UNIVERSIDADE fIEDERAL DO CEARÁ
Campus de Quixadá
Prof. Arthur Araruna
QXD0008 - Matemática Discreta

AP1
2021.2

Discente: Francisco Breno da Silveira (511429)

QUESTÃO 01:

AVALIAÇÃO PARCIAL 01 — 23 / 12 / 2021

• DISCENTE: FRANCISCO BRENO DA SILVEIRA
• MATRÍCULA: 511429

→ INSTRUÇÕES
• $M = 5+1+1+4+2+9 = 22$
• ■ : 22 mod 3 = 1
• ♠ : 22 mod 5 = 2
• ♦ : 22 mod 7 = 1

→ DEMONSTRE OU DÊ UM CONTRA-EXEMPLO PARA CADA QUESTÃO A SEGUIR:

• QUESTÃO 01: MOSTRE QUE PARA TODO INTEIRO m, $4\cdot(m^2+m+(1-1))-3m^2$ É UM QUADRADO PERFEITO.

• DEMONSTRAÇÃO → CONTRA-EXEMPLO

PARA FACILITAR A COMPREENSÃO, VAMOS DESENVOLVER A EXPRESSÃO $4\cdot(m^2+m)-3m^2$:

• $4\cdot(m^2+m)-3m^2 = 4m^2-3m^2+4m$
$= m^2+4m$

SEJA m^2+4m UM QUADRADO PERFEITO. POR DEFINIÇÃO, EXISTE $b \in \mathbb{Z}$ TAL QUE $m^2+4n=b^2$. SUPONHA QUE $m=3$. LOGO, TEMOS QUE:

• $m^2+4m=b^2$
$3^2+4\cdot3=b^2$
$b^2=21$
$b=\sqrt{21} \simeq 4,58$

NOTE QUE TEMOS UM CONTRA-EXEMPLO QUANDO $m=3$, POIS 21 (RESULTADO DE m^2+4m NESSE CASO) NÃO É UM QUADRADO PERFEITO, VISTO QUE $b=\sqrt{21}$ ($b \notin \mathbb{Z}$), CONTRADIZENDO A DEFINIÇÃO.

QUESTÃO 02:

/ /

• QUESTÃO 02: AS SEGUINTES SENTENÇAS SOBRE O NÚMERO INTEIRO m SÃO EQUIVALENTES:

(i) $(m \cdot 2) + 2$ É PAR

(ii) $m + 1$ É ÍMPAR

(iii) m^2 É PAR

↳ OBJETIVO:

COM BASE NA REGRA DO SILOGISMO HIPOTÉTICO, PODEMOS CONCLUIR QUE (i), (ii) E (iii) SÃO EQUIVALENTES AO DEMONSTRARMOS QUE AS SENTENÇAS (i) → (ii), (ii) → (iii) E (iii) → (i) SÃO VERDADEIRAS.

↳ DEMONSTRAÇÃO:

SEJA $m \in \mathbb{Z}$, VAMOS DEMONSTRAR AS TRÊS IMPLICAÇÕES NECESSÁRIAS DE FORMA A CONCLUIR A EQUIVALÊNCIA DAS SENTENÇAS.

(i) → (ii): SE $2m + 2$ É PAR, ENTÃO $m + 1$ É ÍMPAR

SUPONHA QUE $m = 1$, LOGO TEMOS QUE:

- $2m + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$
- $m + 1 = 1 + 1 = 2$

NOTE QUE, QUANDO $m = 1$, TANTO $2m + 2$, QUANTO $m + 1$ RESULTAM EM NÚMEROS PARES, O QUE TORNA A IMPLICAÇÃO (i) → (ii) FALSA. COM ISSO, A PARTIR DESSE CONTRA-EXEMPLO, PODEMOS CONCLUIR QUE (i), (ii) E (iii) NÃO SÃO EQUIVALENTES, POIS UMA DAS IMPLICAÇÕES RESULTOU EM FALSO.

QUESTÃO 03

• QUESTÃO 03(a): UMA CELEBRIDADE É UMA PESSOA QUE TODAS AS OUTRAS CONHECEM, MAS QUE NÃO CONHECE NENHUMA DAS OUTRAS. MOSTRE QUE EM UM GRUPO DE PESSOAS HÁ NO MÁXIMO UMA CELEBRIDADE.

• MONTANDO O RACIOCÍNIO:

SEGUNDO A QUESTÃO, PODEMOS DEFINIR UMA CELEBRIDADE COMO SENDO UM SER QUE SÓ CONHECE A SI PRÓPRIO E É CONHECIDO POR TODOS OS OUTROS SERES (VAMOS CHAMÁ-LOS DE PESSOAS COMUNS) QUE ESTÃO INSERIDOS EM UM MESMO MEIO.

