傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 2

习题 2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

解: 我们对 $N(t) \cdot N(t+s)$ 稍作变换

$$N(t) \cdot N(t+s) = N(t) \cdot [(N(t+s) - N(t)) + N(t)] = (N(t) - N(0))^2 + (N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t)) \quad (2.1)$$

其中 $N(t) - N(0)$ 与 $N(t+s) - N(t)$ 相互独立. 而 $(N(t) - N(0)) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, 则有

$$\begin{aligned} E[N(t) \cdot N(t+s)] &= E[(N(t) - N(0))^2] + E[(N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t))] \\ &= \text{Var}[N(t) - N(0)] + E^2[N(t) - N(0)] + E[N(t) - N(0)] \cdot E[N(t+s) - N(t)] \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda t \cdot \lambda s \\ &= \lambda t[1 + \lambda(t+s)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

习题 4. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求:

(i) $P\{N(1) \leq 2\}$

(ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$

(iii) $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$

解: (i)

$$\begin{aligned} P\{N(1) \leq 2\} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda)^k \exp(-\lambda)}{k!} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2}\right) \exp(-2) \\ &= 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.6767 \end{aligned} \quad (4.1)$$

(ii) $N(2) - N(1)$ 与 $N(1)$ 相互独立, 有

$$\begin{aligned} P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\} &= P\{N(1) = 3\} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2 | N(1) = 3\} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2\} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} \\ &= 4\mathrm{e}^{-4} \approx 0.0733 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(iii) 显然 $P\{N(1) \geq 2, N(1) \geq 1\} = P\{N(1) \geq 2\}$, 有

$$P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\} = \frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}} \approx 0.6870 \quad (4.3)$$