TEMA 1: Cálculo Matricial Avanzado. Matrices por bloques

Álgebra Lineal Numérica para Ciencia de Datos

Máster Universitario en Estadística Computacional y
Ciencia de Datos para la Toma de Decisiones
Curso 2022-2023
Prof. María Victoria Herranz

Índice

Matrices y Vectores

- Denotaremos el espacio vectorial de todas las matrices de orden $m \times n$ por $\mathbb{R}^{m\times n}$.
- Denotaremos el espacio vectorial de todos los vectores de orden n por $\mathbb{R}^n$.

$$x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notación de Matrices y Vectores

- Notación de matrices:
  - Letras mayúsculas ($A, B, ...$) para matrices.
  - Letra minúscula correspondiente con subíndices ij (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) para el elemento de la posición (i, j); a veces, emplearemos la notación $A(i, j)$)
- Notación de vectores:
  - Letras minúsculas (x, y, etc.) para vectores
  - Letra minúscula correspondiente con subíndice i para la i-ésima posición (e.g., x_i, y_i).
- Letras minúsculas para escalares (a, c, s, α, β, etc.)

Partición de una matriz en filas y columnas

- Una matriz es una colección de vectores columna o vectores fila

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Longleftrightarrow \mathbf{A} = [\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\cdots|\mathbf{c}_n], \quad \mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Longleftrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$$

Example

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 8 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$. Obtener la partición fila y la partición columna de A.

Notación

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces

- $A(k,:)$ denota la k-ésima fila,

$$A(k,:) = [a_{k1}, a_{k2}, \cdots , a_{kn}]$$

- $A(:,k)$ denota la k-ésima columna,

$$A(:,k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

Índice

Operaciones con matrices

- Suma y resta de matrices ($\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$):

$$C = A \pm B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

- Producto de escalar por matriz ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$):

$$C = \alpha A \Rightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

- Producto de matrices ($\mathbb{R}^{m\times p} \times \mathbb{R}^{p\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$)

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Producto de matrices

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{ij} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Producto de matriz por vector

- El producto $b = Ax$ es un caso especial del producto de matrices,

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

- La aplicación $x \to Ax$, definida de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, es lineal. Esto significa que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\alpha x) = \alpha Ax$$

Combinación lineal

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1 A(:,1) + x_2 A(:,2) + \cdots + x_n A(:,n)$$

Definición

Para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definimos

$$\operatorname{span}(A) = \{Ax \ / \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

Combinación lineal

El producto Ax también se puede expresar en función de las filas de A:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= A(1,:)x + A(2,:)x + \cdots + A(m,:)x$$

Producto externo

Sean x e y dos vectores de cualquier dimensión. La matriz xy^T es el producto externo de x e y.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

Observemos que cualquier columna de xy^T es un múltiplo de x y cualquier fila de xy^T es un múltiplo de y^T.

Producto externo

Ejemplo

Sean $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$xy^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Índice

Tipos especiales de matrices cuadradas

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz.

- Diremos que A es una matriz cuadrada cuando tiene idéntico número de filas que de columnas. Este número común n se denomina orden o dimensión de la matriz.
- Los elementos destacados $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ constituyen la *diagonal* de A.
- Una matriz cuadrada cuyos elementos no diagonales son cero se denomina matriz diagonal, esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Una matriz cuadrada se denomina triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- Una matriz cuadrada se denomina triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $j > i$.

Tipos especiales de matrices cuadradas

Ejercicio básico

¿Verdadero o Falso?

a. La suma de dos matrices diagonales es diagonal.
b. El producto de dos matrices diagonales es diagonal.
c. ¿Qué matriz se obtiene al multiplicar una matriz diagonal por una matriz cualquiera?. ¿Y si multiplicamos una matriz cualquiera por una matriz diagonal?

Tipos especiales de matrices cuadradas

Definición

Llamaremos matriz identidad de tamaño n a la matriz $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es $I_n = (\delta_{ij})$ *con* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.

