# 计算机视觉
# §7b 特征匹配

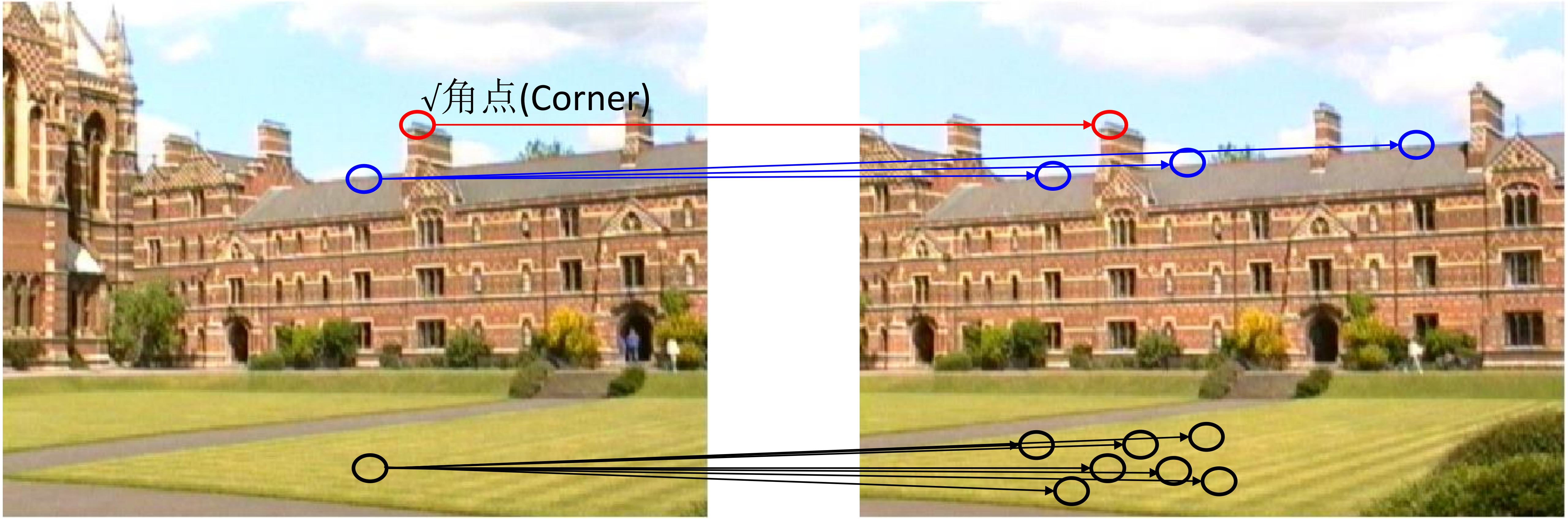
王文中

安徽大学计算机学院

# 内容

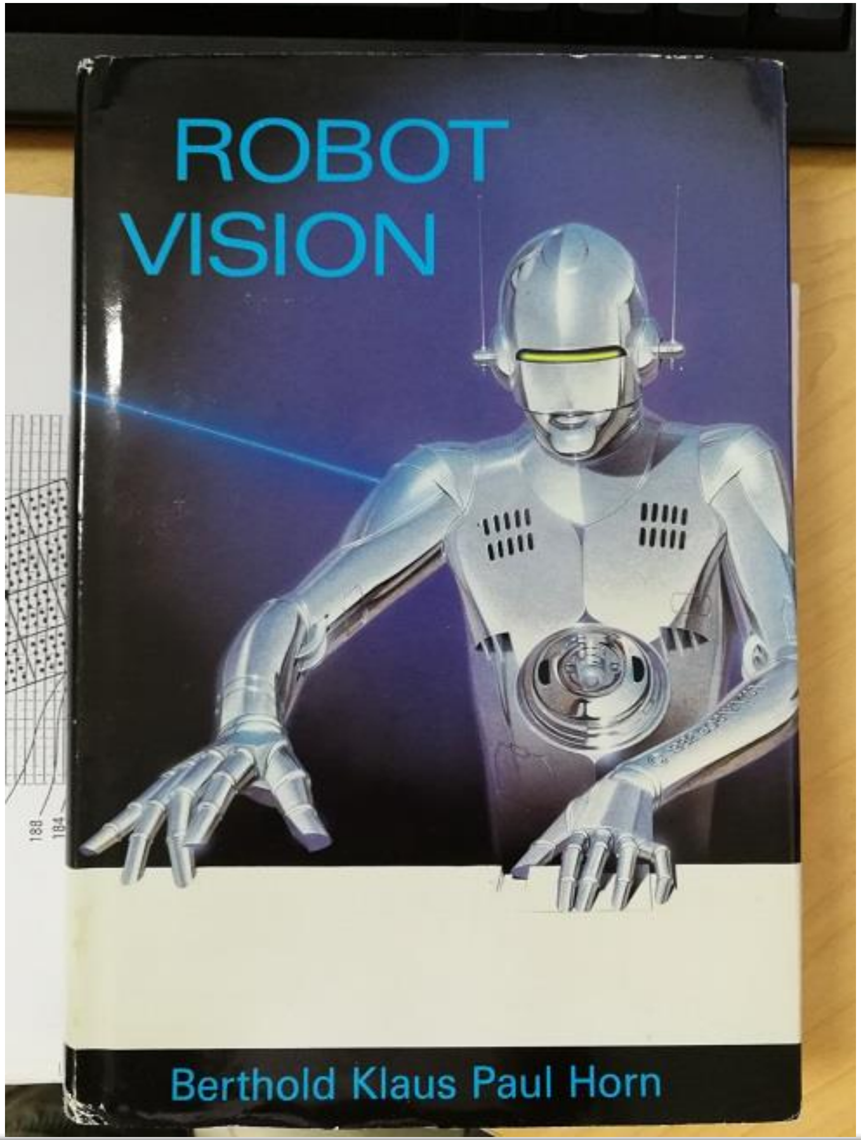
