

Soluzioni agli esercizi di *Principles of Mathematical Analysis* di W.  
Rudin

Francesco Sermi

20 agosto 2024

# Indice

## Capitolo 1

The real and complex number system \_\_\_\_\_ Pagina 2 \_\_\_\_\_

# Capitolo 1

## The real and complex number system

- ① se  $r$  è razionale ( $r \neq 0$ ) e  $x$  è irrazionale, provare che  $r + x$  e  $rx$  sono irrazionali

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che  $r \in \mathbb{Q}$  e  $x$  sia irrazionale, mentre  $r + x$  e  $rx$  siano razionali. Allora,  $r + x = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Ma siccome  $r \in \mathbb{Q} \implies \exists p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$  e

$$r + x = \frac{p}{q} + x = \frac{m}{n} \implies x = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - qm}{qn} \implies x \in \mathbb{Q}$$

il che è assurdo.

Procediamo con  $rx$  alla solita maniera: se  $rx \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{Z} : rx = \frac{m}{n}$ . Ma allora, sapendo che  $r = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  in virtù della sua razionalità,  $x = \frac{m}{nr} = \frac{mq}{np} \implies x \in \mathbb{Q}$  il che è nuovamente assurdo.  $\square$

- ② Provare che non esiste razionale  $q$  tale che  $q^2 = 12$

**Dimostrazione:** si osservi il seguente lemma (di cui non daremo dimostrazione)

**Lemma 1.1 (di Euclide)**

Sia  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n$  è primo. Se  $n|ab$  e  $a$  è coprimo con  $b$  (o viceversa) allora  $n|a \vee n|b$

Supponiamo per assurdo che  $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 12$ . Data la razionalità di  $q$  abbiamo che esistono  $m, n \in \mathbb{Z} : q = \frac{m}{n}$  e  $m$  e  $n$  coprimi fra allora. Ciò implica che:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{12} \implies \frac{m^2}{n^2} = 12 \implies m^2 = 12n^2$$

Questo vuol dire che  $m$  è pari. Siccome  $2|m \implies \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$  e dunque

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 12n^2 \implies k^2 = 3n^2$$

Siccome il lato destro è divisibile per 3 allora si deve avere che anche il lato sinistro è divisibile per 3 e dunque, per il lemma di Euclide, si osserva che si deve avere che  $3|k \implies \exists q \in \mathbb{Z} : k = 3q$ . Si deduce che

$$k^2 = 9q^2 = 3n^2 \implies n^2 = 3q^2$$

dunque  $n^2$  è divisibile per 3 e, sempre per il lemma di Euclide,  $n$  è divisibile per 3. Ma allora si giunge ad un assurdo siccome  $m = 2k$  con  $3|k$  e  $3|n$  contro l'ipotesi di coprimità fra  $m$  e  $n$   $\square$

Un'ulteriore dimostrazione poteva essere effettuata basandosi sul fatto che  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  dunque, tramite l'esercizio 1, sappiamo che  $rx$  è irrazionale se  $x$  è irrazionale e  $r$  razionale quindi la dimostrazione si riduceva a provare che  $\sqrt{3}$  è irrazionale.

- ③ Provare la seguente proposizione

**Proposizione 1.1** Conseguenze degli assiomi moltiplicativi di cui gode il campo  $\mathbb{R}$ 

Gli assiomi moltiplicativi di cui gode  $\mathbb{R}$  implicano le seguenti proprietà:

- ① Se  $x \neq 0$  e  $xy = xz \implies y = z$
- ② Se  $x \neq 0$  e  $xy = x \implies y = 1$
- ③ Se  $x \neq 0$  e  $xy = 1 \implies y = x^{-1}$
- ④ Se  $x \neq 0$  mostrare che  $(x^{-1})^{-1} = x$

**Dimostrazione:** per dimostrare la ①, banalmente, si ha che:

$$y \stackrel{\text{esistenza di un elemento inverso e } x \neq 0}{=} xx^{-1}y \stackrel{\text{prop. commutativa}}{=} xzx^{-1} \stackrel{\text{prop. commutativa}}{=} xx^{-1}z = z \implies y = z$$

