1 命题演算

Fr4nk1in-USTC
中国科学技术大学计算机学院

更新：2022 年 4 月 1 日

1 命题联结词与真值表

1.1 命题

- 命题: 判断结果惟一的陈述句.
- 命题的真值: 判断的结果.
  约定: 一命题若为真, 则它的真值为 1; 若为假, 则它的真值为 0.

本章使用字母 p, q, r 等用来表示命题.

1.2 命题联结词

1.2.1 否定词

符号 “$\neg$”, 给定命题 p, $\neg p$ 表示 p 的否定.
关系 $\neg p$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 为假.
真值表

p	$\neg p$
1	0
0	1

1.2.2 合取词

符号 “$\wedge$”, 由命题 p, q 用 $\wedge$ 连接得到新命题 $p \wedge q$.
含义 相当于中文的 ‘‘与” 或 ‘‘且”.
关系 $p \wedge q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 与 q 皆为真.

真值表

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.3 析取词

符号 "$\vee$", 由命题 p, q 用 $\vee$ 连接得到新命题 $p \vee q$.

含义 相当于中文的 ''或''.

关系 $p \vee q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 或 q 皆为真.

真值表

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.4 蕴含词

符号 "$\to$", 由命题 p, q 用 $\to$ 连接得到新命题 $p \to q$, p 叫做该式的 ''前件'', q 叫做该式的 ''后件''.

含义 相当于中文的 ''如果... 那么...'', 但是有所差别, 两个命题之间可以没有因果关系.

关系 $p \to q$ 为假 $\Leftrightarrow$ p 为真且 q 为假.

真值表

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.2.5 等价词 (或等值词)

符号 "$\leftrightarrow$", 由命题 p, q 用 $\leftrightarrow$ 连接得到新命题 $p \leftrightarrow q$.

含义 相当于中文的 ''当且仅当''.

关系 $p \leftrightarrow q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 与 q 同为真或同为假.

真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.3 复合命题的真值表

复合命题的真假如何由构成它的支命题的真假来确定?

例 1.1 $(\neg p)\wedge q$ 的真值表

$(\neg$	$p)$	$\wedge$	p
0	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

列表过程为

1. 将支命题所有可能的真值组合分别在对应的支命题下方一一写出. 在例 1.1 中共有四种 $(1,1;1,0;0,1;0,0)$.
2. 按命题中联结词的作用顺序将每次作用所得的真值写在该联结词下方.
3. 最后得到的一列结果写在最后一个联结词 (例 1.1 为 $\wedge$) 下, 并用竖线标出.

在例 1.1 中, 只有当 (p,q) 取真值 $(0,1)$ 时命题才为真. 所以我们称 $(0,1)$ 是 $(\neg p)\wedge q$ 的 "成真指派", 其他三种指派均为 "成假指派".

1.4 联结词之间的关系

例 1.2 复合命题 $(p\vee q)\leftrightarrow((\neg p)\to q)$ 的真值表是 不论 (p,q) 取哪个真值, 命题都为真, 这样的命

$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$((\neg$	$p)$	$\to$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0

题是永真式.

包括例 1.2 中的永真式, 我们还有下面的三个永真式.

1. $(p\vee q)\leftrightarrow((\neg p)\to q)$
2. $(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(p\to(\neg q))$
3. $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\to q)\wedge(q\to p))$

这说明五个联结词是相互关联的. 联结词 $\wedge,\vee,\leftrightarrow$ 可用 $\neg$ 和 $\to$ 取代.

2 命题演算的建立

命题演算的形式化, 公理化.

2.1 命题演算公式集

定义 2.1 (命题演算公式) 我们采用的字母表由下面两类符号组成.

(1) 两个运算符: $\neg$ 和 $\to$. 前者为一元运算符, 后者为二元运算符.

(2) 命题变元的可数序列:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

公式的形成规则如下: (归纳定义)

(i) 命题变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中的每一个都是公式.

