Logique

Logique Propositionnelle

Thomas Pietrzak
Licence Informatique

Université de Lille
1 Sciences et Technologies

Logique propositionnelle

Logique de base

Raisonnements simples

Connecteurs usuels : ET, OU, NON, …

Syntaxe

Variables propositionnelles

Ensemble de variables propositionnelles.

$$\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$$

Connecteurs logiques

$\perp$ bottom, absurde

$\neg$ non

$\wedge$ et

$\vee$ ou

$\Rightarrow$ implication

$\Leftrightarrow$ équivalence

Formules propositionnelles

Ensemble des formules propositionnel : $\mathcal{F}^0 = \{\varphi, \psi, \dots\}$

Plus petit ensemble qui contient :

Les variables propositionnelles

$\perp$

$\Big\}$ formules atomiques

Si $\varphi \in \mathcal{F}^0$ et $\psi \in \mathcal{F}^0$ alors les termes suivants sont aussi des formules :

conjonction	$\varphi \land \psi$
disjonction	$\varphi \lor \psi$
implication	$\varphi \Rightarrow \psi$
équivalence	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
négation	$\neg\varphi$
parenthésage	(φ)

Priorité

L'ordre de priorité des connecteurs est le suivant :

$$\neg > \{\wedge, \vee\} > \{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$$

Les connecteurs binaires sont associatifs gauche.

Ex : $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$ est interprété comme $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$

Induction

Démonstration de propriétés des formules

Soit A une propriété. Si :

$A(\perp)$

$A(p)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$

Si $A(\varphi)$ et $A(\psi)$ alors $A(\varphi \wedge \psi)$, $A(\varphi \vee \psi)$, $A(\varphi \Rightarrow \psi)$, $A(\varphi \Leftrightarrow \psi)$

Si $A(\varphi)$ alors $A(\neg\varphi)$ et $A((\varphi))$

Alors $A(\varphi)$ pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}^0$

Exemple

$A(\varphi) = \varphi$ contient au moins une variable ou $\perp$

$A(\perp)$ est vrai

$A(p)$ est vrai pour tout $p \in \mathcal{P}$

Si $A(\varphi)$ et $A(\psi)$ alors $A(\varphi \wedge \psi)$, $A(\varphi \vee \psi)$, $A(\varphi \Rightarrow \psi)$ et $A(\varphi \Leftrightarrow \psi)$

sont vraies par construction

Si $A(\varphi)$ alors $A(\neg\varphi)$ et $A((\varphi))$ sont vraies de la même manière

Donc $A(\varphi)$ pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}^0$

Sémantique

Valuation de variable

Une **valuation** définit la valeur de vérité des variables propositionnelles.

$$v : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$$

Valuation de formule

Toute valuation v se prolonge de façon unique en une valuation $[\![\cdot]\!]_v$ sur les formules propositionnelles :

$$[\![\cdot]\!]_v : \mathcal{F}^0 \to \{0, 1\}$$

Valuation de formule

Elle se définit récursivement sur la structure des formules :

$$\llbracket p \rrbracket_v = v(p)$$

$$\llbracket \bot \rrbracket_v = 0$$

$$\llbracket (\varphi \vee \psi) \rrbracket_v = max(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$$

$$\llbracket (\varphi \wedge \psi) \rrbracket_v = min(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$$

$$\llbracket (\varphi \Leftrightarrow \psi) \rrbracket_v = 1 \ ssi \ \llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$$

$$\llbracket (\varphi \Rightarrow \psi) \rrbracket_v = 0 \ ssi \ \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \ et \ \llbracket \psi \rrbracket_v = 0$$

$$\llbracket (\neg \varphi) \rrbracket_v = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v$$

$$\llbracket (\varphi) \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_v$$

