第一次实验

姓名: 傅申 学号: PB20000051

1 L 版本程序设计

1.1 理论

1.2 L 版本程序

1.2.1 最初版本

1.2.2 优化与最终版本

2 P 版本程序设计

2.1 理论

2.2 P 版本程序

2.2.1 最初版本

2.2.2 优化与最终版本

2.3 附录

1 L 版本程序设计

1.1 理论

记 a 和 b 的乘积为 $MUL(a,b)$, 则当 $a \geq 0$ 时, 有

$$MUL(a,b) = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ b + MUL(a-1,b) & a \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

当 $a < 0$ 时, 考虑到 LC3 的寄存器是 16 位的, 所以 a 的补码为 $2^{16} + a$, 则当 a 减去了 $2^{16} + a$ 次 1 后, a 在寄存器中就变为了 `x0000`, 也就是 0. 按照上式计算, 有

$$MUL(a,b) \equiv ab \equiv 2^{16} + ab (\mathrm{mod}\ 2^{16})$$

不考虑溢出 ($-2^{15} \leq ab \leq 2^{15} - 1$), 有:

- $a \geq 0$ 时 $MUL(a,b) = ab$;
- $a < 0$ 时:
  - 若 $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$, 则 $MUL(a,b)$ 在寄存器中就是 ab;
  - 若 $b > 0 \Rightarrow ab < 0$, 则 $2^{16} + ab$ 就是 ab 的补码, $MUL(a,b)$ 在寄存器中就是 ab.

即公式 (1) 对于所有不溢出的情况是正确的.

若考虑溢出, 记最后的计算结果在寄存器中为 c, 则只能保证 $c \equiv ab (\mathrm{mod}\ 2^{16})$, 参考下面的 C++ 程序运行结果, 可以认为是正确的.

```cpp
#include <iostream>

int main()
{
    int16_t num_pos_overflow = 500 * 433;
    int16_t num_neg_overflow = 500 * -433;
    std::cout << num_pos_overflow << std::endl;
    std::cout << num_neg_overflow << std::endl;
    return 0;
}
```

输出为, 其中 $500 \times 433 = 216500 \equiv 19892 (\mathrm{mod}\ 2^{16})$

```
19892
-19892
```

1.2 L 版本程序

1.2.1 最初版本

根据公式 (1) 可以得到下面的算法:

Algorithm 1: Multiply

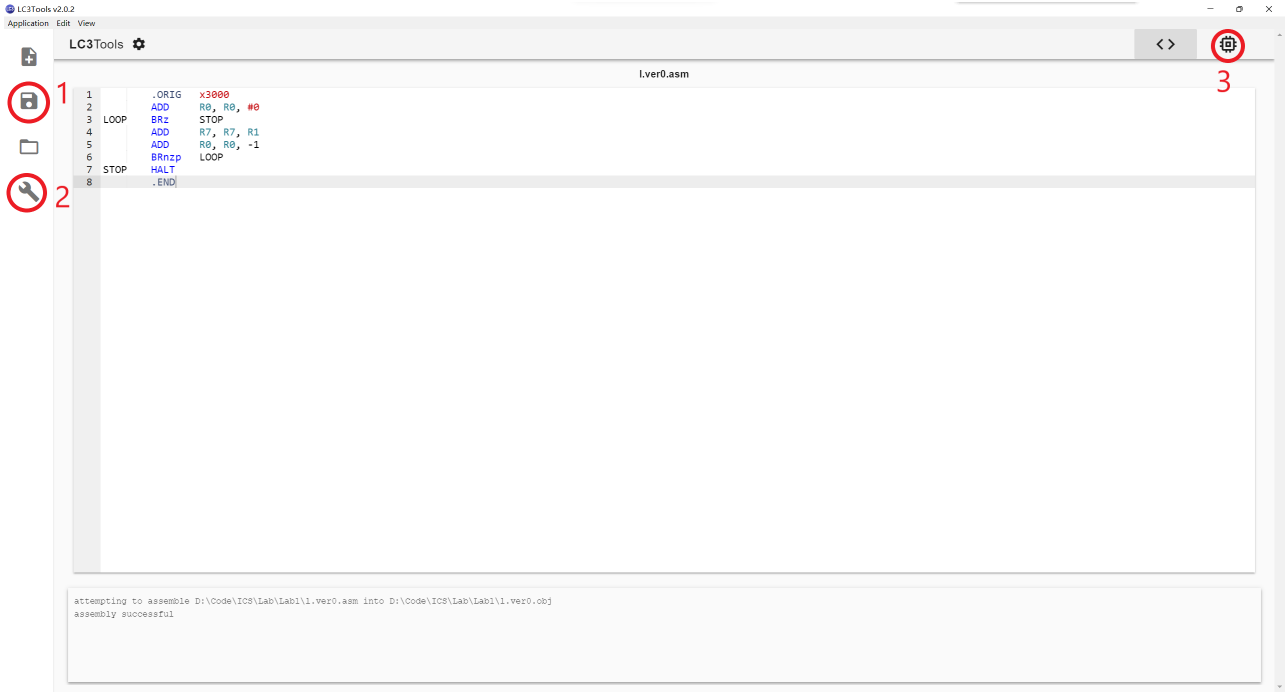
initial R2 to R7 $\leftarrow 0$
loop:
if R0 $= 0$ **then**
    HALT
else
    R0 $\leftarrow$ R0 $- 1$
    R7 $\leftarrow$ R7 $+$ R1
    goto *loop*

