

## 2 谓词演算

Fr4nk1in-USTC

中国科学技术大学计算机学院

更新：2022 年 4 月 8 日

### 1 谓词演算的建立

#### 1.1 项与原子公式

我们从四个集出发

- 个体变元集  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  是可数集. 个体变元  $x_i$  可用来表示某个个体对象. 有时为了方便, 我们也用  $x, y, z$  等来表示个体变元.
- 个体常元集  $C = \{c_1, c_2, \dots\}$  是可数集, 也可以是有限集 (包括空集). 个体常元  $c_i$  可用来表示确定的个体对象.
- 运算集  $F = \{f_1^1, f_2^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_1^3, f_2^3, \dots\}$  是可数集, 也可以是有限集 (包括空集).  $f_i^n$  叫做第  $i$  个  $n$  元运算符或函数词, 用来表示某个体对象集上的  $n$  元运算. 注意符号  $f_i^n$  的上标  $n$  是该运算符的元数.
- 谓词集  $R = \{R_1^1, R_2^1, \dots, R_1^2, R_2^2, \dots, R_1^3, R_2^3, \dots\}$  是可数集, 也可以是有限集, 但不能是空集.  $R_i^n$  叫做第  $i$  个  $n$  元谓词, 用来表示某个体对象集上的  $n$  元关系. 注意符号  $R_i^n$  的上标  $n$  是该谓词的元数.

用不同的  $C, F$  和  $R$  可以构造出不同的谓词演算系统.

**定义 1.1 (项集  $T$ )** 项的形成规则是:

- 个体变元  $x_i (\in X)$  和个体常元  $c_i (\in C)$  都是项.
- 若  $t_1, \dots, t_n$  是项, 则  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  也是项. ( $f_i^n \in F$ )
- 任一项皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

当运算符集  $F = \emptyset$  时, 规定项集  $T = X \cup C$ .

当  $F \neq \emptyset$  时, 项集  $T$  可如下分层

$$T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k \dots$$

其中

$$\begin{aligned}
T_0 &= X \cup C = \{x_1, x_2, \dots, c_1, c_2, \dots\}, \\
T_1 &= \{f_1^1(x_1), f_1^1(x_2), \dots, f_1^1(c_1), \dots \\
&\quad f_2^1(x_1), \dots, f_2^1(c_1), \dots \\
&\quad \dots\dots \\
&\quad f_1^2(x_1, x_1), \dots \\
&\quad \dots\dots \\
&\quad f_1^3(x_1, x_1, x_1), \dots \\
&\quad \dots\dots\}, \\
T_2 &= \{f_1^1(f_1^1(x_1)), \dots, f_1^2(x_1, f_1^1(x_1))\}, \\
&\quad \dots\dots
\end{aligned}$$

第  $k$  层项由第零层项经  $k$  次运算而来. 项集  $T$  是由  $X \cup C$  形成.  $F$  型代数.

**定义 1.2 (闭项)** 只含个体常元的项叫做闭项.

**定义 1.3 (原子公式集)** 原子公式集是指

$$Y = \bigcup_{i,n} \left( \{R_i^n\} \times \underbrace{T \times \dots \times T}_{n \uparrow T} \right)$$

即

$$Y = \{(R_i^n, t_1, \dots, t_n) | R_i^n \in R, t_1, \dots, t_n \in T\}$$

以后常把原子公式  $(R_i^n, t_1, \dots, t_n)$  写成  $R_i^n(t_1, \dots, t_n)$ .

原子公式是用来表示命题的最小单位, 项是构成原子公式的基础.

## 1.2 谓词演算公式集

建立谓词演算公式集前, 先列出我们所采用的这种形式语言的字母表如下:

- 个体变元  $x_1, x_2, \dots$  (可数个)
- 个体常元  $c_1, c_2, \dots$  (可数个或有限个)
- 运算符  $f_1^1, f_2^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots$  (可数个或有限个)
- 谓词  $R_1^1, R_2^1, \dots, R_1^2, R_2^2, \dots$  (可数个或有限个, 至少一个)
- 联结词  $\neg, \rightarrow$
- 全称量词  $\forall$
- 左右括号, 逗号 “(”, “)”, “,”

谓词演算公式的形成过程是:

- (i) 每个原子公式是公式.
- (ii) 若  $p, q$  是公式, 则  $\neg p, p \rightarrow q, \forall x_i p (i = 1, 2, \dots)$  都是公式.

