LE PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DANS LES ENCHERES EN VALEUR COMMUN

Auteur : Corentin Lobet – M1 DS2E – FSEG Université de Strasbourg

Cadre : Cours de Théorie des Jeux ; Enseignante : Gisèle Umbhauer

INTRODUCTION

L'industrie de l'énergie occupant une place importante dans l'économie, l'étude des comportements de ses principaux acteurs éveille naturellement un intérêt non négligeable dans la théorie économique. La thématique qui nous intéresse ici est celle des enchères gouvernementales sur les terrains porteurs de ressources tel que le pétrole. De nombreux travaux ont contribué à la modélisation et l'étude empirique de ces transactions depuis la seconde moitié du siècle dernier. Nous aborderons dans un premier temps les prémisses de cette littérature afin d'en comprendre le cadre d'analyse dans sa forme la plus simple. Nous attacherons ensuite un intérêt particulier à la façon dont les acteurs de ces « jeux » d'enchère évoluent et parviennent à gagner de l'argent sans pour autant être des agents maximisateurs.

CONTENTS

I. COMMON VALUE AUCTIONS (CVA)

On parle d'enchères en valeur commune lorsque la valeur du bien enchéri est la même pour tous les joueurs. Si l'information est complète et symétrique, tous connaissent la distribution de la valeur du bien mais ils n'en connaissent pas la vraie valeur avant la fin de l'enchère. Cependant, ils peuvent recevoir un signal, c'est-à-dire une information partielle qui leur permet d'effectuer une estimation de la vraie valeur du bien. La distribution des signaux est aussi supposée connue, ainsi tous les participants peuvent se faire une idée sur les estimations de leurs concurrents.

I.1. STRUCTURE DU JEU

Nous traitons ici le cas de CVA au premier prix simultanés, c'est donc le plus offrant qui obtient le bien pour le prix qu'il a proposé sur la base d'une unique enchère. Nous noterons *V* la vraie valeur du bien, inconnue avant la fin du jeu mais dont la distribution est connue de sorte que $V \in [\underline{V}; \overline{V}]$. Chaque joueur reçoit un signal sur la valeur du bien avant que l'enchère ne commence. Les signaux, que nous noterons *s*, ont une distribution connue également : $s \in [\underline{s}; \overline{s}] = [V - \varepsilon; V + \varepsilon]$ où ε est un bruit connu qu'on interprète comme l'erreur d'estimation de *V* par *s*.

Ces distributions sont supposées uniformes continues dans les études décrites dans ce document. Nous pouvons facilement déduire que la valeur du bien dépend des signaux : $V \in [s - \varepsilon; s + \varepsilon]$. Les joueurs doivent donc tenir compte des signaux qu'ils reçoivent pour déterminer leur enchère, notés *b* pour *bid*. Ces particularités nous ramène à un problème de sélection adverse.

I.2. EQUILIBRE SYMETRIQUE DU JEU

Le gain d'un joueur i peut être noté ainsi :

$$\pi_i = \int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} (V - b) \left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j) ds_j \right)^{n-1} f(V) dV \qquad \textbf{(1)}$$

Où :

- i est un joueur et j représente tous les autres. Il y a n joueurs en tout.
- $[\underline{s}; \overline{s}] = [V - \varepsilon; V + \varepsilon]$
- $b = b_i = b(s_i)$ est l'enchère du joueur i
- $f(\cdot)$ désigne la fonction de distribution de la loi uniforme ici

Le terme $(V - b)$ représente le gain du joueur i lorsqu'il remporte l'enchère et le terme $\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j) ds_j \right)^{n-1}$ désigne la probabilité que le joueur i gagne, ou plus directement la probabilité que tous les autres joueurs perdent. Cette condition signifie qu'ils proposent tous une enchère $b_j(s_j) < b <=> s_j < b_j^{-1}(b)$.

L'équilibre de Nash symétrique (ou *SRNNE* pour *Symmetric Risk-Neutral Nash Equilibrium*) se déduit en maximisant cette fonction de profit. Le niveau optimal de l'enchère qui en résulte peut s'écrire comme suit :

$$\text{Si } s \leq \underline{V} + \varepsilon,\ b^*(s) = \underline{V} + \frac{(s_i - \underline{V} + \varepsilon)}{n+1} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{Si } s \in [\underline{V} + \varepsilon;\ \overline{V} - \varepsilon],\ b^*(s) = s - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n+1} e^{\frac{n(\underline{V} - s + \varepsilon)}{2\varepsilon}} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\text{Si } s \geq \overline{V} - \varepsilon,\ b^*(s) = s + \varepsilon - \left[\left(\overline{V} - b\left(\overline{V} - \varepsilon\right)\right)P(0) + 2n\varepsilon \int_0^{\frac{s-\overline{V}+\varepsilon}{2\varepsilon}} P(x)dx\right] P^{-1}\left(\frac{s-\overline{V}+\varepsilon}{2\varepsilon}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

$$\text{où } P(x) = e^{\ln(1-x^n)+n\int\frac{dx}{1-x^n}}$$

Les formules (2) et (3) sont démontrées à la fin de ce document et l'équation (4) est reportée dans **Kagel et Richard (2001)**.

Dans le cas intermédiaire (3), dont la fréquence est positivement liée à la précision des estimations (ε), l'enchère optimale est inférieure au signal reçu et tend vers $s - \varepsilon$ quand le nombre de joueurs et la valeur du signal augmentent.

I.3. WINNER'S CURSE (W'S-C)

La littérature empirique rapporte une tendance des joueurs à miser trop, ce qui mène souvent le meilleur offreur à perdre de l'argent. Ce phénomène est aussi vérifiable en théorie. Même en supposant qu'en moyenne les participants estiment correctement la valeur du bien, alors, sauf si tous proposent la même enchère, la meilleure offre sera nécessairement supérieure au prix du bien.

