傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 汇总

练习 1. 1. 列出以下复合命题的真值表. (其中支命题 p, q, r, s 视为问题变元.)

7° $(\neg p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$

8° $(p \to q) \to (p \to r)$

9° $\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

解: 7°

$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$	$\to$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r)$
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1

8°

$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

9°

$\neg$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r))$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

练习 2. 2. 写出由 $X_2 = \{x_1, x_2\}$ 生成的公式集 $L(X_2)$ 的三个层次: L_0, L_1 和 L_2.

解:

$$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\} \tag{2.1}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \to x_1, x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, x_2 \to x_2\} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} L_2 = \{&\neg(\neg x_1), \neg(\neg x_2), \\ &\neg(x_1 \to x_1), \neg(x_1 \to x_2), \neg(x_2 \to x_1), \neg(x_2 \to x_2), \\ &x_1 \to (\neg x_1), x_1 \to (\neg x_2), x_2 \to (\neg x_1), x_2 \to (\neg x_2), \\ &(\neg x_1) \to x_1, (\neg x_1) \to x_2, (\neg x_2) \to x_1, (\neg x_2) \to x_2, \\ &x_1 \to (x_1 \to x_1), x_1 \to (x_1 \to x_2), x_1 \to (x_2 \to x_1), x_1 \to (x_2 \to x_2), \\ &x_2 \to (x_1 \to x_1), x_2 \to (x_1 \to x_2), x_2 \to (x_2 \to x_1), x_2 \to (x_2 \to x_2), \\ &(x_1 \to x_1) \to x_1, (x_1 \to x_2) \to x_1, (x_2 \to x_1) \to x_1, (x_2 \to x_2) \to x_1, \\ &(x_1 \to x_1) \to x_2, (x_1 \to x_2) \to x_2, (x_2 \to x_1) \to x_2, (x_2 \to x_2) \to x_2\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

练习 3. 2. 写出以下公式在 L 中的 "证明"

1° $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$

2° $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$

解: 1° 证明如下

(1) $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)$ (L3)

(2) $((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)) \to ((x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)))$ (L1)

(3) $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$ (1), (2), MP

2° 证明如下

(1) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$ (L2)

(2) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)) \to (((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)))$ (L2)

(3) $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$ (1), (2), MP

练习 3. 3. 证明下面的结论

2° $\{\neg\neg p\} \vdash p$

3° $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

4° $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

解: 2° 证明如下

(1) $\neg\neg p$ 假定

(2) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)

(3) $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1), (2), MP

(4) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)

(5) $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3), (4), MP

(6) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)

(7) $\neg\neg p \to p$ (5), (6), MP

(8) p (1), (7), MP

3° 证明如下

(1) $\neg(q \to r) \to \neg p$ 假定

(2) $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$ (L3)

(3) $p \to (q \to r)$ (1), (2), MP

(4) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(5) $(p \to q) \to (p \to r)$ (3), (4), MP

(6) $p \to q$ 假定

(7) $p \to r$ (5), (6), MP

4° 证明如下

(1) $p \to (q \to r)$ 假定

(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(3) $(p \to q) \to (p \to r)$ (1), (2), MP

(4) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)

(5) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (3), (4), MP

(6) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to (q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (L2)

(7) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (5), (6), MP

(8) $q \to (p \to q)$ (L1)

(9) $q \to (p \to r)$ (7), (8), MP

练习 4. 2. 利用演绎定律证明以下公式是 L 的定理.

2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$. (换位律)

3° $((p \to q) \to p) \to p$. (Peirce 律)

解: 2° 根据演绎定理, 只需要证明 $\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$. 下面是 $\neg p \to \neg q$ 从 $\{q \to p\}$ 的证明:

(1) $q \to p$ 假定

(2) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律

(3) $\neg\neg q \to p$ (1), (2), HS

(4) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律

(5) $\neg\neg q \to \neg\neg p$ (3), (4), HS

(6) $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$ (L3)

(7) $\neg p \to \neg q$ (5), (6), MP

3° 根据演绎定理, 只需要证明 $\{(p \to q) \to p\} \vdash p$. 下面是 p 从 $\{(p \to q) \to p\}$ 的证明:

(1) $(p \to q) \to p$ 假定

(2) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律

(3) $\neg p \to p$ (1), (2), HS

(4) $(\neg p \to p) \to p$ 否定肯定律

(5) p (3), (4), MP

练习 5. 1. 证明

2° $\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

3° $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$

解: 2° 由演绎定律, 只需要证明 $\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$. 用反证律, 把 $\neg p$ 作为新假定.
以下公式从 $\{\neg p \to q, \neg q, \neg p\}$ 都是可证的.

(1) $\neg p$ 新假定

(2) $\neg p \to q$ 假定

(3) q (1), (2), MP

(4) $\neg q$ 假定

由 (3), (4) 用反证律即得 $\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$.

3° 由演绎定律, 只需要证明 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. 用归谬律, 把 q 作为新假定.
以下公式从 $\{\neg(p \to q), q\}$ 都是可证的.

(1) q 新假定

(2) $q \to (p \to q)$ (L1)

(3) $p \to q$ (1), (2), MP

(4) $\neg(p \to q)$ 假定

由 (3), (4) 用归谬律即得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$.

练习 6. 2. 证明命题 2-2°, 3°, 4°.