(ii) 若 p, q 是公式, 则 $\neg p, p \to q$ 都是公式.

(iii) 任一公式皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

定义 2.2 (公式集的分层) 记 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 用 $L(X)$ 表示所有公式构成的集.

公式集 $L(X)$ 可进行如下分层:

$$L(X) = L_0 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_n \cup \cdots$$

其中

$$\begin{aligned}
L_0 &= X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}, \\
L_1 &= \{\neg x_1, \neg x_2, \cdots, \neg x_n, \cdots, \\
&\qquad x_1 \to x_1, x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, \cdots, x_i \to x_j, \cdots\}, \\
L_2 &= \{\neg(\neg x_1), \neg(\neg x_2), \cdots, \neg(\neg x_n), \cdots, \\
&\qquad x_1 \to (\neg x_1), (\neg x_1) \to x_1, \cdots, \\
&\qquad x_1 \to (x_1 \to x_1), (x_1 \to x_1) \to x_1, \cdots\} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

有如下性质

(1) i 层 L_i 中公式由命题变元经过 i 次运算得来.

(2) (分层性) 不同层次之间没有公共元素.

(3) 从层 L_2 开始出现了括号.

(4) $L_i(X)$ 是可数集, $L(X)$ 是可数集.

2.2 命题演算 L

定义 2.3 (命题演算 L) 命题变元集 $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 上的命题演算 L 是指带有下面规定的 "公理" 和 "证明" 的命题代数 $L(X)$:

(1) "公理"

取 $L(X)$ 的具有以下形状的公式作为 "公理":

(L1) $p \to (q \to p)$ (肯定后件律)

(L2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (q \to r))$ (蕴含词分配律)

(L3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ (换位律)

其中 $p, q, r \in L(X)$

(2) "证明"

设 $\Gamma \subseteq L(X), p \in L(X)$. 当我们说"公式 p 是从公式集 Γ 可证的", 是指存在着 $L(X)$ 的公式的有序序列 $p_1, \cdots, p_n$, 其中尾项 $p_n = p$, 且每个 $p_k (k = 1, \cdots, n)$ 满足:

(i) $p_k \in \Gamma$, 或

(ii) p_k 是"公理", 或

(iii) 存在 $i, j < k$ 使 $p_j = p_i \to p_k$

具有上述性质的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 的"证明".

定义 2.4 (语法推论) (1) 如果公式 p 从公式集 Γ 可证, 那么我们写 $\Gamma \vdash p$, 必要时也可写成 $\Gamma \vdash_L p$, 这时 Γ 中的公式叫做"假定", p 叫做假定集 Γ 的语法推论.

(2) 若 $\varnothing \vdash p$, 则称 p 是 L 的"定理", 记为 $\vdash p$. p 在 L 中从 $\varnothing$ 的证明 $p_1, \cdots, p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明.

(3) 在一个证明中, 当 $p_j = p_i \to p_k$ $(i, j < k)$ 时, 就说 p_k 由 $p_i, p_i \to p_k$ 使用假言推理 (Modus Ponens) 这条推理规则而得, 或简单地说"使用 MP 而得".

性质 2.1 1° 若 p 是 L 的公理, 则 $\Gamma \vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立.

2° 若 $\vdash p$, 则 $\Gamma \vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立.

3° 若 $p \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash p$.

4° $\{p, p \to q\} \vdash q$.

5° 若 $\Gamma \vdash p_n$, 且已知 $p_1, \cdots, p_n$ 是 p_n 从 Γ 的证明, 则当 $1 \leq k \leq n$ 时, 有 $\Gamma \vdash p_k$, 且 $p_1, \cdots, p_k$ 是 p_k 从 Γ 的证明.

6° 若 Γ 是无限集, 且 $\Gamma \vdash p$, 则存在 Γ 的有限子集 Δ 使 $\Delta \vdash p$.