Il en découle que pour éviter cette malédiction du gagnant il est nécessaire de ne jamais miser au-delà de la valeur espérée du bien conditionnelle au signal reçu. Précisément, la valeur seuil du W's-C d'une enchère est la valeur espérée conditionnelle au signal le plus élevé. Cette valeur seuil que nous noterons $\tilde{b}$ est définie par la formule suivante quand $s \in \left[\underline{V} + \varepsilon;\ \overline{V} - \varepsilon\right]$:

$$\tilde{b} = E(V\ |s_{max}) = s_{max} - \varepsilon\frac{(n-1)}{(n+1)} \qquad \textbf{(5)}$$

Cependant, les enchérisseurs ne connaissent pas les signaux de leurs concurrents, c'est pourquoi ils doivent tenir compte de leur propre signal. Par conséquent, chaque joueur i détermine son propre niveau seuil $\tilde{b}_i$.

$$\tilde{b}_i = E(V\ |s_i) = s_i - \varepsilon\frac{(n-1)}{(n+1)} \qquad \textbf{(6)}$$

Cette enchère maximale peut être interprétée comme une première étape à la rationalité des joueurs. **Garvin et Kagel (1993)** s'en servent comme définition de l'expérience : un offreur misant au-delà est considéré inexpérimenté. Cette hypothèse présente la limite de seulement tenir compte de l'excès d'agressivité pour définir le manque d'expérience tandis que l'inverse (des mises très faibles) devrait aussi être pris en compte. Mais nous pouvons accepter cette définition étant donné que ce type de comportement est bien plus rare : l'objectif des participants étant de gagner ils ne sont pas incités à miser trop peu, notamment car les vraies CVA requièrent des coûts avant la participation à l'enchère (e.g. l'estimation de la valeur du bien).

Nous pouvons remarquer que cette valeur seuil est inférieure au signal. Ainsi, la stratégie basique qui consiste à proposer une offre égale au signal obtenu mène toujours au W's-C.

I.4. LIEN AVEC L'INDUSTRIE DU PETROLE

L'étude des enchères en valeur commune constitue une base théorique intéressante pour étudier les enchères pétrolières où les entreprises participantes ont le droit de sonder une partie des champs pétrolifères et/ou d'en étudier les données déjà recueillies. Leur signal correspondra à une estimation sur l'ensemble du terrain à partir du sondage effectué.

La transaction résulte sur une location d'un terrain que la ou les entreprises pourront exploiter pour en extraire les ressources souterraines. De ce fait, un même terrain, s'il demeure riche à la fin d'un bail, peut être proposé aux enchères plusieurs fois. Les entreprises peuvent avant l'enchère mener des études géophysiques (e.g. étude sismique) des terrains afin de réaliser une estimation de leur valeur (ceci correspond à leur signal).

Cependant, la théorie des CVA n'est que partiellement représentative et constitue donc une simplification de la réalité. Tout d'abord, nous n'incluons pas de coûts de transaction, de sondage et d'exploitation qui sont pourtant bien présents dans le cadre des enchères pétrolières. De plus, les technologies de sondage et d'extraction sont diverses et peuvent ne pas être à la disposition immédiate de tous les acteurs du marché. Par exemple pour l'extraction, si les ressources sont largement suffisantes pour extraire en continu du pétrole sur toute la durée du bail, le profit de la firme dépendra de sa capacité d'extraction. Cela implique d'une part que l'information privée est en réalité asymétrique (technologie de sondage) et d'autre part que la valeur du bien n'est pas tout à fait *commune* (technologie d'extraction).

Nous pouvons également prévoir une autre limite à l'approche théorique décrite ici puisque la distribution théorique des ressources d'or noir sur un terrain peut demeurer inconnue ou au mieux approximative (et improbablement uniforme). Enfin, nous ne présenterons que le cas d'un équilibre symétrique alors que l'équilibre de Nash est aussi possible lorsque les fonctions de meilleure réponse sont hétérogènes.

II. L'ADAPTATION AU WINNER'S CURSE PAR L'APPRENTISSAGE

Il est relativement acquis de nos jours que les agents économiques, confrontés à des problèmes complexes nécessitant des réponses rapides, ne raisonnent pas en suivant un comportement maximisateur. Pourtant, si ce type d'enchères, soumises au Winner's Curse, subsistent dans la sphère économique, c'est bien parce que les entreprises y trouvent un intérêt monétaire.

II.1. COMMENT LES JOUEURS APPRENNENT ?

La première question qui se pose est de savoir si l'expertise et la rationalité économique sont synonymes dans ce type de jeu. Pour tenter de répondre à cette question, **Dyer, Kagel et Levin (1989)** ont mené des expériences en laboratoire visant à répliquer les CVA avec d'une part des étudiants (groupe naïf) et d'autre part des professionnels de la construction qui avaient de l'expérience sur ce type d'enchères (groupe expert).

L'unique différence importante que les chercheurs ont pu observer est la neutralité au risque plus prononcée dans le groupe d'expert. En effet, lorsque le bruit du signal ε variait (i.e. l'incertitude), le groupe d'étudiants réagissait davantage que le groupe de professionnels.

Hormis ce résultat, les deux groupes souffraient du W's-C et, par conséquent, perdaient de l'argent en moyenne. Cependant, les auteurs ont rejeté l'hypothèse selon laquelle les professionnels n'aient pas joué sérieusement. Cette conclusion repose sur des arguments quantitatifs et qualitatifs : ils pouvaient théoriquement être rémunérés jusqu'à environ 100$ s'ils jouaient l'équilibre de Nash, ils étaient attentifs aux instructions et posaient des questions et ils réagissaient aux signaux et aux changements des conditions de jeu.

Par ailleurs, il est évident que leurs stratégies n'étaient pas les mêmes que celles employées dans leur travail, faute de quoi ils ne pourraient perdurer sur le marché. Ces résultats suggèrent que ces « experts » ne sont pas des agents rationnels maximisateurs et qu'ils ne parviennent pas à transférer leur expérience dans un domaine précis à ce jeu, pourtant similaire.

