傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 2

习题 2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

解: 我们对 $N(t) \cdot N(t+s)$ 稍作变换

$$N(t) \cdot N(t+s) = N(t) \cdot [(N(t+s) - N(t)) + N(t)] = (N(t) - N(0))^2 + (N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t)) \tag{2.1}$$

其中 $N(t) - N(0)$ 与 $N(t+s) - N(t)$ 相互独立. 而 $(N(t) - N(0)) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, 则有

$$\begin{aligned} E[N(t) \cdot N(t+s)] &= E[(N(t) - N(0))^2] + E[(N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t))] \\ &= \text{Var}[N(t) - N(0)] + E^2[N(t) - N(0)] + E[N(t) - N(0)] \cdot E[N(t+s) - N(t)] \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda t \cdot \lambda s \\ &= \lambda t[1 + \lambda(t+s)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

习题 4. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求:

(i) $P\{N(1) \leq 2\}$

(ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$

(iii) $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$

解: (i)

$$\begin{aligned} P\{N(1) \leq 2\} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda)^k \exp(-\lambda)}{k!} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2}\right) \exp(-2) \\ &= 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.6767 \end{aligned} \tag{4.1}$$

(ii) $N(2) - N(1)$ 与 $N(1)$ 相互独立, 有

$$\begin{aligned} P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\} &= P\{N(1) = 3\} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2 | N(1) = 3\} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2\} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} \\ &= 4\mathrm{e}^{-4} \approx 0.0733 \end{aligned} \tag{4.2}$$

(iii) 显然 $P\{N(1) \geq 2, N(1) \geq 1\} = P\{N(1) \geq 2\}$, 有

$$P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\} = \frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}} \approx 0.6870 \tag{4.3}$$

习题 7. $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t)=n$, 试求第 r 个事件 $(r\le n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解: 给定 $N(t)=n$, 不妨设 $W_r=w_r$. 对充分小的增量 $\Delta w_r\downarrow 0$, 有

$$\begin{aligned}&\{w_r\le W_r\le w_r+\Delta w_r, N(t)=n\}\\&=\{N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r\}\end{aligned}\tag{7.1}$$

记 $P_1=P(N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r)$, 于是

$$\begin{aligned}f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\Delta w_r&=P(w_r\le W_r<w_r+\Delta w_r|N(t)=n)+o(\Delta w_r)\\&=\frac{P_1}{P(N(t)=n)}+o(\Delta w_r)\end{aligned}\tag{7.2}$$

由独立增量性和 Poisson 过程的定义, 有

$$\begin{aligned}P_1&=P(N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r)\\&=\frac{(\lambda w_r)^{r-1}\exp(-\lambda w_r)}{(r-1)!}(\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r))\frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}\exp(-\lambda(t-w_r-\Delta w_r))}{(n-r)!}\\&=\frac{\lambda^n}{(r-1)!(n-r)!}w_r^{r-1}(t-w_r-\Delta w_r)^{n-r}\exp(-\lambda t)\exp(\lambda\Delta w_r)\Delta w_r+o(\Delta w_r)\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n\exp(-\lambda t)}{n!}\tag{7.4}$$

因此, 得到

$$\begin{aligned}f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)&=\lim_{\Delta w_r\downarrow 0}\frac{P_1}{P(N(t)=n)\Delta w_r}\\&=\lim_{\Delta w_r\downarrow 0}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{w_r^{r-1}(t-w_r-\Delta w_r)^{n-r}}{t^n}\exp(\lambda\Delta w_r)\\&=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{w_r^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}\end{aligned}\tag{7.5}$$

习题 8. 令 $\{N_i(t),t\ge 0\}, i=1,2,\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数为 λ 的 Poisson 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

解: 由题意可知

$$\{T>t\}=\{N_i(t)=0, i=1,2,\cdots,n\}\tag{8.1}$$

因此

$$P(T>t)=\prod_{i=1}^n P(N_i(t)=0)=\prod_{i=1}^n\exp(-\lambda t)=\exp(-n\lambda t)\tag{8.2}$$

因此有

$$F_T(t)=1-\exp(-n\lambda t)\tag{8.3}$$

$$f_T(t)=n\lambda\exp(-n\lambda t)\tag{8.4}$$

习题 10. 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从 λ_2 的 Poisson 过程 $N_2(t)$, 且过程 N_1 与 N_2 独立. 试问随机过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

解: 首先, $N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$.

其次, 因为 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立, 所以对任意的 $0 \le t_1 < \cdots < t_n$, $\{N_1(t_2) - N_1(t_1), \cdots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})\}$ 与 $\{N_2(t_2) - N_2(t_1), \cdots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})\}$ 相互独立, 且它们内部也相互独立, 所以 $\{N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})\}$ 也相互独立, $N(t)$ 是独立增量过程.

