傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 4

练习 9. 1. 证明以下各对公式是等值的.

2° $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r$ 和 $r \to (q \vee p)$

3° $(\neg p \vee q) \to r$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee r$

解: 2° 由 De. Morgan 律有 $\neg p \wedge \neg q$ 与 $\neg(p \vee q)$ 等值, 而有析取交换律 $\vDash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$, 所以 $\neg p \wedge \neg q$ 与 $q \vee p$ 等值, 进而

$$\vDash ((\neg p \wedge \neg q) \to \neg r) \leftrightarrow (\neg(q \vee p) \to \neg r) \tag{9.1}$$

而由两个换位律可得 $\vdash (\neg p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to p)$, 从而 $\vDash (\neg p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to p)$, 由代换定理就有

$$\vDash (\neg(q \vee p) \to \neg r) \leftrightarrow (r \to (q \vee p)) \tag{9.2}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用等值的可递性可知 $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r$ 和 $r \to (q \vee p)$ 等值. □

3° 由双重否定律和第二双重否定律有 $\vDash q \leftrightarrow \neg\neg q$, 因此 $\neg p \vee q$ 与 $\neg p \vee \neg\neg q$ 等值. 由 De. Morgan 律有 $\neg p \vee \neg\neg q$ 与 $\neg(p \wedge \neg q)$ 等值, 由等值的可递性可知 $\neg p \vee q$ 与 $\neg(p \wedge \neg q)$ 等值, 因此

$$\vDash ((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \to r \tag{9.3}$$

而 $p \vee q = \neg p \to q$, 即式 (9.3) 等价为

$$\vDash ((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \tag{9.4}$$

所以题中两公式等值. □

练习 9. 2. 证明 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$ 与下列公式都等值.

1° $\neg(x_2 \to x_1) \to (\neg x_2 \vee x_3)$

2° $(\neg x_1 \wedge x_2) \to \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$

解: 1° 有析取交换律 $\vDash (x_1 \vee \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_1)$, 而 $p \vee q = \neg p \to q$, 因此 $x_1 \vee \neg x_2$ 与 $\neg\neg x_2 \to x_1$ 等值. 而由双重否定律和第二双重否定律有 $\vDash \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 所以有

$$\vDash (x_1 \vee \neg x_2) \leftrightarrow (x_2 \to x_1) \tag{9.1}$$

同样由 $\vDash \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 有 $\neg\neg x_2 \to x_3$ 与 $x_2 \to x_3$ 等值, 即

$$\vDash (x_2 \to x_3) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_3) \tag{9.2}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$ 与 $\neg(x_2 \to x_1) \to (\neg x_2 \vee x_3)$ 等值. □

2° $x_1 \vee \neg x_2$ 的对偶为 $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2$, 由对偶律 $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2$ 与 $\neg(x_1 \vee \neg x_2)$ 等值. 而 $\vDash \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 所以

$$\vDash (\vee x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow \neg(x_1 \vee \neg x_2) \tag{9.3}$$

$x_2 \wedge \neg x_3$ 的对偶为 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$, 由对偶律 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 而 $\vDash \neg\neg x_3 \leftrightarrow x_3$, 所以 $\neg x_2 \vee x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 由式 (9.2) 利用等值的可递性有

$$\vDash \neg(x_2 \wedge \neg x_3) \leftrightarrow (x_2 \to x_3) \tag{9.4}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$ 与 $(\neg x_1 \wedge x_2) \to \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. □

练习 10. 1. 求以下公式的等值主析取范式.

3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$

解: 3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的成真指派是

$$(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1) \tag{10.1}$$

那么 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \tag{10.2}$$

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$ 的成真指派是

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0) \tag{10.3}$$

那么 $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \tag{10.4}$$

练习 10. 2. 求以下公式的等值主合取范式.

1° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

2° $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$

解: 1° 记 $p = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$, 这是一个主析取范式, 它的成真指派是

$$(1,1,1),(0,0,1) \tag{10.1}$$

$\neg p$ 的成真指派是

$$(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,0) \tag{10.2}$$

$\neg p$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \tag{10.3}$$

由此得 p 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \tag{10.4}$$

2° 记 $q = ((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$, q 的成真指派是

$$\begin{gathered}(1,1,1,1),(1,1,0,1),(1,1,0,0),(1,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,1),\\(0,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,0,0,0)\end{gathered} \tag{10.5}$$

$\neg q$ 的成真指派是

$$(1,1,1,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0) \tag{10.6}$$

$\neg q$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \tag{10.7}$$

由此得 q 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \tag{10.8}$$