TEMA 2: Factorización de matrices. Factorización LU

Álgebra Lineal Numérica para Ciencia de Datos

Máster Universitario en Estadística Computacional y Ciencia de Datos para la Toma de Decisiones
Curso 2022-2023

Prof. María Victoria Herranz

1. Factorización LU
   - Factorización LU: Algoritmo
   - Factorización LU y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Índice

1. Factorización LU
   - Factorización LU: Algoritmo
   - Factorización LU y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Supongamos que tenemos una colección de sistemas de ecuaciones de la forma

$$Ax = b_1$$

$$Ax = b_2$$

$$\dots$$

¿Cómo podríamos resolver estos sistemas?

- Si la matriz A es invertible, directamente calculamos su inversa y resolvemos $x_i = A^{-1}b_i$
- Imaginemos que hemos resuelto el sistema $Ax = b_1$, mediante eliminación Gaussiana. No podríamos emplear este procedimiento para hallar las soluciones de $Ax = b_2$, puesto que para ello, debemos aplicar a b_2 todos los pasos del proceso de escalonamiento.
- ¿Qué pasa si A no es invertible? El sistema $Ax = b_i$ puede no tener solución o tener infinitas soluciones.
- ¿Podríamos reducir el coste computacional ya que la matriz de coeficientes, A, es común a todos los sistemas? Es decir, ¿existe una forma eficiente de resolver todos los sistemas a la vez?

Factorización LU

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Una factorización LU de la matriz A es un par de matrices (L, U), donde L, U son cuadradas de orden n, U es triangular superior y L es unitriangular inferior (es decir, L es triangular inferior y todas las entradas diagonales de L son iguales a 1)

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5/14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{pmatrix}$$

siendo $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5/14 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{pmatrix}$

Factorización LU

Teorema (Teorema de Doolittle)

Si los menores principales de una matriz A de orden n son no nulos, entonces A admite una descomposición LU. Esta descomposición es única si los elementos de la diagonal principal de L son todos unos.

Si A es una matriz $n \times n$ no singular, pero que no satisface las condiciones del Teorema anterior, puede suceder que sí se satisfagan dichas condiciones si se efectúan intercambios de filas en la citada matriz. Por otra parte, si A es singular, puede suceder que admita factorización LU, en este caso no única.

Factorización LU: Algoritmo

Para obtener la Factorización LU de una matriz A, se emplea el método de eliminación de Gauss, con las siguientes reglas:

Reglas:

- **No se permite intercambiar dos filas.**
- **La fila en la que estamos realizando la transformación elemental sólo se involucra en ella sumándola a las demás.**

Factorización LU: Algoritmo

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \boxed{6} & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}F1+F3 \\ F1+F4}]{-2F1+F2} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-3F2+F3 \\ \frac{1}{2}F2+F4}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F3+F4]{} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix} = U.$$

La matriz L será triangular inferior, con 1's en la diagonal. Para obtener las entradas de L que están debajo de la diagonal, debemos y dividir por el **pivote** (el número recuadrado en cada paso anterior) las entradas situadas por debajo de éste. Así pues,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factorización LU: Algoritmo

Ejercicio

Hallar la factorización LU de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 9 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Factorización LU y su aplicación a la resolución de SEL

Una de las motivaciones para una factorización LU es el hecho de que esta factorización puede usarse como un método alternativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, donde una vez que la matriz del sistema se ha factorizado, la solución del sistema se puede obtener resolviendo dos sistemas sencillos, uno por el método de sustitución hacia adelante y el otro por el método de sustitución hacia atrás. La factorización LU es otro enfoque diseñado para explotar sistemas triangulares.

Consideremos el sistema de ecuaciones $Ax = b$, y asumimos que tenemos A descompuesto como $A = LU$. Entonces podemos resolver el sistema de ecuaciones en dos pasos:

$$Ax = b \;\rightarrow\; (LU)x = L(Ux) = b \;\rightarrow\; \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Factorización LU y su aplicación a la resolución de SEL

Ejercicio

Resolver, empleando la factorización LU, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 4x - y + 3z = -4 \\ -2x + 5y + 5z = 9 \end{cases}$$

Hallamos la factorización LU de la matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

Factorización LU y su aplicación a la resolución de SEL

Para resolver el sistema $Ax = b$, siendo $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, consideramos

$Ax = L(Ux) = b$ y llamamos $y = Ux$.

- Primer resolvemos el sistema $Ly = b$, siendo $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = -4 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 9 \end{cases}$$

De este sistema, obtenemos las soluciones $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Factorización LU y su aplicación a la resolución de SEL

- Ahora resolvemos el sistema $Ux = y$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_3 = -2 \end{cases}$$

cuya solución es la solución del sistema inicial $Ax = b$,

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU y su aplicación a la resolución de SEL

Ejercicio

Resolver, empleando la factorización LU, los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-7y-2z+2t=-9 \\ -3x+5y+z=5 \\ 6x-4y-5t=7 \\ -9x+5y-5z+12t=11 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x+3y+2z+4t=4 \\ 4x+10y-4z=-8 \\ -3x-2y-5z-2t=-4 \\ -2x+4y+4z-7t=-1 \end{cases}$$

Factorización PA=LU

Cuando no se pueden escalonar las matrices solamente con operaciones de eliminación, es necesario permutar las filas. En este caso, tenemos que utilizar el método $PA = LU$, donde P es la matriz de permutación.

La matriz de permutación se obtiene de cambiar de lugar los renglones de la matriz identidad.

Theorem

Teorema Si P es una matriz de permutación, entonces $P^{-1} = P^T$.

Una factorización de A, como $A = P^T LU$, donde P es una matriz de permutación, L es triangular inferior y U es triangular superior, se llama factorización $P^T LU$ de A.

Factorización PA=LU

Ejemplo

Halla la factorización $P^T LU$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Primero reducimos A de forma escalonada por filas. Claramente vemos que es necesario hacer intercambios de filas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{F1 \leftrightarrow F2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{F3 \leftrightarrow F2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, hemos realizado dos intercambios de filas. La matriz correspondiente de permutación, será

$$P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorización PA=LU

Ahora, calculamos la factorización LU de PA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{F3 \to F3 - 2F2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U$$

Por tanto, $PA = LU$, de donde $A = P^{-1}LU = P^T LU$ siendo

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$