2-2° $\vdash (p \wedge q) \to q$

2-3° $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$

2-4° $\vdash p \to (p \wedge p)$

解: 2-2° 要证 $\vdash (p \wedge q) \to q$, 即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to p$. 下面是所要的一个证明:

(1) $\neg q \to (p \to \neg q)$ (L1)

(2) $(\neg q \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q)$ 换位律

(3) $\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律

(5) $\neg(p \to \neg q) \to q$ (3), (4), HS

2-3° 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$, 运用演绎定律, 即要证 $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \to \neg p)$, 用归谬律, 把 $q \to \neg p$ 作为新假定. 以下公式从 $\{p \wedge q, q \to \neg p\}$ 都是可证的

(1) $p \wedge q$ 假定

(2) $(p \wedge q) \to p$ 命题 2-1°

(3) $(p \wedge q) \to q$ 命题 2-2°

(4) p (1), (2), MP

(5) q (1), (3), MP

(6) $q \to \neg p$ 新假定

(7) $\neg p$ (5), (6), MP

由 (4), (7) 用归谬律即得 $\{p \wedge q\} \vdash \neg(q \to \neg p)$, 用演绎定律即有 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

2-4° 要证 $\vdash p \to (p \wedge p)$, 用演绎定律即要证 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$, 用归谬律, 把 $p \to \neg p$ 作为新假定, 立即可得

(1) $\{p, p \to \neg p\} \vdash p$

(2) $\{p, p \to \neg p\} \vdash \neg p$

由 (1), (2) 用归谬律便得 $\{p\} \vdash \neg(p \to p)$, 用演绎定律即有 $\vdash p \to (p \wedge p)$.

练习 6. 4. 证明命题 4-1°

$$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

解: 即要证 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$.

这里先证明 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$, 用演绎定律即要证 $\{\neg\neg(p \to \neg q)\} \vdash (\neg\neg p \to \neg q)$, 有

(1) $\neg\neg(p \to \neg q)$ 假定

(2) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (p \to \neg q)$ 双重否定律

(3) $p \to \neg q$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg p \to p$ 双重否定律

(5) $\neg\neg p \to \neg q$ (3), (4), HS

再证明 $\vdash (\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$, 用演绎定律即要证 $\{\neg\neg p \to \neg q\} \vdash \neg\neg(p \to \neg q)$, 有

(1) $\neg\neg p \to \neg q$ 假定

(2) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律

(3) $p \to \neg q$ (1), (2), HS

(4) $(p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 第二双重否定律

(5) $\neg\neg(p \to \neg q)$ (3), (4), MP

运用上面证明的两个定理, 给出 $\vdash \neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$ 的证明如下

(1) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$ 已证明

(2) $(\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)) \to (((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)))$ 命题 3-5°

(3) $((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q))$ (1), (2), MP

(4) $(\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 已证明

(5) $\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$ (3), (4), MP

即证明了 $\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

练习 7. 2. 下面的公式那些恒为永真式?

3° $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$

解: 3° $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$ 是永真式, 以下是它的真值表.

$(q$	$\vee$	$r)$	$\to$	$(\neg$	r	$\to$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$ 不是永真式, 以下是它的真值表.

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$((q$	$\wedge$	$\neg$	$r)$	$\wedge$	$(r$	$\wedge$	$\neg$	$p))$
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 不是永真式, 以下是它的真值表.

$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$	$\to$	$((p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$r)$
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

练习 7. 3. 以下结论是否正确? 为什么?

1° $\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \;\Leftrightarrow\; \vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

2° $\vDash (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \;\Rightarrow\; \vDash p \leftrightarrow p'$ 且 $\vDash q \leftrightarrow q'$

解: 1° 正确, 证明如下.

(充分性) 因为 $\vDash p(x_1, \cdots, x_n)$, 用 $\neg x_1, \cdots, \neg x_n$ 分别全部替换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$, 由代换定理有 $\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

(必要性) 已知 $\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$, 用反证法, 假设存在 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $v(p(x_1, \cdots, x_n)) = 0$, 则取 $x_1' = \neg x_1$, $\cdots$, $x_n' = \neg x_n$, 因为 $v(\neg\neg q) = v(q)$, 所以 $v(\neg x_1') = v(x_1), \cdots, v(\neg x_n') = v(x_n)$, 有

$$v(p(\neg x_1', \cdots, \neg x_n')) = p(v(\neg x_1'), \cdots, v(\neg x_n')) = p(v(x_1), \cdots, v(x_n)) = v(p(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

这与 $\vDash p(\neg x_1,\cdots,\neg x_n)$ 矛盾, 所以不存在 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 $v(p(x_1,\cdots,x_n))=0$, 即 $\vDash p(x_1,\cdots,x_n)$.

2° 错误. 取 $p=q=x$, $p'=q'=\neg x$, 由同一律, $\vDash p\to q$, $\vDash p'\to q'$, 即 $v(p\to q)\equiv 1$, $v(p'\to q')\equiv 1$, 而 $(1\leftrightarrow 1)=1$, 所以 $\vDash (p\to q)\leftrightarrow(p'\to q')$, 但是显然 $v(p\leftrightarrow p')=v(x\leftrightarrow\neg x)\equiv 0$, $v(q\leftrightarrow q')\equiv 0$, 与题设不符, 所以题设错误.

练习 9. 1. 证明以下各对公式是等值的.

