傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 1

习题 2. 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \le t, \\ 0, & x > t, \end{cases} \tag{2.1}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t, U_k), 0 \le t \le 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

解: $X(t)$ 的均值

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t, U_k)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[I(t, U_k)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t \\ &= t \end{aligned} \tag{2.2}$$

$X(t)$ 的协方差函数

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= E[(X(t)-t)(X(s)-s)] \\ &= E[X(t)X(s) - tX(s) - sX(t) + ts] \\ &= E[X(t)X(s)] - ts \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} I(t, U_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} I(s, U_j)\right)\right] - ts \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} I(t, U_i) I(s, U_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} I(t, U_i) I(s, U_i)\right] - ts \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} I(\min\{t,s\}, U_i)\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left\{I(t, U_i)\right\} E\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} I(s, U_i)\right] - ts \\ &= \frac{n\min\{t,s\} + n(n-1)ts}{n^2} - ts \\ &= \frac{\min\{t,s\} - ts}{n} \end{aligned} \tag{2.3}$$

习题 3. 令 Z_1, Z_2 为独立的正态分布随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2, λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \sin\lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解: $X(t)$ 的均值函数为

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= \cos\lambda t E[Z_1] + \sin\lambda t E[Z_2] \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

$X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned}R_X(t,s) &= E[X(t)X(s)] \\ &= E[Z_1^2\cos\lambda t\cos\lambda s + Z_2^2\sin\lambda t\sin\lambda s + Z_1Z_2(\cos\lambda t\sin\lambda s + \sin\lambda t\cos\lambda s)] \\ &= E[Z_1^2]\cos\lambda t\cos\lambda s + E[Z_2^2]\sin\lambda t\sin\lambda s + Z_1Z_2(\cos\lambda t\sin\lambda s \\ &= (\cos\lambda t\cos\lambda s + \sin\lambda t\sin\lambda s)(0+\sigma^2) \\ &= \sigma^2\cos\lambda(t-s)\end{aligned} \tag{3.2}$$

同时, 由式 3.2 可知 $E\{X^2(t)\} \equiv \sigma^2 < +\infty$, 即二阶矩存在. 而 $\mu_X(t) \equiv 0$ 且 $R_X(t,s)$ 只与 $t-s$ 有关, 因此 $X(t)$ 是宽平稳的.

习题 9. 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机取一点所得的横坐标和纵坐标, 试计算条件概率

$$P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4} \,\middle|\, X > Y\right) \tag{9.1}$$

解: 由全概率公式, 我们有

$$P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\right) = P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\ ,\ X = Y\right) \tag{9.2}$$

$$+ P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\ ,\ X > Y\right) \tag{9.3}$$

$$+ P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\ ,\ X < Y\right) \tag{9.4}$$

因为 $P(X=Y)=0$, 所以项 9.2 也是 0, 而交换坐标轴的 x, y 轴后 (i.e. 以 $y=x$ 作轴进行对称变换), $X<Y$ 的情况转换为 $X>Y$ 的情况且 X^2+Y^2 不变, 因此 $P(X>Y)=P(X<Y)=\dfrac{1}{2}$ 且项 9.3 和项 9.4 相等, 所以有

$$P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\ ,\ X > Y\right) = \frac{1}{2}P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} \tag{9.5}$$

因此条件概率 9.2 的值为 $\dfrac{1}{8}/\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

习题 14. 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 随机变量. 试求 X_1+X_2 的分布, 并计算给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 的条件分布.

解: X_1+X_2 的分布为

$$\begin{aligned}
P\left(X_1+X_2=n\right) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_1=i)P(X_2=n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_1^i \mathrm{e}^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-i}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{(n-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{n-i} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}
\end{aligned} \tag{14.1}$$

式 14.1 说明 X_1+X_2 满足参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布.

给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 的条件分布为 $(0 \le m \le n)$

$$\begin{aligned}
P\left(X_1=m \mid X_1+X_2=n\right) &= \frac{P\left(X_1=m, X_2=n-m\right)}{P\left(X_1+X_2=n\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!(n-m)!}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}} \\
&= \binom{n}{m} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}
\end{aligned} \tag{14.2}$$

习题 16. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $P(X_i=\pm 1)=\dfrac{1}{2}$. N 与 $X_i, i \ge 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0<\beta<1$. 试求随机和 $Y=\displaystyle\sum_{i}^{N} X_i$ 的均值, 方差和三四阶矩.

解: 取定 $N=n$, 有

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 0 \tag{16.1}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \,\middle|\, N=n\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} E(X_i X_j) \\
&= n + 0 = n
\end{aligned} \tag{16.2}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^3 \,\middle|\, N=n\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_iX_jX_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_iX_jX_k) = 0
\end{aligned}
\tag{16.3}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^4 \,\middle|\, N=n\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_iX_jX_kX_l\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E(X_iX_jX_kX_l) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^4) + 6\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} I(X_i^2X_j^2) \\
&= 3n(n-1) + n = 3n^2 - 2n
\end{aligned}
\tag{16.4}
$$

(其中式 16.4 第三行中的 6 为 $\binom{4}{2}$, 即将 4 个 X 等分为两组的情况数)
而 N 服从参数为 β 的几何分布, 即 $P(N=n) = (1-\beta)^{n-1}\beta$.
所以随机和 Y 的均值为

$$
E(Y) = E[E(Y|N)] = 0 \tag{16.5}
$$

方差为

$$
Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(Y^2) = E[E(Y^2|N)] = E(N) = \frac{1}{\beta} \tag{16.6}
$$

三阶矩为

$$
E(Y^3) = E[E(Y^3|N)] = 0 \tag{16.7}
$$

四阶矩为

$$
\begin{aligned}
E(Y^4) &= E[E(Y^4|N)] = E(3N^2 - 2N) = 3(Var(N) + E^2(N)) - 2E(N) \\
&= 3\left(\frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) - 2\frac{1}{\beta} = \frac{6-5\beta}{\beta^2}
\end{aligned}
\tag{16.8}
$$