傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 9

练习 20. 3. 证明 K 中以下公式都不是有效式.

3° $\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))$

4° $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$

解: 3° 取 $M = \mathbb{N}$, $\overline{c_1} = 0$, $\overline{R_1^1}$ 为 "$= 0$", 则 $|\neg R_1^1(c_1)|_M = 0$, 对于任一项解释 $\varphi \in \Phi_M$, 存在 φ 的 x_1 变通 $\varphi' : \varphi'(x_1) \neq 0$ 使得 $|\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1)|(\varphi') = 0$, 所以

$$|\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))|_M = 0$$

所以公式不是有效式.

4° 取 $M = \mathbb{N}$, $\overline{R_1^2}$ 为 "$=$", 则 $|R_1^2(x_1, x_1)|_M = 1 \Rightarrow |\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)|_M = 1$, 对任一项解释 $\varphi \in \Phi_M$ 的任一 x_2 变通 φ', 都存在 φ' 的 x_1 变通 $\varphi'' : \varphi''(x_1) \neq \varphi''(x_2)$ 使得 $|R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi'') = 0$, 有 $|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi') = 0$, 所以 $|\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_M = 0$, 因此

$$|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_M = 0$$

所以公式不是有效式.

练习 20. 4. 在 K 中增加新的个体常元 $b_1, b_2, \cdots$, 其他不变, 得到新的扩大的谓词演算 K^+. 设 M 是 K^+ 的解释域 (也同时可看成是 K 的解释域). 已知 φ^+ 和 φ 分别是 K^+ 和 K 的项解释, 且满足 $\varphi^+(x_i) = \varphi(x_i), i = 1, 2, \cdots$. 求证:

(i) 对 K 中的任何项 t, $\varphi^+(t) = \varphi(t)$

(ii) 对 K 中的任何公式 p, $|p|(\varphi^+) = |p|(\varphi)$

解: (i) 对 t 在项集 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, $t = c_i$ 或 $t = x_i$, 因为 $\varphi^+(c_i) = \overline{c_i} = \varphi(c_i)$, $\varphi^+(x_i) = \varphi(x_i)$, 所以 $\varphi^+(t) = \varphi(t)$.

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $t = f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$, 其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是较低层次的项. 由归纳假设, 有

$$\varphi^+(t_1) = \varphi(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n) = \varphi(t_n)$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi^+(t) = \varphi^+(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) &= \overline{f_i^n}(\varphi^+(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n)) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) = \varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \varphi(t)\end{aligned}$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

(ii) 对 p 在公式集 $K(Y)$ 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, 设 $p = R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$, 由 (i) 可知

$$\varphi^+(t_1) = \varphi(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n) = \varphi(t_n)$$

则有

$$|\varphi^+|(p) = 1 \Leftrightarrow (\varphi^+(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n)) \in R_i^n \Leftrightarrow (\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) \in R_i^n \Leftrightarrow |p|(\varphi) = 1$$

2° 当 $k>0$ 时, 有如下三种可能的情况, 其中 q, r 为较低层次的公式.

(1) $p=q\to r$. 有 $|p|(\varphi^+)=|q|(\varphi^+)\to|r|(\varphi^+)=|q|(\varphi)\to|r|(\varphi)=|p|(\varphi)$

(2) $p=\neg q$. 有 $|p|(\varphi^+)=\neg|q|(\varphi^+)=\neg|q|(\varphi)=|p|(\varphi)$

(3) $p=\forall x_i q$. 若 φ' 是 φ 的任一 x_i 变通, 且 $\varphi^{+'}$ 是 K^+ 的和 φ' 有相同变元指派的项解释, 则 $\varphi^{+'}$ 是 φ^+ 的 x_i 变通. 反之, 若 $\varphi^{+'}$ 是 φ^+ 的任一 x_i 变通, 且 φ' 是 K 的和 $\varphi^{+'}$ 有相同变元指派的项解释, 则 φ' 是 φ 的 x_i 变通. 于是有

$$\begin{aligned}|p|(\varphi^+)=1 &\Leftrightarrow \text{对任一 } \varphi^+ \text{ 的 } x_i \text{ 变通 } \varphi^{+'}, |q|(\varphi^{+'})=1\\ &\Leftrightarrow \text{对任一 } \varphi \text{ 的 } x_i \text{ 变通 } \varphi', |q|(\varphi')=1 \Leftrightarrow |x_i q|(\varphi)=1, |p|(\varphi)=1\end{aligned}$$

由公式集 $K(Y)$ 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 21. 2. $\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$ 是否成立?

解: 不成立. 假设命题成立, 则有 $\vDash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$.

取 $M=\mathbb{N}$, $\overline{R_1^2}$ 为 “$\neq$”, 则 $|R_1^2(x_2,x_2)|_M=0 \Rightarrow |\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|_M=0$. 而对任一项解释 $\varphi\in\Phi_M$, 总存在 φ 的 x_2 变通 $\varphi':\varphi'(x_2)\neq\varphi'(x_1)$ 使得 $|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$, 所以 $|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)|_M=1$. 于是得到

$$|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|_M=0$$

与假设矛盾, 所以命题不成立.