La ② segue direttamente dalla prima ponendo  $z = 1$ , così come la ③ ponendo  $z = x^{-1}$ . Per la ④ si osserva che siccome  $\forall x \neq 0, xx^{-1} = 1$  allora  $\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = 1 \implies x\frac{1}{x}(\frac{1}{x})^{-1} = x \implies (\frac{1}{x})^{-1} = x$   $\square$

- ④ Sia  $E \subset A$  con  $A$  insieme ordinato (totalmente? Il Rudin non ce lo fa sapere ma è abbastanza probabile). Supponiamo che  $\alpha$  sia un minorante di  $E$  e  $\beta$  sia un maggiorante di  $E$ . Provare che  $\alpha \leq \beta$

**Dimostrazione:** per definizione abbiamo che se  $\alpha$  è un minorante allora  $\forall x \in E, \alpha \leq x$  e se  $\beta$  è un maggiorante allora  $\forall x \in E, x \leq \beta$ . Per transitività si ha che  $\alpha \leq \beta$   $\square$

- ⑤ Sia  $A$  un insieme non vuoto di numeri reali che è limitato inferiormente. Sia  $-A$  l'insieme di tutti i numeri  $-x$ , con  $x \in A$ . Mostrare che

$$\inf A = -\sup(-A)$$

**Dimostrazione:** sia  $y \in \mathbb{R}$  un minorante di  $A$ . Allora si osserva che, per definizione,  $\forall x \in A, y \leq x \implies -y \geq -x$  dunque  $-A$  sarà limitato superiormente. Siccome  $\forall E \subset \mathbb{R} \implies \exists \sup E, \inf E \in \mathbb{R}$  allora sappiamo che  $-A$  avrà  $\sup(-A) \in \mathbb{R}$  che denoteremo con  $z = \sup(-A)$  e mostriamo la tesi, ovvero che  $\sup(-A) = -\inf A$ : dobbiamo mostrare che  $-z$  è l'estremo inferiore. Per farlo si osserva che se  $w > -z \implies z > -w$  dunque  $-w$  non è un maggiorante di  $-A$  dunque  $\exists y = -x (x \in A \text{ per def.}) \in -A, z > y > -w \implies -z < -y < w$  ma siccome  $-y = -(-x) = x \implies x < w$  dunque  $w$  non è un minorante di  $A$ . Se invece supponiamo esista  $w \in A : w < -z \implies -w > z$  ma  $-w \in -A$  il che è assurdo siccome  $\nexists w \in -A : w > \sup(-A)$ . Dunque possiamo concludere che  $\inf A = -\sup(-A)$  siccome abbiamo dimostrato che:

- ①  $-z$  è un minorante di  $A$ ;
- ②  $\forall x > -z \implies x$  non è un minorante

$\square$

- ⑥ Fissato  $b > 1$

- (a) Se  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n > 0, q > 0$  e  $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  mostrare che

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = (b^p)^{\frac{1}{q}}$$

Dunque ha senso definire  $b^r = (b^m)^{\frac{1}{n}}$

- (b) Mostrare che  $b^{r+s} = b^r b^s$  se  $r, s \in \mathbb{Q}$
- (c) Se  $x$  è reale, definiamo  $B(x)$  come l'insieme di tutti i numeri  $b^t$ , dove  $t$  è un numero razionale e  $t \leq x$ . Mostrare che

$$b^r = \sup B(r)$$

dunque ha senso definire

$$b^x = \sup B(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

(d) Mostrare che  $b^{x+y} = b^x b^y \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Dimostrazione:** Per mostrare (a) si osserva che, dal teorema 1.21, si deve avere che esistono due numeri reali  $r_1$  e  $r_2$  che identificano univocamente  $(b^m)^{\frac{1}{n}}$  e  $(b^p)^{\frac{1}{q}}$  rispettivamente. La tesi dunque si ottiene mostrando che  $r_1 = r_2$ . Si osserva che  $(r_1)^n = b^m$  e  $(r_2)^q = b^p$  e, siccome  $r$  è razionale, possiamo scrivere che  $m = rn$  e  $p = rq$ . Dunque