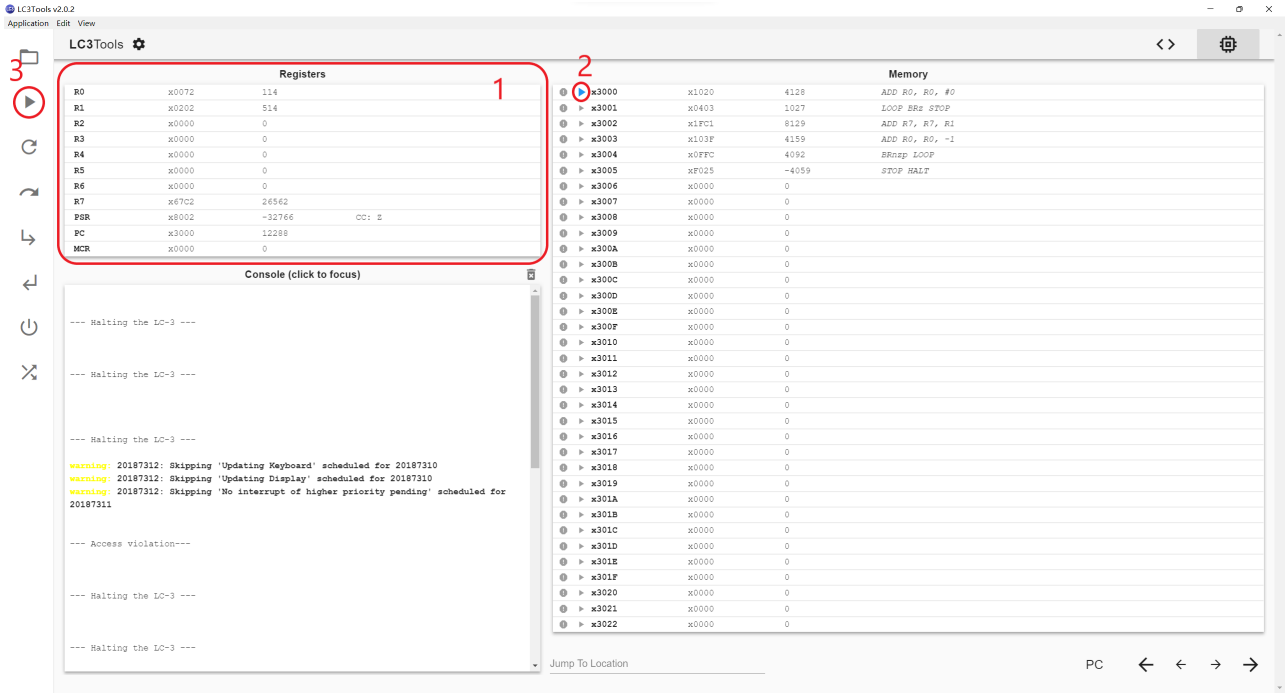
写成对应的汇编程序与机器码分别如下:

```
        ADD     R0, R0, #0
LOOP    BRz     STOP
        ADD     R7, R7, R1
        ADD     R0, R0, -1
        BRnzp   LOOP
STOP    HALT
```

```
0001 000 000 1 00000
0000 010 000000011
0001 111 111 000 001
0001 000 000 1 11111
0000 111 111111100
1111 0000 00100101    ; halt
```

