Descomposición en valores singulares

Valores y vectores propios (autovalores y autovectores)

- El problema de los valores propios: Dada A una matriz $n \times n$, encontrar un escalr λ y un vector no nulo $\boldsymbol{x}$ tal que

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$$

- λ es valor propio and $\boldsymbol{x}$ el correspondiente vector propio
- λ podría ser un número complejo aunque $\boldsymbol{A}$ sea real
- El espectro $= \lambda(\boldsymbol{A}) =$ es el conjunto de valores porpios de $\boldsymbol{A}$
- Radio espectral $= \rho(\boldsymbol{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(\boldsymbol{A})\}$

Interpretación Geométrica

- La matriz expande o contrae cualquier vector que se encuentre en la dirección del vector propio de acuerdo al factor escalar
- El factor de expansión o contracción escalar viene dado por el valor propio correspondiente λ
-

Eigenvalue Problems

- Los problemas de valores propios se dan en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería, como el análisis estructural.

- Los valores propios también son importantes en el análisis de métodos numéricos.
- La teoría y los algoritmos se aplican tanto a matrices complejas como a matrices reales

- Nosotros nos vamos a centrar en matrices reales

Ejemplos: Valores y vectores propios

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 4,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = i,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -i,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

  donde $i = \sqrt{-1}$

Polinomio característico y multiplicidad

Polinomio característico

- La ecuación $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ ies equivalente a

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

que tiene soluciones distintas de cero $\boldsymbol{x}$ si, y sólo si, $A - \lambda I$ es singular

- Los varlores propios de $\boldsymbol{A}$ son las raíces λ_i del polinomio característico

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

en λ de grado n.

- El teorema fundamental del álgebra implica que la matriz A $n \times n$ siempre tiene n valores propios, pero pueden no ser reales ni distintos
- Los valores propios complejos de la matriz real ocurren en pares conjugados complejos:√ si $\alpha + i\beta$ es el valor propio de la matriz real, entonces también lo es $\alpha - i\beta$, donde $i = -1$

Ejemplo: polinomio característico

- Polinomio característico de la matriz del ejemplo anterior

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

por lo tanto los valores propios son

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2}, \quad \text{or} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

Matriz complementaria

- Polinomio mónico

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

es el polinomio característico de la cmatriz complementaria

$$\boldsymbol{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Las raíces del polinomio característico de grado > 4 no siempre se puede calcular en un número finito de pasos
- Por lo que en general el cálculo para matrices de orden > 4 requiere un proceso iterativo

Polinomio característico

- No se recomienda calcular los valores propios usando un polinomio característico debido a
  - coste para calcular los coeficientes del polinomio característico
  - sensibilidad de los coeficientes del polinomio característico
  - coste para resolver las raíces del polinomio característico
- El polinomio característico es una poderosa herramienta teórica pero generalmente no es útil computacionalmente

Ejemplo: polinomio característico

- Consideramos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

donde ϵ es un número positivos próximo a cero

- Los autovalores exactos de A son$1 + \epsilon$ and $1 - \epsilon$

- Calculando el polinomio característico en aritmética flotantein floating obtenemos

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + (1 - \epsilon^2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

que tiene a 1 como raíz doble

- Entonces, los autovalores no pueden calcularse por este método.