Finalement le joueur apprend en jouant même s'il n'est pas expert au jeu. Cela reflète le concept de routines dans la théorie économique évolutionniste ; les agents adaptent leur comportement sur la base de règles simples lorsqu'ils expérimentent ou observent des échecs faisant suite à l'application de leurs stratégies actuelles. Ainsi, l'expérience au jeu n'est pas synonyme de rationalité mais, bien que la connaissance du marché soit une base importante, provient en grande partie de l'apprentissage par la pratique.

II.2. MESURER L'EXPERIENCE

Un indicateur permettant de mesurer la stratégie du joueur est le discount rate. Il consiste en une mesure normalisée de la différence entre l'offre et le signal. Le DR se calcule comme suit :

$$DR_i = \frac{s_i - b_i}{\varepsilon} \qquad \textbf{(7)}$$

Un DR négatif indique une offre supérieure au signal et inversement. On peut alors définir le DR minimum requis pour observer un joueur expérimenté au sens de Garvin et Kagel.

$$DR_i = \frac{s_i - \tilde{b}_i}{\varepsilon} \qquad \textbf{(8)}$$

Par ailleurs, un DR trop élevé indique une mise trop faible, également signe du manque d'expérience.

Observer l'évolution de cet indicateur empiriquement permet de constater comment les joueurs évoluent lorsque le jeu est répété. Le DR peut être interprété comme la volonté d'un joueur à dévier de son signal, comme son degré d'agressivité ou encore comme une mesure de son aversion au risque.

II.3. DEUX FORMES D'APPRENTISSAGE

Garvin et Kagel (1993) se servent de données expérimentales recueillies lors de réplications en laboratoire des conditions des enchères en valeur commune auprès d'étudiants. L'analyse de ces données a permis de mettre en exergue l'existence d'un processus d'apprentissage lorsque le jeu est répété. En effet, les joueurs, inexpérimentés d'abord, se rapprochent par la répétition de l'équilibre de Nash et, par conséquent, s'ajustent au W's-C.

Afin d'avoir l'intuition sur la distribution des signaux et de la valeur du bien, les participants sont informés lors de l'énoncé des consignes qu'en moyenne, sur un grand nombre de répétitions, leurs signaux équivalent la valeur du bien. A la fin de chaque enchère, la valeur du bien, les signaux et les offres de tous les joueurs sont révélés.

Pour s'assurer de la pertinence des résultats, les participants étaient rémunérés leur solde restant plus 4$ (initialement 10$ - 20$ et pouvant déboucher sur quelques dizaines de dollars supplémentaires avec une stratégie gagnante) s'ils restaient sur le marché contre 4$ seulement s'ils perdaient. Le bruit du signal est faible au début de l'expérimentation afin que les participants aient le temps de corriger leurs stratégies.

L'étude des données de ces réplications de CVA montrent que les joueurs inexpérimentés se font plus rare au long des répétitions. Cela s'explique par la disparition du marché des joueurs les plus agressifs mais aussi par l'adaptation des joueurs.

Les auteurs proposent une analyse économétrique de l'évolution de l'expérience des joueurs dans ces jeux répétés. Pour ce faire, ils prennent comme variable dépendante le DR puisqu'il s'agit d'une mesure normalisée de la stratégie. Une distinction importante sur la nature de l'apprentissage est faite par les chercheurs et marque l'originalité de leur recherche par rapport à la littérature précédente.

D'une part, l'apprentissage par l'expérience décrit le changement de comportement à la suite d'une perte ou d'un gain et concerne un seul joueur à chaque répétition du jeu, le plus offrant. D'autre part, l'apprentissage par l'observation décrit l'adaptation de tous les joueurs qui n'ont pas gagné l'enchère. Ce second type d'ajustement est mesuré sur la base des pertes et gains hypothétiques i.e. les résultats qu'auraient eu les joueurs s'ils avaient remporté l'enchère en appliquant leur stratégie (leur DR). Ce second mécanisme est seulement possible si tous les joueurs sont informés de la valeur de bien et du signal le plus élevé à la fin de chaque répétition du jeu.

Pour ce qui est de l'apprentissage par l'expérience, l'analyse économétrique qu'ont menée les auteurs montre une augmentation importante et statistiquement significative du DR à la suite d'une perte et un effet moindre et peu significatif en cas de gains. Et concernant l'effet de l'observation, les auteurs ont trouvé un effet presque aussi important des pertes hypothétiques. Les gains hypothétiques ont aussi révélé un effet significatif bien qu'il fût moindre. De plus, la présence de gains hypothétiques est rare sur les premières périodes puisque les joueurs sont encore inexpérimentés (ils misent au-delà de la valeur espérée du bien).

Le résultat important qui ressort de ce papier est de considérer un processus d'apprentissage qui repose en partie sur l'observation. Cela permet aux joueurs de gagner bien plus vite de l'expérience et donc de ne plus subir le Winner's Curse. Ceux-ci ne restent pas passif lorsque leur offre ne remporte pas l'enchère mais tentent continuellement d'adapter leur stratégie grâce à leurs observations.

Par exemple, l'approche mise en œuvre par les auteurs considère que les joueurs appliquent leur stratégie au signal le plus élevé et réagissent en fonction du résultat hypothétique qui en résulte. Leur travail révèle notamment que les participants réagissent davantage aux pertes qu'aux gains (qu'ils soient réels ou hypothétiques). Cela révèle que, malgré la tendance des joueurs à être trop agressifs au début, ces derniers sont davantage intéressés dans la minimisation de leurs pertes futures que par le fait de remporter les enchères.