- Es inmediato comprobar que $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Tipos de matrices cuadradas

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada.

- A es una matriz idempotente si $A^2 = A$.

Ejemplo

Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

Ejercicio

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz idempotente. Demuestra:

- O bien A es una matriz singular o bien $A = I$.
- Si A es idempotente, entonces $I - A$ también lo es.

Tipos de matrices cuadradas

- A es una matriz nilpotente si $A^r = O$ para cierto $r \in \mathbb{N}$. El menor exponente r tal que $A^r = O$, se llama índice de A.

Ejercicio

Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es nilpotente. ¿Cuál es su índice?

Ejercicio

Demuestra que la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es nilpotente. ¿Cuál es su índice?

Cuestión

Sea A una matriz nilpotente. Entonces $|A| = 0$. ¿Es cierto el recíproco?

Traspuesta de una matriz

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, definimos la matriz traspuesta de A como la matriz $n \times m$ dada por $A^T = (a^T_{ij})$, donde $a^T_{ij} = a_{ji}$. Si A es una matriz cuadrada, diremos que:

1. *A es simétrica si $A = A^T$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$).*
2. *A es antisimétrica si $A = -A^T$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$).*

Algunas propiedades de la traspuesta son las siguientes:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
4. $(A^T)^T = A$

Traspuesta de una matriz

Ejercicio

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cualquier matriz de orden n.

- Demuestra que la matriz AA^T es simétrica.
- Demuestra que la matriz $A + A^T$ es simétrica.
- Demuestra que la matriz $A - A^T$ es antisimétrica.

Cuestiones

Cuestiones

Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Analiza si las siguientes cuestiones son ciertas o falsas.

1. Si A y B son simétricas, entonces A^T y B^T son simétricas.
2. Si A y B son simétricas, entonces $A + B$ es una matriz simétrica.
3. Si A y B son simétricas, entonces AB es una matriz simétrica.
4. Si A y B son simétricas y AB es simétrica, entonces BA es simétrica.

Inversa de una matriz cuadrada

Definición (Matriz invertible)

Sea A una matriz $n \times n$. Diremos que la matriz A es invertible o regular si y solo si existe B matriz $n \times n$ tal que

$$A \cdot B = I_n \qquad \text{y} \qquad B \cdot A = I_n \tag{1}$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. En otro caso diremos que la matriz A es singular.

Cálculo de la inversa de una matriz por el método de Gauss

Ejercicio básico

Calcular la inversa mediante el método de Gauss de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Índice

Matrices ortogonales

Definición

Una matriz A es ortogonal si verifica $AA^T = I$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Otra definición equivalente, aunque menos útil, es que una matriz es ortogonal si sus columnas forman una base ortonormal.

Ejemplo

Demuestra que la siguiente matriz es ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

¿Cómo se calcula la inversa de una matriz ortogonal?

Matrices ortogonales

Ejercicio

Demuestra las siguientes propiedades:

1. El producto de dos matrices cuadradas ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal.
2. La inversa de una matriz ortogonal es también ortogonal.
3. La matriz identidad de cualquier orden es ortogonal.

Ejercicio

Determinar los valores de y para los cuales es ortogonal la matriz

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & t & s \\ 3 & s & 2 \\ s & -2 & t \end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales

Ejercicio

Sean A una matriz ortogonal de orden 2. Determina todas las matrices ortogonales A de orden dos de manera que la matriz $S = A + I$ sea ortogonal.

Matrices normales

Definición

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La matriz $A^* = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, donde $\bar{a}_{ji}$ es el conjugado complejo de a_{ji} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots n)$ se denomina matriz traspuesta conjugada.

- Claramente $(A^*)^* = A$
- Si A es una matriz real, entonces $A^* = A^T$

Matrices normales

Definición

Se dice que una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *es*

1. *Hermítica si* $A = A^*$, *es decir, si* $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ *para todo* $i, j = 1, 2, \ldots$
2. *Unitaria si* $A^* = A^{-1}$, *es decir,* $AA^* = A^*A = I$.
3. *Ortogonal o normal si* $AA^* = A^*A$.