(iii) 任一公式皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

用  $K(Y)$  表示谓词演算全体公式的集, 它是一个可数集.  $K(Y)$  也具有分层性, 它的零层由原子公式组成, 第  $k$  层公式由原子公式经  $k$  次运算而来.

还可在  $K(Y)$  上定义新的运算  $\vee, \wedge, \leftrightarrow$  及  $\exists x_i$  (存在量词运算):

$$p \vee q = \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\exists x_i p = \neg \forall x_i \neg p$$

注意  $\forall x(p \rightarrow q)$  和  $\forall x p \rightarrow q$  的区别, 前者  $\forall x$  的作用范围 (简称“范围”) 是  $p \rightarrow q$ , 而后者是  $p$ .

**定义 1.4 (变元的自由出现与约束出现)** 在一个公式中, 个体变元  $x$  的出现如果不是在  $\forall x$  中或  $\forall x$  的范围中, 则叫做自由出现, 否则叫做约束出现.

**定义 1.5** 公式若不含自由出现的变元, 则叫做闭式.

**例 1.1** 在  $\forall x_1(R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 R_2^1(x_2))$  中,  $x_1$  约束出现两次,  $x_2$  约束出现两次且自由出现一次. 所以公式不是闭式.

**定义 1.6 (项  $t$  对公式  $p$  中变元  $x$  是自由的)** 用项  $t$  去代换公式  $p$  中自由出现的个体变元  $x$  时, 若在代换后的新公式里,  $t$  的变元都是自由的, 则说  $t$  对  $p$  中  $x$  是可自由代换的, 简称  $t$  对  $p$  中  $x$  是可代换的, 或简称  $t$  对  $p$  中  $x$  是自由的.

换句话说, 用项  $t$  去代换公式  $p$  中自由出现的个体变元  $x$  时, 若在代换后的新公式里, 若  $t$  中有变元在代换后受到约束, 则说  $t$  对  $p$  中  $x$  是“不自由的”(“不可自由代换的”, “不可代换的”).

下面两种情形,  $t$  对  $p$  中  $x$  是自由的:

1°  $t$  是闭项

2°  $x$  在  $p$  中不自由出现

在任何公式中, 项  $x_i$  对  $x_i$  自己总是自由的.

定义 1.6 的另一种说法是: 若对项  $t$  中所含任一变元  $y$ ,  $p$  中所有出现的某变元  $x$  全都不出现在  $p$  中  $\forall y$  的范围内, 则说  $t$  对  $p$  中  $x$  是自由的.

以后用  $p(t)$  表示用项  $t$  去代换公式  $p(x)$  中所有自由出现的变元  $x$  所得结果. (注意  $p(x)$  中的  $x$  是指公式中自由出现的  $x$ )

### 1.3 谓词演算 $K$

**定义 1.7 (谓词演算  $K$ )** 谓词演算  $K$  是指带有如下规定的“公理”和“证明”的公式集  $K(Y)$ :

1° “公理”

取  $K(Y)$  中以下形状的公式作为“公理”:

- (K1)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$   
 (K2)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$   
 (K3)  $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$   
 (K4)  $\forall x p(x) \rightarrow p(t)$ , 其中项  $t$  对  $p(x)$  中的  $x$  是自由的.  
 (K5)  $\forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \forall x q)$ , 其中  $x$  不在  $p$  中自由出现.  
 以上给出的五种公理模式中  $p, q, r, p(x)$  都是任意的公式.

2° “证明”

设  $p$  是某公式,  $\Gamma$  是某公式集.  $p$  从  $\Gamma$  可证, 记作  $\Gamma \vdash p$ , 是指存在着公式的有限序列  $p_1, \dots, p_n$ , 其中  $p_n = p$ , 且对每个  $k = 1, \dots, n$  有

- (i)  $p_k \in \Gamma$ , 或
- (ii)  $p_k$  为公理, 或
- (iii) 存在  $i, j < k$  使  $p_j = p_i \rightarrow p_k$  (此时说由  $p_i, p_i \rightarrow p_k$  使用 MP 得到  $p_k$ ), 或
- (iv) 存在  $j < k$ , 使  $p_k = \forall x p_j$ . 此时说由  $p_j$  使用 “Gen” (“推广”) 这条推理规则得到  $p_k$ .  $x$  叫做 Gen 变元 (Gen 是 Generalization 的缩写).