II.4. L'IMPORTANCE DE L'OBSERVATION

Nous nous intéressons ici à l'efficacité de l'observation relativement à celle de l'expérience dans le processus d'apprentissage afin d'avoir une idée de l'importance pour les joueurs d'analyser les informations qui leurs sont données après l'enchère (V et s_{max}). Pour illustrer l'effet prédominant de l'observation, nous réalisons une simulation d'un jeu de CVA avec les caractéristiques suivantes :

- 10 joueurs hétérogènes en termes de stratégies ; leur DR initial est généré aléatoirement selon une loi normale de moyenne nulle et de variance 0.2.
- Le jeu est répété 100 fois.
- Le bien enchéri a une valeur théorique distribuée uniformément sur l'intervalle [1000 ,2000] avec un pas de variation de 0.1, que nous jugeons assez bas pour travailler en modèle continu.
- Le bruit du signal est fixé à 100.
- Par soucis de simplification pour le calcul du RNNE, le signal maximal ne dépasse pas 1900.
- Le but n'étant pas d'observer la sortie du jeu, les joueurs sont dotés d'une fortune initiale de 5000 qui leur suffira largement à rester dans le jeu.

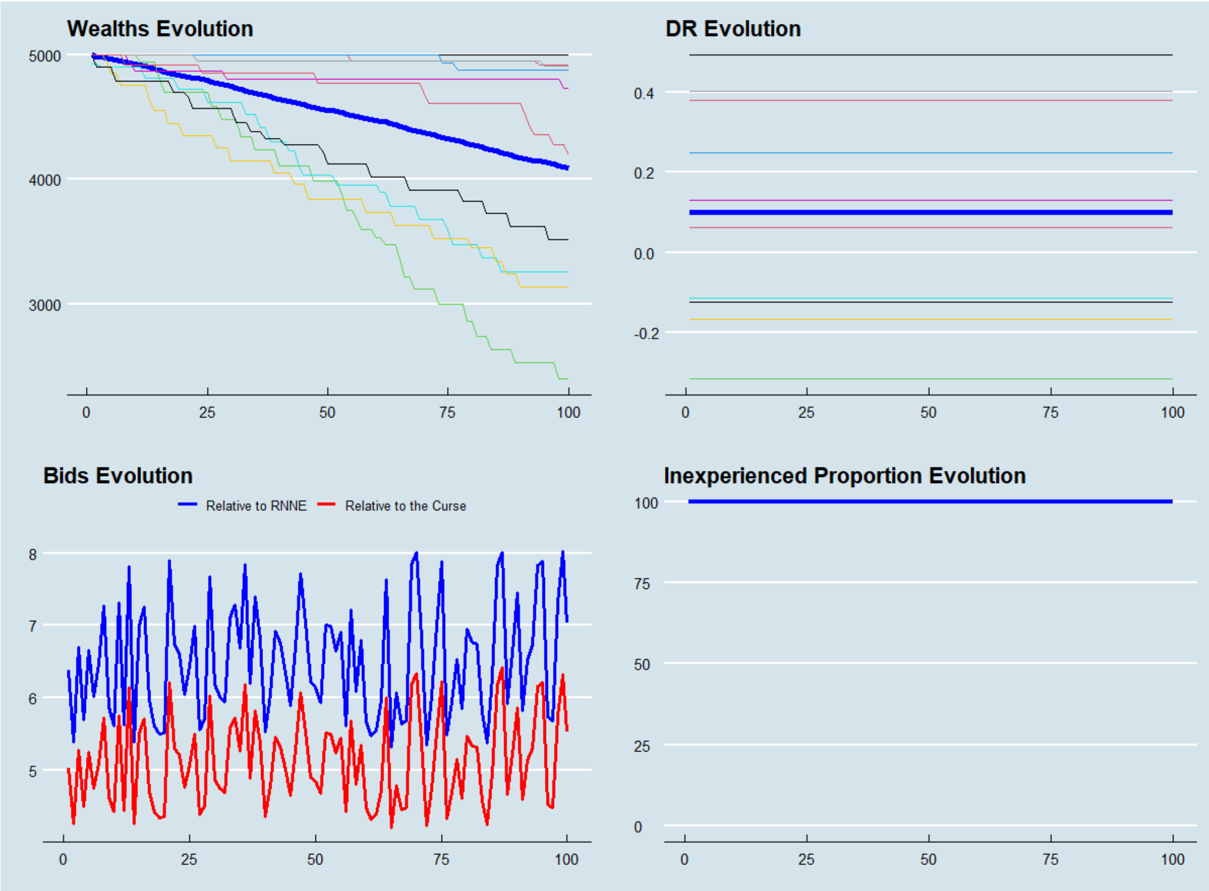
La stratégie des joueurs est déterminée par leur discount rate. Ainsi, leur offre est obtenue à partir de l'équation (7) comme $b_i = s_i - \varepsilon DR_i$.

Les graphiques de cette section représentent les évolutions suivantes sur 100 périodes :

- En haut à gauche l'évolution de la richesse des joueurs, la moyenne en bleu.
- En haut à droite l'évolution des DR des joueurs, la moyenne en bleu.
- En bas à gauche l'évolution relative des enchères en pourcentage :
  - En bleu la différence relative entre l'enchère moyenne et le RNNE moyen des joueurs i.e. leur déviation moyenne par rapport à l'équilibre de Nash symétrique.
  - En rouge la différence relative entre l'enchère moyenne et le seuil du Winner's Curse (valeur espérée du bien) moyen des joueurs.
- En bas à droite la proportion de joueurs inexpérimentés i.e. de joueurs qui sont en moyenne victimes du Winner's Curse.

II.4.1. ABSENCE D'APPRENTISSAGE

Dans ce premier cas, les joueurs n'apprennent pas de leurs expériences et leurs observations. Ainsi leurs stratégies sont inchangées dans le temps (DR constants). Leurs stratégies étant trop agressives, ils subissent tous le W's-C. Cela se traduit par de nombreuses pertes (richesses décroissantes) et un taux de joueurs inexpérimentés constant. Par conséquent, il ne se dégage aucune tendance dans l'évolution des mises. Enfin, les joueurs les plus risquophiles (DR bas) connaissent des pertes plus fortes puisqu'ils remportent plus souvent les enchères.



