傅申 PB20000051
2022 春

随机过程 B 作业 3

习题 3. 信号传送问题. 信号只有 0, 1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α, $X_0 = 0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接受到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00} = P_{11} = 1-\alpha$, $P_{01} = P_{10} = \alpha$, $0 < \alpha < 1$. 试求:

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.

解: (a) 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 0\} P\{X_1 = 0 | X_0 = 0\} \\ &= P\{X_2 = 0 | X_1 = 0\} P_{00} \\ &= P_{00}^2 \\ &= (1-\alpha)^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(b) 两步传送后收到正确信号的概率即为 $P_{00}^{(2)}$, 而有

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(2)} & P_{01}^{(2)} \\ P_{10}^{(2)} & P_{11}^{(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1-2\alpha+2\alpha^2 & 2\alpha-2\alpha^2 \\ 2\alpha-2\alpha^2 & 1-2\alpha+2\alpha^2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

所以 $P_{00}^{(2)} = 1-2\alpha+2\alpha^2$, 即两步传送后收到正确信号的概率为 $1-2\alpha+2\alpha^2$.

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = P_{00}^{(5)}$, 而有

$$\boldsymbol{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(5)} & P_{01}^{(5)} \\ P_{10}^{(5)} & P_{11}^{(5)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^5 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^5 \tag{3.3}$$

注意到

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{(5)} &= \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix}^5 \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(1-2\alpha)^5 & 1-(1-2\alpha)^5 \\ 1-(1-2\alpha)^5 & 1+(1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

就有

$$P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = P_{00}^{(5)} = \frac{1}{2}\left[1+(1-2\alpha)^5\right] \tag{3.6}$$

习题 5. 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

解: 记 X_n 为第 n 次投掷连续出现正面的次数, 因为连续出现两次正面后试验就停止了, 所以状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2\}$, 并且状态 2 为吸收态. 显然 X_n 满足 Markov 性质如下:

$$
\begin{aligned}
P\{X_{n+1}=0|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=0|X_n=i\}&=\begin{cases}\frac{1}{2} & i=0,1\\ 0 & i=2\end{cases}\\
P\{X_{n+1}=1|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=1|X_n=i\}&=\begin{cases}\frac{1}{2} & i=0\\ 0 & i=1,2\end{cases}\\
P\{X_{n+1}=2|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=2|X_n=i\}&=\begin{cases}0 & i=0\\ \frac{1}{2} & i=1\\ 1 & i=2\end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

所以 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 为 Markov 链, 状态转移矩阵如下:

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\tag{5.2}
$$

令 $X_0=0$, 这就与试验中的情况相同. 记 $T=\min\{n\geq 0|X_n=2\}$, 要求平均需要掷多少次试验才可以结束, 即求 $u=E\{T|X_0=0\}$. 可以建立关于 u 的方程如下:

$$
\begin{aligned}
u&=\sum_{k=0}^{2}E\{T|X_0=1,X_1=k\}P\{X_1=k|X_0=0\}\\
&=\sum_{k=0}^{2}E\{T|X_1=k\}P\{X_1=k|X_0=0\}\\
&=\frac{1}{2}\left[E\{T|X_1=0\}+E\{T|X_1=1\}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[(u+1)+(v+1)\right]\\
&=\frac{1}{2}(u+v)+1
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

其中 $v=E\{T|X_0=1\}$, 建立关于其的方程如下:

$$
\begin{aligned}
v&=\sum_{k=0}^{2}E\{T|X_1=k\}P\{X_1=k|X_0=1\}\\
&=\frac{1}{2}\left[E\{T|X_1=0\}+E\{T|X_1=2\}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[(u+1)+1\right]\\
&=\frac{1}{2}u+1
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

联立方程 (5.3) 和 (5.4) 解得 $u=6$ 和 $v=4$. 因此平均需要掷 6 次试验才可以结束.