- Toda matriz hermítica o unitaria es ortogonal.
- Si A es hermítica e invertible, entonces A^{-1} también es hermítica.
- Si A es ortogonal e invertible, entonces A^{-1} es ortogonal.
- En las matrices ortogonales, los vectores propios (o autovectores) asociados a valores propios diferentes son ortogonales.
- Una matriz cuadrada A tiene columnas ortonormales si y sólo si $A^T A = AA^T = I$.

Índice

Matrices por bloques

En muchas ocasiones convendrá considerar que las matrices están formadas por matrices de tamaños más pequeños en lugar de escalares. Esto ocurre, por ejemplo, en algunas aplicaciones en las que aparecen matrices con un elevado número de ceros, que además están agrupados o formando algunas estructuras que se repiten. En tal caso, trazamos líneas horizontales discontinuas entre algunas filas y líneas verticales discontinuas entre algunas columnas de la matriz y llamamos bloques a las matrices de tamaños más pequeños obtenidas de esta forma. Veamos un ejemplo.

Matrices por bloques

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques

Podemos considerar:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ \hline 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices por bloques

Consideremos ahora la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

que podemos dividir en bloques como

$$C = \left(\begin{array}{cc:ccc} 3 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques. Operaciones

Si calculamos $A + C$ de acuerdo con la definición de la suma de matrices, obtenemos que

$$\begin{aligned} A + C &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + C_{11} & A_{12} + C_{12} \\ A_{21} + C_{21} & A_{22} + C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices por bloques

Consideremos ahora la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 6}$$

que podemos dividir en bloques como

$$B = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques. Operaciones

Si calculamos AB de acuerdo con la definición de la multiplicación de matrices, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 15 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 9 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques

Podemos considerar este producto de matrices como

$$
\begin{aligned}
C &= AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 2 & 6 & 15 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hdashline 1 & 9 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 9 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

- El número de multiplicaciones y adiciones de escalares que hemos tenido que realizar para obtenerla es bastante menor.
- La misma expresión que utilizamos para calcular AB elemento a elemento, nos proporciona el mismo resultado cuando sustituimos los elementos por bloques.

Matrices por bloques

Definición

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *y que* $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. *Decimos que dos divisiones en bloques de* A *y* B *son compatibles para la multiplicación si el número de bloques columna de* A *coincide con el número de bloques fila de* B *y el número de columnas del* $i-$*ésimo bloque columna de* A *coincide con el número de filas del* $i-$*ésimo bloque fila de* B.

Matrices por bloques

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- Si consideramos la división en bloques de A formada por un único bloque (es decir, la propia matriz A) y la división en bloques de B formada por sus columnas,

$$B = \begin{bmatrix} B(:,1) & B(:,2) & \cdots & B(:,p) \end{bmatrix},$$

donde $B(:,j)$, para $j = 1, 2, \ldots, p$ es la $j-$ ésima columna de B, entonces tenemos que

$$AB = A\begin{bmatrix} B(:,1) & B(:,2) & \cdots & B(:,p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB(:,1) & AB(:,2) & \cdots & AB(:,p) \end{bmatrix}$$

Matrices por bloques

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- Si consideramos la división en bloques de A formada por sus filas, es decir

$$A = \begin{pmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{pmatrix},$$

donde $A(i,:)$, para $j = 1, 2, \dots, m$ es la $i-$ ésima fila de A, y la división en bloques de B formada por un único bloque (es decir, la matriz B) entonces tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A(1,:)B \\ A(2,:)B \\ \vdots \\ A(m,:)B \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- Si consideramos la división en bloques de A formada por sus filas y la división en bloques de B formada por sus columnas, es decir

$$A = \begin{bmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} B(:,1) & B(:,2) & \cdots & B(:,p) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(:,1) & B(:,2) & \cdots & B(:,p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(1,:)B(:,1) & A(1,:)B(:,2) & \cdots & A(1,:)B(:,p) \\ A(2,:)B(:,1) & A(2,:)B(:,2) & \cdots & A(2,:)B(:,p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(m,:)B(:,1) & A(m,:)B(:,2) & \cdots & A(m,:)B(:,p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices por bloques