命题 2.1 (同一律) $\vdash p \to p$

命题 2.2 (否定前件律) $\vdash \neg q \to (q \to p)$

定义 2.5 (无矛盾公式集) 如果对任何公式 q, $\Gamma \vdash q$ 和 $\Gamma \vdash \neg q$ 二者都不同时成立, 就称公式集 Γ 是无矛盾公式集, 否则称 Γ 为有矛盾公式集.

命题 2.3 若 Γ 是有矛盾公式集, 则对 L 的任一公式 p, 都有 $\Gamma \vdash p$.

2.3 演绎定理

定理 2.4 (演绎定理) $\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$

引理 2.5 (假设三段论) $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$

假设三段论 (Hypothetical Syllogism) 简称 HS.

命题 2.6 (否定肯定律) $\vdash (\neg p \to p) \to p$

2.4 反证律与归谬律

定理 2.7 (反证律)

$$\left.\begin{aligned}\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q\\ \Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q\end{aligned}\right\}\Rightarrow\Gamma\vdash p$$

定理 2.8 (归谬律)

$$\left.\begin{aligned}\Gamma\cup\{p\}\vdash p\\ \Gamma\cup\{p\}\vdash\neg p\end{aligned}\right\}\Rightarrow\Gamma\vdash p$$

推论 2.1 (第二双重否定律) 1° $\{p\}\vdash\neg\neg p$

2° $\vdash p\to\neg\neg p$

2.5 常用重要结论

$\vdash p\to p$ (同一律)

$\vdash\neg q\to(q\to p)$ (否定前件律)

$\vdash(\neg p\to p)\to p$ (否定肯定律)

$\vdash(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ (HS, 假设三段论)

$\vdash\neg\neg p\to p$ (双重否定律)

$\vdash p\to\neg\neg p$ (第二双重否定律)

$\vdash(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ (换位律)

2.6 析取, 合取与等值

在 $\{\neg,\to\}$ 型代数 $L(X)$ 中, 还可以定义三个新的二元运算 $\vee$ (析取), $\wedge$ (合取) 及 $\leftrightarrow$ (等值) 如下:

$$p\vee q=\neg p\to q$$

$$p\wedge q=\neg(p\to\neg q)$$

$$p\leftrightarrow q=(p\to q)\wedge(q\to p)$$

命题 2.9 (析取相关) 1° $\vdash p\to(p\vee q)$

2° $\vdash q\to(p\vee q)$

3° $\vdash(p\vee q)\to(q\vee p)$

4° $\vdash(p\vee p)\to p$

5° $\vdash\neg p\vee p$ (排中律)

命题 2.10 (合取相关) 1° $\vdash(p\wedge q)\to p$

2° $\vdash(p\wedge q)\to q$

3° $\vdash(p\wedge q)\to(q\wedge p)$

4° $\vdash p\to(p\wedge p)$

5° $\vdash p \to (q \to (p \wedge q))$

6° $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ (矛盾律)

命题 2.11 (等值相关) 1° $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$

2° $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$

3° $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

4° $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

5° $\vdash (p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

命题 2.12 (De. Morgan 律) 1° $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

2° $\vdash (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

3 命题演算的语义

3.1 真值函数

记 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

定义 3.1 (真值函数) 函数 $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ (即 $\mathbb{Z}_2$ 上的 n 元运算) 叫做 n 元真值函数.

例 3.1 (一元真值函数) 一元真值函数共有 4 个, 分别用 f_1, f_2, f_3, f_4 表示:

$v \in \mathbb{Z}_2$	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

f_1 和 f_4 是常值函数. f_2 是恒等函数, $f_2(v) = v$. f_3 叫做 “非” 运算或 “否定” 运算, 也用 $\neg$ 表示: $\neg v = f_3(v) = 1 - v$.