程序总共 5 行, 使用 LC3Tools v2.0.2 进行测试, 在汇编程序的开头和结尾分别加上 `.ORIG x3000` 和 `.END`, 将 `.asm` 文件保存后, 点击左侧的 Assemble, 然后切换到模拟器页面, 在 Register 栏将寄存器设置为初始值后, 设置好 `PC`, 点击左侧的 Run 即可运行程序. 如下图





对测试样例进行测试, 结果如下

R0	R1	R7	R0×R1	理论值
1	1	1	1	1
5	4000	20000	20000	20000
4000	5	20000	20000	20000
-500	433	-19892	-216500	-19892
-114	-233	26562	26562	26562

可以看到, 程序运行没有问题.

1.2.2 优化与最终版本

考虑 R1 = 0 的情况, 这时 R1 需要减去 2^{16} 次 1 才能重新为 0, 而 $2^{16}b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^{16})$, 则如果没有第二行的 `BR` 指令, 并将第五行的 `BRnzp` 改为 `BRnp`, 程序仍然是正确的, 那么可以将汇编程序和机器码修改如下:

```
LOOP    ADD     R7, R7, R1
        ADD     R0, R0, -1
        BRnp    LOOP
STOP    HALT
```

```
0001 111 111 000 001
0001 000 000 1 11111
0000 101 111111100
1111 0000 00100101   ; halt
```

可以看到程序从 5 行缩短到了 3 行, 按照上面的测试方法, 测试结果如下

R0	R1	R7	R0×R1	理论值
0	114	0	0	0
1	1	1	1	1
5	4000	20000	20000	20000
4000	5	20000	20000	20000
-500	433	-19892	-216500	-19892
-114	-233	26562	26562	26562

可以看到, 程序运行没有问题.

2 P 版本程序设计

2.1 理论

根据前面的理论, 可以看出两数相乘其实就是补码相乘, 下面就只针对补码进行分析.

显然有公式:

$$MUL(a,b)=\begin{cases}0 & a=0\\ MUL\left(\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor,b\right)+MUL\left(\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor,b\right) & a \text{ is even}\\ MUL\left(\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor,b\right)+MUL\left(\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor,b\right)+b & a \text{ is odd}\end{cases}$$

其中, 若 a 是偶数/奇数, 则 `a & x0001 = 0`/`1`, 且 $\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor=$ `a >> 1`.

上面给出的是递归公式, 若要改成递推公式, 则需要从 a 的最高位开始, 依次判断, 遇到 `1` 则乘 2 加 b, 否则只乘 2, 直到遍历所有位. 算法如下:

Algorithm 2: Multiply

```
initial R2 to R7 ← 0
if R0 = 0 || R1 = 0 then
    HALT
else
    foreach i in R0[15→0] do
        R7 ← R7 + R7
        if i = 1 then
            R7 ← R7 + R1
```

2.2 P 版本程序

2.2.1 最初版本

写出上面算法的汇编程序如下

```
        ADD     R0, R0, #0
        BRz     STOP
        ADD     R1, R1, #0
        BRz     STOP
        ADD     R2, R2, #15
LOOP    ADD     R7, R7, R7
        ADD     R0, R0, #0
        BRzp    ODD
        ADD     R7, R7, R1
ODD     ADD     R0, R0, R0
        ADD     R2, R2, #-1
        BRzp    LOOP
STOP    HALT
```

对应的机器码如下:

```
0001 000 000 1 00000
0000 010 000001010
0001 001 001 1 00000
0000 010 000001000
0001 010 010 1 01111
0001 111 111 000 111
0001 000 000 1 00000
0000 011 000000001
0001 000 000 000 000
0001 010 010 1 11111
0000 011 111111001
1111 0000 00100101    ; halt
```

对测试样例的运行结果如下:

