学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答题勿超装订线 ------装------订------线------

# 安徽大学 2022—2023 学年第二学期

## 《线性代数 A》期末考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | |

| 得 分 | |
|---|---|

### 一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵，则必有（　　　）

（A）$|A+B|=|A|+|B|$　（B）$(AB)^2=A^2B^2$　（C）$|AB|=|BA|$　（D）$(AB)^T=A^TB^T$

2．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s\ge 3)$ 线性无关的充要条件是（　　　）

（A）存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\ne\theta$

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个均线性无关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量不能被其余向量线性表示

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量不能被其余向量线性表示

3．若 $n$ 阶矩阵 $A$ 的行列式 $|A|=0$，则下列说法错误的是（　　　）

（A）齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解　　（B）非齐次方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解

（C）$A$ 的列向量组线性相关　　（D）矩阵 $A$ 至少有一个特征值等于 0

4．$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 $A$ 可逆，则 $B^{-1}$ 等于（　　　）

（A）$A^{-1}P_1P_2$　（B）$P_1A^{-1}P_2$　（C）$P_1P_2A^{-1}$　（D）$P_2A^{-1}P_1$

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$ 是正定二次型，则（　　　）

（A）$\lambda>-1$　（B）$\lambda>0$　（C）$\lambda>1$　（D）$\lambda\ge 1$

## 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

| 得 分 | |
|---|---|

6．若向量组$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,t)$线性相关，则$t=$________．

7．若$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，则$A^{100}=$________________．

8．设行列式$D=\begin{vmatrix}3&2&4&0\\2&2&-5&1\\8&2&0&6\\1&2&-3&2\end{vmatrix}$，则$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$__________．

9．若三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\-1&4&3\end{pmatrix}$，则$A$的迹$tr\left(A\right)=$ ________．

10．二次型$f\left(x_1,x_2\right)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+4x_1x_2$的正惯性指数是_____________．

## 三、计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

| 得 分 | |
|---|---|

11．计算行列式$\begin{vmatrix}1&-1&1&a-1\\1&-1&a+1&-1\\1&a-1&1&-1\\a+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$．

12．已知$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，求$\left(A^*\right)^{-1}$．

13．已知 $X = AX + B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 $X$ .

答题勿超装订线

线

订

14．求向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4)$， $\alpha_2 = (2,3,4,5)$， $\alpha_3 = (3,4,5,6)$，  $\alpha_4 = (4,5,6,7)$ 的秩与一个极大线性无关组.

装

15．求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 \qquad + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ 7x_1 \qquad + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解.

16．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$，若 $A$ 相似于 $B$

求可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=B$.

**四、证明题（10 分）**

| 得 分 | |
|---|---|

17．设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A^2-A-2E=O$，证明： $r(2E-A)+r(E+A)=n$.

# 安徽大学 2022—2023 学年第二学期

# 《线性代数 A》考试试卷（B 卷）

# 参考答案与评分标准

**一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）**

1．$C$；　2．$D$；　3．$B$；　4．$C$；　5．$C$

**二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

6．5；　7．$14^{99}A$；　8．0；　9．6；　10．1

**三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）**

11．每行元素的和都相等，把第二、三、四列都加到第一列，

$$原式=\begin{vmatrix} a & -1 & 1 & a-1 \\ a & -1 & a+1 & -1 \\ a & a-1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix}=a^4.$$

..................（10 分）

12．$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2$，

$$\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

..................（10 分）

13．　$(E-A)X=B$，　$X=(E-A)^{-1}B$，

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}，所以\quad X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

.....................（10 分）

14. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故秩为 2，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 为一个极大线性无关组。

……………………（10 分）

15. $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&2&12\\0&0&0&4&24\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

有无穷多解，通解为

$$x=\begin{pmatrix}3\\-8\\0\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$，其中 $k$ 为任意常数.

……………………（10 分）

16.（1）因为 $A\sim B$，所以 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$$，

令 $\lambda=0$，得 $2(x-2)=2y$，

令 $\lambda=1$，得 $y=-2$，所以 $x=0$.

（2）由(1)知

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

对应于 $A$ 和 $B$ 的共同的特征值 $-1,2,-2$ 的特征向量分别为

$$\xi_1=(0,2,-1)^T，\xi_2=(0,1,1)^T，\xi_3=(1,0,-1)^T，$$

则可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，满足 $P^{-1}AP=B$.

……………………（10 分）

## 四、证明题（10 分）

**17.**【证明】$(2E-A)(E+A)=2E+A-A^2=O$，

所以 $r(2E-A)+r(E+A)\le n$；

另一方面，$r(2E-A)+r(E+A)\ge r(2E-A+E+A)=r(3E)=n$，

综上所述，$r(2E-A)+r(E+A)=n$.

……………………（10 分）