例 3.2 (二元真值函数) 二元真值函数一共有 16 个, 可将它们的函数值列成下表:

v_1	v_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

f_4 和 f_6 是坐标函数, $f_4(v_1, v_2) = v_1$, $f_6(v_1, v_2) = v_2$. f_5 叫做 “蕴含” 运算, 也用符号 $\to$ 表示. 它的计算公式为:

$$v_1 \to v_2 = f_5(v_1, v_2) = 1 - v_1 + v_1 v_2$$

可以看出, $\mathbb{Z}_2$ 也是一种 $\{\neg, \to\}$ 型代数, 是与 $L(X)$ 不同的另一种命题代数.

由上面的表很容易验证以下公式成立:

公式 1 $\neg\neg v = v$

公式 2 $1 \to v = v$

公式 3 $v \to 1 = 1$

公式 4 $v \to 0 = \neg v$

公式 5 $0 \to v = 1$

现将 16 个二元真值函数中的 f_2, f_8 及 f_7 分别用 $\vee, \wedge$ 和 $\leftrightarrow$ 表示, 容易验证:

公式 6 $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$

公式 7 $v_1 \wedge v_2 = \neg(v_1 \to \neg v_2)$

公式 8 $v_1 \leftrightarrow v_2 = (v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \to v_1)$

命题 3.1 任一真值函数都可用一元运算 $\neg$ 和二元运算 $\to$ 表示出来.

3.2 赋值与语义推论

现在要在 $L(X)$ 和 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 这两种命题代数之间建立起适当的联系. 注意 $L(X)$ 与 $\mathbb{Z}_2$ 之间的差异, 比如在 $L(X)$ 中 $\neg\neg x \neq x$, 但在 $\mathbb{Z}_2$ 中 $\neg\neg v = v$.

定义 3.2 (赋值) 具有 "保运算性" 的映射 $v : L(X) \to \mathbb{Z}_2$ 叫做 $\mathbb{Z}_2$ 的赋值. 映射 v 具有保运算性, 是指对任意 $p, q \in L(X)$, v 满足条件:

(1) $v(\neg p) = \neg v(p)$

(2) $v(p \to q) = v(p) \neg v(q)$

对任意公式 $p \in L(X)$, $v(p)$ 叫做 p 的真值. 同样, 具有保运算性的映射 $v : L(X_n) \to \mathbb{Z}_2$ 叫做 $L(X_n)$ 的赋值. $(X_n = \{x_1, \cdots x_n\})$.

命题 3.2 设 $v : L(X) \to \mathbb{Z}_2$ 是一个赋值, 则 v 对 $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ 也具有保运算性, 即对任意 $p, q \in L(X)$, 有

$$v(p \vee q) = v(p) \vee v(q), \ v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q), \ v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q)$$

定义 3.3 (真值指派) 映射 $v_0 : X \to \mathbb{Z}_2$ 叫做命题变元的真值指派. 若把其中的 X 换成 $X_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$, 则 v_0 叫做 $x_1, \cdots, x_n$ 的真值指派.

定理 3.3 命题变元的任一真值指派, 必可唯一地扩张成 $L(X)$ 的赋值; $x_1, \cdots, x_n$ 的任一真值指派, 必可唯一地扩张成 $L(X_n)$ 的赋值.

命题 3.4 设 $m \geq n$, v 是 $L(X_m)$ 或 $L(X)$ 的赋值. 若 v 满足 $v(x_1) = v_1, \cdots, v(x_n) = v_n$, 则 $L(X_n)$ 的任一公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 的真值是

$$v(p(x_1, \cdots, x_n)) = p(v_1, \cdots, v_n)$$

其中 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是用 $v_1, \cdots, v_n$ 分别代换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得的结果.

- $L(X_n)$ 的公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 作为 $L(X)$ 的成员或 $L(X_m)$ 的成员 $(m > n)$, 其真值只与其所含命题变元的真值指派有关, 而与其他变元的真值指派无关. 这是用真值表研究公式真值的基础.

