安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期中试卷参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、C　　2、B　　3、D　　4、A　　5、B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 4

7. $\sqrt{3}$

8. 0

9. $\dfrac{e^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}(dx+2dy)$

10. $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. **解：**

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,-1,-3)$$

$$(x-2)+(y-1)+3(z-1)=0$$

$$x+y+3z-6=0$$

12. **解：**

沿着$y=kx$路径趋向于0，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\bullet kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

$k=1$,极限为$\dfrac{1}{2}$，$k=2$,极限为$\dfrac{2}{5}$，极限不唯一

所以在点（0,0）处二元极限不存在，所以不连续，不可微

13. **解：**

$$\iint_D \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}(x-x^3)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

14. 解：

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{10\sqrt{2}}{9}$$

15. 解：

$$\begin{cases} 2udu - dv + dx = 0 \\ du + 2vdv - dy = 0 \end{cases}$$

$$(4uv+1)dv = -dx + 2udy \Rightarrow dv = \frac{-dx + 2udy}{4uv+1} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{4uv+1};$$

$$(4uv+1)du = -2vdx + dy \Rightarrow du = \frac{-2vdx + dy}{4uv+1} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2v}{4uv+1}.$$

16.

解 设 $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$, 则 $z = f(u,v)$. 再引入记号 $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f_1',\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = f_2'$ 及 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{12}''$, 以及类似的 $f_{11}'', f_{21}'', f_{22}''$. 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' - \frac{y}{x^2}f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + \frac{1}{x}f_2'.$$

其中 f_1', f_2' 仍为复合函数, 并且其复合关系与 f 的复合关系相同. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x\frac{\partial f_1'}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial f_2'}{\partial y} \\ &= x\left(xf_{11}'' + \frac{1}{x}f_{12}''\right) + \frac{1}{x}\left(xf_{21}'' + \frac{1}{x}f_{22}''\right) \\ &= x^2 f_{11}'' + 2f_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}'', \end{aligned}$$

四、应用题（共 10 分）

17. 解：

在 P_0 处法向量为 $\left(F_x', F_y', F_z'\right)\Big|_{P_0} = \left(\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}, \dfrac{2z_0}{c^2}\right)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

化简为：$\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y + \dfrac{z_0}{c^2}z = 1$，所以切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$，

四面体体积为$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

构建拉格朗日辅助函数$L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

$$\begin{cases} L'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 & (1) \\ L'_y=zx+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 & (2) \\ L'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 & (3) \\ L'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (4) \end{cases}$$

$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

.

五、证明题（共 6 分）

18.证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}-\frac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f'(u)}{f^2(u)},$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}.$$