2° $(\neg p\wedge\neg q)\to\neg r$ 和 $r\to(q\vee p)$

3° $(\neg p\vee q)\to r$ 和 $(p\wedge\neg q)\vee r$

解: 2° 由 De. Morgan 律有 $\neg p\wedge\neg q$ 与 $\neg(p\vee q)$ 等值, 而有析取交换律 $\vDash(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$, 所以 $\neg p\wedge\neg q$ 与 $q\vee p$ 等值, 进而

$$\vDash((\neg p\wedge\neg q)\to\neg r)\leftrightarrow(\neg(q\vee p)\to\neg r) \tag{9.1}$$

而由两个换位律可得 $\vdash(\neg p\to\neg q)\leftrightarrow(q\to p)$, 从而 $\vDash(\neg p\to\neg q)\leftrightarrow(q\to p)$, 由代换定理就有

$$\vDash(\neg(q\vee p)\to\neg r)\leftrightarrow(r\to(q\vee p)) \tag{9.2}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用等值的可递性可知 $(\neg p\wedge\neg q)\to\neg r$ 和 $r\to(q\vee p)$ 等值. □

3° 由双重否定律和第二双重否定律有 $\vDash q\leftrightarrow\neg\neg q$, 因此 $\neg p\vee q$ 与 $\neg p\vee\neg\neg q$ 等值. 由 De. Morgan 律有 $\neg p\vee\neg\neg q$ 与 $\neg(p\wedge\neg q)$ 等值, 由等值的可递性可知 $\neg p\vee q$ 与 $\neg(p\wedge\neg q)$ 等值, 因此

$$\vDash((\neg p\vee q)\to r)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)\to r \tag{9.3}$$

而 $p\vee q=\neg p\to q$, 即式 (9.3) 等价为

$$\vDash((\neg p\vee q)\to r)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r \tag{9.4}$$

所以题中两公式等值. □

练习 9. 2. 证明 $\neg(x_1\vee\neg x_2)\to(x_2\to x_3)$ 与下列公式都等值.

1° $\neg(x_2\to x_1)\to(\neg x_2\vee x_3)$

2° $(\neg x_1\wedge x_2)\to\neg(x_2\wedge\neg x_3)$

解: 1° 有析取交换律 $\vDash(x_1\vee\neg x_2)\leftrightarrow(\neg x_2\vee x_1)$, 而 $p\vee q=\neg p\to q$, 因此 $x_1\vee\neg x_2$ 与 $\neg\neg x_2\to x_1$ 等值. 而由双重否定律和第二双重否定律有 $\vDash\neg\neg x_2\leftrightarrow x_2$, 所以有

$$\vDash(x_1\vee\neg x_2)\leftrightarrow(x_2\to x_1) \tag{9.1}$$

同样由 $\vDash\neg\neg x_2\leftrightarrow x_2$, 有 $\neg\neg x_2\to x_3$ 与 $x_2\to x_3$ 等值, 即

$$\vDash(x_2\to x_3)\leftrightarrow(\neg x_2\vee x_3) \tag{9.2}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1\vee\neg x_2)\to(x_2\to x_3)$ 与 $\neg(x_2\to x_1)\to(\neg x_2\vee x_3)$ 等值. □

2° $x_1\vee\neg x_2$ 的对偶为 $\neg x_1\wedge\neg\neg x_2$, 由对偶律 $\neg x_1\wedge\neg\neg x_2$ 与 $\neg(x_1\vee\neg x_2)$ 等值. 而 $\vDash\neg\neg x_2\leftrightarrow x_2$, 所以

$$\vDash(\vee x_1\wedge x_2)\leftrightarrow\neg(x_1\vee\neg x_2) \tag{9.3}$$

$x_2 \wedge \neg x_3$ 的对偶为 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$, 由对偶律 $\neg x_2 \vee \neg\neg x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 而 $\vDash \neg\neg x_3 \leftrightarrow x_3$, 所以 $\neg x_2 \vee x_3$ 与 $\neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. 由式 (9.2) 利用等值的可逆性有

$$\vDash \neg(x_2 \wedge \neg x_3) \leftrightarrow (x_2 \to x_3) \tag{9.4}$$

由式 (9.1) 和式 (9.2), 利用子公式等值可替换性, 得到 $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \to (x_2 \to x_3)$ 与 $(\neg x_1 \wedge x_2) \to \neg(x_2 \wedge \neg x_3)$ 等值. □

练习 10. 1. 求以下公式的等值主析取范式.

3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$

解: 3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的成真指派是

$$(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1) \tag{10.1}$$

那么 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \tag{10.2}$$

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$ 的成真指派是

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0) \tag{10.3}$$

那么 $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \tag{10.4}$$

练习 10. 2. 求以下公式的等值主合取范式.

1° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

2° $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$

解: 1° 记 $p = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$, 这是一个主析取范式, 它的成真指派是

$$(1,1,1),(0,0,1) \tag{10.1}$$

$\neg p$ 的成真指派是

$$(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,0) \tag{10.2}$$

$\neg p$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \tag{10.3}$$

由此得 p 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \tag{10.4}$$

2° 记 $q = ((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$, q 的成真指派是

$$\begin{aligned} &(1,1,1,1),(1,1,0,1),(1,1,0,0),(1,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,1), \\ &(0,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,0,0,0) \end{aligned} \tag{10.5}$$

$\neg q$ 的成真指派是

$$(1,1,1,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0) \tag{10.6}$$

$\neg q$ 的等值主析取范式是

$$(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge\neg x_4)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4) \tag{10.7}$$

由此得 q 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3\vee x_4)\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3\vee x_4)\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee x_2\vee\neg x_3\vee x_4) \tag{10.8}$$

练习 11. 2. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\wedge$ 的公式, 使之与以下各公式等值.
3° $(x_1\leftrightarrow\neg x_2)\leftrightarrow x_3$

解: 因为 $u\leftrightarrow v=\neg(u\wedge\neg v)\wedge\neg(\neg u\wedge v)$, 所以有

$$\begin{aligned}(x_1\leftrightarrow\neg x_2)\leftrightarrow x_3&=(\neg(x_1\wedge x_2)\wedge\neg(\neg x_1\wedge\neg x_2))\leftrightarrow x_3\\&=\neg(\neg(x_1\wedge x_2)\wedge\neg(\neg x_1\wedge\neg x_2)\wedge\neg x_3)\wedge\neg(\neg(\neg(x_1\wedge x_2)\wedge\neg(\neg x_1\wedge\neg x_2))\wedge x_3)\end{aligned}$$

练习 11. 3. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\vee$ 的公式, 使之与以下各公式等值.
2° $(\neg x_1\wedge\neg x_2)\to(\neg x_3\wedge x_4)$

解: 因为 $u\to v=\neg u\vee v$, 所以有

$$\begin{aligned}(\neg x_1\wedge\neg x_2)\to(\neg x_3\wedge x_4)&=\neg(x_1\vee x_2)\to\neg(x_3\vee\neg x_4)\\&=(x_1\vee x_2)\vee\neg(x_3\vee\neg x_4)\end{aligned}$$

练习 12. 2. A, B, C, D 为四个事件. 已知: A 和 B 不可能同时发生; 若 A 发生, 则 C 不发生而 D 发生; 若 D 发生, 则 B 不发生. 结论: B 和 C 不可能同时发生.

解: 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示 A, B, C, D 发生, 于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1\wedge x_2),x_1\to(\neg x_3\wedge x_4),x_4\to\neg x_2\}\vdash\neg(x_2\wedge x_3)$$

问题归结为下面的真值方程组 (1)~(4) 是否有解:

(1) $\neg(v_1\wedge v_2)=1$

(2) $v_1\to(\neg v_3\wedge v_4)=1$

(3) $v_4\to\neg v_2=1$

(4) $\neg(v_2\wedge v_3)=0$

由 (4) 式可得

(5) $v_2 = 1$, 且

(6) $v_3 = 1$
由 (1) 式和 (5) 式可得

(7) $v_1 = 0$
由 (3) 式和 (5) 式可得

(8) $v_4 = 0$
将 (5), (6), (7), (8) 式代入 (2) 式的左边, 得

$$v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 0 \to (0 \wedge 0) = 1$$

所得结果说明 $(0, 1, 1, 0)$ 是 (1)~(4) 式的解, 它是三个前提的成真指派, 但却是结论的成假指派, 所以题中的论证不合理.

练习 12. 3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是: “a, b, c 三人中至少有一人未作案”, 判断是否正确?

解: 用 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示 a, b, c, d 作案, 办案人员的推理可形式化为

$$\{(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_3 \wedge \neg x_4), (x_1 \wedge x_2) \to ((x_3 \vee x_4) \wedge \neg(x_3 \wedge x_4)),$$
$$(x_2 \wedge x_3) \to ((x_1 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4))\} \vdash \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$$

解方程组

(1) $(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \leftrightarrow (\neg v_3 \wedge \neg v_4) = 1$

(2) $(v_1 \wedge v_2) \to ((v_3 \vee v_4) \wedge \neg(v_3 \wedge v_4)) = 1$

(3) $(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = 1$

(4) $\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3 = 0$
由 (4) 式可得

(5) $v_1 = 1$, 且

(6) $v_2 = 1$, 且

(7) $v_3 = 1$
由 (2), (5), (6), (7) 式可得

(8) $v_4 = 0$
将解得值代入 (3) 式的左边, 得

(9) $(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = (1 \wedge 1) \to ((1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)) = 1 \to (0 \vee 0) = 0$
与 (3) 式矛盾, 因此方程组无解.

所以判断是正确的.

练习 14. 2. 在以下公式中, 哪些 x_1 的出现是自由的? 哪些 x_1 的出现是约束的? 项 $f_1^2(x_1,x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的?

3° $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$

4° $\forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1) \to \forall x_1 R_2^2(x_3,f_2^2(x_1,x_2))$

解: 3° 第 3 个 x_1 的出现是自由的, 第 1, 2 个 x_1 的出现是约束的.

因为 x_2 在公式中不自由出现, 所以项 $f_1^2(x_1,x_3)$ 对公式中的 x_2 是自由的.

4° 第 1, 2 个 x_1 的出现是自由的, 第 3, 4 个 x_1 的出现是约束的.

项 $f_1^2(x_1,x_3)$ 对公式中的 x_2 是不自由的, 因为替换第二个 x_2 后项 $f_1^2(x_1,x_3)$ 中的 x_1 受到约束.

练习 14. 3. 设 t 是项 $f_1^2(x_1,x_3)$, $p(x_1)$ 是下面的公式. 确定 t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 是否自由? 如果是自由的, 写出 $p(t)$.

