2 谓词演算

Fr4nk1in-USTC
中国科学技术大学计算机学院

更新：2022 年 4 月 14 日

1 谓词演算的建立

1.1 项与原子公式

我们从四个集出发

- 个体变元集 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是可数集. 个体变元 x_i 可用来表示某个个体对象. 有时为了方便, 我们也用 x,y,z 等来表示个体变元.
- 个体常元集 $C=\{c_1,c_2,\cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集 (包括空集). 个体常元 c_i 可用来表示确定的个体对象.
- 运算集 $F=\{f_1^1,f_2^1,\cdots,f_1^2,f_2^2,\cdots,f_1^3,f_2^3,\cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集 (包括空集). f_i^n 叫做第 i 个 n 元运算符或函数词, 用来表示某个体对象集上的 n 元运算. 注意符号 f_i^n 的上标 n 是该运算符的元数.
- 谓词集 $R=\{R_1^1,R_2^1,\cdots,R_1^2,R_2^2,\cdots,R_1^3,R_2^3,\cdots\}$ 是可数集, 也可以是有限集, 但不能是空集. R_i^n 叫做第 i 个 n 元谓词, 用来表示某个体对象集上的 n 元关系. 注意符号 R_i^n 的上标 n 是该谓词的元数.

用不同的 C, F 和 R 可以构造出不同的谓词演算系统.

定义 1.1 (项集 T) 项的形成规则是:

(i) 个体变元 $x_i(\in X)$ 和个体常元 $c_i(\in C)$ 都是项.
(ii) 若 $t_1,\cdots,t_n$ 是项, 则 $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 也是项. ($f_i^n\in F$)
(iii) 任一项皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

当运算符集 $F=\varnothing$ 时, 规定项集 $T=X\cup C$.

当 $F\neq\varnothing$ 时, 项集 T 可如下分层

$$T=T_0\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k\cdots$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_0 =& X \cup C = \{x_1, x_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots\}, \\
T_1 =& \{f_1^1(x_1), f_1^1(x_2), \cdots, f_1^1(c_1), \cdots \\
& f_2^1(x_1), \cdots, f_2^1(c_1), \cdots \\
& \cdots\cdots \\
& f_1^2(x_1, x_1), \cdots \\
& \cdots\cdots \\
& f_1^3(x_1, x_1, x_1), \cdots \\
& \cdots\cdots\}, \\
T_2 =& \{f_1^1(f_1^1(x_1)), \cdots, f_1^2(x_1, f_1^1(x_1))\}, \\
& \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

第 k 层项由第零层项经 k 次运算而来. 项集 T 是由 $X \cup C$ 形成。F 型代数.

定义 1.2 (闭项) 只含个体常元的项叫做闭项.

定义 1.3 (原子公式集) 原子公式集是指

$$
Y = \bigcup_{i,n} \left(\{R_i^n\} \times \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n\text{ 个 }T} \right)
$$

即

$$
Y = \{(R_i^n, t_1, \cdots, t_n) | R_i^n \in R, t_1, \cdots, t_n \in T\}
$$

以后常把原子公式 $(R_i^n, t_1, \cdots, t_n)$ 写成 $R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$.

原子公式是用来表示命题的最小单位, 项是构成原子公式的基础.

1.2 谓词演算公式集

建立谓词演算公式集前, 先列出我们所采用的这种形式语言的字母表如下:

- 个体变元 $x_1, x_2, \cdots$ (可数个)
- 个体常元 $c_1, c_2, \cdots$ (可数个或有限个)
- 运算符 $f_1^1, f_2^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots$ (可数个或有限个)
- 谓词 $R_1^1, R_2^1, \cdots, R_1^2, R_2^2, \cdots$ (可数个或有限个, 至少一个)
- 联结词 $\neg, \rightarrow$
- 全称量词 $\forall$
- 左右括号, 逗号 "(", ")", ","

谓词演算公式的形成过程是:

(i) 每个原子公式是公式.

(ii) 若 p, q 是公式, 则 $\neg p, p \rightarrow q, \forall x_i p (i = 1, 2, \cdots)$ 都是公式.

(iii) 任一公式皆如此形成, 即皆由规则 (i), (ii) 的有限次使用形成.

用 $K(Y)$ 表示谓词演算全体公式的集, 它是一个可数集. $K(Y)$ 也具有分层性, 它的零层由原子公式组成, 第 k 层公式由原子公式经 k 次运算而来.

还可在 $K(Y)$ 上定义新的运算 $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ 及 $\exists x_i$ (存在量词运算):

$$p \vee q = \neg p \to q$$

$$p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$$\exists x_i p = \neg \forall x_i \neg p$$

注意 $\forall x(p \to q)$ 和 $\forall x p \to q$ 的区别, 前者 $\forall x$ 的作用范围 (简称 "范围") 是 $p \to q$, 而后者是 p.