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- Si consideramos la división en bloques de A formada por sus columnas y la división en bloques de B formada por sus filas, es decir

$$A = \begin{bmatrix} A(:,1) & A(:,2) & \cdots & A(:,n) \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} B(1,:) \\ B(2,:) \\ \vdots \\ B(n,:) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A(:,1) & A(:,2) & \cdots & A(:,n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(1,:) \\ B(2,:) \\ \vdots \\ B(n,:) \end{pmatrix} \\ &= \left(A(:,1)B(1,:) + A(:,2)B(2,:) + \cdots + A(:,n)B(n,:)\right) \end{aligned}$$

Matrices por bloques

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- En particular, si suponemos $I_m = \begin{pmatrix} e(1,:) \\ e(2,:) \\ \vdots \\ e(m,:) \end{pmatrix}$, donde $e(k,:)$ denota la $k-$ésima fila de I_m, entonces:

$$\begin{pmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{pmatrix} = A = I_m A = \begin{pmatrix} e(1,:) \\ e(2,:) \\ \vdots \\ e(m,:) \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e(1,:)A \\ e(2,:)A \\ \vdots \\ e(m,:)A \end{pmatrix}$$

Por tanto, $e(k,:)A = a(k,:)$, para $k = 1, 2, ..., m$. En otras palabras, el producto de la $k-$ésima fila de I_m por la matriz A, coincide con la $k-$ésima fila de A.

Matrices por bloques

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

- Análogamente, supongamos ahora que $I_n = \begin{pmatrix} e(:,1) & e(:,2) & \cdots & e(:,n) \end{pmatrix}$, donde $e(:,K)$ denota la $k-$ésima columna de I_n, entonces:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A(:,1) & A(:,2) & \cdots & A(:,n) \end{pmatrix} &= A = AI_n = A\begin{pmatrix} e(:,1) & e(:,2) & \cdots & e(:,m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ae(:,1) & Ae(:,2) & \cdots & Ae(:,m) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, $Ae(:,k) = A(:,k)$, para $k = 1, 2, ..., n$. En otras palabras, el producto de la matriz A por la $k-$ésima columna de I_n, coincide con la $k-$ésima columna de A.

Matrices por bloques

Teorema

Sean $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

Matrices por bloques: determinantes

Ejercicio

Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

Matrices por bloques: determinantes

Proposición

Si A es una matriz triangular por bloques, es decir, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$$

Matrices por bloques: determinantes

Ejercicio

Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -1 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Matrices por bloques: determinantes

Corolario

Si un determinante puede dividirse por bloques de la forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

siendo A_{11} y A_{22} cuadradas y A_{11} regular, entonces

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

Matrices por bloques: determinantes

Ejercicio

Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Matrices por bloques. Inversa

Ejercicio

Encontrar la inversa de la matriz por bloques de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix},$$

sabiendo que A_{11} y A_{22} son matrices regulares.

Matrices por bloques. Inversa

Ejercicio

Sean A_{11}, A_{21} y A_{22} matrices de órdenes respectivos $m \times m$, $n \times m$ y $n \times n$. Probar que la matriz por bloques

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

es invertible si y solo si A_{11} y A_{22} son invertibles. Demostrar, además, que

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques. Inversa

Ejercicio

Calcula la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices por bloques

Definición

Sean A_1, A_2,..,A_s matrices cuadradas de órdenes respectivos m_1, m_2, ..., m_s. La matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

se llama suma directa de las matrices A_1, A_2,..,A_s y se denota por

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s = diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

Matrices por bloques

Proposición

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_s$ matrices tales que $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Se cumple que:

