2 谓词演算

Fr4nk1in-USTC
中国科学技术大学计算机学院

更新：2022 年 4 月 21 日

1 谓词演算的建立

1.1 项与原子公式

我们从四个集出发

- 个体变元集 $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 是可数集. 个体变元 x_i 可用来表示某个个体对象. 有时为了方便, 我们也用 x, y, z 等来表示个体变元.
- 个体常元集 $C = \{c_1, c_2, \cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集 (包括空集). 个体常元 c_i 可用来表示确定的个体对象.
- 运算集 $F = \{f_1^1, f_2^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots, f_1^3, f_2^3, \cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集 (包括空集). f_i^n 叫做第 i 个 n 元运算符或函数词, 用来表示某个体对象集上的 n 元运算. 注意符号 f_i^n 的上标 n 是该运算符的元数.
- 谓词集 $R = \{R_1^1, R_2^1, \cdots, R_1^2, R_2^2, \cdots, R_1^3, R_2^3, \cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集, 但不能是空集. R_i^n 叫做第 i 个 n 元谓词, 用来表示某个体对象集上的 n 元关系. 注意符号 R_i^n 的上标 n 是该谓词的元数.

用不同的 C, F 和 R 可以构造出不同的谓词演算系统.

定义 1.1 (项集 T) 项的形成规则是:

(i) 个体变元 $x_i (\in X)$ 和个体常元 $c_i (\in C)$ 都是项.
(ii) 若 $t_1, \cdots, t_n$ 是项, 则 $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 也是项. ($f_i^n \in F$)
(iii) 任一项皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

当运算符集 $F = \varnothing$ 时, 规定项集 $T = X \cup C$.

当 $F \neq \varnothing$ 时, 项集 T 可如下分层

$$T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k \cdots$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_0 =& X \cup C = \{x_1, x_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots\},\\
T_1 =& \{f_1^1(x_1), f_1^1(x_2), \cdots, f_1^1(c_1), \cdots\\
& f_2^1(x_1), \cdots, f_2^1(c_1), \cdots\\
& \cdots\cdots\\
& f_1^2(x_1, x_1), \cdots\\
& \cdots\cdots\\
& f_1^3(x_1, x_1, x_1), \cdots\\
& \cdots\cdots\},\\
T_2 =& \{f_1^1(f_1^1(x_1)), \cdots, f_1^2(x_1, f_1^1(x_1))\},\\
& \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

第 k 层项由第零层项经 k 次运算而来. 项集 T 是由 $X \cup C$ 形成。F 型代数.

定义 1.2 (闭项) 只含个体常元的项叫做闭项.

定义 1.3 (原子公式集) 原子公式集是指

$$
Y = \bigcup_{i,n} \left(\{R_i^n\} \times \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n \text{ 个 } T} \right)
$$

即

$$
Y = \{(R_i^n, t_1, \cdots, t_n) | R_i^n \in R, t_1, \cdots, t_n \in T\}
$$

以后常把原子公式 $(R_i^n, t_1, \cdots, t_n)$ 写成 $R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$.

原子公式是用来表示命题的最小单位, 项是构成原子公式的基础.

1.2 谓词演算公式集

建立谓词演算公式集前, 先列出我们所采用的这种形式语言的字母表如下:

- 个体变元 $x_1, x_2, \cdots$ (可数个)
- 个体常元 $c_1, c_2, \cdots$ (可数个或有限个)
- 运算符 $f_1^1, f_2^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots$ (可数个或有限个)
- 谓词 $R_1^1, R_2^1, \cdots, R_1^2, R_2^2, \cdots$ (可数个或有限个, 至少一个)
- 联结词 $\neg, \rightarrow$
- 全称量词 $\forall$
- 左右括号, 逗号 "(", ")", ","

谓词演算公式的形成过程是:

(i) 每个原子公式是公式.

(ii) 若 p, q 是公式, 则 $\neg p, p \rightarrow q, \forall x_i p (i = 1, 2, \cdots)$ 都是公式.

(iii) 任一公式皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

用 $K(Y)$ 表示谓词演算全体公式的集, 它是一个可数集. $K(Y)$ 也具有分层性, 它的零层由原子公式组成, 第 k 层公式由原子公式经 k 次运算而来.

