

数理逻辑基础 作业 6

练习 14. 2. 在以下公式中, 哪些 x_1 的出现是自由的? 哪些 x_1 的出现是约束的? 项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的?

$$3^\circ \forall x_1 R_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$$

$$4^\circ \forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow \forall x_1 R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$$

解: 3° 第 3 个 x_1 的出现是自由的, 第 1, 2 个 x_1 的出现是约束的.

因为 x_2 在公式中不自由出现, 所以项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对公式中的 x_2 是自由的.

4° 第 1, 2 个 x_1 的出现是自由的, 第 3, 4 个 x_1 的出现是约束的.

项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对公式中的 x_2 是不自由的, 因为替换第二个 x_2 后项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 中的 x_1 受到约束.

练习 14. 3. 设 t 是项 $f_1^2(x_1, x_3)$, $p(x_1)$ 是下面的公式. 确定 t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 是否自由? 如果是自由的, 写出 $p(t)$.

$$3^\circ \forall x_2 R_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_3 R_1^3(x_1, x_2, x_3)$$

$$4^\circ \forall x_2 R_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow \forall x_3 R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$$

解: 3° t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, 因为替换后 t 中的 x_3 受到约束.

4° t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, 因为替换后 t 中的 x_3 受到约束.

练习 14. 5. 设个体变元 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现, 个体变元 y 不在公式 $p(x)$ 中自由出现. 试证, 如果 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的, 那么 x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的.

解: 因为 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现, 所以所有的 x 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 将 $p(y)$ 中的 y 分为两部分:

(a) $p(x)$ 中原有的 y , 它们本身就是不自由出现的.

(b) $p(x)$ 中 x 被替换后的 y , 因为 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的, 所以这部分 y 都是自由的, 即它们都不是在 $\forall y$ 中或在 $\forall y$ 的范围中.

而因为 $p(x)$ 中的 x 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中, 所以 $p(y)$ 中自由的 y (即 b 部分) 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 因此, 用 x 替换 $p(y)$ 中自由出现的 y 后, 这些 x 都不会出现在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 因此, x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的.

练习 15. 2. 试证对任意公式 p 与 q , 有

$$\vdash \forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall xp \rightarrow \forall xq)$$

解: 先证明 $\{\forall x(p \rightarrow q), \forall xp\} \vdash \forall xq$:

- | | |
|--|--------------|
| (1) $\forall x(p \rightarrow q)$ | 假定 |
| (2) $\forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | (K4) |
| (3) $p \rightarrow q$ | (1), (2), MP |
| (4) $\forall xp$ | 假定 |
| (5) $\forall xp \rightarrow p$ | (K4) |
| (6) p | (4), (5), MP |
| (7) q | (6), (3), MP |
| (8) $\forall xp$ | (7), Gen |

在上面的证明中, 除了 x 外没有使用其他的 Gen 变元, 而 x 显然不在 $\forall xp$ 和 $\forall x(p \rightarrow q)$ 中自由出现, 由演绎定理, 先后有 $\{\forall x(p \rightarrow q)\} \vdash \forall xp \rightarrow \forall xq, \vdash \forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall xp \rightarrow \forall xq)$. 公式得证.

练习 15. 3. 求证:

- 1° $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$
 2° $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$

解: 1° 证明如下:

- | | |
|---|--------------|
| (1) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | 假定 |
| (2) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | (K4) |
| (3) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | (1), (2), MP |
| (4) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_1^2(x_1, x_1)$ | (K4) |
| (5) $R_1^2(x_1, x_1)$ | (3), (4), MP |
| (6) $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$ | (5), Gen |

2° 证明如下:

- | | |
|---|--------------|
| (1) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | 假定 |
| (2) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | (K4) |
| (3) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ | (1), (2), MP |
| (4) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_1^2(x_1, x_3)$ | (K4) |
| (5) $R_1^2(x_1, x_3)$ | (3), (4), MP |
| (6) $\forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ | (5), Gen |
| (7) $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ | (6), Gen |
| (8) $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3) \rightarrow \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ | (K4) |
| (9) $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ | (7), (8), MP |
| (10) $\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ | (9), Gen |