1. $\operatorname{tr}(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s) = \operatorname{tr}(A_1) + \cdots + \operatorname{tr}(A_s)$.
2. $|A_1 \oplus \cdots \oplus A_s| = |A_1| \cdots |A_s|$.
3. Si A_i es invertible $\forall i = 1, \ldots, s$, entonces $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ también es invertible y
$$A^{-1} = A_1^{-1} \oplus \cdots \oplus A_s^{-1}$$

Matrices por bloques. Inversa

Ejercicio

Calcula la inversa de la matriz $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, siendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

Producto de Kronecker

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $p \times q$. El producto de Kronecker $A \otimes B$ es la matriz de tamaño $pm \times qn$ definida por:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Producto de Kronecker

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} & 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} & 4 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\ 7 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 35 & 40 \\ 5 & 0 & 25 & 0 \\ 14 & 16 & 28 & 32 \\ 10 & 0 & 20 & 0 \\ 49 & 56 & 21 & 24 \\ 35 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Producto de Kronecker

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & -1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 7 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 9 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ -2 \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -7 & -8 & -1 & 35 & 40 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -10 & 0 & 10 \\ 14 & 16 & 2 & 49 & 56 & 7 & 63 & 72 & 9 \\ -4 & 0 & 4 & -14 & 0 & 14 & -18 & 0 & 18 \\ -14 & -16 & -2 & 21 & 24 & 3 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & -6 & 0 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Producto de Kronecker: propiedades

El producto Kronecker es un caso especial del producto tensorial, por lo que es bilineal y asociativo.

Si A, B, C y D son matrices de manera que se puedan formar los productos AC y BD, entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

A esto se llama la propiedad del producto mixto, porque mezcla el producto ordinario de matrices y el de Kronecker.

Producto de Kronecker: propiedades

Ejemplo

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices $(A \otimes B)(C \otimes D)$ y $AC \otimes BD$ y observa que obtienes el mismo resultado.

Producto de Kronecker: propiedades

Dadas las matrices A, B, C y D y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
2. $(\alpha A) \oplus B = A \oplus (\alpha B) = \alpha(A \oplus B)$.
3. $(A + B) \oplus C = A \oplus C + B \oplus C$.
4. $A \oplus (B + C) = A \oplus B + A \oplus C$.
5. $(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$
6. $(A \oplus B)^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
7. $A \oplus B = O \ \Leftrightarrow A = O$ ó $B = O$
8. $\mathrm{rg}(A \otimes B) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$.

Producto de Kronecker: propiedades

Cuestión

Demuestra que $I_m \oplus I_n = Imn$.

Cuestión

¿El producto de Kronecker cumple la propiedad conmutativa?

Producto de Kronecker: propiedades

El producto de Kronecker no es conmutativo. Sin embargo, $A \otimes B$ y $B \otimes A$ son equivalentes en permutación, lo que quiere decir que existen matrices de permutación P y Q tales que

$$A \otimes B = P\,(B \otimes A)\,Q.$$

Si A y B son matrices cuadradas, entonces $A \otimes B$ y $B \otimes A$ son incluso de permutación similar, lo que quiere decir que podemos tomar $P = Q^T$.

Producto de Kronecker: propiedades

En la Unidad 3 de la asignatura, veremos que:

- Supongamos que A y B son matrices cuadradas de tamaño n y m respectivamente. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A y $\mu_1 \ldots, \mu_m$ los de B (enumerados según la multiplicidad). Entonces los autovalores de $A \otimes B$ son

$$\lambda_i \mu_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \, j = 1, \ldots, m.$$

- Sean A y B son matrices rectangulares. Supongamos que A tiene r_A valores singulares no nulos $\sigma_{A,i}$, $i = 1, \ldots, r_A$. y que B tiene r_B valores singulares no nulos, $\sigma_{B,i}$, $i = 1, \ldots, r_B$. Entonces el producto de Kronecker $A \otimes B$ tiene $r_A r_B$ valores singulares no nulos, que son:

$$\sigma_{A,i}\sigma_{B,j}, \qquad i = 1, \ldots, r_A, \, j = 1, \ldots, r_B.$$