傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 1

练习 1. 1. 列出以下复合命题的真值表. (其中支命题 p, q, r, s 视为问题变元.)

7° $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$

8° $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

9° $\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

解: 7°

$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r)$
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1

8°

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

9°

$\neg$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r))$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

练习 2. 2. 写出由 $X_2 = \{x_1, x_2\}$ 生成的公式集 $L(X_2)$ 的三个层次: L_0, L_1 和 L_2.

解:

$$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\} \tag{2.1}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \to x_1, x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, x_2 \to x_2\} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} L_2 = \{&\neg(\neg x_1), \neg(\neg x_2), \\ &\neg(x_1 \to x_1), \neg(x_1 \to x_2), \neg(x_2 \to x_1), \neg(x_2 \to x_2), \\ &x_1 \to (\neg x_1), x_1 \to (\neg x_2), x_2 \to (\neg x_1), x_2 \to (\neg x_2), \\ &(\neg x_1) \to x_1, (\neg x_1) \to x_2, (\neg x_2) \to x_1, (\neg x_2) \to x_2, \\ &x_1 \to (x_1 \to x_1), x_1 \to (x_1 \to x_2), x_1 \to (x_2 \to x_1), x_1 \to (x_2 \to x_2), \\ &x_2 \to (x_1 \to x_1), x_2 \to (x_1 \to x_2), x_2 \to (x_2 \to x_1), x_2 \to (x_2 \to x_2), \\ &(x_1 \to x_1) \to x_1, (x_1 \to x_2) \to x_1, (x_2 \to x_1) \to x_1, (x_2 \to x_2) \to x_1, \\ &(x_1 \to x_1) \to x_2, (x_1 \to x_2) \to x_2, (x_2 \to x_1) \to x_2, (x_2 \to x_2) \to x_2\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

练习 3. 2. 写出以下公式在 L 中的 "证明"

1° $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$

2° $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$

解: 1° 证明如下

(1) $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)$ (L3)

(2) $((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)) \to ((x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)))$ (L1)

(3) $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$ (1), (2), MP

2° 证明如下

(1) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$ (L2)

(2) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)) \to (((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)))$ (L2)

(3) $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$ (1), (2), MP

练习 3. 3. 证明下面的结论

2° $\{\neg\neg p\} \vdash p$

3° $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

4° $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

解: 2° 证明如下

(1)	$\neg\neg p$	假定
(2)	$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$	(L1)
(3)	$\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$	(L3)
(5)	$\neg p \to \neg\neg\neg p$	(3), (4), MP
(6)	$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$	(L3)
(7)	$\neg\neg p \to p$	(5), (6), MP
(8)	p	(1), (7), MP

3° 证明如下

(1)	$\neg(q \to r) \to \neg p$	假定
(2)	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$	(L3)
(3)	$p \to (q \to r)$	(1), (2), MP
(4)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(L2)
(5)	$(p \to q) \to (p \to r)$	(3), (4), MP
(6)	$p \to q$	假定
(7)	$p \to r$	(5), (6), MP

4° 证明如下

(1)	$p \to (q \to r)$	假定
(2)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(L2)
(3)	$(p \to q) \to (p \to r)$	(1), (2), MP

(4) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)

(5) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (3), (4), MP

(6) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to (q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (L2)

(7) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (5), (6), MP

(8) $q \to (p \to q)$ (L1)

(9) $q \to (p \to r)$ (7), (8), MP

练习 4. 2. 利用演绎定律证明以下公式是 L 的定理.
2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$. (换位律)
3° $((p \to q) \to p) \to p$. (Peirce 律)

解: 2° 根据演绎定理, 只需要证明 $\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$. 下面是 $\neg p \to \neg q$ 从 $\{q \to p\}$ 的证明:

(1) $q \to p$ 假定

(2) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律

(3) $\neg\neg q \to p$ (1), (2), HS

(4) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律

(5) $\neg\neg q \to \neg\neg p$ (3), (4), HS

(6) $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$ (L3)

(7) $\neg p \to \neg q$ (5), (6), MP

3° 根据演绎定理, 只需要证明 $\{(p \to q) \to p\} \vdash p$. 下面是 p 从 $\{(p \to q) \to p\}$ 的证明:

(1) $(p \to q) \to p$ 假定

(2) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律

(3) $\neg p \to p$ (1), (2), HS

(4) $(\neg p \to p) \to p$ 否定肯定律

(5) p (3), (4), MP

练习 5. 1. 证明

$2^\circ \vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

$3^\circ \vdash \neg(p \to q) \to \neg q$

解: 2° 由演绎定律, 只需要证明 $\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$. 用反证律, 把 $\neg p$ 作为新假定.
以下公式从 $\{\neg p \to q, \neg q, \neg p\}$ 都是可证的.

(1) $\neg p$ 新假定

(2) $\neg p \to q$ 假定

(3) q (1), (2), MP

(4) $\neg q$ 假定

由 (3), (4) 用反证律即得 $\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$.

3° 由演绎定律, 只需要证明 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. 用归谬律, 把 q 作为新假定.
以下公式从 $\{\neg(p \to q), q\}$ 都是可证的.

(1) q 新假定

(2) $q \to (p \to q)$ (L1)

(3) $p \to q$ (1), (2), MP

(4) $\neg(p \to q)$ 假定

由 (3), (4) 用归谬律即得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$.