- 命题变元表示简单命题, 其他层次的公式表示复合命题. (只有) 命题变元的真值可随意指定, 且在命题变元真值指定之后, 涉及这些命题变元的所有公式的真值也随之唯一确定.
- 设 $p \in L(X_n)$. 任取 $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{Z}_2$, 将 $v_1, \cdots, v_n$ 分别指派给 $x_1, \cdots, x_n$, 这时 p 就有了唯一确定的真值 $v(p(x_1, \cdots, x_n)) = p(v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{Z}_2$. 将此值对应于 $v_1, \cdots, v_n$ 的函数值, 就得到一个由公式 p 所确定的真值函数, 简称 p 的真值函数.
- 公式的真值表就是该公式的真值函数的函数值表.

定义 3.4 (永真式) 若公式 p 的真值指派取常数 1, 则 p 叫做命题演算 L 的永真式或重言式 (Tautology), 记作 $\vDash p$.

定理 3.5 (代换定理) 设 $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$, 而 $p_1, \cdots, p_n \in L(X_n)$. $p(p_1, \cdots, p_n)$ 是用 $p_1, \cdots, p_n$ 分别全部替换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得结果. 则有

$$\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \vDash p(p_1, \cdots, p_n)$$

命题 3.6 L 的所有公理都是永真式, 即对任意的 $p, q, r \in L(X)$,

1° $\vDash p \to (q \to p)$

2° $\vDash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

3° $\vDash (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

以下是常用的永真式.

$$\vDash p \to p \tag{同一律}$$

$$\vDash \neg p \vee p \tag{排中律}$$

$$\vDash \neg(\neg p \wedge p) \tag{矛盾律}$$

$$\vDash ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \tag{析取结合律}$$

$$\vDash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) \tag{析取交换律}$$

$$\vDash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \tag{合取结合律}$$

$$\vDash (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \tag{合取交换律}$$

$$\vDash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \tag{分配律}$$

$$\vDash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \tag{分配律}$$

$$\vDash \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \tag{De. Morgan 律}$$

$$\vDash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \tag{De. Morgan 律}$$

定义 3.5 (永假式与可满足公式) 若 $\neg p$ 是永真式, 则 p 叫做永假式. 非永假式叫做可满足公式.

定义 3.6 (语义推论) 设 $\Gamma \subseteq L(X)$, $p \in L(X)$. 如果 Γ 中所有公式的任何公共成真指派都一定是公式 p 的成真指派, 则说 p 是公式集 Γ 的语义推论, 记作 $\Gamma \vDash p$.

立即有以下结论

1° $\varnothing \vDash p \Leftrightarrow L(X)$ 的任一赋值 v 都使 $v(p) = 1 \Leftrightarrow \vDash p$

2° $p \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash p$

3° $\vDash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

命题 3.7 $\{\neg p\} \vDash p \to q$; $\{q\} \vDash p \to q$

命题 3.8 $\Gamma \vDash p$ 且 $\Gamma \vDash p \to q \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash q$

命题 3.9 (语义演绎定理) $\Gamma \cup \{p\} \vDash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vDash p \to q$

更一般地, 有

$$\{p_1, \cdots, p_n\} \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad \vDash (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to p$$

4 命题演算 L 的可靠性与完全性

开始证明命题演算 L 的语法推论和语义推论的一致性: $\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p$

定理 4.1 (L 的可靠性) $\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

推论 4.1 (L 的无矛盾性) 命题演算 L 是无矛盾的, 即不存在公式 p 同时使 $\vdash p$ 和 $\vdash \neg p$ 成立.

定义 4.1 (公式集的完备性) 设 $\Gamma \subseteq L(X)$. Γ 是完备的, 意指对任一公式 p, $\Gamma \vdash p$ 与 $\Gamma \vdash \neg p$ 必有一个成立.

定理 4.2 (L 的完全性) $\Gamma \vDash p \Rightarrow \Gamma \vdash p$

命题 4.3 无矛盾公式集必有无矛盾的完备扩张.

下面来讨论命题演算 L 的可判定性.

