

随机过程 B 作业 4

习题 1. 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

- (a) 若 $t = 1, 2, \dots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \dots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,
(b) 设 $t \in [0, \infty)$, 证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 既不是宽平稳也不是严平稳过程.

解: $X(t)$ 的均值为

$$E[X(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin ut du = 0 \quad (1.1)$$

$X(t)$ 的方差为

$$\text{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 ut du = \frac{1}{2} - \frac{\sin(4\pi t)}{8\pi t} \quad (1.2)$$

(a) $X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(h) &= R_X(t, t+h) = E[X(t+h)X(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin u(t+h) \sin ut du \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos u(2t+h) - \cos uh] du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & h = 0 \\ \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h} \sin 2h\pi - \frac{1}{2t+h} \sin(4t+2h)\pi \right], & h \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

因为 t, h 都是整数, 所以 $\sin(4t+2h)\pi = 0, \sin 2h\pi = 0$, 就有 $R_X(h) = 0$, 所以 $\{X(t), t = 1, 2, \dots\}$ 是宽平稳过程.

考虑 $F_t(x) = P\{\sin Ut \leq x\}$, 显然 $F_{t+h} = P\{\sin U(t+h) \leq x\}$ 与其不一定相同, 所以其不是严平稳过程.

(b) 因为 $X(t)$ 的方差函数不是常数, 所以其不是严平稳过程. 而由式 1.3 可知, 当 $h \neq 0$ 时,

$$R_X(t+h, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h} \sin 2h\pi - \frac{1}{2t+h} \sin(4t+2h)\pi \right] \quad (1.4)$$

因为 $t \in [0, \infty)$, 所以上面的式子与 t 有关, $\{X(t), t \geq 0\}$ 不是宽平稳过程.

习题 3. 设 $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \dots, N$; U_1, \dots, U_n 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是平稳过程.

解: X_n 的均值为

$$E[X_n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos(a_k n - u_k) du_k = 0 \quad (3.1)$$

而其协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(t+h, t) &= E[X(t+h)X(t)] = E \left[\left(\sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k(t+h) - U_k) \right) \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k t - U_k) \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=1}^N 2\sigma_k^2 \cos(a_k(t+h) - U_k) \cos(a_k t - U_k) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N 2\sigma_k^2 \int_0^{2\pi} \cos(a_k(t+h) - u_k) \cos(a_k t - u_k) du_k \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \int_0^{2\pi} [\cos(a_k(2t+h) - 2u_k) + \cos(a_k h)] du_k \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \cos(a_k h) = R_X(h) \end{aligned} \quad (3.2)$$

即协方差函数仅与 h 有关, 故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是平稳过程.

习题 4. 设 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足做怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t} \quad (4.1)$$

是一个复的平稳过程.

解: 首先, $Z(t)$ 的均值为

$$E[Z(t)] = \sum_{k=1}^n E[A_k] e^{j\omega_k t} \equiv m \quad (4.2)$$

说明 $E[A_k] = 0$, 否则无法为常数.

其次, $Z(t)$ 的协方差函数为

$$R_Z(t+h, t) = E[Z(t+h)\bar{Z}(t)] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E[A_k A_l] e^{j(\omega_k(t+h) - \omega_l t)} \quad (4.3)$$

则要求 $k \neq l$ 时, $E[A_k A_l] = 0$, 否则协方差函数与 t 有关.

习题 16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (16.1)$$

设 X_{n+1} 在给定 X_0, X_1, \dots, X_n 下是 $(1 - X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n = 0, 1, 2, \dots$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 的均值有遍历性.

解: X_0 的均值为

$$E[X_0] = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} \quad (16.2)$$

而对于 $n = 0, 1, \dots, X_{n+1}$ 的均值为

$$E[X_{n+1}] = E[E(X_{n+1}|X_n)] = E\left[1 - \frac{1}{2}X_n\right] = 1 - \frac{1}{2}E[X_n] \quad (16.3)$$

因为 $E[X_0] = 2/3$, 所以有 $E[X_n] \equiv 2/3$.

X_0 的二阶矩为

$$E[X_0^2] = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{1}{2} \quad (16.4)$$

而对于 $n = 0, 1, \dots, X_{n+1}$ 的二阶矩为

$$E[X_{n+1}^2] = E[E(X_{n+1}^2|X_n)] = E\left[\frac{1 - (1 - X_n)^3}{3X_n}\right] = E\left[1 - X_n + \frac{X_n^2}{3}\right] = 1 - E[X_n] + \frac{1}{3}E[X_n^2] \quad (16.5)$$

因为 $E[X_n] \equiv 2/3, E[X_0^2] = 1/2$, 所以 $E[X_n^2] \equiv 1/2$.

而我们有下面的递推公式

$$\begin{aligned} E[X_n X_{n+m}] &= E[E(X_n X_{n+m}|X_n)] = E[X_n E(X_{n+m}|X_n)] \\ &= E\left[X_n E\left(1 - \frac{1}{2}X_{n+m-1} \middle| X_n\right)\right] \\ &= E[X_n] - \frac{1}{2}E[E(X_n X_{n+m-1}|X_n)] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}E[X_n X_{n+m-1}] \end{aligned} \quad (16.6)$$

就可以推出

$$E[X_n X_{n+m}] = \frac{4}{9} + (-1)^m \frac{1}{2^m \cdot 18} \quad (16.7)$$

因此

$$R_X(m) = R_X(n+m, n) = E[X_n X_{n+m}] - E[X_n]E[X_{n+m}] = (-1)^m \frac{1}{2^m \cdot 18} \quad (16.8)$$

所以 X_n 是平稳序列, 又因为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N R_X(k) = 0 \quad (16.9)$$

所以 X_n 的均值有遍历性.