Exemple

$$v(a) = 0, v(b) = 1$$

$$[\![\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)]\!]_v = 1 \ ssi \ [\![\neg(a \vee b)]\!]_v = [\![\neg a \wedge \neg b]\!]_v$$

$$\begin{aligned}
[\![\neg(a \vee b)]\!]_v &= 1 - [\![a \vee b]\!]_v \\
&= 1 - max([\![a]\!]_v, [\![b]\!]_v) \\
&= 1 - max(v(a), v(b)) \\
&= 1 - max(0, 1) \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\neg a \wedge \neg b]\!]_v &= min([\![\neg a]\!]_v, [\![\neg b]\!]_v) \\
&= min(1 - [\![a]\!]_v, 1 - [\![b]\!]_v) \\
&= min(1 - v(a), 1 - v(b)) \\
&= min(1 - 0, 1 - 1) \\
&= min(1, 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$[\![\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)]\!]_v = 1$$

Table de vérité

La **table de vérité** d'une formule énumère to

p	q	¬p	p ∨ q	p ∧ q	p ⟹ q	p ⟺ q
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Propriétés

Satisfiabilité

Une valuation v **satisfait** une formule φ ssi $[\![\varphi]\!]_v = 1$

φ est **satisfaisable** s'il existe une valuation qui la satisfait

Satisfiabilité

Une formule φ est une **tautologie**, dénoté $\models \varphi$, ssi $[\![\varphi]\!]_v = 1$ pour toute valuation v.

Soit Γ un ensemble de formules, φ est une **conséquence sémantique** de Γ, dénoté $\Gamma \models \varphi$ si φ est satisfaite par toute valuation qui satisfait toutes les formules de Γ.

Équivalence sémantique

Deux formules φ et ψ sont **sémantiquement équivalentes**, dénoté $\varphi \equiv \psi$,

ssi $[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ pour toute valuation v.

Autrement dit : $\varphi \equiv \psi \ ssi \ \varphi \Leftrightarrow \psi$

Proposition

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence :

Réflexivité $\varphi \equiv \varphi$

Symétrie $si\ \varphi \equiv \psi\ alors\ \psi \equiv \varphi$

Transitivité $si\ \varphi \equiv \psi\ et\ \psi \equiv \theta\ alors\ \varphi \equiv \theta$

Démonstration

$\varphi \equiv \varphi$	évident	$[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v$		
$si\ \varphi \equiv \psi\ alors\ \psi \equiv \varphi$	donc	$[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$	$[\![\psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v$	
$si\ \varphi \equiv \psi\ et\ \psi \equiv \theta\ alors\ \varphi \equiv \theta$	et, donc	$[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$	$[\![\psi]\!]_v = [\![\theta]\!]_v$	$[\![\varphi]\!]_v = [\![\theta]\!]_v$

Propriétés algébriques

Commutativité

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv \psi \Leftrightarrow \varphi$$

Associativité

$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta \qquad \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \qquad \varphi \Leftrightarrow (\psi \Leftrightarrow \theta) \equiv (\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow \theta$$

Distributivité

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$

Idempotence

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

Propriétés algébriques

Neutralité de $\perp$

$$\varphi \vee \perp \equiv \varphi$$

Absorbtion de $\perp$

$$\varphi \wedge \perp \equiv \perp$$

Lois de De Morgan

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \neg(\vee \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

Double négation

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

Propriétés de $\Rightarrow$

$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \qquad \varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$$

Système complet

Système complet de connecteurs C

Ensemble de connecteurs logiques tel que toute formule propositionnelle est *équivalente* à une formule n'utilisant que les connecteurs de C.

Théorème

Les ensembles de connecteurs $\{\vee, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$ et $\{\Rightarrow, \bot\}$ sont des systèmes complets.

Formes Normales

Formes normales

Forme normale disjonctive (FND) : disjonction de conjonctions

$$(\varphi_{1,1} \wedge \ldots \varphi_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (\varphi_{k,1} \wedge \ldots \varphi_{k,n_1})$$

Littéral : variable propositionnelle ou négation de variable propositionnelle

$$(\varphi_{1,1} \vee \ldots \varphi_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (\varphi_{k,1} \vee \ldots \varphi_{k,n_1})$$

Forme normale conjonctive (FNC) : conjonction de disjonctions

Théorème

Toute formule propositionnelle est équivalente à une FND ou une FNC.