定义 1.4 (变元的自由出现与约束出现) 在一个公式中, 个体变元 x 的出现如果不是在 $\forall x$ 中或 $\forall x$ 的范围中, 则叫做自由出现, 否则叫做约束出现.

定义 1.5 公式若不含自由出现的变元, 则叫做闭式.

例 1.1 在 $\forall x_1(R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_2^1(x_2))$ 中, x_1 约束出现两次, x_2 约束出现两次且自由出现一次. 所以公式不是闭式.

定义 1.6 (项 t 对公式 p 中变元 x 是自由的) 用项 t 去代换公式 p 中自由出现的个体变元 x 时, 若在代换后的新公式里, t 的变元都是自由的, 则说 t 对 p 中 x 是可自由代换的, 简称 t 对 p 中 x 是可代换的, 或简称 t 对 p 中 x 是自由的.

换句话说, 用项 t 去代换公式 p 中自由出现的个体变元 x 时, 若在代换后的新公式里, 若 t 中有变元在代换后受到约束, 则说 t 对 p 中 x 是 "不自由的" ("不可自由代换的", "不可代换的").

下面两种情形, t 对 p 中 x 是自由的:

1° t 是闭项

2° x 在 p 中不自由出现

在任何公式中, 项 x_i 对 x_i 自己总是自由的.

定义 1.6 的另一种说法是: 若对项 t 中所含任一变元 y, p 中所有出现的某变元 x 全都不出现在 p 中 $\forall y$ 的范围内, 则说 t 对 p 中 x 是自由的.

以后用 $p(t)$ 表示用项 t 去代换公式 $p(x)$ 中所有自由出现的变元 x 所得结果. (注意 $p(x)$ 中的 x 是指公式中自由出现的 x)

1.3 谓词演算 K

定义 1.7 (谓词演算 K) 谓词演算 K 是指带有如下规定的 "公理" 和 "证明" 的公式集 $K(Y)$:

1° "公理"

取 $K(Y)$ 中以下形状的公式作为 "公理":

(K1) $p \to (q \to p)$

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$, 其中项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的.

(K5) $\forall x(p \to q) \to (p \to \forall x q)$, 其中 x 不在 p 中自由出现.

以上给出的五种公理模式中 $p, q, r, p(x)$ 都是任意的公式.

2° "证明"

设 p 是某公式, Γ 是某公式集. p 从 Γ 可证, 记作 $\Gamma \vdash p$, 是指存在着公式的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$, 其中 $p_n = p$, 且对每个 $k = 1, \cdots, n$ 有

(i) $p_k \in \Gamma$, 或

(ii) p_k 为公理, 或

(iii) 存在 $i, j < k$ 使 $p_j = p_i \to p_k$ (此时说由 $p_i, p_i \to p_k$ 使用 MP 得到 p_k), 或

(iv) 存在 $j < k$, 使 $p_k = \forall x p_j$. 此时说由 p_j 使用 "Gen" ("推广") 这条推理规则得到 p_k. x 叫做 Gen 变元 (Gen 是 Generalization 的缩写).

复合上述条件的 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 的 "证明". Γ 叫做假定集, p 叫做 Γ 的语法推论.

若 $\varnothing \vdash p$, 则 p 叫做 K 的定理, 记作 $\vdash p$.

定理 1.1 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是命题演算 L 的命题变元, $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$, 我们有

$$\vdash_L p(x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow \vdash_K p(p_1, \cdots, p_n)$$

其中 $p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$, $p(p_1, \cdots, p_n)$ 是用 $p_1, \cdots, p_n$ 分别代换 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 $x_1, \cdots, x_n$ 所得结果.

定理 1.2 (命题演算型永真式, 简称永真式) 若 $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$ 是命题演算 L 中的永真式, 则对任意 $p_1, \cdots, p_n \in K(Y)$, $p(p_1, \cdots, p_n)$ 叫做 K 的命题演算型永真式, 简称永真式.

按照定理 1.1, 以下各式在 K 中仍然成立

- $\vdash p \to p$ (同一律)
- $\vdash \neg q \to (q \to p)$ (否定前件律)
- $\vdash (\neg p \to p) \to p$ (否定肯定律)
- $\vdash \neg\neg p \to p$ (双重否定律)
- $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (HS)

一公式集 Γ 是无矛盾的, 仍指对任何公式 q, $\Gamma \vdash q$ 与 $\Gamma \vdash \neg q$ 两者不同时成立.

命题 1.3 Γ 有矛盾 $\Rightarrow$ K 的任一公式从 Γ 可证.