1° L 的语义可判定性

我们说命题演算 L 是语义可判定的, 意思是说存在算法可用来确定 L 中任给的公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是不是永真式.

这样的算法是存在的: 任给 L 中的公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$, 我们来一一计算它的真值函数的函数值 $p(v_1, \cdots, v_n)$, 如果对所有 $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{Z}_2$, 都有 $p(v_1, \cdots, v_n) = 1$, 则 p 是永真式, 否则 p 不是永真式.

2° L 的语法可判定性

我们说命题演算 L 是语法可判定的, 意思是说存在算法可用来确定 L 的任意公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是不是 L 的定理.

这样的算法是存在的: 根据 L 的可靠性和完全性, 看公式 p 是不是定理, 就看它是不是永真式.

L 的语义可判定导致了 L 的语法可判定.

5 命题演算的其他课题

5.1 等值公式与对偶律

定义 5.1 (等值公式) p 与 q 等值, 是指 $p \leftrightarrow q$ 为永真式.

命题 5.1

1° $\vDash p \leftrightarrow p$ (等值的反身性)

2° $\vDash p \leftrightarrow q \ \Rightarrow \vDash q \leftrightarrow p$ (等值的对称性)

3° $\vDash p \leftrightarrow q$ 及 $\vDash q \leftrightarrow r \ \Rightarrow \vDash p \leftrightarrow r$ (等值的可递性)

命题 5.2

1° $\vDash p \leftrightarrow q \ \Rightarrow \vDash \neg p \leftrightarrow \neg q$

2° $\vDash p \leftrightarrow p'$ 及 $\vDash q \leftrightarrow q' \ \Rightarrow \vDash (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q')$

定理 5.3 (子公式等值可替换性) 设 q 是 p 的子公式: $p = \cdots q \cdots$, 用公式 q' 替换 p 中的子公式 q (一处替换) 所得结果记为 $p' = \cdots q' \cdots$. 那么

$$\vDash q \leftrightarrow q' \ \Rightarrow \vDash p \leftrightarrow p'$$

定义 5.2 (公式的对偶) 设公式 p 已被写成只含有命题变元和运算 $\neg, \vee, \wedge$ 的形式. 把 p 中的命题变元全部改为各自的否定, 把 $\vee$ 全改为 $\wedge$, 把 $\neg$ 全改为 $\vee$, 这样得到的公式 p^* 叫做公式 p 的对偶.

定理 5.4 (对偶律) $\vDash p^* \leftrightarrow \neg p$, 其中 p^* 是 p 的对偶.

推论 5.1 (推广的 De.Morgan 律) $p_1, \cdots, p_n$ 是任意公式,

1° $\vDash (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n) \leftrightarrow \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n)$

2° $\vDash (\neg p_1 \wedge \cdots \wedge \neg p_n) \leftrightarrow \neg(p_1 \vee \cdots \vee p_n)$

5.2 析取范式与合取范式

定义 5.3 (基本析取式与基本合取式) 形为 $y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n$ 和形如 $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ 的公式分别叫做基本析取式和基本合取式, 其中每个 y_i 是命题变元或命题变元的否定.

定义 5.4 (析取范式与合取范式) 形为 $\vee_{i=1}^m \left(\wedge_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)$ 的公式叫做析取范式, 形为 $\wedge_{i=1}^m \left(\vee_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)$ 的公式叫做合取范式, 其中每个 y_{ij} 是某个命题变元 x_k 或它的否定 $\neg x_k$.

析取范式就是以若干基本合取式为析取支的析取式; 合取范式就是以若干基本析取式为合取支的合取式.

给出一个公式, 要找出与它等值的析取范式或合取范式, 大致可采取以下步骤:

1° 消去 $\to$ 与 $\leftrightarrow$. 先用 $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ 消去 $\leftrightarrow$, 再用 $\vDash (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 消去 $\to$.