还可在 $K(Y)$ 上定义新的运算 $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ 及 $\exists x_i$ (存在量词运算):

$$p \vee q = \neg p \to q$$

$$p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$$\exists x_i p = \neg \forall x_i \neg p$$

注意 $\forall x(p \to q)$ 和 $\forall xp \to q$ 的区别, 前者 $\forall x$ 的作用范围 (简称 "范围") 是 $p \to q$, 而后者是 p.

定义 1.4 (变元的自由出现与约束出现) 在一个公式中, 个体变元 x 的出现如果不是在 $\forall x$ 中或 $\forall x$ 的范围中, 则叫做自由出现, 否则叫做约束出现.

定义 1.5 公式若不含自由出现的变元, 则叫做闭式.

例 1.1 在 $\forall x_1(R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_2^1(x_2))$ 中, x_1 约束出现两次, x_2 约束出现两次且自由出现一次. 所以公式不是闭式.

定义 1.6 (项 t 对公式 p 中变元 x 是自由的) 用项 t 去代换公式 p 中自由出现的个体变元 x 时, 若在代换后的新公式里, t 的变元都是自由的, 则说 t 对 p 中 x 是可自由代换的, 简称 t 对 p 中 x 是可代换的, 或简称 t 对 p 中 x 是自由的.

换句话说, 用项 t 去代换公式 p 中自由出现的个体变元 x 时, 若在代换后的新公式里, 若 t 中有变元在代换后受到约束, 则说 t 对 p 中 x 是 "不自由的" ("不可自由代换的", "不可代换的").

下面两种情形, t 对 p 中 x 是自由的:

1° t 是闭项

2° x 在 p 中不自由出现

在任何公式中, 项 x_i 对 x_i 自己总是自由的.

定义 1.6 的另一种说法是: 若对项 t 中所含任一变元 y, p 中所有出现的某变元 x 全都不出现在 p 中 $\forall y$ 的范围内, 则说 t 对 p 中 x 是自由的.

以后用 $p(t)$ 表示用项 t 去代换公式 $p(x)$ 中所有自由出现的变元 x 所得结果. (注意 $p(x)$ 中的 x 是指公式中自由出现的 x)

1.3 谓词演算 K

定义 1.7 (谓词演算 K) 谓词演算 K 是指带有如下规定的 "公理" 和 "证明" 的公式集 $K(Y)$:

1° "公理"

取 $K(Y)$ 中以下形状的公式作为 "公理":

(K1) $p \to (q \to p)$

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$, 其中项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的.

(K5) $\forall x(p \to q) \to (p \to \forall x q)$, 其中 x 不在 p 中自由出现.

以上给出的五种公理模式中 $p, q, r, p(x)$ 都是任意的公式.

2° "证明"

设 p 是某公式, Γ 是某公式集. p 从 Γ 可证, 记作 $\Gamma \vdash p$, 是指存在着公式的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$, 其中 $p_n = p$, 且对每个 $k = 1, \cdots, n$ 有

(i) $p_k \in \Gamma$, 或

(ii) p_k 为公理, 或

(iii) 存在 $i, j < k$ 使 $p_j = p_i \to p_k$ (此时说由 $p_i, p_i \to p_k$ 使用 MP 得到 p_k), 或

(iv) 存在 $j < k$, 使 $p_k = \forall x p_j$. 此时说由 p_j 使用 "Gen" ("推广") 这条推理规则得到 p_k. x 叫做 Gen 变元 (Gen 是 Generalization 的缩写).

复合上述条件的 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 的 "证明". Γ 叫做假定集, p 叫做 Γ 的语法推论.

若 $\varnothing \vdash p$, 则 p 叫做 K 的定理, 记作 $\vdash p$.

定理 1.1 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是命题演算 L 的命题变元, $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$, 我们有

$$\vdash_L p(x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow \vdash_K p(p_1, \cdots, p_n)$$

其中 $p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$, $p(p_1, \cdots, p_n)$ 是用 $p_1, \cdots, p_n$ 分别代换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得结果.

定理 1.2 (命题演算型永真式, 简称永真式) 若 $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$ 是命题演算 L 中的永真式, 则对任意 $p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$, $p(p_1, \cdots, p_n)$ 叫做 K 的命题演算型永真式, 简称永真式.

按照定理 1.1, 以下各式在 K 中仍然成立

- $\vdash p \to p$ (同一律)
- $\vdash \neg q \to (q \to p)$ (否定前件律)
- $\vdash (\neg p \to p) \to p$ (否定肯定律)
- $\vdash \neg\neg p \to p$ (双重否定律)
- $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (HS)

一公式集 Γ 是无矛盾的, 仍指对任何公式 q, $\Gamma \vdash q$ 与 $\Gamma \vdash \neg q$ 两者不同时成立.