Démonstration : par transformation des formules

Mise en FNC ou FND

1. Éliminer les $\Rightarrow$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

2. Placer les $\neg$ devant les variables

$$\neg\neg A \equiv A$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

3. Distribution des $\wedge$ et $\vee$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

4. Simplification

$$A \wedge \neg A \equiv \bot \qquad A \wedge \bot \equiv \bot \qquad A \wedge \neg\bot \equiv A$$

$$A \vee \neg A \equiv \neg\bot \qquad A \vee \bot \equiv A \qquad A \vee \neg\bot \equiv \neg\bot$$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FND

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) =$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FND

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee C \vee \neg(\neg D \vee A)$ suppression des $\Rightarrow$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FND

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee C \vee \neg(\neg D \vee A)$ $\quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg\neg A \equiv A$

$= (A \wedge \neg B) \vee C \vee (D \wedge \neg A)$ déplacement des $\neg$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) =$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

FNC

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A))$ suppression des $\Rightarrow$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A))$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg\neg A \equiv A$

$= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A))$ déplacement des $\neg$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A))$

$= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A))$

$= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A))$ distribution

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A))$$

$$= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A))$$

$$= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A))$$

$$= ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee \neg A))$$

distribution

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$$\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) &= \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A)) \\
&= ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee \neg A)) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)
\end{aligned}$$

associativité

$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$$\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) &= \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A)) \\
&= ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)) \wedge ((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee \neg A)) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (C \vee \neg\bot) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)
\end{aligned}$$

simplification

$$A \vee \neg A \equiv \neg\bot$$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$$
\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) &= \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A)) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A)) \\
&= ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)) \wedge ((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee \neg A)) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (C \vee \neg\bot) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A) \\
&= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge \neg\bot \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)
\end{aligned}
$$

simplification

$A \vee \neg\bot \equiv \neg\bot$

Exemple

Mettre la formule suivante en FND et FNC : $\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A))$

FNC

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (C \vee \neg(D \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \vee B) \vee (C \vee \neg(\neg D \vee A))$

$= (A \wedge \neg B) \vee (C \vee (D \wedge \neg A))$

$= (A \wedge \neg B) \vee ((C \vee D) \wedge (C \vee \neg A))$

$= ((A \wedge \neg B) \vee (C \vee D)) \wedge ((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee \neg A))$

$= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$

$= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (C \vee \neg\bot) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$

$= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge \neg\bot \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$

$= (A \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$

simplification

$$A \wedge \neg\bot \equiv A$$

Déduction Naturelle

Séquent

$$\overbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}^{\text{Hypothèses}} \vdash \overbrace{\psi_1, \ldots, \psi_m}^{\text{Conclusions}}$$

Signifie

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$$

Déduction naturelle

Système de déduction

- Axiomes
- Règles d'inférence

Prémisses

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\ \mathrm{nom}$$

Conclusion

Déduction naturelle

On commence par le système complet $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

Chaque connecteur a 1 ou 2 règles d'**introduction** et 1 ou 2 règles d'**élimination**

On utilisera la notation $\neg\varphi$, équivalent à $\varphi \Rightarrow \bot$

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathrm{ax}$$

Règle de l'axiome

Un terme est démontrable s'il fait partie des hypothèses.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \perp\}$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ \mathrm{aff}$$

Affaiblissement

Certaines hypothèses sont inutiles.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_i$$

Implique intro

Pour montrer qu'une formule implique une autre, il faut montrer que la 2e se démontre avec la première en hypothèse.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \perp\}$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_e$$

Implique élim (modus ponens)

Si on a montré qu'une formule en implique une seconde, et que l'on a aussi montré la première formule, alors on a montré la seconde.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c$$

Absurdité classique

Pour prouver une formule, on suppose son contraire pour déduire l'absurde.

$$\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$$

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_e$$

Ex falso quodlibet

Si des hypothèses permettent de déduire l’absurde, elles permettent de tout déduire.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

