安徽大学 20 22 —20 23 学年第 1 学期

《 线性代数 A 》　考试试卷（A 卷）

（闭卷　满分 100 分　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线

装　订　线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则（　　）

A. 当 $|A|=a\neq 0$ 时，$|B|=a$　　B. 当 $|A|=a\neq 0$ 时，$|B|=|a|$

C. 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$　　D. 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$

2. 若向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由向量组（II）$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示，则（　　）

A. 若向量组（I）线性无关，则 $r\le s$　　B. 若向量组（I）线性相关，则 $r>s$

C. 若向量组（II）线性无关，则 $r\le s$　　D. 若向量组（II）线性相关，则 $r>s$

3. 若非齐次方程组 $AX=\beta$（A为n阶方阵,$\beta\neq 0$）有三个不同的解，且 A的伴随矩阵$A^*\neq 0$，则导出组 $AX=0$ 的基础解系（　　）

A. 不存在　　B. 只含有一个非零解向量

C. 含有两个线性无关的解向量　　D. 含有三个线性无关的解向量

4. 若 A 为 n 阶非零方阵，且 $A^3=0$，则以下选项正确的是（　　）

A. $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆　　B. $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆

C. $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆　　D. $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B（　　）

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似

C. 相似但不合同　　D. 既不合同也不相似

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. A、B 为 3 阶方阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$____________ .

7. 已知 3 阶方阵 A 的特征值互不相同，且满足 $|A|=0$，则 A 的秩等于____________ .

8. 向量$\alpha_1=(1\quad 1\quad 1)^T$，$\alpha_2=(1\quad 0\quad k)^T$，$\alpha_1\alpha_2^T$相似于$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$k=$____________ .

9. 若$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$BA=B+2I$，则$B=$____________ .

10. 若 3 阶矩阵A的特征值分别 1，-1，2，则$\left|2A^*\right|$=____________ .

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 求5阶行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&5\\3&4&5&5&5\\4&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\end{vmatrix}$的值.

12. 求$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&3\\3&-1&2\end{pmatrix}$的逆矩阵.

13. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，方程组$AX=\beta$有解但不唯一，求$a$及方程组通解.

14. 化向量组$\alpha_1=(1\quad 1\quad 0),\alpha_2=(1\quad 0\quad 1),\alpha_3=(0\quad 1\quad 1)$为标准正交向量组.

15. 已知三阶实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$及对角矩阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

16. 求实数t的范围，使得二次型$tx_1^{\ 2}+2x_1x_3+2x_2^2+tx_3^{\ 2}$为正定二次型.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 证明：任意方阵可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和.

18. 设矩阵A为n阶正定矩阵，I为同阶单位阵. 证明$|A+I|>1$.

安徽大学 20 22 —20 23 学年第 1 学期

《 线性代数 A 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. A　　3. B　　4. D　　5. B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 3　　7. 2　　8. 2　　9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　10. 32

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 后一列减去前一列，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

...（10 分）

12.

由题意，$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ -2 & 1 & 3 & & 1 & \\ 3 & -1 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 5 & -3 & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$

所以，其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$...（10 分）

13. 方程组系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2$$ ，

所以 $a\neq -2$且$a\neq 1$ 时 ，$|A|\neq 0$方程组有唯一的解，

$a=1$时，$r(A)=1, r(\overline{A})=2$，所以此时方程组无解，

$a=-2$时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，所以此时方程组有解且不唯一。. . .　　（6 分）

此时方程组增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

所以，导出组基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

非齐次方程组的一个特解是$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

所以方程组的通解为$k_1\eta_1+\eta_0$，其中$k_1\in R$。. . .（10 分）

14.

由斯密特正交化公式，

$\beta_1=\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=(1\quad 0\quad 1)-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0)=\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\right),$$

$$\beta_3=(0\quad 1\quad 1)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\right)-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0)=\left(-\frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\right),...$$　　（6 分）

单位化得到

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 1\quad 0),$$

$$\gamma_1=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{\sqrt{6}}{6}(1\quad -1\quad 2),$$

$\gamma_1 = \dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, ...（10 分）

15.

$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，所以 A 的特征值为 0，1，-1， ...（2 分）

$\lambda = 0$时，$(\lambda I - A)X = 0$ 的基础解系为$\alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $\beta_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda = 1$时，$(\lambda I - A)X = 0$ 的基础解系为$\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\beta_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$\lambda = -1$时，$(\lambda I - A)X = 0$ 的基础解系为$\alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\beta_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$...（8 分）

记 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$,

此时 $PAP^{-1} = \Lambda$.

...（10 分）

16.

$tx_1{}^2+2x_1x_3+2x_2^2+tx_3{}^2$ 的矩阵为$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$，　　　　　　. . .（2 分）

则二次型各阶顺序主子式分别为

$A_1=|t|=t>0$

$A_2=\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2t>0$

$A_3=\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix}=2(t^2-1)>0$　　　　　　. . .（8 分）

联立得$t>1$.　　　　　　. . .　（10 分）

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 A 为方阵，

令 $H=\frac{1}{2}(A+A^T), G=\frac{1}{2}(A-A^T)$　　　　　　（2 分）

则$A=H+G$，且 $H=H^T, G=-G^T$ 。　　　　　　（5 分）

18. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，$\lambda_n$ 为 A 的特征值，A 为 n 阶正定矩阵，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 均大于零，

$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots$，$\lambda_n+1$ 为 $A+I$ 的特征值，且 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots$，$\lambda_n+1$ 均大于 1，

. . .　（3 分）

所以$|A+I|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$ 。　　. . .　（5 分）