

数理逻辑基础 作业 4

练习 9. 1. 证明以下各对公式是等值的.

$$2^\circ (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r \text{ 和 } r \rightarrow (q \vee p)$$

$$3^\circ (\neg p \vee q) \rightarrow r \text{ 和 } (p \wedge \neg q) \vee r$$

解: 2° 由 De. Morgan 律有 $\neg p \wedge \neg q$ 与 $\neg(p \vee q)$ 等值, 而有析取交换律 $\models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$, 所以 $\neg p \wedge \neg q$ 与 $q \vee p$ 等值, 进而

$$\models ((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (\neg(q \vee p) \rightarrow \neg r) \quad (9.1)$$

而由两个换位律可得 $\vdash (\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$, 从而 $\models (\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$, 由代换定理就有

$$\models (\neg(q \vee p) \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow (q \vee p)) \quad (9.2)$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用等值的可递性可知 $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$ 和 $r \rightarrow (q \vee p)$ 等值. \square

3° 由双重否定律和第二双重否定律有 $\models q \leftrightarrow \neg\neg q$, 因此 $\neg p \vee q$ 与 $\neg p \vee \neg\neg q$ 等值. 由 De. Morgan 律有 $\neg p \vee \neg\neg q$ 与 $\neg(p \wedge \neg q)$ 等值, 由等值的可递性可知 $\neg p \vee q$ 与 $\neg(p \wedge \neg q)$ 等值, 因此

$$\models ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \rightarrow r \quad (9.3)$$

而 $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, 即式 (9.3) 等价于

$$\models ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \quad (9.4)$$

所以题中两公式等值. \square

练习 9. 2. 证明 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$ 与下列公式都等值.

$$1^\circ \neg(x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow (\neg x_2 \vee x_3)$$

$$2^\circ (\neg x_1 \wedge x_2) \rightarrow \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$$

解: 1° 有析取交换律 $\models (x_1 \vee \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_1)$, 而 $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, 因此 $x_1 \vee \neg x_2$ 与 $\neg\neg x_2 \rightarrow x_1$ 等值. 而由双重否定律和第二双重否定律有 $\models \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 所以有

$$\models (x_1 \vee \neg x_2) \leftrightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \quad (9.1)$$

同样由 $\models \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 有 $\neg\neg x_2 \rightarrow x_3$ 与 $x_2 \rightarrow x_3$ 等值, 即

$$\models (x_2 \rightarrow x_3) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_3) \quad (9.2)$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$ 与 $\neg(x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow (\neg x_2 \vee x_3)$ 等值. \square

2° $x_1 \vee \neg x_2$ 的对偶为 $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2$, 由对偶律 $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2$ 与 $\neg(x_1 \vee \neg x_2)$ 等值. 而 $\models \neg\neg x_2 \leftrightarrow x_2$, 所以

$$\models (\neg x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow \neg(x_1 \vee \neg x_2) \quad (9.3)$$

$x_2 \wedge \neg x_3$ 的对偶为 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$, 由对偶律 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 而 $\models \neg\neg x_3 \leftrightarrow x_3$, 所以 $\neg x_2 \vee x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 由式 (9.2) 利用等值的可递性有

$$\models (\neg(x_2 \wedge \neg x_3) \leftrightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \quad (9.4)$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$ 与 $(\neg x_1 \wedge x_2) \rightarrow \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. \square

练习 10. 1. 求以下公式的等值主析取范式.

$$3^\circ (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$$

$$4^\circ \neg((x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow x_3)$$

解: $3^\circ (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的成真指派是

$$(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \quad (10.1)$$

那么 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \quad (10.2)$$

$4^\circ \neg((x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow x_3)$ 的成真指派是

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0) \quad (10.3)$$

那么 $\neg((x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \quad (10.4)$$

练习 10. 2. 求以下公式的等值主合取范式.

$$1^\circ (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$$

$$2^\circ ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4$$

解: 1° 记 $p = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$, 这是一个主析取范式, 它的成真指派是

$$(1, 1, 1), (0, 0, 1) \quad (10.1)$$

$\neg p$ 的成真指派是

$$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0) \quad (10.2)$$

$\neg p$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \quad (10.3)$$

由此得 p 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (10.4)$$

2° 记 $q = ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4$, q 的成真指派是

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), \\ (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0) \quad (10.5)$$

$\neg q$ 的成真指派是

$$(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0) \quad (10.6)$$

$\neg q$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \quad (10.7)$$

由此得 q 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \quad (10.8)$$