傅申 PB20000051
2022 春

数理逻辑基础 作业 5

练习 11. 2. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\wedge$ 的公式, 使之与以下各公式等值.
3° $(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$

解: 因为 $u \leftrightarrow v = \neg(u \wedge \neg v) \wedge \neg(\neg u \wedge v)$, 所以有

$$\begin{aligned}(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3 &= (\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \leftrightarrow x_3 \\ &= \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg(\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \wedge x_3)\end{aligned}$$

练习 11. 3. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\vee$ 的公式, 使之与以下各公式等值.
2° $(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (\neg x_3 \wedge x_4)$

解: 因为 $u \to v = \neg u \vee v$, 所以有

$$\begin{aligned}(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (\neg x_3 \wedge x_4) &= \neg(x_1 \vee x_2) \to \neg(x_3 \vee \neg x_4) \\ &= (x_1 \vee x_2) \vee \neg(x_3 \vee \neg x_4)\end{aligned}$$

练习 12. 2. A, B, C, D 为四个事件. 已知: A 和 B 不可能同时发生; 若 A 发生, 则 C 不发生而 D 发生; 若 D 发生, 则 B 不发生. 结论: B 和 C 不可能同时发生.

解: 用 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示 A, B, C, D 发生, 于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1 \wedge x_2), x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4), x_4 \to \neg x_2\} \vdash \neg(x_2 \wedge x_3)$$

问题归结为下面的真值方程组 (1)~(4) 是否有解:

(1) $\neg(v_1 \wedge v_2) = 1$

(2) $v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 1$

(3) $v_4 \to \neg v_2 = 1$

(4) $\neg(v_2 \wedge v_3) = 0$

由 (4) 式可得

(5) $v_2 = 1$, 且

(6) $v_3 = 1$

由 (1) 式和 (5) 式可得

(7) $v_1 = 0$

由 (3) 式和 (5) 式可得

(8) $v_4 = 0$

将 (5), (6), (7), (8) 式代入 (2) 式的左边, 得

$$v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 0 \to (0 \wedge 0) = 1$$

所得结果说明 $(0, 1, 1, 0)$ 是 (1)~(4) 式的解, 它是三个前提的成真指派, 但却是结论的成假指派, 所以题中的论证不合理.

练习 12. 3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是: “a, b, c 三人中至少有一人未作案”, 判断是否正确?

解: 用 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示 a, b, c, d 作案, 办案人员的推理可形式化为

$$\{(\neg x_1 \land \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_3 \land \neg x_4), (x_1 \land x_2) \to ((x_3 \lor x_4) \land \neg(x_3 \land x_4)),$$
$$(x_2 \land x_3) \to ((x_1 \land x_4) \lor (\neg x_1 \land \neg x_4))\} \vdash \neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_3$$

解方程组

(1) $(\neg v_1 \land \neg v_2) \leftrightarrow (\neg v_3 \land \neg v_4) = 1$

(2) $(v_1 \land v_2) \to ((v_3 \lor v_4) \land \neg(v_3 \land v_4)) = 1$

(3) $(v_2 \land v_3) \to ((v_1 \land v_4) \lor (\neg v_1 \land \neg v_4)) = 1$

(4) $\neg v_1 \lor \neg v_2 \lor \neg v_3 = 0$

由 (4) 式可得

(5) $v_1 = 1$, 且

(6) $v_2 = 1$, 且

(7) $v_3 = 1$

由 (2), (5), (6), (7) 式可得

(8) $v_4 = 0$

将解得值代入 (3) 式的左边, 得

(9) $(v_2 \land v_3) \to ((v_1 \land v_4) \lor (\neg v_1 \land \neg v_4)) = (1 \land 1) \to ((1 \land 0) \lor (0 \land 1)) = 1 \to (0 \lor 0) = 0$

与 (3) 式矛盾, 因此方程组无解.

所以判断是正确的.