习题 8. 记 $Z_i, i=1,2,\cdots$ 为一串独立同分布的离散随即变量. $P\{Z_1=k\}=p_k\geq 0, k=0,1,2,\cdots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$. 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}, n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解: 由题意可知, $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\mathbb{N}$. 因为 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}, n=1,2,\cdots$, 所以有 $X_{n+1}=\max\{X_n, Z_{n+1}\}$, 且 $X_n, Z_{n+1}, Z_{n+2},\cdots$ 独立. 对任意的 $n\geq 0$ 和任意 $i_1,\cdots,i_{n-1},i,j\in\mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned}P\{X_{n+1}=j|X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i\}&=P\{\max\{X_n,Z_{n+1}\}=j|X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i\}\\&=P\{\max\{X_n,Z_{n+1}\}=j|X_n=i\}\\&=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}\end{aligned}\tag{8.1}$$

所以 $\{X_n, n\geq 0\}$ 满足 Markov 性质, X_n 为 Markov 链. 其转移概率为

$$P_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=\begin{cases}0 & j<i\\ P\{Z_{n+1}\leq i\}=\sum_{k=0}^{i}p_k & j=i\\ P\{Z_{n+1}=j\}=p_j & j>i\end{cases}\tag{8.2}$$

所以 X_n 的转移概率阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\\ 0 & p_0+p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\\ 0 & 0 & p_0+p_1+p_2 & p_3 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & p_0+p_1+p_2+p_3 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\tag{8.3}$$

习题 11. 一 Markov 链有状态 0, 1, 2, 3 和转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,4,5,\cdots$, 其中 $f_{ii}^{(n)}=P\{X_n=i, X_k\neq i, k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}$.

解: 首先, $f_{00}^{(1)}=P_{00}=0$.

对 $n\geq 2$, 定义方阵 $\boldsymbol{P}'$

$$\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\tag{11.1}$$

即原 Markov 链的状态 0 不会转移再到任何状态, 在下个时间就此消失. 那么 $f_{(00)}^{(n)}$ 就是 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}'^{n-1}$ 的第一个元素. 其中 $\boldsymbol{P}_0=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ 为 X_1 的概率向量.

下面计算 ${\boldsymbol{P}'}^{n-1}$, 注意到 $\boldsymbol{P}'$ 的特征多项式为 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}')=\lambda^4-\frac{1}{2}\lambda^3$, 所以有 ${\boldsymbol{P}'}^4=\frac{1}{2}{\boldsymbol{P}'}^3$, 因此只需要求出 $\boldsymbol{P}'$ 的 1, 2, 3 次幂即可, 如下:

$$
{\boldsymbol{P}'}^1=\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad {\boldsymbol{P}'}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\qquad {\boldsymbol{P}'}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix} \tag{11.2}
$$

那么就得到

$$
{\boldsymbol{P}'}^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2^{2-n}&0&0&2^{2-n}\\2^{1-n}&0&0&2^{1-n}\\2^{-n}&0&0&2^{-n}\end{pmatrix}\quad ,n\geq 3 \tag{11.3}
$$

对 $n\geq 2$ 求 $\boldsymbol{P}_0{\boldsymbol{P}'}^{n-1}$ 的第一个元素, 进而求 $f_{(00)}^{(n)}$, 得到下面的结果:

$$
f_{00}^{(1)}=0 \tag{11.4}
$$

$$
f_{00}^{(2)}=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\left(0,0,0,\frac{1}{2}\right)^T=\frac{1}{4} \tag{11.5}
$$

$$
f_{00}^{(3)}=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^T=\frac{1}{8} \tag{11.6}
$$

$$
f_{00}^{(4)}=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)^T=\frac{5}{16} \tag{11.7}
$$

$$
f_{00}^{(5)}=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)^T=\frac{5}{32} \tag{11.8}
$$

$$
f_{00}^{(n)}=2^{-(n-4)}f_{00}^{(4)}=\frac{5}{2^n},\quad n\geq 4 \tag{11.9}
$$

习题 13. 试证向各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的, 而在三维时却是瞬过的.