3° $\forall x_2 R_1^1(f_1^1(x_2)) \to \forall x_3 R_1^3(x_1,x_2,x_3)$

4° $\forall x_2 R_1^3(x_1,f_1^1(x_1),x_2) \to \forall x_3 R_1^1(f_1^2(x_1,x_3))$

解: 3° t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, 因为替换后 t 中的 x_3 受到约束.

4° t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, 因为替换后 t 中的 x_3 受到约束.

练习 14. 5. 设个体变元 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现, 个体变元 y 不在公式 $p(x)$ 中自由出现. 试证, 如果 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的, 那么 x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的.

解: 因为 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现, 所以所有的 x 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 将 $p(y)$ 中的 y 分为两部分:

(a) $p(x)$ 中原有的 y, 它们本身就是不自由出现的.

(b) $p(x)$ 中 x 被替换后的 y, 因为 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的, 所以这部分 y 都是自由的, 即它们都不是在 $\forall y$ 中或在 $\forall y$ 的范围中.

而因为 $p(x)$ 中的 x 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中, 所以 $p(y)$ 中自由的 y (即 b 部分) 都不是在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 因此, 用 x 替换 $p(y)$ 中自由出现的 y 后, 这些 x 都不会出现在 $\forall x$ 中或在 $\forall x$ 的范围中. 因此, x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的.

.

练习 15. 2. 试证对任意公式 p 与 q, 有

$$\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall x p \to \forall x q)$$

解: 先证明 $\{\forall x(p \to q), \forall xp\} \vdash \forall xq$:

(1) $\forall x(p \to q)$ 假定

(2) $\forall x(p \to q) \to (p \to q)$ (K4)

(3) $p \to q$ (1), (2), MP

(4) $\forall xp$ 假定

(5) $\forall xp \to p$ (K4)

(6) p (4), (5), MP

(7) q (6), (3), MP

(8) $\forall xp$ (7), Gen

在上面的证明中, 除了 x 外没有使用其他的 Gen 变元, 而 x 显然不在 $\forall xp$ 和 $\forall x(p \to q)$ 中自由出现, 由演绎定理, 先后有 $\{\forall x(p \to q)\} \vdash \forall xp \to \forall xq$, $\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall xp \to \forall xq)$. 公式得证.

练习 15. 3. 求证:

$1°$ $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$

$2°$ $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$

解: $1°$ 证明如下:

(1) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 假定

(2) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ (K4)

(3) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_1)$ (K4)

(5) $R_1^2(x_1, x_1)$ (3), (4), MP

(6) $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$ (5), Gen

$2°$ 证明如下:

(1) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 假定

(2) $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ (K4)

(3) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ (1), (2), MP

(4) $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_3)$ (K4)

(5) $R_1^2(x_1, x_3)$ (3), (4), MP

(6) $\forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ (5), Gen

(7) $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ (6), Gen

(8) $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3) \to \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ (K4)

(9) $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ (7), (8), MP

(10) $\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ (9), Gen

练习 15. 4. 设 x 不在 p 中自由出现. 求证:
1° $\vdash (p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$
2° $\vdash (p \to \exists xq) \to \exists x(p \to q)$

解: 1° 要证明 $(p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$, 只用证明 $\{p \to \forall xq\} \vdash \forall x(p \to q)$, 过程中除了 x 以外不使用别的 Gen 变元, 如下:

(1) $p \to \forall xq$ 假定

(2) $\forall xq \to q$ (K4)

(3) $p \to q$ (1), (2), HS

(4) $\forall x(p \to q)$ (3), Gen

因为 x 不在 $p \to \forall xq$ 中自由出现, 由演绎定理, 不增加新的 Gen 变元就可得 $\vdash (p \to \forall q) \to \forall (p \to \forall q)$.
2° 这里先证明 $\vdash \neg(p \to q) \to p$ 和 $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

1. 利用演绎定理和反证律, 以下公式从 $\{\neg(p \to q), \neg p\}$ 可证:

   (1) $\neg p$ 新假定

   (2) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律

   (3) $p \to q$ (1), (2), MP

   (4) $\neg(p \to q)$ 假定

   由 (3), (4) 用反证律可得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash p$, 再由演绎定理得到 $\vdash \neg(p \to q) \to p$.

2. 利用演绎定律和归谬律, 以下公式从 $\{\neg(p \to q), q\}$ 可证:

   (1) q 新假定

   (2) $q \to (p \to q)$ (L1)

   (3) $p \to q$ (1), (2), MP

   (4) $\neg(p \to q)$ 假定

   由 (3), (4) 用归谬律可得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$, 再由演绎定理得到 $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

然后证明题中命题, 为此只用证 $\{p \to \exists xq\} \vdash \exists x(p \to q)$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元.
以下公式从 $\{p \to \exists xq, \forall x \neg(p \to q)\}$ 可证:

(1) $\forall x \neg(p \to q)$ 新假定

(2) $\forall x \neg(p \to q) \to \neg(p \to q)$ (K4)

(3) $\neg(p \to q)$ (1), (2), MP

(4) $\neg(p \to q) \to p$ 已证明

(5) p (3), (4), HS

(6) $p \to \exists xq$ 假定

(7) $\exists xq$ $(= \neg\forall x\neg q)$ (5), (6), MP

(8) $\neg(p \to q) \to \neg q$ 已证明

(9) $\neg q$ (3), (8), MP

(10) $\forall x\neg q$ (9), Gen

因为 x 不在 $\forall x\neg(p \to q)$ 中自由出现, 由 (9), (10) 用归谬律可得 $\{p \to \exists xq\} \vdash \exists x(p \to q)$, 再用演绎定理得到 $\vdash (p \to \exists xq) \to \exists x(p \to q)$.