II.4.2. APPRENTISSAGE PAR L'EXPERIENCE

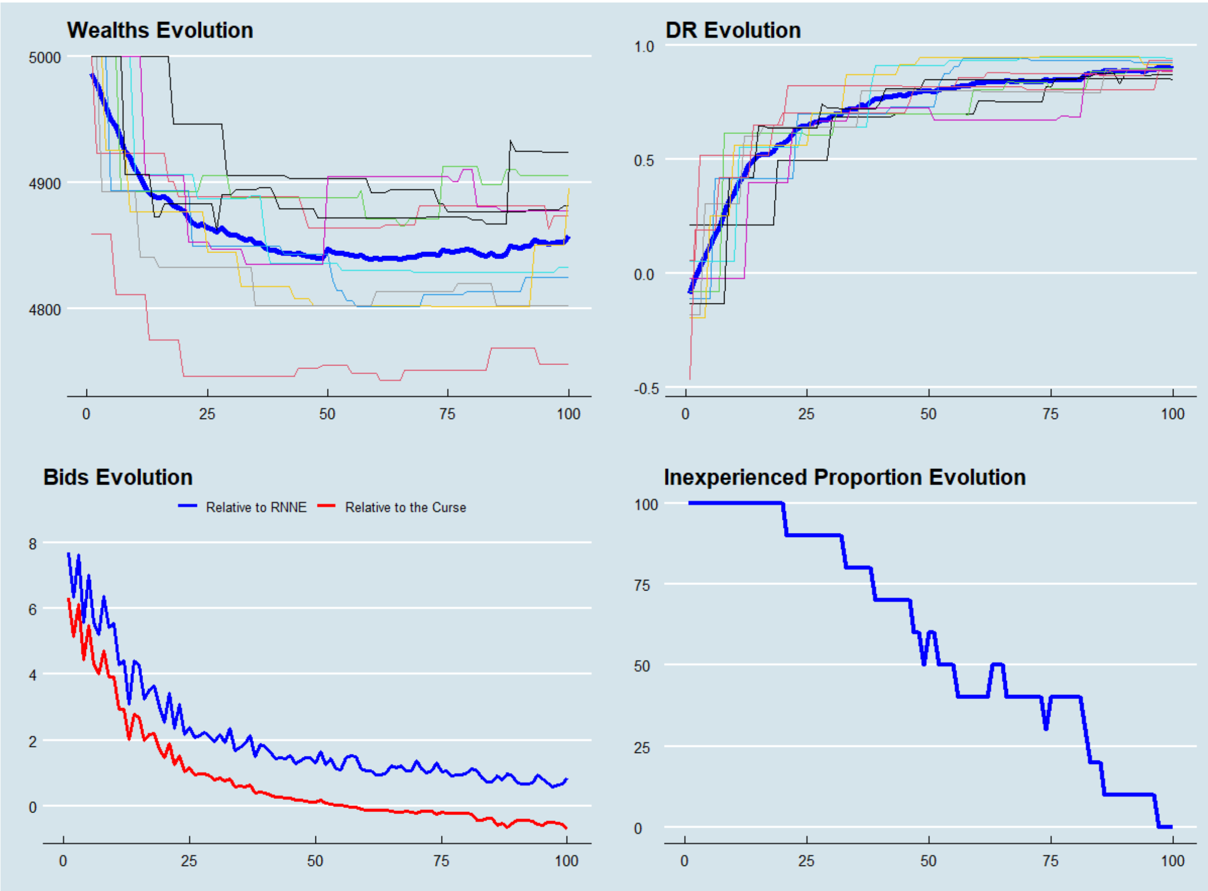
Le processus d'apprentissage par l'expérience se matérialise par la réaction stratégique à la suite de gains et pertes réels, nécessitant donc que le joueur ait remporté une enchère. Nous l'intégrons dans la simulation comme la variation absolue du DR après un résultat exprimé comme un retour sur investissement. Nous reprenons les coefficients estimés par **Garvin et Kagel (1993)** soient :

- Une hausse du DR d'environ 0.08 pour une perte de 1% (ROI)
- Une baisse du DR d'environ 0.01 pour un gain de 1% (ROI)

La figure représentant cette situation montre un léger retournement de la moyenne des richesses, signifiant que les joueurs commencent à gagner de l'argent. Cela est confirmé par la proportion de joueurs inexpérimentés qui passe sous les 50% au bout de 50 répétitions et finit par devenir nulle autour de 100 répétitions (environ 90 par réplication). Ainsi, les joueurs ne sont plus sujets au W's-C. Nous observons par conséquent une tendance à la baisse des écarts relatifs des offres. En effet, autour de 50 périodes l'écart relatif moyen des enchères par rapport au seuil du W's-C devient négatif. Cela rejoint la proportion de joueurs expérimentés qui deviennent majoritaire à ce même moment.

Les stratégies sont en effet marquées par des discount rates plus élevés et qui semblent tendre vers une valeur constante. Ce phénomène s'explique par le fait que la fréquence des gains qui devient suffisamment élevée pour que l'effet stratégique induit par les gains vienne contrebalancer l'effet plus important des pertes.

L'adaptation se révèle être relativement lente quand les participants n'apprennent que de leur propre expérience. Cela est dû au fait qu'il ne peut y avoir qu'un participant qui adapte sa stratégie à chaque répétition, le meilleur offreur.