R0	R1	R7	执行指令数	R0×R1	理论值
-1	1	-1	118	-1	-1
1	1	1	103	1	1
5	4000	20000	104	20000	20000
4000	5	20000	108	20000	20000
-500	433	-19892	111	-216500	-19892
-114	-233	26562	114	26562	26562

其中执行指令数的统计是通过 `R3` 计算出的, 每执行一段指令, `R3` 便加上执行的指令数, 汇编代码如下:

```
        .ORIG   x3000

        ADD     R3, R3, #2
        ADD     R0, R0, #0
        BRz     STOP

        ADD     R3, R3, #2
        ADD     R1, R1, #0
        BRz     STOP

        ADD     R3, R3, #1
        ADD     R2, R2, #15

LOOP    ADD     R3, R3, #3
        ADD     R7, R7, R7
        ADD     R0, R0, #0
        BRzp    ODD         ; R1[15] = 0

        ADD     R3, R3, #1
        ADD     R7, R7, R1

```

```
ODD     ADD     R3, R3, #3
        ADD     R0, R0, R0
        ADD     R2, R2, #-1
        BRzp    LOOP        ; Loop 16 times

STOP    ADD     R3, R3, #1
        HALT
        .END
```

不难发现, 当 $\mathrm{R1} \times \mathrm{R2} \neq 0$ 时, 程序需要执行的指令数为 $102 \sim 118$ $(5 + 16 \times (6 \sim 7) + 1)$. 所以程序最多需要 118 条指令. 对于测试样例, 执行指令数的平均为 108.

2.2.2 优化与最终版本

从理论出发, 根据乘法列竖式的计算方法, 有如下公式:

$$MUL(\mathtt{R0}, \mathtt{R1}) = \sum_{i=0}^{15} \mathtt{R0[i]} \times 2^i \times \mathtt{R1}$$

要想得到 `R0` 的各位, 只需要让 2^i 和 `R0` 求与即可, 有如下算法:

Algorithm 3: Multiply

```
initial R2 to R7 ← 0
R2 ← x0001
loop: if R0 & R2 ≠ 0 then
    R7 ← R7 + R1
R1 ← R1 + R1
R2 ← R2 + R2
if R2 ≠ 0 then
    goto loop

HALT
```

对应的汇编代码为:

```
        ADD     R2, R2, #1
Loop    AND     R3, R0, R2
        BRz     BitZero
        ADD     R7, R7, R1
BitZero ADD     R1, R1, R1
        ADD     R2, R2, R2
        BRnp    Loop
        HALT
```

机器码为:

```
0001 010 010 1 00001
0101 011 000 000 010
0000 010 000000001
0001 111 111 000 001
0001 001 001 000 001
0001 010 010 000 010
0000 101 111111010
1111 0000 00100101   ; halt
```

对测试样例的运行结果如下, 执行指令数同样通过分块求和得出:

R0	R1	R7	执行指令数	R0×R1	理论值
0	1	0	82	0	0
-1	1	-1	98	-1	-1
1	1	1	83	1	1
5	4000	20000	84	20000	20000
4000	5	20000	88	20000	20000
-500	433	-19892	91	-216500	-19892
-114	-233	26562	94	26562	26562

可以看到程序需要执行的指令数为 $82 \sim 98(1 + 16 \times (5 \sim 6) + 1)$, 所以程序最多需要 98 条指令. 对于测试样例, 执行指令数的平均为 88.6.

但是, 上面的算法必须执行 16 次循环, 不论 `R0` 剩余的 bits 是否全是 0, 所以可以针对这一点进行优化. 注意到 `R0 & (R0 − 1)` 是 `R0` 去掉最低的 `1` 的结果, 因此, 可以加上这一操作, 以减少循环次数. 同时, 负数的最高位为 `1`, 对于负数, 可以对 `R0` 和 `R1` 同时取相反数. 而且程序必然是在当前 bit 为 `1` 时停止. 根据以上分析, 修改对应的汇编代码如下:

```
        ADD     R0, R0, #0
        BRz     Stop

        BRp     Pos
        NOT     R0, R0      ; Negate R0
        ADD     R0, R0, #1
        NOT     R1, R1      ; Nagate R1
        ADD     R1, R1, #1

Pos     ADD     R2, R2, #1
Loop    AND     R3, R0, R2
        BRnp    BitOne

        ADD     R1, R1, R1
        ADD     R2, R2, R2
        BRnzp   Loop

BitOne  ADD     R7, R7, R1
```

```
        ADD     R1, R1, R1
        ADD     R2, R2, R2
        ADD     R4, R0, #-1 ; Remove the lowest
        AND     R0, R4, R0  ; 1 in R0
        BRnp    Loop

Stop    HALT
```

