

## 数理逻辑基础 作业 2

**练习 6.** 2. 证明命题 2-2°, 3°, 4°.

$$2-2^\circ \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$$

$$2-3^\circ \vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

$$2-4^\circ \vdash p \rightarrow (p \wedge p)$$

**解:** 2-2° 要证  $\vdash (p \wedge q) \rightarrow q$ , 即要证  $\vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$ . 下面是所要的一个证明:

- |     |   |              |
|-----|---|--------------|
| (1) | $\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$   | (L1)         |
| (2) | $(\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q)$ | 换位律          |
| (3) | $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$   | (1), (2), MP |
| (4) | $\neg\neg q \rightarrow q$  | 双重否定律        |
| (5) | $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$  | (3), (4), HS |

2-3° 要证  $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ , 运用演绎定律, 即要证  $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \rightarrow \neg p)$ , 用归谬律, 把  $q \rightarrow \neg p$  作为新假定. 以下公式从  $\{p \wedge q, q \rightarrow \neg p\}$  都是可证的

- |     |                              |              |
|-----|------------------------------|--------------|
| (1) | $p \wedge q$                 | 假定           |
| (2) | $(p \wedge q) \rightarrow p$ | 命题 2-1°      |
| (3) | $(p \wedge q) \rightarrow q$ | 命题 2-2°      |
| (4) | $p$                          | (1), (2), MP |
| (5) | $q$                          | (1), (3), MP |
| (6) | $q \rightarrow \neg p$       | 新假定          |
| (7) | $\neg p$                     | (5), (6), MP |

由 (4), (7) 用归谬律即得  $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \rightarrow \neg p)$ , 用演绎定律即有  $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ .

2-4° 要证  $\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$ , 用演绎定律即要证  $\{p\} \vdash \neg(p \rightarrow \neg p)$ , 用归谬律, 把  $p \rightarrow \neg p$  作为新假定, 立即可得

- |     |   |
|-----|---|
| (1) | $\{p, p \rightarrow \neg p\} \vdash p$      |
| (2) | $\{p, p \rightarrow \neg p\} \vdash \neg p$ |

由 (1), (2) 用归谬律便得  $\{p\} \vdash \neg(p \rightarrow \neg p)$ , 用演绎定律即有  $\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$ .

**练习 6. 4. 证明命题 4-1°**

$$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

**解:** 即要证  $\vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ .

这里先证明  $\vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ , 用演绎定律即要证  $\{\neg\neg(p \rightarrow \neg q)\} \vdash (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ , 有

- |     |   |              |
|-----|---|--------------|
| (1) | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q)$                                    | 假定           |
| (2) | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ | 双重否定律        |
| (3) | $p \rightarrow \neg q$  | (1), (2), MP |
| (4) | $\neg\neg p \rightarrow p$  | 双重否定律        |
| (5) | $\neg\neg p \rightarrow \neg q$                                     | (3), (4), HS |

再证明  $\vdash (\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ , 用演绎定律即要证  $\{\neg\neg p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ , 有

- |     |   |              |
|-----|---|--------------|
| (1) | $\neg\neg p \rightarrow \neg q$                                     | 假定           |
| (2) | $p \rightarrow \neg\neg p$  | 第二双重否定律      |
| (3) | $p \rightarrow \neg q$  | (1), (2), HS |
| (4) | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ | 第二双重否定律      |
| (5) | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q)$                                    | (3), (4), MP |

运用上面证明的两个定理, 给出  $\vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$  的证明如下

- |     |  |              |
|-----|--|--------------|
| (1) | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$   | 已证明          |
| (2) | $(\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)))$ | 命题 3-5°      |
| (3) | $((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q))$  | (1), (2), MP |
| (4) | $(\neg\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$  | 已证明          |
| (5) | $\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$   | (3), (4), MP |

即证明了  $\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ .