傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 4

习题 1. 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0, \infty)$, 证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 既不是宽平稳也不是严平稳过程.

解: $X(t)$ 的均值为

$$E[X(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin ut \mathrm{d}u = 0 \tag{1.1}$$

$X(t)$ 的方差为

$$\mathrm{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 ut \mathrm{d}u = \frac{1}{2t} \tag{1.2}$$

(a) 因为 $X(t)$ 的方差函数不是常数, 所以其不是严平稳过程. 而 $X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(h) = R_X(t, t+h) &= E[X(t+h)X(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin u(t+h) \sin ut \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos u(2t+h) - \cos uh] \mathrm{d}u \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & h = 0 \\ \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{2t+h}\sin(4t+2h)\pi - \dfrac{1}{h}\sin 2h\pi\right], & h \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

因为 t, h 都是整数, 所以 $\sin(4t+2h)\pi = 0$, $\sin 2h\pi = 0$, 就有 $R_X(h) = 0$, 所以 $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ 是宽平稳过程.

(b) 因为 $X(t)$ 的方差函数不是常数, 所以其不是严平稳过程. 而由式 1.3 可知, 当 $h \neq 0$ 时,

$$R_X(t+h, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2t+h}\sin(4t+2h)\pi - \frac{1}{h}\sin 2h\pi\right] \tag{1.4}$$

因为 $t \in [0, \infty)$, 所以上面的式子与 t 有关, $\{X(t), t \geq 0\}$ 不是宽平稳过程.

习题 3. 设 $X_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \cdots, N$; $U_1, \cdots, U_n$ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是平稳过程.

解: X_n 的均值为

$$E[X_n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos(a_k n - u_k) \mathrm{d}u_k = 0 \tag{3.1}$$

而其协方差函数为

$$\begin{aligned}R_X(t+h,t)=E[X(t+h)X(t)]&=E\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(a_k(t+h)-U_k\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(a_kt-U_k\right)\right)\right]\\&=E\left[\sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2\cos\left(a_k(t+h)-U_k\right)\cos\left(a_kt-U_k\right)\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2\int_0^{2\pi}\cos\left(a_k(t+h)-u_k\right)\cos\left(a_kt-u_k\right)\mathrm{d}u_k\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\int_0^{2\pi}\left[\cos(a_k(2t+h)-2u_k)+\cos(a_kh)\right]\mathrm{d}u_k\\&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos(a_kh)=R_X(h)\end{aligned}\tag{3.2}$$

即协方差函数仅与 h 有关, 故 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳过程.

习题 4. 设 $A_k,k=1,2,\cdots,n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k,k=1,2,\cdots,n$ 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足做怎样的条件才能使

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{j\omega_kt}\tag{4.1}$$

是一个复的平稳过程.

解: 首先, $Z(t)$ 的均值为

$$E[Z(t)]=\sum_{k=1}^{n}E[A_k]\mathrm{e}^{j\omega_kt}\equiv m\tag{4.2}$$

说明 $E[A_k]=0$, 否则无法为常数.

其次, $Z(t)$ 的协方差函数为

$$R_Z(t+h,t)=E[Z(t+h)\overline{Z}(t)]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}E\left[A_kA_l\right]\mathrm{e}^{j(\omega_k(t+h)-\omega_lt)}\tag{4.3}$$

则要求 $k\neq l$ 时, $E\left[A_kA_l\right]=0$, 否则协方差函数与 t 有关.

习题 16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq 1,\\0, & \text{其他},\end{cases}\tag{16.1}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 下是 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

解: X_0 的均值为

$$E[X_0] = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \tag{16.2}$$

而对于 $n = 0, 1, \cdots$, X_{n+1} 的均值为

$$E[X_{n+1}] = E[E(X_{n+1}|X_n)] = E\left[1 - \frac{1}{2}X_n\right] = 1 - \frac{1}{2}E[X_n] \tag{16.3}$$

因为 $E[X_0] = 2/3$, 所以有 $E[X_n] \equiv 2/3$.

X_0 的二阶矩为

$$E[X_0^2] = \int_0^1 2x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{16.4}$$

而对于 $n = 0, 1, \cdots$, X_{n+1} 的二阶矩为

$$E[X_{n+1}^2] = E[E(X_{n+1}^2|X_n)] = E\left[\frac{1 - (1 - X_n)^3}{3X_n}\right] = E\left[1 - X_n + \frac{X_n^2}{3}\right] = 1 - E[X_n] + \frac{1}{3}E[X_n^2] \tag{16.5}$$

因为 $E[X_n] \equiv 2/3, E[X_0^2] = 1/2$, 所以 $E[X_n^2] \equiv 1/2$.

而我们有下面的递推公式

$$\begin{aligned} E[X_n X_{n+m}] &= E\left[E\left(X_n X_{n+m}|X_n\right)\right] = E\left[X_n E\left(X_{n+m}|X_n\right)\right] \\ &= E\left[X_n E\left(1 - \frac{1}{2}X_{n+m-1}\middle| X_n\right)\right] \\ &= E[X_n] - \frac{1}{2}E[E\left(X_n X_{n+m-1}|X_n\right)] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}E[X_n X_{n+m-1}] \end{aligned} \tag{16.6}$$

就可以推出

$$E[X_n X_{n+m}] = \frac{4}{9} + (-1)^m \frac{1}{2^m \cdot 18} \tag{16.7}$$

因此

$$R_X(m) = R_X(n+m, n) = E[X_n X_{n+m}] - E[X_n]E[X_{n+m}] = (-1)^m \frac{1}{2^m \cdot 18} \tag{16.8}$$

所以 X_n 是平稳序列, 又因为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} R_X(k) = 0 \tag{16.9}$$

所以 X_n 的均值有遍历性.

习题 17. 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad |\alpha| < 1, \quad n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \tag{17.1}$$

则 $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为平稳序列. 试给出该序列的协方差函数. 此序列是否具有均值遍历性?

解: X_n 的均值为

$$E[X_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E[\varepsilon_{n-k}] = 0 \tag{17.2}$$

协方差函数为

$$\begin{aligned} R_X(n+m,n) = E[X_{n+m}X_n] &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{k+m+l} E[\varepsilon_{n+m-k}\varepsilon_{n-l}] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^{2k} E[\varepsilon_{n+m-k}^2] = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^{2k}\sigma^2 \\ &= \frac{\alpha^{2m}\sigma^2}{1-\alpha^2} = R_X(m) \end{aligned} \tag{17.3}$$

因此 X_n 是平稳序列, 又因为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} R_X(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)} \frac{1-\alpha^{2N}}{1-\alpha^2} = 0 \tag{17.4}$$

所以 X_n 的均值有遍历性.

习题 20. 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记为随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度函数, 证明

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a), \tag{20.1}$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega \tag{20.2}$$

解: 首先有 $E[Y] = E[X(t+a)] - E[X(t-a)] = 0$, 证明 $R_Y(\tau)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{[X(t+\tau+a) - X(t+\tau-a)][X(t+a) - X(t-a)]\} \\ &= E[X(t+\tau+a)X(t+a)] - E[X(t+\tau+a)X(t-a)] \\ &\quad - E[X(t+\tau-a)X(t+a)] + E[X(t+\tau-a)X(t-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \end{aligned} \tag{20.3}$$

然后证明 $S_Y(\omega)$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int R_Y(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int [2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a)]\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int 2R_X(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau - \int R_X(\tau+2a)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau - \int R_X(\tau-2a)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= 2S_X(\omega) - S_X(\omega)e^{2j\omega a} - S_X(\omega)e^{-2j\omega a} \\ &= S_X(\omega)(2 - 2\cos(2a\omega)) \\ &= 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega \end{aligned} \tag{20.4}$$

习题 21. 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

解: 功率谱密度函数为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\sigma^2\mathrm{e}^{-\omega^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\tau+\frac{j\omega}{2})^2}\mathrm{d}\tau=\sigma^2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4} \tag{21.1}$$

$S(\omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实的, 非负且可积的偶函数.

习题 25. 已知平稳过程 $\{X(t)\}$ 的功率谱密度为 $S(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+4\omega^2+3}$, 求 $X(t)$ 的均方差.

解: 可将 $S(\omega)$ 改写为

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+3)(\omega^2+1)} \tag{25.1}$$

显然它是偶函数, 由此求得协方差函数

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+3)(\omega^2+1)}\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{\omega^2+3}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\tau|}\end{aligned} \tag{25.2}$$

由此得到 $X(t)$ 的均方差为

$$\sigma_X=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{R(0)}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \tag{25.3}$$

习题 27. 求下列协方差函数对应的功率谱密度函数:

(1) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}\cos b\tau$;

(2) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}(\cos b\tau-ab^{-1}\sin b|\tau|)$;

解: (1) $R(\tau)$ 为偶函数, 有

$$\begin{aligned}S(\omega)&=2\sigma^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a\tau}\cos b\tau\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\\&=\sigma^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a\tau}\left(\cos(b+\omega)\tau+\cos(b-\omega)\tau\right)\mathrm{d}\tau\\&=a\sigma^2\left[\frac{1}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{1}{a^2+(b-\omega)^2}\right]\end{aligned} \tag{27.1}$$

(2) $R(\tau)$ 为偶函数, 有

$$S(\omega)=2\sigma^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a\tau}(\cos b\tau-ab^{-1}\sin b\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau \tag{27.2}$$

下面先计算

$$\begin{aligned}2\sigma^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a\tau}\sin b\tau\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau &= \sigma^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a\tau}(\sin(b+\omega)\tau+\sin(b-\omega)\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \sigma^2\left[\frac{b+\omega}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{b-\omega}{a^2+(b-\omega)^2}\right]\end{aligned} \tag{27.3}$$

所以有

$$\begin{aligned}S(\omega) &= a\sigma^2\left[\frac{1}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{1}{a^2+(b-\omega)^2}\right]-\frac{a\sigma^2}{b}\left[\frac{b+\omega}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{b-\omega}{a^2+(b-\omega)^2}\right] \\ &= \frac{a\omega\sigma^2}{b}\left[-\frac{1}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{1}{a^2+(b-\omega)^2}\right]\end{aligned} \tag{27.4}$$

习题 28. 求下列功率谱密度对应的协方差函数:

(2) $S(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$;

(3) $S(\omega)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{\omega^2+b_k^2}$, N 为固定的正整数.

解: (2)

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2}\pi\mathrm{e}^{-|\tau|}(|\tau|+1)=\frac{\mathrm{e}^{-|\tau|}}{4}(|\tau|+1) \tag{28.1}$$

(3)

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k\cos\omega\tau}{\omega^2+b_k^2}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k\mathrm{e}^{-|b_k\tau|}\pi}{|b_k|}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k\mathrm{e}^{-|b_k\tau|}}{|b_k|} \tag{28.2}$$