机器码如下:

```
0001 000 000 1 00000
0000 010 000010001
0000 001 000000100
1001 000 000 111111
0001 000 000 1 00001
1001 001 001 111111
0001 001 001 1 00001
0001 010 010 1 00001
0101 011 000 000 010
0000 101 000000011
0001 001 001 000 001
0001 010 010 000 010
0000 111 111111011
0001 111 111 000 001
0001 001 001 000 001
0001 010 010 000 010
0001 100 000 1 11111
0101 000 100 000 000
0000 101 111110101
1111 0000 0010 0101  ; halt
```

对测试样例的运行结果如下, 执行指令数同样通过分块求和得出:

R0	**R1**	**R7**	执行指令数	**R0×R1**	理论值
0	1	0	3	0	0
-32767	1	-32767	129	-32767	-32767
1	1	1	13	1	1
5	4000	20000	26	20000	20000
4000	5	20000	83	20000	20000
-500	433	-19892	72	-216500	-19892
-114	-233	26562	56	26562	26562

可以看到程序最多需要执行 129 条指令, 对于测试样例, 执行指令数的平均值为 54.6 条. 对于所有可能的情况, 经统计, 执行指令数的平均值为: 99.5 条, 其中各个范围内的平均值如下:

R0范围	执行指令数平均值
$-2^4 \sim 2^4 - 1$	29.1
$-2^5 \sim 2^5 - 1$	35.1
$-2^6 \sim 2^6 - 1$	41.4
$-2^7 \sim 2^7 - 1$	47.7
$-2^8 \sim 2^8 - 1$	54.1
$-2^9 \sim 2^9 - 1$	60.6
$-2^{10} \sim 2^{10} - 1$	67.0
$-2^{11} \sim 2^{11} - 1$	73.5
$-2^{12} \sim 2^{12} - 1$	80.0
$-2^{13} \sim 2^{13} - 1$	86.5
$-2^{14} \sim 2^{14} - 1$	93.0
$-2^{15} \sim 2^{15} - 1$	99.5

其中进行统计的程序 (简化版模拟器) 见附录. 可以看出, 对于数据规模不太大的情况, 优化的效果非常好.

2.3 附录

统计 P 最终版本执行指令数的 C++ 程序 (部分) :

```cpp
int n = 0, z = 0, p = 0;
inline void set(int rst)
{
    n = z = p = 0;
    if (rst == 0)
        z = 1;
    else if (rst > 0)
        p = 1;
    else
        n = 1;
}

int sim(int16_t R0, int16_t R1)
{
    int PC = 0;
    int16_t R[8] = {R0, R1, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    int count = 0;
    while (true)
    {
        switch (PC)
        {
        case 0:
            PC++;
            count += 2;
            set(R[0]);
            if (z)
            {
                PC = 4;
                break;
            }
            count ++;
            if (p)
            {
                PC = 1;
                break;
            }
            count += 4;
            R[0] = -R[0];
            R[1] = -R[1];

        case 1: // pos
            PC++;
            count ++;
```

```
            R[2] += 1;

        case 2: // loop
            PC++;
            count += 2;
            R[3] = R[0] & R[2];
            set(R[3]);
            if (n || p)
            {
                PC = 3;
                break;
            }
            count += 3;
            R[1] += R[1];
            R[2] += R[2];
            PC = 2;
            break;

        case 3: // BitOne
            PC++;
            count += 6;
            R[7] += R[1];
            R[1] += R[1];
            R[2] += R[2];
            R[4] = R[0] - 1;
            R[0] &= R[4];
            set(R[0]);
            if (n || p)
            {
                PC = 2;
                break;
            }

        case 4: // halt
            count ++;
            if (R[7] != (int16_t)(R1 * R0))
                cout << "Error: " << R[7] << " != " << (int16_t)(R1 * R0) <<
endl;
            return count;

        default:
            cout << "Error: PC = " << PC << endl;
            break;
        }
    }
}
```