TEMA 2: Factorización de matrices. Factorización QR: Método de Gram-Schmidt

Álgebra Lineal Numérica para Ciencia de Datos

Máster Universitario en Estadística Computacional y
Ciencia de Datos para la Toma de Decisiones
Curso 2022-2023

Prof. María Victoria Herranz

Índice

Factorización QR

Dada una matriz A (no necesariamente cuadrada), con columnas linealmente independientes, encontraremos matrices Q, R tales que:

- $A = QR$.
- Las columnas de Q son un conjunto de vectores ortonormales.
- Q es del mismo tamaño que A.
- R es triangular superior invertible.

La forma de obtener la factorización QR de A, es aplicando el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A.

Índice

Bases ortonormales

La ortogonalidad es equivalente a la perpendicularidad clásica cuando trabajamos en el espacio euclídeo usual. Cuando utilizamos otro producto escalar diferente al usual la ortogonalidad puede tener otras interpretaciones geómetricas distintas de la perpendicularidad que, en la mayoría de ocasiones, carece de importancia. Lo realmente atractivo de la ortogonalidad en álgebra lineal es que sirve como medio de simplificación en numerosos cálculos.

Definición

Sea E un espacio vectorial euclídeo.

- *Se dice que $u \in E$ y $v \in E$ son ortogonales ($u \perp v$) si $\langle u, v \rangle = 0$.*
- *Un vector $u \in E$ se dice unitario si $\|u\| = 1 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 1$.*
- *Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_p\}$ se dice ortogonal si todos los u_i son ortogonales dos a dos.*
- *Un conjunto de vectores $\{w_1, \ldots, w_p\}$ se dice ortonormal si es ortogonal y todos los vectores w_i son unitarios.*

Bases ortonormales

Nota

- Si $\mathcal{B}^o = \{u_1, \ldots, u_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores, entonces el conjunto

$$\left\{ w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \ldots, w_p = \frac{u_p}{\|u_p\|} \right\}$$

es un conjunto ortonormal.

Ortonormalización de Gram-Schmidt

Ortonormalización de Gram-Schmidt

Se E un espacio euclídeo de dimension finita n y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de E. Entonces existe una base ortogonal (ortonormal) $\mathcal{B}^\circ = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ verificando:

$$\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle = \langle\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}\rangle \quad \text{para todo} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ortonormalización de Gram-Schmidt

Ejemplo

Sea $E = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio euclídeo usual. Utilizando el método de Gram-Schmidt, vamos a ortonormalizar la base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,2), v_2 = (3,1,1), v_3 = (-2,-1,2)\}\,.$$

En primer lugar normalizamos el vector $u_1 = v_1$, esto es, hallamos un vector unitario en la dirección de u_1. Para este fin, basta dividir por su norma:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|(1,1,2)\|}(1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2).$$

Seguidamente, encontramos un vector (que llamamos u_2) ortogonal a u_1 y tal que $L[\{v_1, v_2\}] = L[\{u_1, u_2\}]$:

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = v_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_2, u_1 \rangle \, u_1 \\ &= (3,1,1) - \frac{1}{6} \langle (3,1,1), (1,1,2) \rangle \, (1,1,2) = (3,1,1) - (1,1,2) = (2,0,-1). \end{aligned}$$

Ortonormalización de Gram-Schmidt

Normalizamos u_2 y obtenemos un vector unitario w_2 en la misma dirección:

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(2,0,-1)}{\|(2,0,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1).$$

Por último, debemos encontrar un vector u_3, ortogonal a u_1 y u_2 verificando $L[\{v_1, v_2, v_3\}] = L[\{u_1, u_2, u_3\}]$, y para hallar w_3 bastará con normalizar u_3,

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 \\ &= v_3 - \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle v_3, u_2\rangle\, u_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_3, u_1\rangle\, u_1 \\ &= (-2,-1,2) + \frac{6}{5}(2,0,-1) - \frac{1}{6}(1,1,2) \\ &= \frac{7}{30}(1,-5,2). \end{aligned}$$

Finalmente

$$w_3 = \frac{(1,-5,2)}{\|(1,-5,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,2).$$

Factorización QR

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con columnas linealmente independientes, aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A.

Proceso de Gram-Schmidt

A partir de las columnas linealmente independientes de A, $v_1.$, $v_2, \ldots, v_m$, se construyen los vectores

$$u_1 = v_1, \qquad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Entonces, los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ son ortogonales.

Factorización QR

Ejemplo

Determina la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que las columnas de A son linealmente independientes. Por tanto, podemos aplicar el algoritmo de la factorización QR, obteniendo vectores ortonormales a partir de las columnas de A.

- $u_1 = v_1 = (1, 1)$
- $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (-2, 1) - \frac{\langle (-2,1), (1,1) \rangle}{\|(1,1)\|^2}(1, 1) = (-2, 1) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- Normalizamos los vectores anteriores:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Factorización QR

Por tanto, la matriz Q será

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Y la matriz R la obtendremos como

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Factorización QR

Ejercicio

Halla la factorización QR de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$