复合上述条件的  $p_1, \dots, p_n$  叫做  $p$  从  $\Gamma$  的 “证明”.  $\Gamma$  叫做假定集,  $p$  叫做  $\Gamma$  的语法推论.

若  $\emptyset \vdash p$ , 则  $p$  叫做  $K$  的定理, 记作  $\vdash p$ .

**定理 1.1** 设  $x_1, \dots, x_n$  是命题演算  $L$  的命题变元,  $p(x_1, \dots, x_n) \in L(X_n)$ , 我们有

$$\vdash_L p(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \vdash_K p(p_1, \dots, p_n)$$

其中  $p_1, \dots, p_n \in K(Y)$ ,  $p(p_1, \dots, p_n)$  是用  $p_1, \dots, p_n$  分别代换  $p(x_1, \dots, x_n)$  中的  $x_1, \dots, x_n$  所得结果.

**定理 1.2 (命题演算型永真式, 简称永真式)** 若  $p(x_1, \dots, x_n) \in L(X_n)$  是命题演算  $L$  中的永真式, 则对任意  $p_1, \dots, p_n \in K(Y)$ ,  $p(p_1, \dots, p_n)$  叫做  $K$  的命题演算型永真式, 简称永真式.

按照定理 1.1, 以下各式在  $K$  中仍然成立

- $\vdash p \rightarrow p$  (同一律)
- $\vdash \neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$  (否定前件律)
- $\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$  (否定肯定律)
- $\vdash \neg \neg p \rightarrow p$  (双重否定律)
- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$  (HS)

一公式集  $\Gamma$  是无矛盾的, 仍指对任何公式  $q$ ,  $\Gamma \vdash q$  与  $\Gamma \vdash \neg q$  两者不同时成立.

**命题 1.3**  $\Gamma$  有矛盾  $\Rightarrow K$  的任一公式从  $\Gamma$  可证.

**命题 1.4 ( $\exists_1$  规则)** 设项  $t$  对  $p(x)$  中的  $x$  自由, 则有

$$\vdash p(t) \rightarrow \exists x p(x)$$

**命题 1.5 (演绎定律)**

1° 若  $\Gamma \vdash p \rightarrow q$ , 则  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

2° 若  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ , 且证明中所用的 Gen 变元不在  $p$  中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就可得  $\Gamma \vdash p \rightarrow q$

**推论 1.1** 当  $p$  是闭式时, 有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \rightarrow q$$

**命题 1.6**  $\vdash \forall x(p \rightarrow q) \rightarrow (\exists xp \rightarrow \exists xq)$ , 除了  $x$  外不用其他 Gen 变元.

**定理 1.7 (反证律)** 若  $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$  及  $\neg q$ , 且所用 Gen 变元不在  $p$  中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得  $\Gamma \vdash p$

**定理 1.8 (归谬律)** 若  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$  及  $\neg q$ , 且所用 Gen 变元不在  $p$  中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得  $\Gamma \vdash \neg p$

**命题 1.9 ( $\exists_2$  规则)** 设  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ , 其证明中 Gen 变元不在  $p$  中自由出现, 且  $x$  不在  $q$  中自由出现, 那么有  $\Gamma \cup \{\exists xp\} \vdash q$ , 且除了  $x$  不增加其他 Gen 变元.

**命题 1.10** 对  $K$  中任意公式  $p, q, r$ , 有

$$1^\circ \vdash p \leftrightarrow p \quad (\text{自反性})$$

$$2^\circ \vdash p \leftrightarrow q \Rightarrow \vdash q \leftrightarrow p \quad (\text{对称性})$$

$$3^\circ \vdash p \leftrightarrow q \text{ 且 } \vdash q \leftrightarrow r \Rightarrow \vdash p \leftrightarrow r \quad (\text{可递性})$$

**定义 1.8 (可证等价)**  $p$  与  $q$  可证等价 (简称为等价), 指  $\vdash p \leftrightarrow q$  成立.

**命题 1.11**  $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \rightarrow q \text{ 且 } \Gamma \vdash q \rightarrow p$

**命题 1.12**

$$1^\circ \vdash \forall xp(x) \leftrightarrow \forall yp(y)$$

$$2^\circ \vdash \exists xp(x) \leftrightarrow \exists yp(y)$$

其中  $y$  不在  $p(x)$  中出现.

**命题 1.13**

$$1^\circ \vdash \neg \forall xp \leftrightarrow \exists x \neg p$$

$$2^\circ \vdash \neg \exists xp \leftrightarrow \forall x \neg p$$