命题 1.3 Γ 有矛盾 $\Rightarrow$ K 的任一公式从 Γ 可证.

命题 1.4 ($\exists_1$ 规则) 设项 t 对 $p(x)$ 中的 x 自由, 则有

$$\vdash p(t) \to \exists x p(x)$$

命题 1.5 (演绎定律)

1° 若 $\Gamma \vdash p \to q$, 则 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

2° 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 且证明中所用的 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就可得 $\Gamma \vdash p \to q$

推论 1.1 当 p 是闭式时, 有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$$

命题 1.6 $\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists xp \to \exists xq)$, 除了 x 外不用其他 Gen 变元.

定理 1.7 (反证律) 若 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$ 及 $\neg q$, 且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得 $\Gamma \vdash p$

定理 1.8 (归谬律) 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 及 $\neg q$, 且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得 $\Gamma \vdash \neg p$

命题 1.9 ($\exists_2$ 规则) 设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 其证明中 Gen 变元不在 p 中自由出现, 且 x 不在 q 中自由出现, 那么有 $\Gamma \cup \{\exists xp\} \vdash q$, 且除了 x 不增加其他 Gen 变元.

命题 1.10 对 K 中任意公式 p, q, r, 有

$1^\circ \vdash p \leftrightarrow p$ (自反性)

$2^\circ \vdash p \leftrightarrow q \quad \Rightarrow \vdash q \leftrightarrow p$ (对称性)

$3^\circ \vdash p \leftrightarrow q$ 且 $\vdash q \leftrightarrow r \quad \Rightarrow \vdash p \leftrightarrow r$ (可递性)

定义 1.8 (可证等价) p 与 q 可证等价 (简称为等价), 指 $\vdash p \leftrightarrow q$ 成立.

命题 1.11 $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$ 且 $\Gamma \vdash q \to p$

命题 1.12

$1^\circ \vdash \forall xp(x) \leftrightarrow \forall yp(y)$

$2^\circ \vdash \exists xp(x) \leftrightarrow \exists yp(y)$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现.

命题 1.13

$1^\circ \vdash \neg\forall xp \leftrightarrow \exists x\neg p$

$2^\circ \vdash \neg\exists xp \leftrightarrow \forall x\neg p$

1.4 对偶律与前束范式

定理 1.14 (子公式的等价可替换性) 设公式 q 是公式 p 的子公式: $p = \cdots q \cdots$, 用公式 q' 替换 p 中的 q (一次替换) 所得结果记为 $p' = \cdots q' \cdots$. 则有

$$\Gamma \vdash q \leftrightarrow q' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash p \leftrightarrow p'$$

定理 1.15 (对偶律) 设公式 p 已表示成含原子公式及 $\neg, \vee, \wedge, \forall, \exists$ 的公式. 现把 p 中所有原子公式都改为它们的否定, $\vee$ 与 $\wedge$ 互换, $\forall$ 与 $\exists$ 互换, 得公式 p^*, 则有

$$\vdash p* \leftrightarrow \neg p$$

命题 1.16 若 x 不在 p 中自由出现, 则

$1^\circ \vdash \forall x(p \to q) \leftrightarrow (p \to \forall xq)$

2° $\vdash \exists x(p \to q) \leftrightarrow (p \to \exists xq)$

若 x 不在 q 中自由出现, 则

1° $\vdash \forall x(p \to q) \leftrightarrow (\forall xp \to q)$
2° $\vdash \exists x(p \to q) \leftrightarrow (\exists xp \to q)$

定义 1.9 (前束范式) 前束范式, 指形如

$$Q_1 x \cdots Q_n y p$$

的公式, 其中 $Q_1, \cdots, Q_n$ 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 尾部 p 是不含有量词的公式.