$$(r_1)^n = b^{rn} \quad (r_2)^q = b^{rq}$$

ma elevando la prima eguaglianza da entrambi le parti per  $q$  e la seconda per  $n$  si ottiene che

$$(r_1)^{nq} = b^{rnq}, (r_2)^{nq} = b^{nqr} \implies r_1 = r_2$$

Per mostrare la (b) si osserva che se  $r, s \in \mathbb{Q}$  allora si ha che  $\exists m, n, p, q \in \mathbb{Z} : r = \frac{m}{n}$  e  $s = \frac{p}{q}$ . Dunque

$$b^{r+s} = b^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = b^{\frac{mq+np}{nq}}$$

come prima sappiamo che esisteranno  $r_1$  e  $r_2$  univocamente determinati tali che  $r_1 = b^{r+s}$  e  $r_2 = b^r b^s$  e vogliamo mostrare che  $r_1 = r_2$ . Adesso si osserva che

$$(b^{r+s})^{nq} = b^{mq+np} = (r_1)^{nq}$$

e

$$(b^r b^s)^{nq} = (b^r)^{nq} (b^s)^{nq} = (b^{\frac{m}{n}})^{nq} (b^{\frac{p}{q}})^{nq} = b^{mq} b^{pn} = b^{mq+np}$$

dunque  $(b^{r+s})^{nq} = (b^r b^s)^{nq} \implies b^{r+s} = b^r b^s$ .

Per mostrare la (c) bisogna innanzitutto osservare che, definendo  $B(x)$  come sopra si ha che, dati  $t, s \in B(x)$ ,  $t \leq s \implies b^t \leq b^s$ . Si può mostrare questo fatto in maniera abbastanza semplice ricordando come viene definita la relazione d'ordine  $\leq$  sui razionali:

**Lemma 1.2**  $b^x$  è crescente con  $x \in \mathbb{Q}$

$b^x$  ristretta ai razionali è una funzione crescente

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $s, t \in \mathbb{Q}$  con  $s \leq t$ . Siccome  $s$  e  $t$  sono razionali, allora esisteranno  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$  tali che  $s = \frac{m}{n}$  e  $t = \frac{p}{q}$ . Dunque abbiamo che  $s \leq t \iff mq \leq np$ . Abbiamo che  $b^s = (b^m)^{\frac{1}{n}}$  e  $b^t = (b^p)^{\frac{1}{q}}$  e sappiamo che questi numeri identificano in maniera univoca, grazie al teorema 1.21, due distinti numeri reali (tranne nel caso in cui  $s = t$ ). Si osserva che se  $r_1 = (b^m)^{\frac{1}{n}} \implies (r_1)^n = b^m \implies (r_1)^{nq} = b^{mq} < b^{np} = (r_2)^{nq} \implies r_1 < r_2$  (prendere la radice non cambia la direzione della disuguaglianza siccome possiamo sfruttare l'identità  $b^n - a^n = (b-a) \sum_{i=1}^n b^{n-i} a^{i-1}$  e osservare che  $b^n \geq a^n \iff b \geq a$ )  $\square$

Se consideriamo  $B(r)$  con  $r$  razionale, allora si ha banalmente che  $b^r \in B(r)$  e dev'essere l'estremo superiore: infatti, se consideriamo  $t > r \implies b^t > b^r$ , dunque  $b^t > b^r \geq b^x \implies b^t > b^x \forall x : b^x \in B(r)$  dunque  $t$  è un maggiorante di  $B(r)$ . Mostriamo che  $\forall x < r : b^x$  non è un maggiorante: se per assurdo  $\exists \alpha < r : b^\alpha$  è maggiorante, allora  $\forall y \leq \alpha, y \leq \alpha < r \implies b^y \leq b^\alpha < b^r$  il che è assurdo siccome  $r \in B(r)$  e abbiamo che  $b^\alpha < b^r \leq b^\alpha$ . Per mostrare la (d) si osserva che dobbiamo mostrare, per il punto precedente, che  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) = b^x b^y$ . Per fare ciò faremo uso del seguente lemma

