傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 7

练习 15. 4. 设 x 不在 p 中自由出现. 求证:

$1^\circ \vdash (p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$

$2^\circ \vdash (p \to \exists xq) \to \exists x(p \to q)$

解: 1° 要证明 $(p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$, 只用证明 $\{p \to \forall xq\} \vdash \forall x(p \to q)$, 过程中除了 x 以外不使用别的 Gen 变元, 如下:

(1)	$p \to \forall xq$	假定
(2)	$\forall xq \to q$	(K4)
(3)	$p \to q$	(1), (2), HS
(4)	$\forall x(p \to q)$	(3), Gen

因为 x 不在 $p \to \forall xq$ 中自由出现, 由演绎定理, 不增加新的 Gen 变元就可得 $\vdash (p \to \forall q) \to \forall (p \to \forall q)$.

2° 这里先证明 $\vdash \neg(p \to q) \to p$ 和 $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

1. 利用演绎定理和反证律, 以下公式从 $\{\neg(p \to q), \neg p\}$ 可证:

(1)	$\neg p$	新假定
(2)	$\neg p \to (p \to q)$	否定前件律
(3)	$p \to q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to q)$	假定

   由 (3), (4) 用反证律可得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash p$, 再由演绎定理得到 $\vdash \neg(p \to q) \to p$.

2. 利用演绎定律和归谬律, 以下公式从 $\{\neg(p \to q), q\}$ 可证:

(1)	q	新假定
(2)	$q \to (p \to q)$	(L1)
(3)	$p \to q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to q)$	假定

   由 (3), (4) 用归谬律可得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$, 再由演绎定理得到 $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

然后证明题中命题, 为此只用证 $\{p \to \exists xq\} \vdash \exists x(p \to q)$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元.

以下公式从 $\{p \to \exists xq, \forall x \neg(p \to q)\}$ 可证:

(1)	$\forall x \neg(p \to q)$	新假定
(2)	$\forall x \neg(p \to q) \to \neg(p \to q)$	(K4)
(3)	$\neg(p \to q)$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to q) \to p$	已证明
(5)	p	(3), (4), HS
(6)	$p \to \exists xq$	假定
(7)	$\exists xq \ (= \neg\forall x \neg q)$	(5), (6), MP

(8) $\neg(p \to q) \to \neg q$ 已证明

(9) $\neg q$ (3), (8), MP

(10) $\forall x \neg q$ (9), Gen

因为 x 不在 $\forall x \neg(p \to q)$ 中自由出现, 由 (9), (10) 用归谬律可得 $\{p \to \exists x q\} \vdash \exists x(p \to q)$, 再用演绎定理得到 $\vdash (p \to \exists x q) \to \exists x(p \to q)$.

练习 16. 1. 设 x 不在 q 中自由出现. 求证:

1° $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p \to q)$

2° $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall x p \to q)$

解: 1° 要证 $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p \to q)$, 只用证 $\{\exists x p \to q\} \vdash \forall x(p \to q)$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元.

(1) $\neg\forall x \neg p \to q$ 假定

(2) $(\neg\forall x \neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x \neg p)$ 换位律

(3) $\neg q \to \neg\neg\forall x \neg p$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg\forall x \neg p \to \forall x \neg p$ 双重否定律

(5) $\neg q \to \forall x \neg p$ (3), (4), HS

(6) $\forall x \neg p \to \neg p$ (K4)

(7) $\neg q \to \neg p$ (5), (6), HS

(8) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ (K3)

(9) $p \to q$ (7), (8), MP

(10) $\forall x(p \to q)$ (9), Gen

因为 x 不在 $\exists x p \to q$ 中自由出现, 由演绎定理, 不增加新的 Gen 变元就可得 $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p \to q)$.

2° 要证 $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall x p \to q)$, 只用证 $\{\exists x(p \to q), \forall x p\} \vdash q$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元.

以下公式从 $\{\exists x(p \to q), \forall x p, \neg q\}$ 可证:

(1) $\forall x p$ 假定

(2) $\forall x p \to p$ (K4)

(3) p (1), (2), MP

(4) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$ 永真式

(5) $\neg q \to \neg(p \to q)$ (3), (4), MP

(6) $\neg q$ 新假定

(7) $\neg(p \to q)$ (6), (5), MP

(8) $\forall x \neg(p \to q)$ (7), Gen

(9) $\neg\forall x \neg(p \to q)$ 假定

其中式 (4) 的真值表见表 16.1, 因 Gen 变元 x 不在假定中自由出现, 由 (8), (9) 用反证律得 $\{\exists x(p \to q), \forall x p\} \vdash q$, 再用两次演绎定理得 $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall x p \to q)$.

表 16.1: $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$ 的真值表

p	$\to$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$(p$	$\to$	$q))$
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0

练习 16. 3. 找出与所给公式等价的前束范式.

3° $\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3))$

4° $\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$

解: 3° 适当改变题中公式的约束变元得到等价的 q_1:

$$q_1 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3))$$

由 q_1 出发, 得到以下的等价公式:

$q_2 = \exists x_1((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_3 = \exists x_1((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3(\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_4 = \exists x_1\exists x_3((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_5 = \exists x_1\exists x_3((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \forall x_4(R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_6 = \exists x_1\exists x_3\forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

q_6 即为所求的前束范式, 即

$$\exists x_1\exists x_3\forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$$

4°适当改变题中公式的约束变元得到等价的 q_1:

$$q_1 = \exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$$

由 q_1 出发, 得到以下的等价公式:

$q_2 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_3 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \forall x_3\neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-3°)

$q_4 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to \forall x_3(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_5 = \forall x_4\forall x_3(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

q_5 即为所求的前束范式, 利用 $\neg(p \wedge (q \wedge r)) = p \to \neg(q \wedge r) = p \to (q \to \neg r)$, 得到所求的前束范式

$$\forall x_4\forall x_3\neg(R_1^2(x_4, x_2) \wedge R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1, x_3))$$