2° 把否定号 $\neg$ 等值变换到命题变元之前, 用到以下几个等值式.

$$\vDash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\vDash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\vDash \neg\neg p \leftrightarrow p$$

3° 利用交换律, 结合律及分配律作等值变换, 直到得出所需要的形式为止.

定义 5.5 (主析取范式与主合取范式) $L(X)$ 中的主析取范式 (主合取范式) 是这样的析取范式 (合取范式), 在它的每个析取支 (合取支) 中, 每个命题变元 $x_1, \cdots, x_n$ (带否定号或不带否定号) 按下标由小到大的次序都出现且都只出现一次.

定理 5.5 每个非永假式必有与他等值的主析取范式.

定理 5.6 每个非永真式必等值于一主合取范式.

5.3 运算的完全组

定义 5.6 (运算的完全组) $\mathbb{Z}_2$ 上的一些运算构成完全组, 是指任一真值函数都可用该运算组中的运算表示出来.

显然, $\{\neg, \rightarrow\}$ 是完全组.

命题 5.7 $\{\neg, \vee\}$ 和 $\{\neg, \wedge\}$ 都是运算完全组.

命题 5.8 $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是运算完全组.

命题 5.9 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完全组.

推论 5.2 独元集 $\{\neg\}$ 不是完全组.

推论 5.3 $\{\neg, \not\leftrightarrow\}$ 不成完全组, 其中 $v_1 \not\leftrightarrow v_2 = \neg(v_1 \leftrightarrow v_2)$

定义 5.7 ("与非" 运算和 "或非" 运算) 与非运算用算符 "$|$" 表示, 或非运算用算符 "$\downarrow$" 表示. 它们的定义式为

$$v_1 | v_2 = \neg(v_1 \wedge v_2)$$
$$v_1 \downarrow v_2 = \neg(v_1 \vee v_2)$$

命题 5.10 独元集 $\{|\}$ 和独元集 $\{\downarrow\}$ 都是完全组.

命题 5.11 除了 $|, \downarrow$ 外, 没有其他二元运算单独构成完全组.

5.4 应用举例

在应用中, $\Gamma \vdash p$ 或 $\Gamma \vDash p$ 中假定集 Γ 常常是有限集. 当我们需要从语法上证明 $\{r_1, \cdots, r_n\} \vdash p$ 时, 显而易见可以改为从语法上检查 $(r_1 \wedge \cdots \wedge r_n) \rightarrow p$ 是不是永真式. 为此, 只需要写出真值表就可以了. 但是当命题变元的个数比较多时, 写真值表就可能行不通, 需要灵活采用其他的一些特殊方法.

例 5.1 检查下面命题的正确性:

$$\{\neg x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow (x_3 \wedge x_4), x_4 \rightarrow x_2\} \vdash x_2 \vee x_3$$

要检查它的正确性, 可以从语义上进行, 检查 $\neg x_1 \vee x_2, x_1 \to (x_3 \wedge x_4), x_4 \to x_2$ 这三个公式的所有公共成真指派是否都是 $x_2 \vee x_3$ 的成真指派. 为此, 只用检查是否存在使前三个公式为真而使 $x_2 \vee x_3$ 为假的指派, 即下面的真值方程组 (1) ~ (4) 是否有解:

(1) $\neg v_1 \vee v_2 = 1$

(2) $v_1 \to (v_3 \wedge v_4) = 1$

(3) $v_4 \to v_2 = 1$

(4) $v_2 \vee v_3 = 0$

由 (4) 式可得:

(5) $v_2 = 0$, 且

(6) $v_3 = 0$

由 (3) 式与 (5) 式得

(7) $v_4 = 0$

由 (1) 式与 (5) 式得

(8) $v_1 = 0$

将 (6), (7), (8) 式代入 (2) 式的左边, 得

$$v_1 \to (v_3 \wedge v_4) = 0 \to (0 \wedge 0) = 1$$

即 $(0, 0, 0, 0)$ 是方程组的解, 所以题中的命题不成立.