Négation - intro

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

Implique intro avec B = ⊥

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot} \Rightarrow_i$$

(Raccourci)

$$\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$$

Système {∧, ⇒, ⊥}

Négation - élim

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Implique élim avec B = ⊥

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \Rightarrow_e$$

(Raccourci)

$$\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$$

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \perp\}$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Et - intro

Pour montrer la conjonction de deux formules, il faut montrer ces deux formules.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \perp\}$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_{eg}$$

Et elim (gauche et droite)

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_{ed}$$

La preuve d'une conjonction permet de montrer chaque partie de cette conjonction.

Système $\{\wedge, \Rightarrow, \bot\}$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,\mathrm{aff}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_e \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_c \qquad \neg A \equiv A \Rightarrow \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_{eg} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_{ed}$$

Propriétés

$$si\ \varphi \in \Gamma\ alors\ \Gamma \vdash \varphi$$

$$si\ \Gamma \cup \varphi \vdash \psi\ alors\ \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

$$si\ \Gamma \vdash \varphi\ et\ \Gamma' \vdash \varphi \Rightarrow \psi\ alors\ \Gamma \cup \Gamma' \vdash \psi$$

$$si\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp\ \ alors\ \Gamma \vdash \varphi$$

$$si\ \Gamma \vdash \perp\ \ alors\ \Gamma \vdash \varphi$$

$$si\ \Gamma \vdash \varphi\ et\ \Gamma' \vdash \psi\ alors\ \Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi$$

$$si\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi\ alors\ \Gamma \vdash \varphi\ et\ \Gamma \vdash \psi$$

Propriétés

$\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

$\vdash \varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$

$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$

$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

$\vdash (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$

$\vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$

$\vdash \varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$

$\vdash (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta)$

$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta))$

$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \bot$

$\vdash \bot \Rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

Correction

Lemme de correction

$$si\ \Gamma \vdash \varphi\ alors\ \Gamma \models \varphi$$

Explication : si on peut prouver une formule sous certaines hypothèses, et que ces hypothèses sont satisfiables, alors cette formule est vraie.

Idée de démonstration

Démonstration par récurrence sur la longueur de la démonstration.

On considère chaque règle pour la dernière étape.

Les étapes d’avant de la démonstration sont des hypothèses de récurrence.

Complétude

Théorème de complétude

$$si\ \Gamma \models \varphi\ alors\ \Gamma \vdash \varphi$$

Explication : si une formule est une conséquence sémantique d'un ensemble de formules Γ, alors cette formule est prouvable sous les hypothèses Γ.

Idée de démonstration

Démonstration par induction sur φ.

On considère le connecteur le plus « haut ».

Les sous-formules sont des hypothèses de récurrence.

Système $\{\vee, \neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bot\}$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_{ig}$$

Ou intro (gauche et droite)

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_{id}$$

Si on prouve une formule, alors on prouve la disjonction de cette formule avec une autre.

Système $\{\vee, \neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bot\}$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_e$$

Ou elim

Si on prouve une disjonction et que de chaque partie on déduit une autre formule, alors on peut déduire cette formule.

Système $\{\vee, \neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \perp\}$

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi} \Leftrightarrow_i$$

Equiv intro

Si deux formules permettent de se déduire l'une de l'autre, alors on déduit leur équivalence.

Système {∨, ¬, ∧, ⇒, ⇔, ⊥}

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \Leftrightarrow_{eg}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} \Leftrightarrow_{ed}$$

Equiv elim

Si on déduit une formule, et qu'elle est équivalente à une autre, on déduit cette dernière.

Système {∨, ¬, ∧, ⇒, ⇔, ⊥}

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_{ig} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_{id}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi} \Leftrightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \Leftrightarrow_{eg} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} \Leftrightarrow_{ed}$$

Propriétés

$$\vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\vdash \neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \bot)$$

$$\vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$$

Complétude

La déduction naturelle reste complète pour $\{\vee, \neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bot\}$.