傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 2

练习 6. 2. 证明命题 2-2°, 3°, 4°.

2-2° $\vdash (p \wedge q) \to q$

2-3° $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$

2-4° $\vdash p \to (p \wedge p)$

解: 2-2° 要证 $\vdash (p \wedge q) \to q$, 即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to p$. 下面是所要的一个证明:

(1) $\neg q \to (p \to \neg q)$ (L1)

(2) $(\neg q \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q)$ 换位律

(3) $\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律

(5) $\neg(p \to \neg q) \to q$ (3), (4), HS

2-3° 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$, 运用演绎定律, 即要证 $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \to \neg p)$, 用归谬律, 把 $q \to \neg p$ 作为新假定. 以下公式从 $\{p \wedge q, q \to \neg p\}$ 都是可证的

(1) $p \wedge q$ 假定

(2) $(p \wedge q) \to p$ 命题 2-1°

(3) $(p \wedge q) \to q$ 命题 2-2°

(4) p (1), (2), MP

(5) q (1), (3), MP

(6) $q \to \neg p$ 新假定

(7) $\neg p$ (5), (6), MP

由 (4), (7) 用归谬律即得 $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \to \neg p)$, 用演绎定律即有 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

2-4° 要证 $\vdash p \to (p \wedge p)$, 用演绎定律即要证 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$, 用归谬律, 把 $p \to \neg p$ 作为新假定, 立即可得

(1) $\{p, p \to \neg p\} \vdash p$

(2) $\{p, p \to \neg p\} \vdash \neg p$

由 (1), (2) 用归谬律便得 $\{p\} \vdash \neg(p \to p)$, 用演绎定律即有 $\vdash p \to (p \wedge p)$.

练习 6. 4. 证明命题 4-1°

$$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

解: 即要证 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$.

这里先证明 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$, 用演绎定律即要证 $\{\neg\neg(p \to \neg q)\} \vdash (\neg\neg p \to \neg q)$, 有

(1) $\neg\neg(p \to \neg q)$ 假定

(2) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (p \to \neg q)$ 双重否定律

(3) $p \to \neg q$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg p \to p$ 双重否定律

(5) $\neg\neg p \to \neg q$ (3), (4), HS

再证明 $\vdash (\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$, 用演绎定律即要证 $\{\neg\neg p \to \neg q\} \vdash \neg\neg(p \to \neg q)$, 有

(1) $\neg\neg p \to \neg q$ 假定

(2) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律

(3) $p \to \neg q$ (1), (2), HS

(4) $(p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 第二双重否定律

(5) $\neg\neg(p \to \neg q)$ (3), (4), MP

运用上面证明的两个定理, 给出 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$ 的证明如下

(1) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$ 已证明

(2) $(\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)) \to (((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)))$ 命题 3-5°

(3) $((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q))$ (1), (2), MP

(4) $(\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 已证明

(5) $\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$ (3), (4), MP

即证明了 $\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.