傅申 PB20000051
2022 秋

算法基础 作业 6

15.3–3. 考虑矩阵链乘法问题的一个变形: 目标改为最大化举证序列括号化方案的标量乘法运算次数, 而非最小化. 此问题具有最优子结构性质吗?

解: 此问题仍具有最优子结构性质. 不妨假设 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ 的最优解在 A_k 和 A_{k+1} 之间划分, 若 $A_i\cdots A_k$ 或 $A_{k+1}\cdots A_j$ 没有采用它的最优解, 则将它的最优解代入原来 $A_i\cdots A_j$ 的 “最优解” 中, 得到的运算次数比原来更高, 显然与假设的 “最优” 性质矛盾, 故此问题的最优解包含其子问题的最优解, 也就是具有最优子结构性质.

15.3–4. 如前所述, 使用动态规划方法, 我们首先求解子问题, 然后选择哪些子问题用来构造原问题的最优解. Capulet 教授认为, 我们不必为了求原问题的最优解而总是求解出所有子问题. 她建议, 在求矩阵链乘法问题的最优解时, 我们总是可以在求解子问题之前选定 $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ 的划分位置 A_k (选定的 k 使得 $p_{i-1}p_kp_j$ 最小). 请找出一个反例, 证明这个方法可能生成次优解.

解: 假设有 3 个矩阵 A_1, A_2, A_3, 对应的规模依次为 $p_0 = 1000$, $p_1 = 100$, $p_2 = 10$, $p_3 = 1$. 使用 Capulet 教授的方法, 选定的划分位置为 $k = 2$, 对应的括号化方案为 $((A_1A_2)\,A_3)$, 需要进行的标量乘法次数为 $1000\times 100\times 10 + 1000\times 10\times 1 = 1010000$. 而最优括号化方案为 $(A_1\,(A_2A_3))$, 需要进行的标量乘法次数为 $100\times 10\times 1 + 1000\times 100\times 1 = 101000 < 1010000$. 因此 Capulet 的方法可能生成次优解.

15.4–4. 说明如何只使用表 c 中的 $2\times\min(m,n)$ 个表项及 $O(1)$ 的额外空间来计算 LCS 的长度. 然后说明如何只用 $\min(m,n)$ 个表项及 $O(1)$ 的额外空间完成相同的工作.

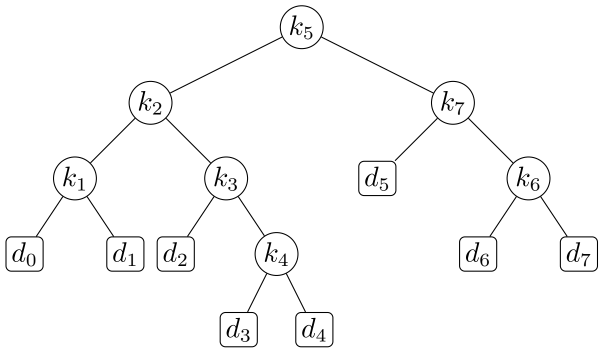
解: 因为计算表 c 的某一行只需要其上一行的数据, 因此可以在完全计算完一行后就将上一行丢弃, 这样只需要表 c 中两行的表项 (即 $2\times\min(m,n)$) 及 $O(1)$ 的额外空间.

更进一步, 因为计算 $c[i,j]$ 只需要知道 $c[i-1,j-1]$, $c[i,j-1]$, $c[i-1,j]$, 所以实际上只需要一个临时变量存储 $c[i-1,j-1]$ 即可在 c 的一行空间完成计算, 只需要重复地在这一行中从左往右依次更新表项值: 在更新这一行的第 j 个表项前, 第 $j-1$ 个表项的值就是 $c[i,j-1]$, 第 j 个表项中存储着 $c[i-1,j]$, 临时变量中存储着 $c[i-1,j-1]$, 根据它们计算出 $c[i,j]$, 然后将第 j 个表项值存入临时变量, 再用 $c[i,j]$ 存入第 j 个表项完成更新. 这样就能只用 $\min(m,n)$ 个表项及 $O(1)$ 的额外空间.

15.5–2. 若 7 个关键字的概率如下所示, 求其最优二叉搜索树的结构和代价.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i		0.04	0.06	0.08	0.02	0.10	0.12	0.14
q_i	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05

解: 最优二叉搜索树的代价为 3.12, 结构如下



16.1–3. 对于活动选择问题, 并不是所有贪心方法都能得到最大兼容活动子集. 请举例说明, 在剩余兼容活动中选择持续时间最短者不能得到最大集. 类似地, 说明在剩余兼容活动中选择与其他剩余活动重叠最少者, 以及选择最早开始者均不能得到最优解.

解: 考虑这样一个活动集合 $\{[1,4),[3,5),[4,7)\}$, 选择持续时间最短者得到的子集为 $\{a_2\}$, 而最大兼容子集为 $\{a_1,a_3\}$, 没有得到最优解.

考虑这样一个活动集合 $\{[1,3),[2,4),[2,4),[2,4),[3,5),[4,6),[5,7),[6,8),[6,8),[6,8),[7,9)\}$, 选择与其他剩余活动重叠最少者会首先选择 $a_6=[4,6)$, 导致无法再选择 $a_5=[3,5)$ 和 $a_7=[5,7)$, 而唯一的最大兼容子集为 $\{a_1=[1,3),a_5,a_7,a_{11}=[7,9)\}$, 故无法得到最优解.

考虑这样一个活动集合 $\{[1,8),[2,4),[4,7)\}$, 选择开始最早者得到的子集为 $\{a_1\}$, 而最大兼容子集为 $\{a_2,a_3\}$, 没有得到最优解.