SUPONDO UM GRUPO EM QUE TENHAMOS n PESSOAS COMUNS E NENHUMA CELEBRIDADE, AO INSERIRMOS UMA CELEBRIDADE b, POR ELA SER CELEBRIDADE, b NÃO CONHECE NENHUMA DAS n PESSOAS NESSE ESPAÇO, SÓ CONHECE ELA MESMA, E TODAS AS n PESSOAS CONHECEM b. AO TENTARMOS INSERIR UMA SEGUNDA CELEBRIDADE d NESSE MESMO GRUPO, TEREMOS UM IMPASSE. ISSO PORQUE b, POR SER UMA CELEBRIDADE, SERÁ RECONHECIDA POR d ASSIM COMO d SERÁ RECONHECIDA POR b, POIS d TAMBÉM ERA UMA CELEBRIDADE AO ENTRAR NO GRUPO. A PARTIR DESSE MOMENTO, b E d NÃO CONHECEM SÓ A SI PRÓPRIO, ELES SABEM QUE EXISTE ALGUÉM CONHECIDO DENTRO DAQUELE GRUPO E COM ISSO ELES NÃO PODEM SER MAIS CLASSIFICADOS COMO CELEBRIDADES (POIS UMA CELEBRIDADE NÃO CONHECE NINGUÉM QUE ESTÁ INSERIDO NO MESMO ESPAÇO QUE ELA SEGUNDO A DEFINIÇÃO DA QUESTÃO). SE INSERIRMOS UMA TERCEIRA CELEBRIDADE f NESSE GRUPO, f IRÁ RECONHECER b E d, DEIXANDO ASSIM DE SER UMA CELEBRIDADE NAQUELE GRUPO. ESSE IMPASSE IRÁ SE REPETIR TODA VEZ QUE ADICIONARMOS MAIS CELEBRIDADES NESSE MESMO ESPAÇO A PARTIR DE ENTÃO.

NOTE QUE O IMPASSE FOI INICIADO A PARTIR DO MOMENTO EM QUE INSERIMOS A SEGUNDA CELEBRIDADE. COM ISSO, PODEMOS CONCLUIR QUE EM UM GRUPO DE PESSOAS SÓ PODE TER NO MÁXIMO UMA CELEBRIDADE INSERIDA PARA QUE NÃO HAJA CONFLITOS DE CLASSIFICAÇÃO DOS SERES NESSE AMBIENTE.

QUESTÃO 04

• QUESTÃO 04: ESCREVA, USANDO NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO, UMA FÓRMULA PARA CÁLCULO:

(b) DA SOMA DO i-ÉSIMO AO j-ÉSIMO TERMO DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA (CONSIDERANDO $i \leq j$).

↳ RESOLUÇÃO:

SENDO a_1 O PRIMEIRO ELEMENTO DA PA, a_m O m-ÉSIMO ELEMENTO, ONDE m REPRESENTA O NÚMERO TOTAL DE TERMOS, E r A RAZÃO, TEMOS QUE A SOMA DE TODOS OS TERMOS DE UMA PA PODE SER EXPRESSA POR:

$$S_{PA} = \sum_{k=0}^{m-1} a_1 + r \cdot k$$

UTILIZANDO ESSA EXPRESSÃO COMO BASE, PODEMOS CALCULAR A SOMA DO i-ÉSIMO AO j-ÉSIMO TERMO DE UMA PA ATRAVÉS DO SEGUINTE SOMATÓRIO:

$$S_{PA} = \sum_{k=(i-1)}^{j-1} a_1 + r \cdot k = \boxed{\sum_{k=i}^{j} a_1 + r \cdot (k-1)}$$

QUESTÃO 05

• QUESTÃO 05: SABENDO QUE $x \equiv 66^{(1+1)} \pmod 5$, DETERMINE O VALOR DE $(3x-2)^2$ MOD 5.

• RESOLUÇÃO → APLICANDO AS PROPRIEDADES DA CONGRUÊNCIA MODULAR E O ALGORÍTMO DA DIVISÃO (A.D.), TEMOS:

• $x \equiv 66^2 \pmod 5$

↳ $x \bmod 5 = 66^2 \bmod 5$

• APLICANDO A.D. EM 66^2 MOD 5:

$66^2 = 5 \cdot 871 + \boxed{1}$

↳ $66^2 \bmod 5 = 1$

• $x \bmod 5 = 66^2 \bmod 5$

$x \bmod 5 = 1$

• APLICANDO A.D. EM x MOD 5:

$x = 5 \cdot q + 1$

↳ $q \in \mathbb{Z}$

• $x = 5 \cdot q + 1$

↳ $3 \cdot x = (5 \cdot q + 1) \cdot 3$

$3x = 15q + 3$

$3x - 2 = 15q + 1$

$(3x-2)^2 = (15q+1)^2$

$(3x-2)^2 = 225q^2 + 30q + 1$

A.D. → $(3x-2)^2 = 5 \cdot (45q^2 + 6q) + \boxed{1}$

↳ $\boxed{(3x-2)^2 \bmod 5 = 1}$