解: 先考虑二维情形. 设 $X_n,n\geq 0$ 为二维对称随机游动的 Markov 链, 则其状态空间为 $\mathcal{X}=\mathbb{Z}^2$. 显然这个 Markov 链是不可约的, 所以我们只需要考虑状态 0 (即原点) 的常返性. 记向上下左右方向移动的次数为 $k_{n,1}$, $k_{n,2}$, $k_{n,3}$, $k_{n,4}$, 那么 $\boldsymbol{k}_n=(k_{n,1},k_{n,2},k_{n,3},k_{n,4})$ 服从多项分布, 且 $X_n=(k_{n,1}-k_{n,2},k_{n,3}-k_{n,4})$, 那么就有

$$
P_{00}^{(n)}=P\{k_{n,1}=k_{n,2},k_{n,3}=k_{n,4}\} \tag{13.1}
$$

显然 n 为奇数时上面的式子结果为 0, 所以我们只考虑 n 为偶数的情况. 如下

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{(2n)}&=P\{k_{2n,1}=k_{2n,2},k_{2n,3}=k_{2n,4}\}=\sum_{i=0}^{n}P\{k_{2n,1}=k_{2n,2}=i,k_{2n,3}=k_{2n,4}=n-i\}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}\frac{1}{4^{2n}}=\frac{1}{4^{2n}}\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_n^{n-i}=\frac{1}{4^{2n}}\left(\mathrm{C}_{2n}^{n}\right)^2=\frac{1}{4^{2n}}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^2
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

由 Stirling 公式, 有

$$
P_{00}^{(2n)}=\frac{1}{4^{2n}}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^2\sim\frac{1}{4^{2n}}\left[\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\right]^2=\frac{1}{n\pi} \tag{13.3}
$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}=\infty$, 所以有

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{(2n)}=\infty \tag{13.4}$$

因此, 状态 0 是常返的, 进而二维对称随机游动是常返的.

然后考虑三维情况, 类似地, 在三维情况下 Markov 链不可约, 只考虑状态 0 (原点) 的常返性. n 为奇数时, $P_{00}^{(n)}=0$; 为偶数时, 有

$$P_{00}^{(2n)}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!}\frac{1}{6^{2n}}=\frac{1}{6^{2n}}\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right]^2 \tag{13.5}$$

若 $n=3m$, 有

$$\begin{aligned}
P_{00}^{(6m)}&\le\frac{1}{6^{6m}}\mathrm{C}_{6m}^{3m}\sum_{i=0}^{3m}\sum_{j=0}^{3m-i}\frac{(3m)!}{i!j!(3m-i-j)!}\frac{(3m)!}{m!m!m!}\\
&=\frac{1}{2^{6m}\times 3^{3m}}\mathrm{C}_{6m}^{3m}\frac{(3m)!}{m!m!m!}\sum_{i=0}^{3m}\sum_{j=0}^{3m-i}\frac{(3m)!}{i!j!(3m-i-j)!}\frac{1}{3^{3m}}\\
&=\frac{1}{2^{6m}\times 3^{3m}}\mathrm{C}_{6m}^{3m}\frac{(3m)!}{m!m!m!}\\
&\sim\frac{1}{2^{6m}\times 3^{3m}}\left[\frac{2^{6m}}{\sqrt{3m\pi}}\right]\left[\frac{\sqrt{3}\times 3^{3m}}{2m\pi}\right]\\
&\sim\left(\frac{1}{m\pi}\right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{13.6}$$

而当 $n=3m-1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
P_{00}^{(6m)}&=P\{X_{6m}=0\}\\
&\ge P\{X_{6m}=0,X_{6m-2}=0\}\\
&=P\{X_{6m}=0|X_{6m-2}=0\}P\{X_{6m-2}=0\}\\
&=P_{00}^{(2)}P_{00}^{(6m-2)}\\
&=\frac{1}{6}P_{00}^{(6m-2)}
\end{aligned} \tag{13.7}$$

所以 $P_{00}^{(6m-2)}\le 6P_{00}^{(6m)}$, 同理有 $P_{00}^{(6m-4)}\le 6P_{00}^{(6m-2)}\le 36P_{00}^{(6m)}$.

