傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 3

练习 7. 2. 下面的公式那些恒为永真式?

3° $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$

解: 3° $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$ 是永真式, 以下是它的真值表.

$(q$	$\vee$	$r)$	$\to$	$(\neg$	r	$\to$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$ 不是永真式, 以下是它的真值表.

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$((q$	$\wedge$	$\neg$	$r)$	$\wedge$	$(r$	$\wedge$	$\neg$	$p))$
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 不是永真式, 以下是它的真值表.

$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$	$\to$	$((p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$r)$
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

练习 7. 3. 以下结论是否正确? 为什么?

$1^\circ \vDash p(x_1, \cdots, x_n) \ \Leftrightarrow\ \vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

$2^\circ \vDash (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \ \Rightarrow\ \vDash p \leftrightarrow p'$ 且 $\vDash q \leftrightarrow q'$

解: 1° 正确, 证明如下.

(充分性) 因为 $\vDash p(x_1, \cdots, x_n)$, 用 $\neg x_1, \cdots, \neg x_n$ 分别全部替换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$, 由代换定理有 $\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

(必要性) 已知 $\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$, 用反证法, 假设存在 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $v(p(x_1, \cdots, x_n)) = 0$, 则取 $x_1' = \neg x_1$, $\cdots$, $x_n' = \neg x_n$, 因为 $v(\neg\neg q) = v(q)$, 所以 $v(\neg x_1') = v(x_1), \cdots, v(\neg x_n') = v(x_n)$, 有

$$v(p(\neg x_1', \cdots, \neg x_n')) = p(v(\neg x_1'), \cdots, v(\neg x_n')) = p(v(x_1), \cdots, v(x_n)) = v(p(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

这与 $\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$ 矛盾, 所以不存在 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $v(p(x_1, \cdots, x_n)) = 0$, 即 $\vDash p(x_1, \cdots, x_n)$.

2° 错误. 取 $p = q = x$, $p' = q' = \neg x$, 由同一律, $\vDash p \to q$, $\vDash p' \to q'$, 即 $v(p \to q) \equiv 1$, $v(p' \to q') \equiv 1$, 而 $(1 \leftrightarrow 1) = 1$, 所以 $\vDash (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q')$, 但是显然 $v(p \leftrightarrow p') = v(x \leftrightarrow \neg x) \equiv 0$, $v(q \leftrightarrow q') \equiv 0$, 与题设不符, 所以题设错误.