**Lemma 1.3** Unicità del sup e inf

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto limitato superiormente (inferiormente). Allora  $\sup A$  ( $\inf A$ ) esiste ed è unico

**Dimostrazione:** l'esistenza del  $\sup A$  è garantita dall'assioma di completezza (o di Dedekind) dei reali. Per dimostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che il sup non sia unico ed esistano  $m = \sup A$   $m' = \sup A$  con  $m \neq m'$ . Allora, per come è definito il sup, dobbiamo avere che  $m \leq m'$  e  $m' \leq m$  (siccome sia  $m$  e  $m'$  sono dei maggioranti e, per la precisione, il minore dei maggioranti)  $\implies m = m'$   $\square$

Torniamo all'esercizio e definiamo, prima di procedere, la sezione di Dedekind prodotto  $B(x)B(y) = \{x \in \mathbb{Q} : \exists s \in B(x), t \in B(y) : x = st\}$  e si osserva che  $\forall b^s \in B(x)$  e  $\forall b^t \in B(y) \implies b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$  siccome  $s \leq x$  e  $t \leq y$  dunque  $s+t \leq x+y$  dunque  $B(x)B(y) \subseteq B(x+y)$ . Tuttavia si osserva che  $\forall z \in \mathbb{R} : b^z \in B(x+y)$  possiamo considerare invece i numeri razionali che soddisfano la seguente proprietà  $t-x < p < y$  e consideriamo a questo punto  $q = t-p$  da cui avremo che  $t-x < p \implies t-p < x \implies q < x$  ma allora  $t = p+q$ , dunque:

$$b^t = b^{p+q} \text{ per quanto } \overset{\text{visto sopra}}{=} b^p b^q \implies b^t \in B(x)B(y) \implies B(x+y) \subseteq B(x)B(y)$$

In conclusione, abbiamo quindi mostrato che  $B(x)B(y) = B(x+y)$ . Ora però dobbiamo mostrare che  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y)$ : si osserva innanzitutto che  $\sup B(x+y) = \sup B(x)B(y) \leq \sup B(x) \sup B(y)$ . Mostriamo che il  $\sup B(x) \sup B(y)$  è estremo superiore dell'insieme  $B(x)B(y)$ , osservando che

- ①  $\sup B(x) \sup B(y) \geq \sup B(x)B(y) \geq x \implies \sup B(x) \sup B(y) \geq x \forall x \in B(x)B(y)$  dunque  $\sup B(x) \sup B(y)$  è maggiorante.
- ②  $\forall x < \sup B(x) \sup B(y) : x$  non è un maggiorante. Per mostrare questo fatto si mostra che  $\sup B(x)B(y) = \sup B(x) \sup B(y)$  per assurdo, supponendo (in virtù di quanto detto prima) che  $\sup B(x)B(y) < \sup B(x) \sup B(y) \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < \sup B(x)$  e, sempre ragionando alla stessa maniera, possiamo concludere che  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(x)} < \sup B(y)$ : si osserva che la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$  non è un maggiorante di  $B(x)$  (per definizione di  $\sup B(x)$ ) di cui la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)}$  è minore e dunque  $\exists r \in \mathbb{Q} : b^r \in B(x) : \frac{\sup B(x)B(y)}{\sup B(y)} < b^r \implies \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y) \implies \exists s \in \mathbb{Q} : b^s \in B(y) : \frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < b^s$  (perché, ragionando come prima, se la quantità  $\frac{\sup B(x)B(y)}{b^r} < \sup B(y)$  deve esistere un numero razionale per cui la disuguaglianza è stretta). Ma allora si giunge ad un assurdo siccome  $\sup B(x)B(y) = \sup B(x+y) < b^s b^t = b^{s+t} \in B(x+y)$  che è un assurdo.

