院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》期末考试试卷（C 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

得 分	

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 为同阶可逆矩阵，则（　　　）

（A）$AB=BA$　　（B）存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

（C）存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$　　（D）存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$

2．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s\ge 3)$ 线性相关的充要条件是（　　　）

（A）存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\ne o$

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个均线性相关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量能被其余向量线性表示

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都能被其余向量线性表示

3．设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵 A^* 有特征值（　　　）

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$　　(B) $\lambda^{-1}|A|$　　(C) $\lambda|A|$　　(D) $\lambda|A|^n$

4．齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是（　　　）

（A）A 的列向量线性无关　　（B）A 的列向量线性相关

（C）A 的行向量线性无关　　（D）A 的行向量线性相关

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$ 是正定二次型，则（　　　）

(A)　$\lambda>-1$　　(B)　$\lambda>0$　　(C)　$\lambda>1$　　(D)　$\lambda\ge 1$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6．若向量组 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(t,2,t)$，$\alpha_3=(2,3,t)$ 线性相关，则 $t=$________.

7．若 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=$__________________**.**

8．设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&4&0\\2&2&-5&1\\8&2&0&6\\1&2&-3&2\end{vmatrix}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$____________**.**

9．已知三阶方阵 A 的三个特征值为 $1,-2,3$，则 A^{-1} 的行列式 $\left|A^{-1}\right|=$_________.

10．二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ 的正惯性指数是______________**.**

三、计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分	

11．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$，且 $r(A)=3$，求常数 k 的值.

12．设 $A^2-AB=I$，且 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

13．设$\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1,1)^T$，$\beta=(3,10,k,4)^T$，已知β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求常数$k$的值.

14．求向量组$\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)$，$\alpha_3=(1,3,4,-2)$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$的秩与一个极大线性无关组.

15．已知方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$有无穷多个解，求$\lambda$的值及方程组的通解.

答题勿超装订线

装　订　线

16．设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$，利用正交变换 $X=QY$ 化二次型为标准形，并求出相应的正交矩阵 Q.

四、证明题（10 分）

得 分	

17．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2-2A-3I=O$，证明：$r(A-3I)+r(A+I)=n$.

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》考试试卷（C 卷）

参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D；　2．C；　3．B；　4．A；　5．C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．2；　7．$6^{99}A$；　8．0；　9．$-\dfrac{1}{6}$；　10．2

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3 = 0$，$k=-3$ 或 $k=1$，

$k=-3$时，$r(A)=3$；$k=1$时，$r(A)=1$，不符合题意.

. . . . （10 分）

12．$AB = A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以　$B = A^{-1}(A^2 - I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

. . . . （10 分）

13．$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

依题意，β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则 $k=2$.

. . . . （10 分）

14．$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以秩为 2，α_1, α_2 为其一极大线性无关组，

$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

. . . . （10 分）

15. $\overline{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 3\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1+2\lambda\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 3\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4+2\lambda\end{pmatrix}$

当$\lambda=1$时，$r(A)=1$，$r(\overline{A})=3$，方程组无解，不符合题意

当$\lambda=-2$时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多个解，符合题意

对应的方程组为$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-2\\ -3x_2+3x_3=3\end{cases}$，令自由未知量$x_3=0$，得非齐次方程组的一个特解$\eta=(-1,-1,0)^T$

对应齐次方程组为$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\ -3x_2+3x_3=0\end{cases}$的基础解系为$\xi=(1,1,1)^T$

故原方程组的通解为$x=k\xi+\eta=k(1,1,1)^T+(-1,-1,0)^T$，$k$任意常数.

......................（10 分）

16. 该二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$，

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0$，得$A$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=5，\lambda_3=-4$$

对方程组$(5E-A)x=0$，有基础解系

$$\xi_1=(-\frac{1}{2},1,0)^T，\xi_2=(-1,0,1)^T$$

正交化：$\eta_1=\xi_1=(-\frac{1}{2},1,0)^T$，$\eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},1)^T$

单位化：$\gamma_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)^T$，$\gamma_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=(-\frac{4}{3\sqrt{5}},-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T$

对方程组$(-4E-A)x=0$，有基础解系$\xi_3=(2,1,2)^T$

单位化：$\gamma_3=\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})^T$

则所求的正交矩阵为$Q=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

f 的标准形为 $f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

......................（10 分）

四、证明题（10 分）

17.【证明】$A^2-2A-3I=(A-3I)(A+I)=O$，
所以 $r(A-3I)+r(A+I)\le n$；
另一方面，$r(3I-A)+r(A+I)\ge r(3I-A+A+I)=r(4I)=n$，
故，$r(A-3I)+r(A+I)=n$.

......................（10 分）