傅申 PB20000051
2022 秋

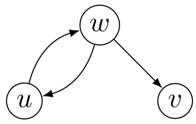
算法基础 作业 12

22.3–6. 证明: 在无向图中, 根据深度优先搜索算法是先探索 (u, v) 还是先探索 (v, u) 来将边 (u, v) 分类为树边或者后向边, 与根据分类列表中的 4 种类型的次序进行分类是等价的.

解: 由定理 22.10 可知, 无向图中的边要么是树边, 要么是后向边. 不妨假设此时在探索 (u, v), 若 v 在此时被发现, 则 (u, v) 先被探索, 且是树边; 若 v 在此之前就被发现, 则 (v, u) 在访问 v 时就被探索了, 即 (v, u) 先被探索, 且 (u, v) 是后向边. 因此可以根据 (u, v) 的探索顺序将其分类为树边或者后向边.

22.3–8. 请给出如下猜想的一个反例: 如果有向图 G 包含一条从结点 u 到结点 v 的路径, 并且在对 G 进行深度优先搜索时有 $u.d < v.d$, 则结点 v 是结点 u 在深度优先森林中的一个后代.

解: 如下, 探索顺序为 $w \to u \to v$, 且存在从 u 到 v 的路径 $u \to w \to v$, 但是在深度优先森林中 u 和 v 互为兄弟结点.



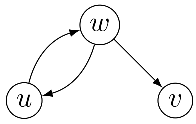
22.4–3. 给出一个算法来判断给定无向图 $G = (V, E)$ 是否包含一个环路. 算法运行时间应该在 $O(|V|)$ 量级, 且与 $|E|$ 无关.

解: 考虑使用 DFS 来判断是否存在环路, 不过在 DFS 的过程中, 若当前结点 u 探索边 (u, v) 时, v 已经被发现且 v 不是上一个访问的结点, 则说明存在环路, 停止搜索. 若 DFS 没有提前停止搜索, 则说明不存在环路.

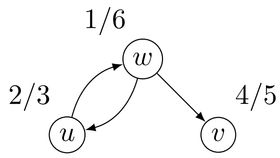
由于对于没有环路的无向图, $|E| \leqslant |V| - 1$, 因此, 若 DFS 提前结束, 则访问过的结点集合 V_v 满足 $|V_v| \leqslant |V|$, 且搜索过的边集合 E_v 满足 $|E_v| \leqslant |V_v| - 1 + 1 = |V_v|$, 复杂度为 $O(|V_v| + |E_v|) = O(|V|)$; 若 DFS 没有提前结束, 则 $|E| \leqslant |V| - 1$, 复杂度为 $O(|V| + |E|) = O(|V|)$.

22.5–3. Bacon 教授声称, 如果在第二次深度优先搜索时使用原始图 G 而不是图 G 的转置图 G^{T}, 并且以完成时间的递增次序来扫描结点, 则计算强连通分量的算法将会更加简单. 这个更加简单的算法总是能计算出正确的结果吗?

解: 不能, 考虑如下有向图, 它有两个强连通分量: $\{w, u\}$ 和 $\{v\}$.



若第一次 DFS 从 w 开始, 并先访问边 (w, u), 则结果为



因为按照完成时间的递增次序来扫描结点, 因此第二次 DFS 会从结点 u 开始, 但是存在路径 $u \to w \to v$, 因此 u 和 v 将划分到同一个强连通分量中, 与正确的结果不符.

23.2–5. 假定图中的边权重取值全部为整数, 且在范围 $1 \sim |V|$ 内. Prim 算法最快能多快? 如果边的权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢?

解: 当边权重的取值范围为 $1 \sim |V|$ 或 $1 \sim W$ 时, Prim 算法能达到 $O(|E| \lg\lg |V|)$ 或 $O(|E| \lg\lg W)$ 的时间复杂度. 只需要使用 van Emde Boas 树来实现最小优先队列, 它对于 Extract-Min 操作和 Decrease-Key 的时间均为 $O(\lg\lg |V|)$ 或 $O(\lg\lg W)$, 因此总的时间复杂度为 $O((|E|+|V|) \lg\lg |V|) = O(|E| \lg\lg |V|)$ 或 $O(|E| \lg\lg W)$.

P.S. 我尝试实现一个 $O(|E|)$ 时间复杂度的 Prim 算法但是失败了, 主要是不知道如何在 $O(1)$ 的时间内维护优先队列中的最小值.

24.1–3. 给定 $G = (V, E)$ 是一带权重且没有权重为负值的环路的有向图, 对于所有结点 $v \in V$, 从源结点 s 到结点 v 之间的最短路径中, 包含边的条数的最大值为 m. (这里, 判断最短路径的根据是权重, 不是边的条数.) 请对算法 BELLMAN-FORD 进行简单修改, 可以让其在 $m+1$ 遍松弛操作之后终止, 即使 m 不是事先知道的一个数值.

解: 由上界性质可知, 在第 m 遍松弛操作结束后, 所有结点的 d 值都不会再改变, 因此在第 $m+1$ 遍松弛操作中也不会有 d 值改变. 因此可以检测每遍松弛操作中是否有 d 值改变, 如果没有则可以提前结束松弛操作.

24.2–2. 假定将 DAG-Shorest-Paths 的第 3 行改为:

for the first $|V| - 1$ vertices, taken in topologically sorted order

证明: 该算法的正确性保持不变.

解: 拓扑排序次序中最后一个结点一定没有出边, 因此原算法中对于最后一个结点, 第 4 行的 **for** 循环不会执行, 可以直接不考虑该结点. 所以修改后的算法正确性保持不变.