Dunque  $\sup B(x+y) = \sup B(x) \sup B(y) \implies b^{x+y} = b^x b^y \forall x, y \in \mathbb{R}$  □

- ⑦ Fissato  $b > 1, y > 0$ ; provare che esiste un unico reale  $x$  tale che  $b^x = y$  utilizzando la seguente "scaletta":
  - (a)  $\forall n \in \mathbb{N}, b^n - 1 \geq n(b-1)$
  - (b) Dunque  $b-1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$
  - (c) Se  $t > 1$  e  $n > \frac{b-1}{t-1}$  allora  $b^{\frac{1}{n}} < t$
  - (d) Se  $b^w < y$  allora  $b^{w+\frac{1}{n}} < y$  per  $n$  sufficientemente grande (*suggerimento*: per vedere questo applicare  $t = yb^{-w}$  a (c))
  - (e) se  $b^w > y$  allora  $b^{w-\frac{1}{n}} > y$  per  $n$  sufficiente grande
  - (f) Sia  $A$  l'insieme di tutti i  $w$  tali che  $b^w < y$  e mostrare che  $x = \sup A$  soddisfa  $b^x = y$
  - (g) Provare che  $x$  è unico

**Dimostrazione:** per mostrare la (a) possiamo usare la seguente identità e osservare che  $b^i > 1 \forall i \in \mathbb{N} : i \geq 1$

$$0 \implies \sum_{i=0}^{n+1} b^i \geq \sum_{i=0}^{n+1} 1 = n+1$$

$$b^{n+1} - 1 = (b-1)(b^n + b^{n-1} + \dots + b + 1) \geq (b-1)(n+1)$$

Potevamo altrimenti ragionare per induzione osservando che  $b^{n+1} - 1 = (b^{n+1} + b) - (b-1) = b(b^n - 1) - (b-1) \geq bn(b-1) - (b-1) = (b-1)(bn-1) \geq (b-1)(n+1)$  e osservare che la tesi è banalmente vera per  $n=0$ .

Per mostrare la (b) possiamo usare il seguente lemma:

#### Lemma 1.4

Sia  $b > 1$  allora  $b^{\frac{1}{n}} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $b^p = \beta > 1$  con  $p \in \mathbb{N}$  e per il teorema 1.21 sappiamo che esiste un unico numero  $y \in \mathbb{R}$  tale che  $y^p = \beta$  che indichiamo con  $\beta^{\frac{1}{p}}$  dunque possiamo avere due possibili alternative:  $\beta^{\frac{1}{p}} < 1$  o  $\beta^{\frac{1}{p}} > 1$  ma si osserva che se per assurdo  $\beta^{\frac{1}{p}} < 1 \implies (\beta^{\frac{1}{p}})^p < 1$  per gli assiomi di campo, il che è in contraddizione col fatto che  $\beta > 1$ .

**Oss:-**

Si osservi che  $\beta^{\frac{1}{p}} \neq 1$  siccome implicherebbe che  $\frac{1}{p} = 0$  il che è impossibile

□

Dunque, siccome  $b^{\frac{1}{n}} > 1$ , vale la proprietà che abbiamo mostrato prima: ponendo  $t = b^{\frac{1}{n}} \implies t^n - 1 \geq n(t - 1)$  ovvero  $b - 1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$ .

Per mostrare la (c) si osserva che se  $t > 1$  e  $n > \frac{b-1}{t-1}$  allora sappiamo che  $b - 1 \geq n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \geq \frac{b-1}{t-1}(b^{\frac{1}{n}-1} - 1) \implies 1 > \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{t-1} \implies b^{\frac{1}{n}} - 1 \leq t - 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < t$ .

Per mostrare la (d) si osserva che se  $b^w < y \implies yb^{-w} > 1$  dunque è possibile applicare la (c) utilizzando  $t = yb^{-w}$  dunque  $b^{\frac{1}{n}} < yb^{-w} \implies b^{\frac{1}{n}+w} < y$  naturalmente per  $n > \frac{b-1}{yb^{-w}-1}$ .

La dimostrazione per (e) è simile tuttavia cambia la "partenza", infatti la proprietà che abbiamo usato per mostrare (d) richiede che  $t > 1$  e si osserva che se  $b^w > y \implies \frac{b^w}{y} > 1 \implies b^{\frac{1}{n}} < \frac{b^w}{y} \implies b^{w-\frac{1}{n}} > 1$ .

