傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 8

练习 17. 2. 设 $\varphi, \psi \in \Phi_M$. 求证: 若对项 t 中的任一变元 x 都有 $\varphi(x) = \psi(x)$, 则 $\varphi(t) = \psi(t)$.

解: 以 t 中出现的个体常元, 个体变元和运算为基础构建项集 T, 对 t 在 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, $t = c_i$ 或 $t = x_i$, 因为 $\varphi(c_i) = \psi(c_i) = \overline{c_i}$ 和 $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$, 所以 $\varphi(t) = \psi(t)$.

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $t = f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$, 其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是较低层次的项. 由归纳假设, 有

$$\varphi(t_1) = \psi(t_1), \cdots, \varphi(t_n) = \psi(t_n)$$

因此

$$\varphi(t) = \varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) = \overline{f_i^n}(\psi(t_1), \cdots, \psi(t_n)) = \psi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \psi(t)$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 17. 3. 设 $t \in T$, φ 和 $\varphi' \in \Phi_M$, φ' 是 φ 的 x 变通, 且 $\varphi'(x) = \varphi(t)$. 用项 t 代换项 $u(x)$ 中 x 所得的项记为 $u(t)$. 求证 $\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$.

解: 对 $u(x)$ 在项集 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, 有三种可能的情况:

1) $u(x) = c_i$, 此时 $u(t) = c_i$, 有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(c_i) = \overline{c_i} = \varphi(c_i) = \varphi(u(t))$.

2) $u(x) = x$, 此时 $u(t) = t$, 由已知条件有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(x) = \varphi(t) = \varphi(u(t))$.

3) $u(x) = y \neq x$, 此时 $u(t) = y$, 因为 φ' 是 φ 的 x 变通, 所以有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(y) = \varphi(y) = \varphi(u(t))$

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $u(x) = f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))$, 其中 $t_1(x), \cdots, t_n(x)$ 是较低层次的项. 这时 $u(t) = f_i^n(t_1(t), \cdots, t_n(t))$. 由归纳假设, 有

$$\varphi'(t_1(x)) = \varphi'(t_1(t)), \cdots, \varphi'(t_n(x)) = \varphi'(t_n(t))$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi'(u(x)) &= \varphi'(f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))) = \overline{f_i^n}(\varphi'(t_1(x)), \cdots, \varphi'(t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1(t)), \cdots, \varphi(t_n(t))) = \varphi(f_i^n(t_1(t), \cdots, t_n(t))) = \varphi(u(t))\end{aligned}$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 18. 1. 设 K 中的 $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$, $R = \{R_1^2\}$. 它的一个解释域是 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^1}$ 是后继函数, $\overline{f_1^2}$ 是 $+$, $\overline{f_2^2}$ 是 $\times$, $\overline{R_1^2}$ 是 $=$. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_{\mathbb{N}}$, 使 $|p|(\varphi) = 1$, $|p|(\psi) = 0$, 其中 p 为:

3° $\neg R_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$.

解: 3° 取 φ 满足 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_3)$ 且 $\varphi(x_2) = 0$ 即可, 比如 $\varphi(x_1) = 1, \varphi(x_2) = 1, \varphi(x_3) = 2$.

取 ψ 满足 $\psi(x_1) = \psi(x_3)$ 或 $\psi(x_2) = 0$ 即可, 比如 $\psi(x_1) = 1$, $\psi(x_2) = 0$, $\psi(x_3) = 1$.

4° 取 φ 满足 $\varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$ 即可, 比如 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$.

取 ψ 满足 $\psi(x_2)$ 和 $\psi(x_3)$ 不同时为 0 即可, 比如 $\psi(x_1) = 0, \psi(x_2) = 1, \psi(x_3) = 1$.

5° 公式在该解释域中恒真, 所以对所有的 φ 都有 $|p|(\varphi) = 1$, 比如 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

不存在 $\psi \in \Phi_{\mathbb{N}}$ 使得 $|p|(\psi) = 0$.

练习 18. 2. 已知 K 中 $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^2\}$, $R = \{R_1^2\}$, 还已知 K 的解释域 $\mathbb{Z}$ (整数集), $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 “$<$”. 试给出 $\varphi, \psi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, 使 $|p|(\varphi) = 1$, $|p|(\psi) = 0$, 其中 p 为:

3° $\neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$.

解: 3° 取 φ 满足 $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$ 即可, 比如 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

取 ψ 满足 $\psi(x_1) < \psi(x_2)$ 即可, 比如 $\psi(x_1) = 1, \psi(x_2) = 2$.

4° 公式在该解释域中恒假, 所以不存在 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ 使得 $|p|(\varphi) = 1$.

对所有的 ψ 都有 $|p|(\psi) = 0$, 比如 $\psi(x_1) = \psi(x_2) = \psi(x_3) = 0$.

5° 公式在该解释域中恒真, 所以对所有的 φ 都有 $|p|(\varphi) = 1$, 比如 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

不存在 $\psi \in \Phi_{\mathbb{N}}$ 使得 $|p|(\psi) = 0$.

练习 20. 2. 设 K 中 $C = \{c_1\}$, $F = \{f_1^2\}$, $R = \{R_1^2\}$, 还已知 K 的解释域 $\mathbb{Z}$ (整数集), $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 “$<$”. 求 $|p|_{\mathbb{Z}}$, 其中 p 为:

3° $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$.

4° $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))$.

解: 3° 因为对任意的 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 和 $\varphi(x_1) - \varphi(x_3) < \varphi(x_2) - \varphi(x_3)$ 同为真或同为假, 就有 $|R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))|(\varphi) = 1$, 得到 $|R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))|_{\mathbb{Z}} = 1$, 所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$.

4° 因为对任意的 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, 总是存在 φ 的 x_2 变通 $\varphi' : \varphi'(x_2) < 0$ 使得

$$\varphi'(x_1) < (\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)) - \varphi'(x_2) = \varphi'(x_1) - 2\varphi'(x_2)$$

即 $|\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))|(\varphi) = 1$, 得到 $|\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))|_{\mathbb{Z}} = 1$, 所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$.