命题 1.17 用 Q 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 用 Q^* 表示 Q 的对偶符号 (Q 为 $\forall$ 时 Q^* 为 $\exists$, Q 为 $\exists$ 时 Q^* 为 $\forall$), 那么有

1° 若 y 不在 $p(x)$ 中自由出现, 则

$$\vdash Qxp(x) \leftrightarrow Qyp(y)$$

2° 若 x 不在 p 中自由出现, 则

$$\vdash (p \to Qxq) \leftrightarrow Qx(p \to q)$$

若 x 不在 q 中自由出现, 则

$$\vdash (Qxp \to q) \leftrightarrow Qx(p \to q)$$

3° $\vdash Qxp \leftrightarrow Q^* x \neg p$

命题 1.18

1° $\vdash (\forall xp \wedge \forall xq) \leftrightarrow \forall x(p \wedge q)$
2° $\vdash (\exists xp \vee \exists xq) \leftrightarrow \exists x(p \vee q)$
若 x 不在 p 中自由出现, 则有
3° $\vdash (p \vee Qxq) \leftrightarrow Qx(p \vee q)$
4° $\vdash (p \wedge Qxq) \leftrightarrow Qx(p \wedge q)$

定义 1.10 (Π_n 型和 Σ_n 型前束范式) 设 $n > 0$. 若前束范式是由全称量词开始, 从左至右改变 $n-1$ 次词性, 则叫做 Π_n 型前束范式; 若是由存在两次开始, 从左至右改变 $n-1$ 次词性, 则叫做 Σ_n 型前束范式.

例 1.2 $p = \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4))$ 是 Σ_3 型前束范式;
$q = \forall x_3 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_4 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4))$ 是 Π_2 型前束范式.

2 谓词演算的语义

2.1 谓词演算 K 的解释域与项解释

定义 2.1 (K 的解释域) 设非空集 M 具有以下性质:

1° 对 K 的每个个体常元 c_i, 都有 M 的元素 $\overline{c_i}$ 与之对应:

$$c_i \mapsto \overline{c_i}, \overline{c_i} \in M$$

2° 对 K 的每个运算符 f_i^n, 都有 M 上的 n 元运算 $\overline{f_i^n}$ 与之对应:

$$f_i^n \mapsto \overline{f_i^n}, \overline{f_i^n} \text{ 是 } M \text{ 上的 } n \text{ 元运算}$$

3° 对 K 的每个谓词 R_i^n, 都有 M 上的 n 元关系 $\overline{R_i^n}$ 与之对应:

$$R_i^n \mapsto \overline{R_i^n}, \overline{R_i^n} \text{ 是 } M \text{ 上的 } n \text{ 元关系}$$

例 2.1 设 K 中的 $c = \{c_1\}, F = \{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}, R = \{R_1^2\}$. 下面的 $\mathbb{N}$ 是 K 的一个解释域:

$\mathbb{N}$: 自然数集, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

$\overline{c_1} = 0$,

$\overline{f_1^1}$: 后继函数, $\overline{f_1^1}(n) = n + 1$,

$\overline{f_1^2}$: 加法 $(+)$,

$\overline{f_2^2}$: 乘法 $(\times)$,

$\overline{R_1^2}$: 相等 $(=)$

还可如下给出 K 的另一个解释域:

$\mathbb{Q}^+$: 正有理数集

$\overline{c_1} = 1$,

$\overline{f_1^1}$: 倒数函数, $\overline{f_1^1}(q) = 1/q$,

$\overline{f_1^2}$: 乘法 $(\times)$,

$\overline{f_2^2}$: 除法 $(\div)$,

$\overline{R_1^2}$: 相等 $(=)$

现考察 K 中只含有闭项的原子公式 p:

$$R_1^2(f_1^2(f_1^1(c_1), c_1), f_2^2(f_1^1(c_1), c_1))$$

p 在解释域 $\mathbb{N}$ 中解释成 $(0+1)+0 = (0+1)\times 0$, 这是假命题.

但 p 在另一个解释域 $\mathbb{Q}^+$ 中解释成 $\dfrac{1}{1} \times 1 = \dfrac{1}{1} \div 1$, 这是真命题.

上面的例子说明, 有了解释域才可能讨论 K 中公式的真假值.

定义 2.2 (项解释) 对给定的解释域 M, 我们将映射 $\varphi_0 : X \to M$ 叫做个体变元的 (个体) 对象指派. φ_0 给变元 x_i 指派的个体对象是 $\varphi_0(x_i)$. 项解释 φ 是指具有如下性质 (1) 和 (2) 的映射 $\varphi : T \to M$.

(1) $\varphi(x_i) = \varphi_0(x_i), \varphi(c_i) = \overline{c_i}$

(2) 保运算性: $\varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n))$

给定解释域 M, 只要变元有了解释 (指派), 便有了确定的项解释, 即每个项都在 M 中有了解释. 对同一解释域 M, 可有许多不同的变元指派, 因而存在许多不同的项解释, 把所有的项解释组成的集记作 $\Phi_M = \{\varphi | \varphi : T \to M \text{ 是项解释}\}$.

