傅申 PB20000051
2022 秋

算法基础 作业 5

15.1–2. 举反例证明下面的“贪心”策略不能保证总是得到最优切割方案. 定义长度为 i 的钢条的**密度**为 p_i/i, 即每英寸的价值. 贪心策略将长度为 n 的钢条切割下长度为 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的一段, 其密度最高. 接下来继续使用相同的策略切割长度为 $n-i$ 的剩余部分.

解: 假设 $n=5$, 长度为 $1 \sim 5$ 的钢条的密度依次为: 1, 2, 2, 8, 7. 则按照贪心策略会将钢条切割为长度为 1 和 4 的两部分, 总价值为 $1 \times 1 + 4 \times 8 = 33$; 而最优的切割方案为不切割, 总价值为 $5 \times 7 = 35$. 所以贪心策略不能保证总是得到最优的切割方案.

15.2–3. 用代入法证明递归公式 (15.6) 的结果为 $\Omega(2^n)$.

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & n \geqslant 2 \end{cases} \tag{15.6}$$

解: 恰当选择常数 $c \geqslant 1$, 有 $P(n) \geqslant c \cdot 2^n$. 假定此上界对所有正数 $m < n$ 都成立, 将此代入递归式, 有

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) \\ &\geqslant c^2(n-1)2^n \\ &\geqslant c \cdot 2^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

所以递归公式的结果为 $\Omega(2^n)$.

15.2–4. 对输入链长度为 n 的矩阵链乘问题, 描述其字问题图: 它包含多少个顶点? 包含多少条边? 这些边分别连接哪些顶点?

解: 字问题图的顶点都能用 $v_{i,j}$ $(i \leqslant j)$ 表示, 共 $n(n+1)/2$ 个, 其中

- 若 $i = j$, 则顶点 $v_{i,j}$ 没有任何出边.
- 若 $i < j$, 则对所有的 $i \leqslant k < j$, $v_{i,j}$ 都有两条出边分别指向 $v_{i,k}$ 和 $v_{k+1,j}$.

则边数为

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 2(j-i) = \sum_{i=1}^{n} (n-i)(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - i\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \tag{4.1}$$