Appunti di Probabilità e Statistica

Mattia Bolzonella

April 20, 2017

Operazioni sugli eventi

1)$E \cup (E \cap F) = E$

2)$E \cap (E \cup F) = E$

3)$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

4)$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

5)$E \triangle F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E)$

6)$E \cup F = E \cup (F \backslash E)$

in generale: $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E_1 \bigcup \left[\bigcup_{k=2}^{n} \left(E_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right) \right]$

Leggi di De Morgan

$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$

Spazio campionario

<u>Def</u>: *$\omega \in \Omega$, è l'elemento(o esito)$\in$ allo spazio campionario. Ω è lo spazio degli esiti elementari.*

$\sigma-$algebra

<u>Def</u>:*Una collezione $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω è una $\sigma-algebra$ se:*

1)$\mathcal{F} \neq \varnothing$

2)$E \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{E} \in \mathcal{F}$

3)$E_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{F}$ e anche $\left(\displaystyle\bigcap_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{F} \right)$

Misura di probabilità

<u>Def</u>: La funzione $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ $\qquad (E \in \mathcal{F} \to P(E))$ tale che:

1)$P(\Omega) = 1$

2)$E_i \in \mathcal{F}$ tale che $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\quad P\left(\displaystyle\bigcup_{i \geq 1} E_i \right) = \sum_{i \geq 1} P(E_i)$

Proprietà

1)$P(E) = 1 - P(\overline{E})$

2)$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

3)$P(E \cup \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F)$

4)$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Probabilità Uniforme

<u>Def</u>: $|\Omega| = N$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_N\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$

1)$P(E) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in E} P(\{\omega_i\}) = \frac{|E|}{|\Omega|} \quad \frac{\text{“casi favorevoli”}}{\text{“casi possibili”}}$

Calcolo combinatorio

<u>*Principio del prodotto delle probabilità*</u>

Sia A un insieme. Se ogni elementi di A è invidiuato da una <u>sequenza univoca</u> di k scelte con:

r_1 possibilità per la 1^a scelta

r_2 possibilità per la 2^a scelta

... r_k possibilità per la k^a scelta

Allora $|A| = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_k$

Disposizioni

1)*Senza ripetizioni: n oggetti, k slot con $n \geq k$. Il modo di mettere n oggetti in k slot:*

$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

2)*Con ripetizioni: Modi di inserire n oggetti in k slot potendo ripetere gli n oggetti:*

$D'_{n,k} = n^k$

Permutazioni con elementi ripetuti

Modi di permutare n oggetti con $r_1 ... r_n$ $(r_i \in n)$ oggetti ripetuti:

$\frac{n!}{r_1 \cdot ... \cdot r_n}$

Combinazioni (coefficente binomiale)

Modi di prendere k elementi su n elementi totali senza contare l'ordine: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} := \dbinom{n}{k} \qquad (n \geq k)$

Probabilità Condizionata

Def: Sia $S = \{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ uno spazio di probabilità. Sia $F \in \mathcal{F}$ con $P(F) > 0$ ed $E \in \mathcal{F}$ un altro evento.

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

$P(\overline{E}|F) = 1 - P(E|F)$

$P(A \cup B|F) = P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F)$

Probabilità Totali

$P(E) = P(E|F) \cdot P(F) + P(E|\overline{F}) \cdot P(\overline{F})$

in generale se F_i è una partizione di Ω:

$P(E) = \displaystyle\sum_{i=1} (P(E|F_i) \cdot P(F_i))$

Formula di Bayes

$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$

in generale: $P(F_k|E) = \frac{P(E|F_k) \cdot P(F_k)}{\sum_{i=1}^{n} (P(E|F_i) \cdot P(F_i))}$

Indipendenza di eventi

Siano A e B eventi in uno spazio di prob. $S = (\Omega, \mathcal{F}, P)$. A e B sono indipendenti se:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Considero gli eventi $A_1, A_2, ..., A_n$ e considero $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ sottoinsieme di indici.

La famiglia degli A_j con $j = 1...n$ si dice indipendenti se:

$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{in}) = P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{in})$

$\forall$ sottoinsieme di indici i.

Se A e B sono eventi indipendenti allora sono equivalenti:

1) $P(E|F) = P(E)$

2) $P(F|E) = P(F)$

Variabile aleatoria (casuale)

Sia $S = (\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ spazio di prob. discreto

Una variabile aleatoria è una funzione $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_k \in X(\Omega)$

Def: $P^x(x_k) = P(X^{-1}(x_k)) \quad (= P(X = x_k))$

Densità di probabilità

Data la v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *si chiama densità di probabilità la funzione:* $p_x \longrightarrow P^x(x_k)$ (è una misura di probabilità)

1)$p_x > 0 \forall x_k \in X(\Omega)$

2) $\forall I = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X(\Omega)$,

$$p_x(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \sum_{i=1}^{k}(P(X = x_i)) = \sum_{i=1}^{k}(p_x(x_i))$$

Variabili casuali indipendeti

Siano X *e* Y *due v.a. e* $I, J \subseteq \mathbb{R}$. *Allora* X *e* Y *sono indipendenti se:* $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$.

oss: $P(X^{-1}(I) \cap Y^{-1}(J)) = P(X^{-1}(I))P(Y^{-1}(J))$

Media

Sia X *un v.a. con legge* p_x *e alfabeto* $\mathcal{X}$.

Il numero $E(X) = \sum_{x_k}(x_k \cdot p_x(x_k))$ *si chiama media.*

$$E(X) = \sum_{x_k}(x_k p_x(x_k)) = \sum_{\omega \in \Omega}[X(\{\omega\})P(\{\omega\})]$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ E(aX) = aE(X) \\ 2)\ E(X+Y) = E(X) + E(Y) \end{array}\right\} (aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

3) $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

4) $X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

Oss: $a \in \mathbb{R}$, X *v.a. se* $X \equiv a \Rightarrow E(X) = E(a) = a$

5)Se $X \perp\!\!\!\perp Y$ allora $E(XY) = E(X)E(Y)$

Varianza

Def: X *v.a. discreta.* $Var(X) = \sum_k [x_k - E(X)]^2 p_x(x_k)$

1)$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

2)$Var(X) \geq 0$

3)$Var(aX) = a^2 Var(X)$

4)$Var(X + c) = Var(X)$

5)$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

6)$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$

Variabili casuali notevoli

1.Bernulli

Def: $X \sim \mathcal{B}(p)$.

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ *rappresenta il successo o insuccesso.*

$p_x(1) = p$, $p_x(0) = 1 - p$

MEDIA: $E(X) = p$

VARIANZA: $Var(X) = p \cdot (1 - p)$

2.Binomiale

Def: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Sono n *Berniulliane indipendenti di parametro* p.

$p_x(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ [*dove* k=*numero di successi.*]

MEDIA: $E(X) = n \cdot p$

VARIANZA: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

3.Geometrica

Def: $X \sim \mathcal{G}(p)$

probabilità che il primo successo richieda l'esecuzione di k *prove indipendenti di probabilità* p

$p_x(k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$

MEDIA: $E(X) = \frac{1}{p}$

VARIANZA: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

4.Geometrica translata

Def: $X' \sim \mathcal{G}'(p)$

se $X = X' - 1$ *dove* $X' \sim \mathcal{G}(p)$

MEDIA: $E(X) = E(X' - 1) = E(X') - 1 = \frac{1-p}{p}$

VARIANZA: $Var(X) = Var(X' - 1) = Var(X') = \frac{1-p}{p^2}$