练习 16. 1. 设 x 不在 q 中自由出现. 求证:

$1°$ $\vdash (\exists xp \to q) \to \forall x(p \to q)$

$2°$ $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall xp \to q)$

解: $1°$ 要证 $\vdash (\exists xp \to q) \to \forall x(p \to q)$, 只用证 $\{\exists xp \to q\} \vdash \forall x(p \to q)$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元.

(1) $\neg\forall x\neg p \to q$ 假定

(2) $(\neg\forall x\neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p)$ 换位律

(3) $\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg\forall x\neg p \to \forall x\neg p$ 双重否定律

(5) $\neg q \to \forall x\neg p$ (3), (4), HS

(6) $\forall x\neg p \to \neg p$ (K4)

(7) $\neg q \to \neg p$ (5), (6), HS

(8) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ (K3)

(9) $p \to q$ (7), (8), MP

(10) $\forall x(p \to q)$ (9), Gen

因为 x 不在 $\exists xp \to q$ 中自由出现, 由演绎定理, 不增加新的 Gen 变元就可得 $\vdash (\exists xp \to q) \to \forall x(p \to q)$.

$2°$ 要证 $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall xp \to q)$, 只用证 $\{\exists x(p \to q), \forall xp\} \vdash q$, 过程中不使用除 x 以外的 Gen 变元. 以下公式从 $\{\exists x(p \to q), \forall xp, \neg q\}$ 可证:

(1) $\forall xp$ 假定

(2) $\forall xp \to p$ (K4)

(3) p (1), (2), MP

(4) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$ 永真式

(5) $\neg q \to \neg(p \to q)$ (3), (4), MP

(6) $\neg q$ 新假定

(7) $\neg(p \to q)$ (6), (5), MP

(8) $\forall x \neg(p \to q)$ (7), Gen

(9) $\neg\forall x \neg(p \to q)$ 假定

其中式 (4) 的真值表见表 16.1, 因 Gen 变元 x 不在假定中自由出现, 由 (8), (9) 用反证律得 $\{\exists x(p \to q), \forall xp\} \vdash q$, 再用两次演绎定理得 $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall xp \to q)$.

表 16.1: $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$ 的真值表

p	$\to$	$(\neg$	q	$\to$	$\neg$	$(p$	$\to$	$q))$
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0

练习 16. 3. 找出与所给公式等价的前束范式.

3° $\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3))$

4° $\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$

解: 3° 适当改变题中公式的约束变元得到等价的 q_1:

$$q_1 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3))$$

由 q_1 出发, 得到以下的等价公式:

$q_2 = \exists x_1((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_3 = \exists x_1((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3(\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_4 = \exists x_1\exists x_3((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_5 = \exists x_1\exists x_3((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \forall x_4(R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_6 = \exists x_1\exists x_3\forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$ (由命题 2-2°)

q_6 即为所求的前束范式, 即

$$\exists x_1\exists x_3\forall x_4((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^3(x_2, x_3)))$$

4° 适当改变题中公式的约束变元得到等价的 q_1:

$$q_1 = \exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$$

由 q_1 出发, 得到以下的等价公式:

$q_2 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_3 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \forall x_3 \neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-3°)

$q_4 = \forall x_4(R_1^2(x_4, x_2) \to \forall x_3(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

$q_5 = \forall x_4 \forall x_3(R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3)))$ (由命题 2-2°)

q_5 即为所求的前束范式, 利用 $\neg(p \wedge (q \wedge r)) = p \to \neg(q \wedge r) = p \to (q \to \neg r)$, 得到所求的前束范式

$$\forall x_4 \forall x_3 \neg(R_1^2(x_4, x_2) \wedge R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1, x_3))$$

练习 17. 2. 设 $\varphi, \psi \in \Phi_M$. 求证: 若对项 t 中的任一变元 x 都有 $\varphi(x) = \psi(x)$, 则 $\varphi(t) = \psi(t)$.

解: 以 t 中出现的个体常元, 个体变元和运算为基础构建项集 T, 对 t 在 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, $t = c_i$ 或 $t = x_i$, 因为 $\varphi(c_i) = \psi(c_i) = \overline{c_i}$ 和 $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$, 所以 $\varphi(t) = \psi(t)$.

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $t = f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$, 其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是较低层次的项. 由归纳假设, 有

$$\varphi(t_1) = \psi(t_1), \cdots, \varphi(t_n) = \psi(t_n)$$

因此

$$\varphi(t) = \varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) = \overline{f_i^n}(\psi(t_1), \cdots, \psi(t_n)) = \psi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \psi(t)$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 17. 3. 设 $t \in T$, φ 和 $\varphi' \in \Phi_M$, φ' 是 φ 的 x 变通, 且 $\varphi'(x) = \varphi(t)$. 用项 t 代换项 $u(x)$ 中 x 所得的项记为 $u(t)$. 求证 $\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$.

解: 对 $u(x)$ 在项集 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, 有三种可能的情况:

1) $u(x) = c_i$, 此时 $u(t) = c_i$, 有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(c_i) = \overline{c_i} = \varphi(c_i) = \varphi(u(t))$.
2) $u(x) = x$, 此时 $u(t) = t$, 由已知条件有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(x) = \varphi(t) = \varphi(u(t))$.
3) $u(x) = y \neq x$, 此时 $u(t) = y$, 因为 φ' 是 φ 的 x 变通, 所以有 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(y) = \varphi(y) = \varphi(u(t))$

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $u(x) = f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))$, 其中 $t_1(x), \cdots, t_n(x)$ 是较低层次的项. 这时 $u(t) = f_i^n(t_1(t), \cdots, t_n(t))$. 由归纳假设, 有

$$\varphi'(t_1(x)) = \varphi'(t_1(t)), \cdots, \varphi'(t_n(x)) = \varphi'(t_n(t))$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi'(u(x)) &= \varphi'(f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))) = \overline{f_i^n}(\varphi'(t_1(x)), \cdots, \varphi'(t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1(t)), \cdots, \varphi(t_n(t))) = \varphi(f_i^n(t_1(t), \cdots, t_n(t))) = \varphi(u(t))\end{aligned}$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 18. 1. 设 K 中的 $C=\{c_1\}$, $F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$, $R=\{R_1^2\}$. 它的一个解释域是 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^1}$ 是后继函数, $\overline{f_1^2}$ 是 $+$, $\overline{f_2^2}$ 是 $\times$, $\overline{R_1^2}$ 是 $=$. 试对以下公式分别找出 $\varphi,\psi\in\Phi_{\mathbb{N}}$, 使 $|p|(\varphi)=1$, $|p|(\psi)=0$, 其中 p 为:

3° $\neg R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_2^2(x_1,c_1), x_1)\to R_1^2(x_1,x_2)$.

解: 3° 取 φ 满足 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_3)$ 且 $\varphi(x_2)=0$ 即可, 比如 $\varphi(x_1)=1,\varphi(x_2)=1,\varphi(x_3)=2$.

取 ψ 满足 $\psi(x_1)=\psi(x_3)$ 或 $\psi(x_2)=0$ 即可, 比如 $\psi(x_1)=1$, $\psi(x_2)=0$, $\psi(x_3)=1$.

4° 取 φ 满足 $\varphi(x_2)=\varphi(x_3)=0$ 即可, 比如 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=\varphi(x_3)=0$.

取 ψ 满足 $\psi(x_2)$ 和 $\psi(x_3)$ 不同时为 0 即可, 比如 $\psi(x_1)=0,\psi(x_2)=1,\psi(x_3)=1$.

5° 公式在该解释域中恒真, 所以对所有的 φ 都有 $|p|(\varphi)=1$, 比如 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$.

不存在 $\psi\in\Phi_{\mathbb{N}}$ 使得 $|p|(\psi)=0$.

练习 18. 2. 已知 K 中 $C=\{c_1\}$, $F=\{f_1^2\}$, $R=\{R_1^2\}$, 还已知 K 的解释域 $\mathbb{Z}$ (整数集), $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 "$<$". 试给出 $\varphi,\psi\in\Phi_{\mathbb{Z}}$, 使 $|p|(\varphi)=1$, $|p|(\psi)=0$, 其中 p 为:

3° $\neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1,x_2)))$.

4° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2), x_3)$.

5° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,c_1), x_1)\to R_1^2(x_1,x_2)$.

解: 3° 取 φ 满足 $\varphi(x_1)\geq\varphi(x_2)$ 即可, 比如 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$.

取 ψ 满足 $\psi(x_1)<\psi(x_2)$ 即可, 比如 $\psi(x_1)=1,\psi(x_2)=2$.

4° 公式在该解释域中恒假, 所以不存在 $\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}}$ 使得 $|p|(\varphi)=1$.

对所有的 ψ 都有 $|p|(\psi)=0$, 比如 $\psi(x_1)=\psi(x_2)=\psi(x_3)=0$.

5° 公式在该解释域中恒真, 所以对所有的 φ 都有 $|p|(\varphi)=1$, 比如 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$.

不存在 $\psi\in\Phi_{\mathbb{N}}$ 使得 $|p|(\psi)=0$.

练习 20. 2. 设 K 中 $C=\{c_1\}$, $F=\{f_1^2\}$, $R=\{R_1^2\}$, 还已知 K 的解释域 $\mathbb{Z}$ (整数集), $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 "$<$". 求 $|p|_{\mathbb{Z}}$, 其中 p 为:

3° $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(R_1^2(x_1,x_2)\to R_1^2(f_1^2(x_1,x_3), f_1^2(x_2,x_3)))$.

4° $\forall x_1\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))$.

解: 3° 因为对任意的 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 和 $\varphi(x_1) - \varphi(x_3) < \varphi(x_2) - \varphi(x_3)$ 同为真或同为假, 就有 $|R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))|(\varphi) = 1$, 得到 $|R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))|_{\mathbb{Z}} = 1$, 所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$.

4° 因为对任意的 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, 总是存在 φ 的 x_2 变通 $\varphi' : \varphi'(x_2) < 0$ 使得

$$\varphi'(x_1) < (\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)) - \varphi'(x_2) = \varphi'(x_1) - 2\varphi'(x_2)$$

即 $|\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))|(\varphi) = 1$, 得到 $|\exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))|_{\mathbb{Z}} = 1$, 所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$.

> **练习 20.** 3. 证明 K 中以下公式都不是有效式.
> 3° $\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))$
> 4° $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$

解: 3° 取 $M = \mathbb{N}$, $\overline{c_1} = 0$, $\overline{R_1^1}$ 为 "$= 0$", 则 $|\neg R_1^1(c_1)|_M = 0$, 对于任一项解释 $\varphi \in \Phi_M$, 存在 φ 的 x_1 变通 $\varphi' : \varphi'(x_1) \neq 0$ 使得 $|\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1)|(\varphi') = 0$, 所以

$$|\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))|_M = 0$$

所以公式不是有效式.

4° 取 $M = \mathbb{N}$, $\overline{R_1^2}$ 为 "$=$", 则 $|R_1^2(x_1, x_1)|_M = 1 \Rightarrow |\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)|_M = 1$, 对任一项解释 $\varphi \in \Phi_M$ 的任一 x_2 变通 φ', 都存在 φ' 的 x_1 变通 $\varphi'' : \varphi''(x_1) \neq \varphi''(x_2)$ 使得 $|R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi'') = 0$, 有 $|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi') = 0$, 所以 $|\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_M = 0$, 因此

$$|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_M = 0$$

所以公式不是有效式.

> **练习 20.** 4. 在 K 中增加新的个体常元 $b_1, b_2, \cdots$, 其他不变, 得到新的扩大的谓词演算 K^+. 设 M 是 K^+ 的解释域 (也同时可看成是 K 的解释域). 已知 φ^+ 和 φ 分别是 K^+ 和 K 的项解释, 且满足 $\varphi^+(x_i) = \varphi(x_i), i = 1, 2, \cdots$. 求证:
> (i) 对 K 中的任何项 t, $\varphi^+(t) = \varphi(t)$
> (ii) 对 K 中的任何公式 p, $|p|(\varphi^+) = |p|(\varphi)$

解: (i) 对 t 在项集 T 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k = 0$ 时, $t = c_i$ 或 $t = x_i$, 因为 $\varphi^+(c_i) = \overline{c_i} = \varphi(c_i)$, $\varphi^+(x_i) = \varphi(x_i)$, 所以 $\varphi^+(t) = \varphi(t)$.

2° 当 $k > 0$ 时, 设 $t = f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$, 其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是较低层次的项. 由归纳假设, 有

$$\varphi^+(t_1) = \varphi(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n) = \varphi(t_n)$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi^+(t) = \varphi^+(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) &= \overline{f_i^n}(\varphi^+(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n)) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) = \varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \varphi(t)\end{aligned}$$

由项集 T 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

(ii) 对 p 在公式集 $K(Y)$ 中的层次数 k 进行归纳:

1° 当 $k=0$ 时, 设 $p=R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$, 由 (i) 可知

$$\varphi^+(t_1)=\varphi(t_1),\cdots,\varphi^+(t_n)=\varphi(t_n)$$

则有

$$|\varphi^+|(p)=1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi^+(t_1),\cdots,\varphi^+(t_n))\in \overline{R_i^n} \;\Leftrightarrow\; (\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\in \overline{R_i^n} \;\Leftrightarrow\; |p|(\varphi)=1$$

2° 当 $k>0$ 时, 有如下三种可能的情况, 其中 q, r 为较低层次的公式.

(1) $p=q\to r$. 有 $|p|(\varphi^+)=|q|(\varphi^+)\to|r|(\varphi^+)=|q|(\varphi)\to|r|(\varphi)=|p|(\varphi)$

(2) $p=\neg q$. 有 $|p|(\varphi^+)=\neg|q|(\varphi^+)=\neg|q|(\varphi)=|p|(\varphi)$

(3) $p=\forall x_i q$. 若 φ' 是 φ 的任一 x_i 变通, 且 $\varphi^{+'}$ 是 K^+ 的和 φ' 有相同变元指派的项解释, 则 $\varphi^{+'}$ 是 φ^+ 的 x_i 变通. 反之, 若 $\varphi^{+'}$ 是 φ^+ 的任一 x_i 变通, 且 φ' 是 K 的和 $\varphi^{+'}$ 有相同变元指派的项解释, 则 φ' 是 φ 的 x_i 变通. 于是有

$$\begin{aligned}|p|(\varphi^+)=1 &\;\Leftrightarrow\; \text{对任一 }\varphi^+\text{ 的 }x_i\text{ 变通 }\varphi^{+'}, |q|(\varphi^{+'})=1\\ &\;\Leftrightarrow\; \text{对任一 }\varphi\text{ 的 }x_i\text{ 变通 }\varphi', |q|(\varphi')=1 \;\Leftrightarrow\; |x_iq|(\varphi)=1, |p|(\varphi)=1\end{aligned}$$

由公式集 $K(Y)$ 的分层性及 1° 和 2° 归纳可知题中命题成立.

练习 21. 2. $\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$ 是否成立?

解: 不成立. 假设命题成立, 则有 $\vDash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$.

取 $M=\mathbb{N}$, $\overline{R_1^2}$ 为 "$\neq$", 则 $|R_1^2(x_2,x_2)|_M=0 \;\Rightarrow\; |\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|_M=0$. 而对任一项解释 $\varphi\in\Phi_M$, 总存在 φ 的 x_2 变通 $\varphi':\varphi'(x_2)\neq\varphi'(x_1)$ 使得 $|R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$, 所以 $|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)|_M=1$. 于是得到

$$|\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)|_M=0$$

与假设矛盾, 所以命题不成立.