II.4.3. APPRENTISSAGE PAR L'OBSERVATION

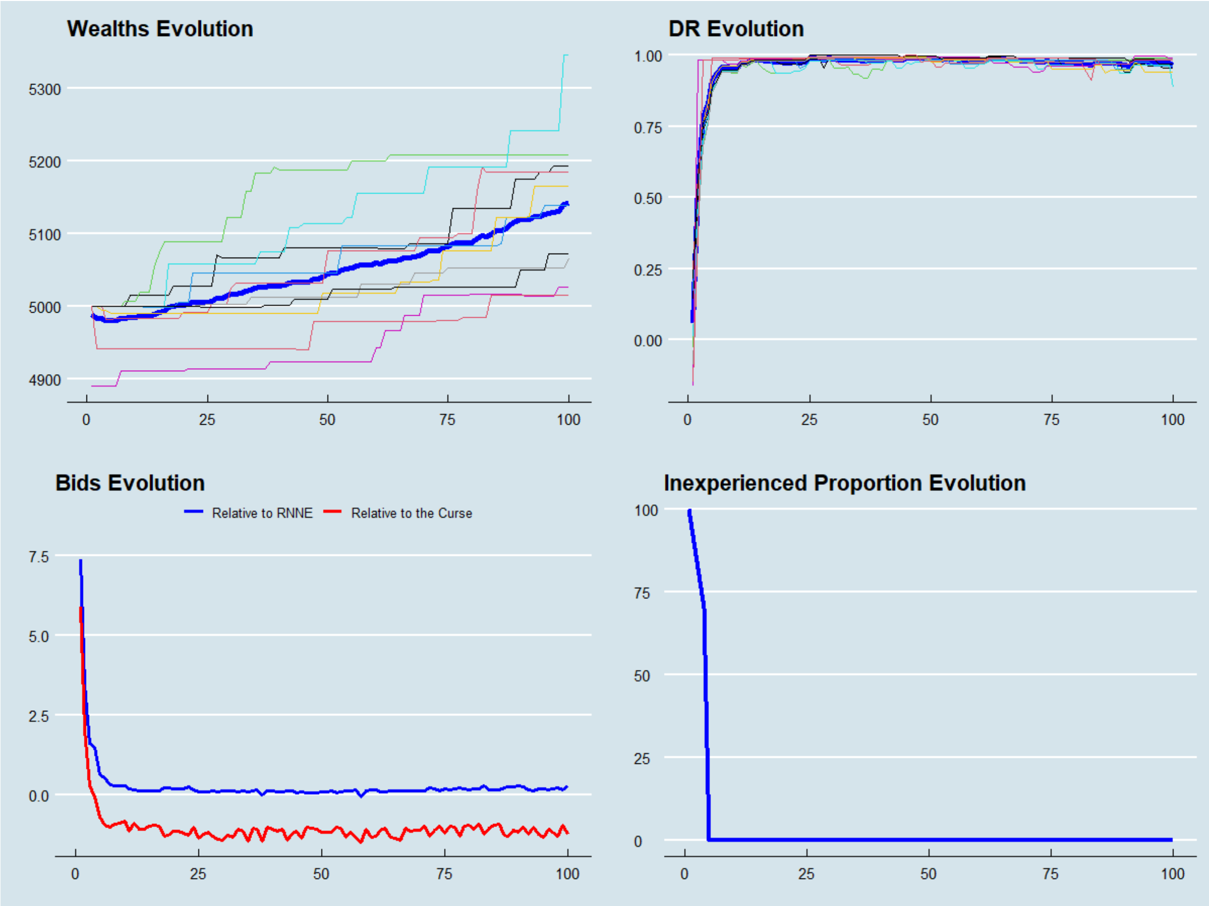
Pour implémenter l'effet de l'observation, Garvin et Kagel définissent les résultats hypothétiques comme les revenus qu'auraient obtenu les joueurs en appliquant leur stratégie (définie par leur DR) s'ils avaient reçu le signal le plus élevé. Les effets observés sont les suivants :

- Une hausse du DR d'environ 0.07 pour une perte hypothétique de 1% (ROI)
- Une hausse du DR d'environ 0.01 pour un gain hypothétique de 1% (ROI)

Il est évident que l'existence d'apprentissage observationnel implique la présence d'apprentissage par l'expérience. C'est pourquoi nous incluons les effets de l'expérience utilisés dans la sous-section précédente.

La figure suivante illustre instantanément l'importance de l'observation dans un jeu d'enchères en CVA répété. La tendance de l'évolution de la richesse se retourne au bout de quelques périodes seulement et le DR moyen frôle sa valeur haute très rapidement. Les graphiques du bas montrent qu'effectivement les joueurs se sont adaptés au Winner's Curse en moins de 10 périodes (environ 8 par réplication). Cela représente une vitesse d'apprentissage par la pratique dix fois plus élevée qu'en l'absence d'observation.

Il émerge aussi que les stratégies des joueurs tendent vers le SRNNE en présence d'apprentissage. Dans ce cas précis, le RNNE est atteint par les joueurs en 30 périodes environ. Cependant, la simplicité de cette simulation ne lui permet pas d'être suffisamment représentative. Par exemple, **Kagel et Richard (2001)** reportent que les joueurs, bien qu'ils parviennent à se défaire du W's-C, n'atteignent jamais l'équilibre symétrique.



II.4.4. AUTRES DETERMINANTS DE LA VITESSE D'ADAPTATION AU W'S-C

Nous avons analysé l'impact de l'apprentissage sur l'évolution stratégique des joueurs de façon ceteris paribus. Il y a évidemment d'autres facteurs qui impactent sur la vitesse de progression. Ci-après sont listés quelques effets complémentaires observés par simulation, également mesurés ceteris paribus selon les mêmes caractéristiques que précédemment :

- Plus il y a de joueurs plus l'adaptation est lente.
- Plus l'intervalle théorique de la valeur du bien est élevé plus l'adaptation est lente.
- Plus le bruit du signal est élevé plus l'adaptation est rapide.

CONCLUSION

La littérature étudiée démontre un processus de *learning by doing* dans les enchères en CVA, un mécanisme connu depuis longtemps dans les différentes sphères de la théorie économique. Le point remarquable, cependant, est que ce processus n'est pas limité au concept d'apprentissage dit de *trial and error*. S'y retrouve également la présence, et même la prépondérance, de l'observation et de la projection.