命题 1.4 ($\exists_1$ 规则) 设项 t 对 $p(x)$ 中的 x 自由, 则有

$$\vdash p(t) \to \exists x p(x)$$

命题 1.5 (演绎定律)

1° 若 $\Gamma \vdash p \to q$, 则 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

2° 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 且证明中所用的 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就可得 $\Gamma \vdash p \to q$

推论 1.1 当 p 是闭式时, 有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$$

命题 1.6 $\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists xp \to \exists xq)$, 除了 x 外不用其他 Gen 变元.

定理 1.7 (反证律) 若 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$ 及 $\neg q$, 且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得 $\Gamma \vdash p$

定理 1.8 (归谬律) 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 及 $\neg q$, 且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元便可得 $\Gamma \vdash \neg p$

命题 1.9 ($\exists_2$ 规则) 设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 其证明中 Gen 变元不在 p 中自由出现, 且 x 不在 q 中自由出现, 那么有 $\Gamma \cup \{\exists xp\} \vdash q$, 且除了 x 不增加其他 Gen 变元.

命题 1.10 对 K 中任意公式 p, q, r, 有

1° $\vdash p \leftrightarrow p$ (自反性)

2° $\vdash p \leftrightarrow q \ \Rightarrow \vdash q \leftrightarrow p$ (对称性)

3° $\vdash p \leftrightarrow q$ 且 $\vdash q \leftrightarrow r \ \Rightarrow \vdash p \leftrightarrow r$ (可递性)

定义 1.8 (可证等价) p 与 q 可证等价 (简称为等价), 指 $\vdash p \leftrightarrow q$ 成立.

命题 1.11 $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$ 且 $\Gamma \vdash q \to p$

命题 1.12

1° $\vdash \forall xp(x) \leftrightarrow \forall yp(y)$

2° $\vdash \exists xp(x) \leftrightarrow \exists yp(y)$

其中 y 不在 $p(x)$ 中出现.

命题 1.13

1° $\vdash \neg\forall xp \leftrightarrow \exists x\neg p$

2° $\vdash \neg\exists xp \leftrightarrow \forall x\neg p$

1.4 对偶律与前束范式

定理 1.14 (子公式的等价可替换性) 设公式 q 是公式 p 的子公式: $p = \cdots q \cdots$, 用公式 q' 替换 p 中的 q (一次替换) 所得结果记为 $p' = \cdots q' \cdots$. 则有

$$\Gamma \vdash q \leftrightarrow q' \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash p \leftrightarrow p'$$

定理 1.15 (对偶律) 设公式 p 已表示成含原子公式及 $\neg, \vee, \wedge, \forall, \exists$ 的公式. 现把 p 中所有原子公式都改为它们的否定, $\vee$ 与 $\wedge$ 互换, $\forall$ 与 $\exists$ 互换, 得公式 p^*, 则有

$$\vdash p* \leftrightarrow \neg p$$

命题 1.16 若 x 不在 p 中自由出现, 则

1° $\vdash \forall x(p \to q) \leftrightarrow (p \to \forall xq)$

2° $\vdash \exists x(p \to q) \leftrightarrow (p \to \exists x q)$

若 x 不在 q 中自由出现, 则

1° $\vdash \forall x(p \to q) \leftrightarrow (\forall x p \to q)$
2° $\vdash \exists x(p \to q) \leftrightarrow (\exists x p \to q)$

定义 1.9 (前束范式) 前束范式, 指形如

$$Q_1 x \cdots Q_n y p$$

的公式, 其中 $Q_1, \cdots, Q_n$ 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 尾部 p 是不含有量词的公式.

命题 1.17 用 Q 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 用 Q^* 表示 Q 的对偶符号 (Q 为 $\forall$ 时 Q^* 为 $\exists$, Q 为 $\exists$ 时 Q^* 为 $\forall$), 那么有

1° 若 y 不在 $p(x)$ 中自由出现, 则

$$\vdash Qxp(x) \leftrightarrow Qyp(y)$$

2° 若 x 不在 p 中自由出现, 则

$$\vdash (p \to Qxq) \leftrightarrow Qx(p \to q)$$

若 x 不在 q 中自由出现, 则

$$\vdash (Qxp \to q) \leftrightarrow Qx(p \to q)$$

3° $\vdash Qxp \leftrightarrow Q^* x \neg p$

命题 1.18

1° $\vdash (\forall x p \land \forall x q) \leftrightarrow \forall x(p \land q)$
2° $\vdash (\exists x p \lor \exists x q) \leftrightarrow \exists x(p \lor q)$
若 x 不在 p 中自由出现, 则有
3° $\vdash (p \lor Qxq) \leftrightarrow Qx(p \lor q)$
4° $\vdash (p \land Qxq) \leftrightarrow Qx(p \land q)$