傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 2

习题 2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

解: 我们对 $N(t) \cdot N(t+s)$ 稍作变换

$$N(t) \cdot N(t+s) = N(t) \cdot [(N(t+s) - N(t)) + N(t)] = (N(t) - N(0))^2 + (N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t)) \tag{2.1}$$

其中 $N(t) - N(0)$ 与 $N(t+s) - N(t)$ 相互独立. 而 $(N(t) - N(0)) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, 则有

$$\begin{aligned} E[N(t) \cdot N(t+s)] &= E[(N(t) - N(0))^2] + E[(N(t) - N(0)) \cdot (N(t+s) - N(t))] \\ &= \text{Var}[N(t) - N(0)] + E^2[N(t) - N(0)] + E[N(t) - N(0)] \cdot E[N(t+s) - N(t)] \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda t \cdot \lambda s \\ &= \lambda t[1 + \lambda(t+s)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

习题 4. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求:
(i) $P\{N(1) \leq 2\}$
(ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$
(iii) $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$

解: (i)

$$\begin{aligned} P\{N(1) \leq 2\} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda)^k \exp(-\lambda)}{k!} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2}\right) \exp(-2) \\ &= 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.6767 \end{aligned} \tag{4.1}$$

(ii) $N(2) - N(1)$ 与 $N(1)$ 相互独立, 有

$$\begin{aligned} P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\} &= P\{N(1) = 3\} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2 | N(1) = 3\} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2\} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} \\ &= 4\mathrm{e}^{-4} \approx 0.0733 \end{aligned} \tag{4.2}$$

(iii) 显然 $P\{N(1) \geq 2, N(1) \geq 1\} = P\{N(1) \geq 2\}$, 有

$$P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\} = \frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}} \approx 0.6870 \tag{4.3}$$

习题 7. $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t)=n$, 试求第 r 个事件 $(r\leq n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解: 给定 $N(t)=n$, 不妨设 $W_r=w_r$. 对充分小的增量 $\Delta w_r\downarrow 0$, 有

$$\begin{aligned}&\{w_r\leq W_r\leq w_r+\Delta w_r, N(t)=n\}\\&=\{N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r\}\end{aligned}\tag{7.1}$$

记 $P_1=P(N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r)$, 于是

$$\begin{aligned}f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\Delta w_r&=P(w_r\leq W_r<w_r+\Delta w_r|N(t)=n)+o(\Delta w_r)\\&=\frac{P_1}{P(N(t)=n)}+o(\Delta w_r)\end{aligned}\tag{7.2}$$

由独立增量性和 Poisson 过程的定义, 有

$$\begin{aligned}P_1&=P(N(w_r)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1, N(t)-N(t-w_r-\Delta w_r)=n-r)\\&=\frac{(\lambda w_r)^{r-1}\exp(-\lambda w_r)}{(r-1)!}(\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r))\frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}\exp(-\lambda(t-w_r-\Delta w_r))}{(n-r)!}\\&=\frac{\lambda^n}{(r-1)!(n-r)!}w_r^{r-1}(t-w_r-\Delta w_r)^{n-r}\exp(-\lambda t)\exp(\lambda\Delta w_r)\Delta w_r+o(\Delta w_r)\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n\exp(-\lambda t)}{n!}\tag{7.4}$$

因此, 得到

$$\begin{aligned}f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)&=\lim_{\Delta w_r\downarrow 0}\frac{P_1}{P(N(t)=n)\Delta w_r}\\&=\lim_{\Delta w_r\downarrow 0}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{w_r^{r-1}(t-w_r-\Delta w_r)^{n-r}}{t^n}\exp(\lambda\Delta w_r)\\&=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{w_r^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}\end{aligned}\tag{7.5}$$

习题 8. 令 $\{N_i(t), t\geq 0\}, i=1,2,\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数为 λ 的 Poisson 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

解: 由题意可知

$$\{T>t\}=\{N_i(t)=0, i=1,2,\cdots,n\}\tag{8.1}$$

因此

$$P(T>t)=\prod_{i=1}^{n}P(N_i(t)=0)=\prod_{i=1}^{n}\exp(-\lambda t)=\exp(-n\lambda t)\tag{8.2}$$

因此有

$$F_T(t)=1-\exp(-n\lambda t)\tag{8.3}$$

$$f_T(t)=n\lambda\exp(-n\lambda t)\tag{8.4}$$