安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期中考试试卷

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 60　　2、 $\dfrac{\pi}{3}$　　3、$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$　　4、 $\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$

5、 $e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 A　　7、 C　　8、 C　　9、D　　10、 B

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11、【解】因为对应的齐次微分方程的特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 的两个根为

$\lambda_1=\lambda_2=-2$，故其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

重根情况下，可设该非齐次微分方程的特解为 $y^*=x^2b_0e^{-2x}$．将其代入非齐次微分方程，通过待定系数法可得：$b_0=\dfrac{1}{2}$. 故原微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{x^2}{2}e^{-2x}.$$

9 分

12、【解】设过直线 L 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的方程为

$$\pi_1:\ \lambda_1(x+y-z-1)+\lambda_2(x-y+z+1)=0$$

即：$(\lambda_1+\lambda_2)x+(\lambda_1-\lambda_2)y+(-\lambda_1+\lambda_2)z+(-\lambda_1+\lambda_2)=0$

由两平面垂直的充要条件得：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\cdot 1+(\lambda_1-\lambda_2)\cdot 1+(-\lambda_1+\lambda_2)\cdot 1=0$$

取 $\lambda_1=1$，得 $\lambda_2=-1$，故平面 π_1 的方程为

$$\pi_1:\ y-z-1=0$$

则所求直线得方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

9 分

13、【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1+2xf_2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y[xf_{11}+2yf_{12}]+2x[xf_{21}+2yf_{22}]=f_1+xy[f_{11}+4f_{22}]+2(x^2+y^2)f_{12}$ 9 分

14、【解】令 $F(x,y,u,v)=xu-yv, G(x,y,u,v)=yu+xv-1$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2.$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix}u & -y\\ v & x\end{vmatrix}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix}x & u\\ y & v\end{vmatrix}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}.$$

. 9 分

15、【解】 $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{y^2}{x^2}dx=\int_1^2 y^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy$

$$=\int_1^2\left(y^3-y\right)dy=\frac{1}{4}y^4\Big|_1^2-\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2=\frac{15}{4}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}.$$ 9 分

16、【解】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用极坐标系，积分区域表示为 $D'=\left\{\left(r,\theta\right)|\,0\le\theta\le 2\pi,\pi\le r\le 2\pi\right\}$，则：

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D'}\sin r\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}\sin r\cdot rdr=-6\pi^2$$

9 分

四、综合题（每小题 10 分，共 10 分）

17、【解】先求出函数在 D 上的所有驻点和偏导数不存在的点, 解方程得：

$$\begin{cases}f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$$

得到区域 D 内的唯一驻点 $(2,1)$，且 $f(2,1)=4$．再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最值.

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上 $f(x,y)=0$. 在边界 $x+y=6$ 上，即 $y=6-x$，于是

$f(x,y)=-2x^2(6-x)$,

故有 $f_x = 4x(x-6) + 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow y = 6 - x|_{x=4} = 2,\ f(4,2) = -64$

比较后得到 $f(2,1) = 4$ 为最大值， $f(4,2) = -64$ 为最小值. 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

18、【证明】因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + F'(u)$$

故 $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + xF(u) = xy + z.$$ 6 分