最后, 有

$$
\begin{aligned}
P\{N(s+t) - N(s) = k\} &= \sum_{i=0}^{k} P\{N_1(s+t) - N_1(s) = i\} P\{N_2(s+t) - N_2(s) = k-i\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^{k-i} \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{t^k \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]}{k!} \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)t]}{k!}
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

所以 $N(t)$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程.

记 X, Y 分别为过程 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 中第一辆车到达的时刻, 则 X, Y 独立, 且分别是均值为 $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}$ 的指数分布随机变量. $\{X < Y\}$ 对应卡车首先到达, 其概率为

$$
\begin{aligned}
P\{X < Y\} &= \iint_{x,y>0, x<y} \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \lambda_2 \exp(-\lambda_2 y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \lambda_1 \int_0^\infty \exp(-\lambda_1 x) \int_x^\infty \lambda_2 \exp(-\lambda_2 y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \int_0^\infty \exp[-(\lambda_1+\lambda_2)x] \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}
\tag{10.2}
$$

习题 11. 冲击模型 (Shock Model)　记 $N(t)$ 为某系统某时刻 t 收到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Poisson 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k = 1, 2, \cdots$ 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 ET, 并对所得结果做出直观解释.

解: 显然 $X(t)$ 是一个复合 Poisson 过程, 有 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$. 而事件 $\{T > t\}$ 对应 $\{X(t) \le \alpha\}$. 同时 Y_k 与 $N(t)$ 相互独立, 有

$$
P(T > t) = P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le \alpha\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha\right) P(N(t) = n) \tag{11.1}
$$

记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, 则 $S_n \sim \Gamma(n, \mu)$, 即

$$f_{S_n}(s) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1} \exp(-\mu s) \tag{11.2}$$

因此有

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \alpha\right) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} \exp(-\mu s) \mathrm{d}s \tag{11.3}$$

所以

$$P(T > t) = \exp(-\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} \exp(-\mu s) \mathrm{d}s \tag{11.4}$$

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_0^\infty P(T > t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} \exp(-\mu s) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!(n-1)!} \int_0^\infty (\lambda t)^n \exp(-\lambda t)\mathrm{d}t \int_0^\alpha s^{n-1} \exp(-\mu s) \mathrm{d}s \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!(n-1)!} \frac{n!}{\lambda} \int_0^\alpha s^{n-1} \exp(-\mu s) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\alpha \exp(-\mu s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\alpha \mu \mathrm{d}s \\
&= \frac{\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned} \tag{11.5}$$

直观解释: 若冲击越频繁 (λ 越大), 每次冲击造成的平均伤害越大 (μ 越小), 系统能承受的伤害极限越小 (α 越小), 则系统寿命平均越短.

习题 12. 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, $X_1, X_2, \cdots$ 为事件间的时间间隔.

(i) X_i 是否独立

(ii) X_i 是否同分布

(iii) 试求 X_1 及 X_2 的分布函数

解: (i) X_i 不独立, 例如对 X_1 有

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u\right) \tag{12.1}$$

对 X_2 有

$$P(X_2 > t | X_1 = s) = P(N(t+s) - N(s) = 0 | X_1 = s) = P(N(s+t) - N(s)) = \exp\left(-\int_s^{s+t} \lambda(u)\mathrm{d}u\right) \tag{12.2}$$

即 $P(X_2|X_1)$ 与 X_1 的取值有关, 则 X_1 和 X_2 不独立.

(ii) X_i 不同分布. 例如 X_1 的分布如式 (12.1) 所示, 其密度函数为

$$f_{X_1}(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(u)\mathrm{d}u\right)\lambda(x) \tag{12.3}$$

而 X_2 的分布如下

$$\begin{aligned} P(X_2 > t) &= \int_0^\infty P(X_2 > t | X_1 = x) f_{X_1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^{x+t} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)\lambda(x)\mathrm{d}x \\ &= P(X_1 > t)\int_0^\infty \exp\left(-\int_x^{x+t} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)\lambda(x)\mathrm{d}x \neq P(X_1 > t) \end{aligned} \tag{12.4}$$

所以 X_1 与 X_2 不同分布.

(iii) 由式 (12.1), (12.3), (12.4) 可得 X_1 与 X_2 的分布如下.

$$F_{X_1}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u\right) \tag{12.5}$$

$$f_{X_1}(t) = \lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u\right) \tag{12.6}$$

$$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s)\exp\left(-\int_0^{s+t} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \tag{12.7}$$

$$f_{X_2}(t) = \int_0^\infty \lambda(s)\lambda(s+t)\exp\left(-\int_0^{s+t} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \tag{12.8}$$