因为 $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m\pi}\right)^{3/2}<\infty$, 所以有

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{(n)}\le\sum_{m=1}^{\infty}(1+6+36)P_{00}^{(6m)}<\infty \tag{13.8}$$

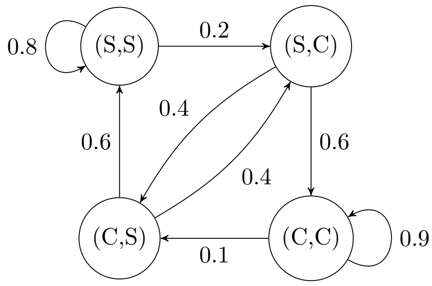
因此, 状态 0 是瞬过的, 进而三维对称随机游动是瞬过的.

习题 18. 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链: 接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 (S,S), (S,C), (C,S) 和 (C,C). 该链的转移概率阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ (S,S) \\ (S,C) \\ (C,S) \\ (C,C) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array} \tag{18.1}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

解: 该 Markov 链的状态转移图如下:



说明 Markov 链是不可约的. 记四个状态分别为 1, 2, 3, 4, 求解下面的方程:

$$\sum_{j=1}^{4} \pi_j = 1, \pi_j > 0 \tag{18.2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \pi_i P_{ij} = \pi_j \tag{18.3}$$

可以解得唯一的

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\} = \left\{\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right\} \tag{18.4}$$

此即为该 Markov 链的平稳分布, 所以长期平均的晴朗天数为

$$\frac{3}{11} + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{11} \tag{18.5}$$

习题 19. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p, 试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

解: 记 X_n 为第 n 天早晨家中的雨伞数, 则 X_n 为 Markov 链, 状态空间为 $\mathcal{X} = \{0, 1, \cdots, M\}$. 记 $q = 1-p$, 其状态转移矩阵可以写成下面的形式:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & M-2 & M-1 & M \end{array} \\
\begin{pmatrix}
q & p & & & & & & \\
pq & p^2+q^2 & pq & & & & 0 & \\
 & pq & p^2+q^2 & pq & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & 0 & & & pq & p^2+q^2 & pq & \\
 & & & & & pq & p^2+q^2 & pq \\
 & & & & & & pq & 1-pq
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{19.1}
$$

显然这个 Markov 链是不可约的, 解下面的方程组:

$$
\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1, \pi_j > 0 \tag{19.2}
$$

$$
\sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij} = \pi_j \tag{19.3}
$$

可以解得唯一的

$$
\pi_0 = \frac{1-p}{M+1-p}, \pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_M = \frac{1}{M+1-p} \tag{19.4}
$$

$\pi = \{\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_M\}$ 即为 Markov 链的平稳分布, 所以他被雨淋湿的概率为

$$
P\{\text{该人被雨淋湿}\} = p\pi_0 + qp\pi_M = \frac{2p(1-p)}{M+1-p} \tag{19.5}
$$

习题 22. 若一单体产生后代的分布为 $p_0 = q$, $p_1 = p$ $(p + q = 1)$, 并假定过程开始时的祖先数为 1, 试求分支过程第三代总数的分布.

解: 记 X_n 为第 n 代个体数, 并令 $X_0 = 1$, 则 X_n 是 Markov 链, 且为分支过程, 其状态空间为 $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ 则前三代的生成函数为:

$$
\phi_1(s) = E\left[s^{X_1}\right] = E\left[s_1^{Z}\right] = s^0 p_0 + s^1 p_1 = q + ps \tag{22.1}
$$

$$
\phi_2(s) = \phi_1(\phi_1(s)) = \phi_1(q + ps) = q + pq + p^2 s = 1 - p^2 + p^2 s \tag{22.2}
$$

$$
\phi_3(s) = \phi_1(\phi_2(s)) = \phi_1(1 - p^2 + p^2 s) = q + p(1 - p^2 + p^2 s) = 1 - p^3 + p^3 s \tag{22.3}
$$

因此就有

$$
P\{X_3 = 0\} = E\left[0^{X_3}\right] = \phi_3(0) = 1 - p^3 \qquad P\{X_3 = 1\} = 1 - P\{X_3 = 0\} = p^3 \tag{22.4}
$$

即为第三代总数的分布