习题 17. 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad |\alpha| < 1, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (17.1)$$

则 $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 为平稳序列. 试给出该序列的协方差函数. 此序列是否具有均值遍历性?

解: X_n 的均值为

$$E[X_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E[\varepsilon_{n-k}] = 0 \quad (17.2)$$

协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(n+m, n) &= E[X_{n+m} X_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{k+m+l} E[\varepsilon_{n+m-k} \varepsilon_{n-l}] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^{2k} E[\varepsilon_{n+m-k}^2] = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^{2k} \sigma^2 \\ &= \frac{\alpha^{2m} \sigma^2}{1 - \alpha^2} = R_X(m) \end{aligned} \quad (17.3)$$

因此 X_n 是平稳序列, 又因为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N R_X(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{(1 - \alpha^2)} \frac{1 - \alpha^{2N}}{1 - \alpha^2} = 0 \quad (17.4)$$

所以 X_n 的均值有遍历性.

习题 20. 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记为随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度函数, 证明

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a), \quad (20.1)$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega \quad (20.2)$$

解: 首先有 $E[Y] = E[X(t+a)] - E[X(t-a)] = 0$, 证明 $R_Y(\tau)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{[X(t+\tau+a) - X(t+\tau-a)][X(t+a) - X(t-a)]\} \\ &= E[X(t+\tau+a)X(t+a)] - E[X(t+\tau+a)X(t-a)] \\ &\quad - E[X(t+\tau-a)X(t+a)] + E[X(t+\tau-a)X(t-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \end{aligned} \quad (20.3)$$

然后证明 $S_Y(\omega)$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int [2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a)] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int 2R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \int R_X(\tau+2a) e^{-j\omega\tau} d\tau - \int R_X(\tau-2a) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2S_X(\omega) - S_X(\omega) e^{2j\omega a} - S_X(\omega) e^{-2j\omega a} \\ &= S_X(\omega) (2 - 2\cos(2a\omega)) \\ &= 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega \end{aligned} \quad (20.4)$$

习题 21. 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

解: 功率谱密度函数为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\tau^2} e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma^2 e^{-\omega^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau + \frac{j\omega}{2})^2} d\tau = \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} \quad (21.1)$$

$S(\omega)$ 为 \mathbb{R} 上的实的, 非负且可积的偶函数.

习题 25. 已知平稳过程 $\{X(t)\}$ 的功率谱密度为 $S(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}$, 求 $X(t)$ 的均方差.

解: 可将 $S(\omega)$ 改写为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 3)(\omega^2 + 1)} \quad (25.1)$$

显然它是偶函数, 由此求得协方差函数

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 3)(\omega^2 + 1)} \cos \omega\tau d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{\omega^2 + 3} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|\tau|} \end{aligned} \quad (25.2)$$

由此得到 $X(t)$ 的均方差为

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{R(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \quad (25.3)$$

习题 27. 求下列协方差函数对应的功率谱密度函数:

- (1) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \cos b\tau$;
- (2) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} (\cos b\tau - ab^{-1} \sin b|\tau|)$;

解: (1) $R(\tau)$ 为偶函数, 有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos b\tau \cos \omega\tau d\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-a\tau} (\cos(b+\omega)\tau + \cos(b-\omega)\tau) d\tau \\ &= a\sigma^2 \left[\frac{1}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{1}{a^2 + (b-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (27.1)$$

(2) $R(\tau)$ 为偶函数, 有

$$S(\omega) = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-a\tau} (\cos b\tau - ab^{-1} \sin b\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (27.2)$$

下面先计算

$$\begin{aligned} 2\sigma^2 \int_0^\infty e^{-a\tau} \sin b\tau \cos \omega\tau d\tau &= \sigma^2 \int_0^\infty e^{-a\tau} (\sin(b+\omega)\tau + \sin(b-\omega)\tau) d\tau \\ &= \sigma^2 \left[\frac{b+\omega}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{b-\omega}{a^2 + (b-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (27.3)$$

所以有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= a\sigma^2 \left[\frac{1}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{1}{a^2 + (b-\omega)^2} \right] - \frac{a\sigma^2}{b} \left[\frac{b+\omega}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{b-\omega}{a^2 + (b-\omega)^2} \right] \\ &= \frac{a\omega\sigma^2}{b} \left[-\frac{1}{a^2 + (b+\omega)^2} + \frac{1}{a^2 + (b-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (27.4)$$

习题 28. 求下列功率谱密度对应的协方差函数:

$$(2) \quad S(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2};$$

$$(3) \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\omega^2 + b_k^2}, \quad N \text{ 为固定的正整数.}$$

解: (2)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2} \pi e^{-|\tau|} (|\tau| + 1) = \frac{e^{-|\tau|}}{4} (|\tau| + 1) \quad (28.1)$$

(3)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \frac{a_k \cos \omega\tau}{\omega^2 + b_k^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{a_k e^{-|b_k\tau|} \pi}{|b_k|} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{a_k e^{-|b_k\tau|}}{|b_k|} \quad (28.2)$$