Ainsi, ce qu'appellent les évolutionnistes les « routines » ne sont pas uniquement révisées lors d'un échec mais le sont continuellement à travers l'observation des concurrents. Ce résultat nous paraît important car il permet de rendre la rationalité limitée plus efficiente que ce que laissent supposer les premiers théoriciens qui en ont exposées les fondations. Nous noterons aussi que les approches décrites ici ont l'avantage de s'inscrire dans un cadra dynamique et donc davantage réaliste que la simple étude des équilibres à un instant donné.

Toutefois, un tel processus requiert un accès relativement important à l'information, notamment les informations privées et les actions (voire les stratégies) des concurrents. Aussi, des approches théoriques bien plus représentatifs des enchères en CVA réelles ont été développées après la littérature citée ici. Vérifier ces résultats sur la base de ces autres modélisations et les comparer à ce qui est fait en conditions de marché est indispensable si l'on souhaite extrapoler les résultats.

ANNEXE : PREUVE DU SRNNE:

$$Max(b)\ \pi_i = \int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} (V-b)\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-1} f(V)dV \Leftrightarrow \frac{d\pi_i}{db} = 0$$

Sachant que $\frac{d\int_a^b f(x)dz}{dx} = \int_a^b \frac{df(x)}{dx}dz$ *et que* $\frac{d\int_a^{g(x)} f(x)dz}{dx} = \int_a^{g(x)} \frac{df(x)}{dx}dz + f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}$ *on a la CPO suivante :*

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \frac{d\left[(V-b)\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-1} f(V)\right]}{db} dV = 0$$

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \left[\frac{d(V-b)}{db}\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-1} + (V-b)\frac{d\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-1}}{db}\right] f(V)dV = 0$$

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \left[-\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-1} + (n-1)(V-b)\frac{f\left(b_j^{-1}(b)\right)}{b_j'\left(b_j^{-1}(b)\right)}\left(\int_{\underline{s_j}}^{b_j^{-1}(b)} f(s_j)ds_j\right)^{n-2}\right] f(V)dV = 0$$

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \left[-\left(b_j^{-1}(b) - V + \varepsilon\right)^{n-1} + \frac{(n-1)(V-b)}{b_j'\left(b_j^{-1}(b)\right)}\left(b_j^{-1}(b) - V + \varepsilon\right)^{n-2}\right] dV = 0$$

Tous les joueurs auront la même fonction d'enchère à l'équilibre. On cherche donc une solution symétrique telle que $b_j(\cdot) = b(\cdot)$*. Ainsi* $b_j^{-1}(b) = b_j^{-1}(b(s_i)) = s_i$*.*

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \left[-(s_i - V + \varepsilon)^{n-1} + \frac{(n-1)(V-b(s_i))}{b'(s_i)}(s_i - V + \varepsilon)^{n-2}\right] dV = 0$$

$$\int_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} \left[(s_i - V + \varepsilon)^{n-2} \left(-(s_i - V + \varepsilon) + \frac{(n-1)(V - b(s_i))}{b'(s_i)} \right) \right] dV = 0$$

En utilisant la règle $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ on trouve :

$$\left[-\frac{(s_i - V + \varepsilon)^{n-1}}{n-1} \left(-(s_i - V + \varepsilon) + \frac{(n-1)(V - b(s_i))}{b'(s_i)} \right) \right]_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} - \left[\frac{(s_i - V + \varepsilon)^n}{n(n-1)} \left(1 + \frac{n-1}{b'(s_i)} \right) \right]_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}} = 0$$

$$\left(\frac{(2\varepsilon)^{n-1}}{n-1} \left(-2\varepsilon + \frac{(n-1)(s_i - \varepsilon - b(s_i))}{b'(s_i)} \right) \right) + \left(\frac{(2\varepsilon)^n}{n(n-1)} \left(1 + \frac{n-1}{b'(s_i)} \right) \right) = 0$$

$$\frac{(2\varepsilon)^{n-1}}{n-1} \left(-2\varepsilon + \frac{(n-1)(s_i - \varepsilon - b(s_i))}{b'(s_i)} + \frac{2\varepsilon}{n} \left(1 + \frac{n-1}{b'(s_i)} \right) \right) = 0$$

$$\frac{(n-1)\big(s_i - \varepsilon - b(s_i)\big)}{b'(s_i)} + \frac{2\varepsilon}{n} \frac{(n-1)}{b'(s_i)} = 2\varepsilon - \frac{2\varepsilon}{n}$$

$$\frac{n(n-1)\big(s_i - \varepsilon - b(s_i)\big) + 2\varepsilon(n-1)}{b'(s_i)} = 2\varepsilon(n-1)$$

$$n(n-1)\big(s_i - \varepsilon - b(s_i)\big) + 2\varepsilon(n-1) = 2\varepsilon(n-1)b'(s_i)$$

$$2\varepsilon b'(s_i) + nb(s_i) = (2-n)\varepsilon + ns_i$$

Pour résoudre l'équation différentielle on peut utiliser le théorème suivant :

Soit $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ alors $y(x) = e^{\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx} \left(K + \int \left(\frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \right) dx \right)$

$$b(s_i) = e^{\int \frac{-n}{2\varepsilon} ds_i} \left(K + \int \left(\frac{(2-n)\varepsilon + ns_i}{2\varepsilon} e^{\int \frac{n}{2\varepsilon} ds_i} \right) ds_i \right) = e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} \left(K + \int \left(\frac{(2-n)\varepsilon + ns_i}{2\varepsilon} e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} \right) ds_i \right)$$

$$b(s_i) = e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} \left(K + \int \frac{(2-n)}{2} e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} ds_i + \int \frac{ns_i}{2\varepsilon} e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} ds_i \right)$$

Or, soit $\int P(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}(P(x)e^{ax} - \int P'(x)e^{ax}dx)$ et $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ on a :

$$b(s_i) = e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} \left(K + \frac{(2-n)\varepsilon}{n} e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} + \frac{2\varepsilon}{n} \left(\frac{ns_i}{2\varepsilon} e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} - e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} \right) \right) = e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} \left(K + e^{\frac{ns_i}{2\varepsilon}} \left(\frac{(2-n)\varepsilon}{n} + s_i - \frac{2\varepsilon}{n} \right) \right)$$

$$b(s_i) = e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} K + s_i - \varepsilon$$

