \mathbb{C}$ vale sempre uno dei seguenti predicati:

$$z < w \qquad\qquad z = w \qquad\qquad z > w$$

Adesso dobbiamo mostrare che se $z < w$ e $w < u$ allora $z < u$. Sia adesso $u = e + fi$ e sapendo che $z < w$ si pongono davanti a noi due possibilità:

- $a < c$
- $a = c \wedge b < d$

e ragionando similmente con $w < u$ dobbiamo concludere che ci sono due sole possibilità:

- $c < e$
- $c = e \wedge d < f$

e adesso guardiamo a tutte le possibili configurazioni (4 in totale):

1. $a < c \wedge c < e \implies a < e \implies z < u$ (per la transitività della relazione d'ordine $<$)
2. $a < c \wedge (c = e \wedge b < d) \implies a < e \implies z < u$ (siccome $c = e$)
3. $(a = c \wedge b < d) \wedge (c < e) \implies a < e \implies z < u$ (siccome $a = c < e$)
4. $(a = c \wedge b < d) \wedge (c = e \wedge d < f) \implies b < d < f \implies b < f \implies z < u$

Per mostrare che questo insieme non possiede la proprietà dell'estremo superiore, consideriamo l'insieme definito nella seguente maniera

$$A = \{a + bi \in \mathbb{C} : a \leqslant 0\}$$

si osserva che tutti i numeri immaginari con parte reale positiva sono dei maggioranti dunque A è limitato superiormente. Supponiamo per assurdo che $\exists C \in \mathbb{C} : C \geqslant x \, \forall x \in A$ allora questo implica necessariamente che $\mathrm{Re}(C) > 0$ (altrimenti non potrebbe essere un maggiorante di ogni elemento dell'insieme A) ma si osserva che fallisce miseramente la proprietà caratterizzante del sup secondo cui $\forall x < C, x$ non è maggiorante siccome qualunque numero nella forma $\frac{\mathrm{Re(C)}}{n} + bi$ con $n \in \mathbb{N}$ sarà minore di C ma sarà un maggiorante di A. □

10 Supporre che $z = a + bi$ e $w = u + iv$ e

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

provare che $z^2 = w$ se $v \geqslant 0$ e che $(\bar{z})^2 = w$ se $v \leqslant 0$. Concludere che ogni numero complesso (con una eccezione) ha due radici complesse

Dimostrazione: calcoliamo $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = \frac{|w|+u}{2} - \frac{|w|-u}{2} + 2\left(\frac{|w|^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u + 2i\left(\frac{u^2+v^2-u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u + i|v|$. Distinguiamo due casi:

$$z^2 = \begin{cases} u + iv = w & \text{se } v \geqslant 0 \\ u - iv = \bar{w} & \text{se } v \leqslant 0 \end{cases}$$

adesso calcoliamo $(\bar{z})^2 = (a-bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$ e procedendo come prima si deduce che $(\bar{z})^2 = u - |v|i$:

$$(\bar{z})^2 = \begin{cases} u + iv = w & \text{se } v \leqslant 0 \\ u - iv = \bar{w} & \text{se } v \geqslant 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo ottenuto quanto richiesto. Per mostrare che ogni numero complesso ha due radici si osservi che nell'esercizio abbiamo mostrato che z definito come mostrato soddisfa il fatto che $z^2 = w$. Ora se $v > 0$ allora si ha che le radici di w sono z e $-z$ mentre se $v < 0$ allora si ha che le radici sono $\bar{z}$ e $-\bar{z}$. Se invece $v = 0 \implies z^2 = a \implies z = \pm\sqrt{a}$ mentre se $u = v = 0 \implies z = \bar{z} = 0$ □

11. Se z è un numero complesso, mostrare che esiste un numero $r \geqslant 0$ e un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$ tale che $z = rw$. Sono r e w identificati unicamente da z

Dimostrazione: Se si considera $w = \frac{z}{|z|} \implies |w| = 1$ e si considera $r = |z|$ dunque $z = rw = |z|\frac{z}{|z|} = z$ e questi sono univocamente determinati se $z \neq 0$ (in tal caso $r = 0$ ma $w = a + bi \, \forall a, b \in \mathbb{R}$) □

12. Se $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mostrare che:

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$$

Dimostrazione: si procede per induzione sul numero di termini, osservando che per $n = 1$ e $n = 2$ è banalmente vero. Mostriamo che $n \implies n+1$:

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |\alpha + z_{n+1}|$$

dove con $\alpha = z_1 + \ldots + z_n$. Siccome nell'ultimo valore assoluto abbiamo solamente "due" numeri, deve valere l'ipotesi induttiva, dunque:

$$|\alpha + z_{n+1}| \leqslant |\alpha| + |z_{n+1}| \overset{\text{ip. induttiva}}{\leqslant} |z_1| + \ldots + |z_{n+1}|$$

□

13. Se x, y sono complessi, mostrare che

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Dimostrazione: si osserva che $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leqslant |x - y|$ ma ragionando similmente con $|y| = |y + x - x| \leqslant |x - y| + |x| \implies |y| - |x| \leqslant |x - y|$. Siccome i reali sono ordinati dovremo avere che $|y| > |x|$ oppure $|x| > |y|$ dunque abbiamo che $||x| - |y|| = |x| - |y|$ oppure $||x| - |y|| = |y| - |x|$. In ogni caso abbiamo ottenuto in entrambi i casi una relazione dove $|x - y|$ maggiora entrambe le due espressioni, dunque:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

□

14. Se $z \in \mathbb{C}$ è un numero complesso tale che $|z| = 1$ (dunque $z\bar{z} = 1$) calcolare

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

Dimostrazione: si osserva che, ponendo $z = a + bi$, $|1 + z|^2 = (a+1)^2 + b^2$ mentre $|1 - z|^2 = (1-a)^2 + b^2$, dunque

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = (a+1)^2 + b^2 + b^2 + (1-a)^2 = 2b^2 + (a+1)^2 + (a-1)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2 = 2|z| + 2 = 4$$

□

15. Sotto quali condizioni è valida l'equazione nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?