定义 2.3 (项解释的变元变通) 设 x 是给定的个体变元, y 是任意的个体变元, 且 $\varphi, \varphi' \in \Phi_M$ 还满足条件

(3) $y \neq x \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = \varphi(y)$

则把 φ' 叫做 φ 的 x 变通. (二者互为对方的 x 变通)

2.2 公式的赋值函数

记 $\overline{x} = \varphi(x), x \in X, \overline{t} = \varphi(t), t \in T$

定义 2.4 (公式的赋值函数) 设 M 是给定的解释域, p 是 K 中任一公式. 由公式 p 按下面的方式归纳定义的函数 $|p| : \Phi_M \to \mathbb{Z}_2$ 叫做公式 p 的赋值函数.

对任一项解释 $\varphi \in \Phi_M$,

(i) 当 p 为原子公式 $R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 时, 令

$$|p|(\varphi) = \begin{cases} 1, & 若\ (\overline{t_1}, \cdots, \overline{t_n}) \in \overline{R_i^n} \\ 0, & 若\ (\overline{t_1}, \cdots, \overline{t_n}) \notin \overline{R_i^n} \end{cases}$$

(ii) 当 p 是 $\neg q$ 或 $q \to r$ 时, 令

$$|\neg q|(\varphi) = \neg |q|(\varphi)$$
$$|q \to r|(\varphi) = |q|(\varphi) \to |r|(\varphi)$$

(iii) 当 p 是 $\forall x q$ 时, 令

$$|\forall x q|(\varphi) \begin{cases} 1, & 若\ \varphi\ 的任一\ x\ 变通\ \varphi'\ 都使\ |q|(\varphi') = 1 \\ 0, & 若存在\ \varphi\ 的\ x\ 变通\ \varphi'\ 使\ |q|(\varphi') = 0 \end{cases}$$

命题 2.1

1° $|p \vee q|(\varphi) = |p|(\varphi) \vee |q|(\varphi)$

2° $|p \wedge q|(\varphi) = |p|(\varphi) \wedge |q|(\varphi)$

3° $|p \leftrightarrow q|(\varphi) = |p|(\varphi) \leftrightarrow |q|(\varphi)$

4° $|\exists x q|(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ 存在 φ 的 x 变通 φ' 使 $|q|(\varphi') = 1$

2.3 闭式的语义特征

命题 2.2 设 M 是 K 的解释域, $\varphi, \psi \in \Phi_M$.

1° 若对项 t 中的任一变元 x 都有 $\varphi(x) = \psi(x)$, 则 $\varphi(t) = \psi(t)$

2° 若对公式 p 中任一自由出现的变元 x 都有 $\varphi(x) = \psi(x)$, 则 $|p|(\varphi) = |p|(\psi)$

定义 2.5 (公式在解释域中恒真与恒假) 公式 p 在解释域 M 中恒真, 记作 $|p|_M = 1$, 是指对任一 $\varphi \in \Phi_M$, $|p|(\varphi) = 1$; 公式 p 在解释域 M 中恒假, 记作 $|p|_M = 0$, 是指对任一 $\varphi \in \Phi_M$, $|p|(\varphi) = 0$.

定理 2.3 对给定的解释域 M, 任一闭式 p 在 M 中恒真与恒假二者必居其一: 或 $|p|_M = 1$, 或 $|p|_M = 0$.

命题 2.4 $|p|_M = 1 \quad \Leftrightarrow |\forall x p|_M = 1$

定义 2.6 (全称闭式) 设 $x_{i_1},\cdots,x_{i_n}$ 是在 p 中自由出现的全部变元, 则

$$\forall x_{i_1}\cdots\forall x_{i_n}p$$

叫做 p 的全称闭式.

命题 2.5 设 p' 是 p 的全称闭式, 则

$$|p|_M=1 \quad \Leftrightarrow \quad |p'|_M=1$$

命题 2.6 $|p|_M \quad \Rightarrow \quad |\forall xp|_M=0$

推论 2.1 $|p|_M \quad \Rightarrow \quad |p'|_M=0$, 这里 p' 是 p 的全称闭式.

命题 2.7 $|p|_M=1$ 且 $|p\to q|_M=1 \quad \Rightarrow \quad |q|_M=1$