Dans le cas où $s \leq \underline{V} + \varepsilon$, la vraie valeur V appartient à l'intervalle restreint $[\underline{V}, \overline{s}]$ car $\underline{V} \geq \underline{s}$, d'où le programme suivant :

$$Max(\breve{b})\, \pi_i = \int_{\underline{V}}^{\overline{s_i}} (V - b) \left(\int_{\underline{s_j}}^{{b_j}^{-1}(b)} f(s_j) ds_j \right)^{n-1} f(V) dV$$

$$\left[-\frac{(s_i-V+\varepsilon)^{n-1}}{n-1}\left(-(s_i-V+\varepsilon)+\frac{(n-1)(V-b(s_i))}{b'(s_i)}\right)\right]_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}}-\left[\frac{(s_i-V+\varepsilon)^n}{n(n-1)}\left(1+\frac{n-1}{b'(s_i)}\right)\right]_{\underline{s_i}}^{\overline{s_i}}=0$$

$$\frac{\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)^{n-1}}{n-1}\left(-\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)+\frac{(n-1)\left(\underline{V}-\breve{b}(s_i)\right)}{\breve{b}'(s_i)}+\frac{\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)}{n}\left(1+\frac{n-1}{\breve{b}'(s_i)}\right)\right)=0$$

$$\frac{(n-1)\left(\underline{V}-\breve{b}(s_i)\right)}{\breve{b}'(s_i)}+\frac{\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)(n-1)}{n\breve{b}'(s_i)}=\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)-\frac{\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)}{n}$$

$$\frac{n(n-1)\left(\underline{V}-\breve{b}(s_i)\right)+\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)(n-1)}{\breve{b}'(s_i)}=\left(s_i-\underline{V}+\varepsilon\right)(n-1)$$

$$\frac{n\left(\underline{V}-\breve{b}(s_i)\right)-\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}{\breve{b}'(s_i)}=-\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)$$

$$\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)\breve{b}'(s_i)+n\breve{b}(s_i)=n\underline{V}-\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)$$

Soit $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$ *alors* $y(x)=e^{\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx}\left(K+\int\left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)dx\right)$

$$\breve{b}(s_i)=e^{\int\frac{-n}{\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}ds_i}\left(\breve{K}+\int\left(\frac{n\underline{V}-\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}{\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}e^{\int\frac{n}{\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}ds_i}\right)ds_i\right)$$

$$\breve{b}(s_i)=\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{-n}\left(\breve{K}+\int\left(\left(n\underline{V}-\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)\right)\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{n-1}\right)ds_i\right)$$

$$\breve{b}(s_i)=\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{-n}\left(\breve{K}+\int n\underline{V}\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{n-1}ds_i-\int\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{n}ds_i\right)$$

$$\breve{b}(s_i)=\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{-n}\left(\breve{K}+\underline{V}\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{n}-\frac{\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\breve{b}(s_i)=\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)^{-n}\breve{K}+\underline{V}-\frac{\left(-s_i+\underline{V}-\varepsilon\right)}{n+1}$$

Dans cette situation il existe une solution particulière. En effet, si $s_i=\underline{V}-\varepsilon$ *alors* $V=\underline{V}$.

$$\breve{b}\left(\underline{V}-\varepsilon\right)=\left(-\underline{V}+\varepsilon+\underline{V}-\varepsilon\right)^{-n}\breve{K}+\underline{V}-\frac{\left(-\underline{V}+\varepsilon+\underline{V}-\varepsilon\right)}{n+1}=\underline{V}$$

Pour vérifier cette équation, il faut que $\breve{K}=0$, *d'où* $\breve{b}(s_i)=\underline{V}+\frac{(s_i-\underline{V}+\varepsilon)}{n+1}$

A la frontière entre les deux on doit avoir $\breve{b}\left(\underline{V}+\varepsilon\right)=b\left(\underline{V}+\varepsilon\right)$, *d'où :*

$$\underline{V}-\frac{\left(-\underline{V}-\varepsilon+\underline{V}-\varepsilon\right)}{n+1}=e^{\frac{-n\left(\underline{V}+\varepsilon\right)}{2\varepsilon}}K+\underline{V}+\varepsilon-\varepsilon$$

$$\frac{2\varepsilon}{n+1}=e^{\frac{-n\left(\underline{V}+\varepsilon\right)}{2\varepsilon}}K\Leftrightarrow K=\frac{2\varepsilon/(n+1)}{e^{\frac{-n\left(\underline{V}+\varepsilon\right)}{2\varepsilon}}}$$

$$b(s_i) = \frac{2\varepsilon/(n+1)}{e^{\frac{-n(\underline{V}+\varepsilon)}{2\varepsilon}}} e^{\frac{-ns_i}{2\varepsilon}} + s_i - \varepsilon = \frac{2\varepsilon}{n+1} e^{\frac{n(-s_i+\underline{V}+\varepsilon)}{2\varepsilon}} + s_i - \varepsilon$$

BIBLIOGRAPHIE

Dyer, Kagel, Levin, 1989, "A comparison of naïve and experienced bidders in common value offer auctions: A laboratory analysis", *The Economic Journal*, Vol. 99 pp 108-115

Garvin, Kagel, 1993, "Learning in common value auctions: Some initial observations", *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 25 pp 351-372

Haile, Hendricks, Porter, 2010, "Recent U.S. offshore oil and gas lease bidding: A progress report", *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 28(4) pp 390-396

Kagel, Levin, 1986, "The winner's curse and public information in common value auctions", *American Economic Review*, Vol. 76(5) pp 894-920

Kagel, Richard, 2001, "Super-experienced bidders in first-price common value auctions: Rules of thumb, Nash equilibrium bidding and the winner's curse", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 83(3) pp 408-419