Per mostrare (f) si osserva che  $A = \{w \in \mathbb{R} : b^w < y\}$  è sicuramente non vuoto e ammette un sup  $A$ : si osserva innanzitutto che se  $y > 1$  allora  $0 \in A$  dunque non è vuoto, se  $y = 1$  si osserva che  $b^{-1} = \frac{1}{b} < 1 \implies -1 \in A$  e se  $0 < y < 1$  si ha che  $\frac{1}{y} > 1$  e possiamo mostrare tramite il seguente lemma:

**Lemma 1.5**  $y = b^x$  non è limitata superiormente

Sia  $b > 1$ . Allora l'insieme

$$\mathcal{S} = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato superiormente

**Dimostrazione:** Supponiamo per assurdo che sia limitato superiormente allora  $\exists \sup \mathcal{S} := \alpha$  allora  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha > b^n$ . Per caratterizzazione del sup  $\mathcal{S}$  si ha che  $\forall x < \alpha, x$  non è un maggiorante, dunque  $\frac{\alpha}{b} < \alpha$  non è maggiorante, dunque esiste  $k \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{b} < b^k \implies \alpha < b^{k+1}$  il che è assurdo □

Tramite questo lemma sappiamo che deve esistere dunque un  $n \in \mathbb{N} : b^n > \frac{1}{y} \implies b^{-n} < y \implies -n \in A$ . A questo punto mostriamo che  $x = \sup A$  soddisfa  $b^x = y$ : supponiamo che  $b^x < y \implies b^{x+\frac{1}{n}} < y \implies x + \frac{1}{n} \in A$  dunque questo contraddice la definizione di estremo superiore ( $x$  non è un maggiorante); se invece  $b^x > y \implies b^{x-\frac{1}{n}} > y \implies x - \frac{1}{n}$  è a sua volta un maggiorante quindi contraddice la definizione di estremo superiore (non è soddisfatta la proprietà secondo cui  $\forall x < \sup \mathcal{S}, x$  non è maggiorante. Dunque l'unica possibilità è che  $b^x = y$ . Per mostrare che  $x$  è unico supponiamo per assurdo che  $\exists x$  e  $x'$  tali che  $x \neq x'$  e  $b^x = b^{x'} = y$ . Abbiamo due possibilità:  $x' > x$  oppure  $x > x'$  e, senza perdita di generalità, mostriamo solamente che si giunge ad una contraddizione se  $x' > x$  (la dimostrazione è equivalente nell'altro caso): si consideri il sistema

$$\begin{cases} b^x = y \\ b^{x'} = y \end{cases}$$

allora dividendo membro a membro avremo che  $b^{x'-x} = 1$  ma siccome  $x' - x > 0 \implies b^{x'-x} > 1$ , il che è assurdo (il fatto che  $b^w > 1$  se  $w > 0$  segue dal fatto che un qualunque numero razionale<sup>1</sup> positivo possa essere scritto come  $\frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$  e sappiamo che  $b^m > 1$  e, per il lemma 1.4, concludiamo che  $(b^m)^{\frac{1}{n}} > 1$ ). □

- ⑧ Mostrare che non è possibile definire una relazione d'ordine sull'insieme dei numeri complessi che renda il campo (dei numeri complessi) ordinato

**Dimostrazione:** supponiamo per assurdo che possa essere introdotta una relazione d'ordine che renda il campo dei numeri complessi un campo ordinato, allora vuol dire che:

- ①  $i > 0$   
②  $i < 0$

<sup>1</sup>nel caso dei reali si considera la sezione di Dedekind e dunque si prende un razionale appartenente alla sezione su cui valgono le considerazioni che ora sto per enunciare

ma allora se supponiamo che  $i > 0$  allora  $i \cdot i > 0 \cdot i \implies -1 > 0$  ma questo contraddice completamente il fatto  $1 > 0$  in un campo ordinato e dunque  $-1 < 0$ . Se invece  $i < 0 \implies (-i) > 0 \implies (-i) \cdot (-i) > 0 \implies -1 > 0$  che è nuovamente assurdo. Naturalmente si è escluso il caso  $i = 0$  per ragioni banali.  $\square$