- 特征匹配
- 图像拼接

# 全景拼接

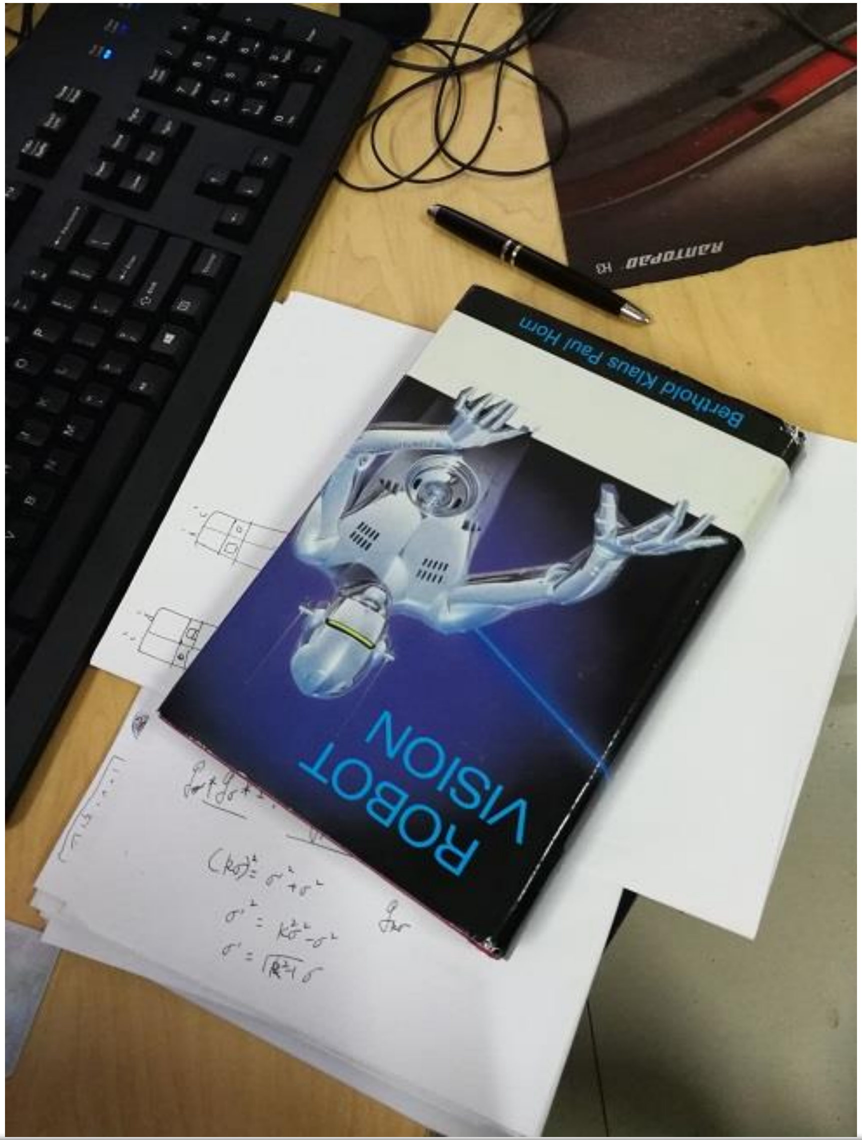

√角点(Corner)

# 特征匹配

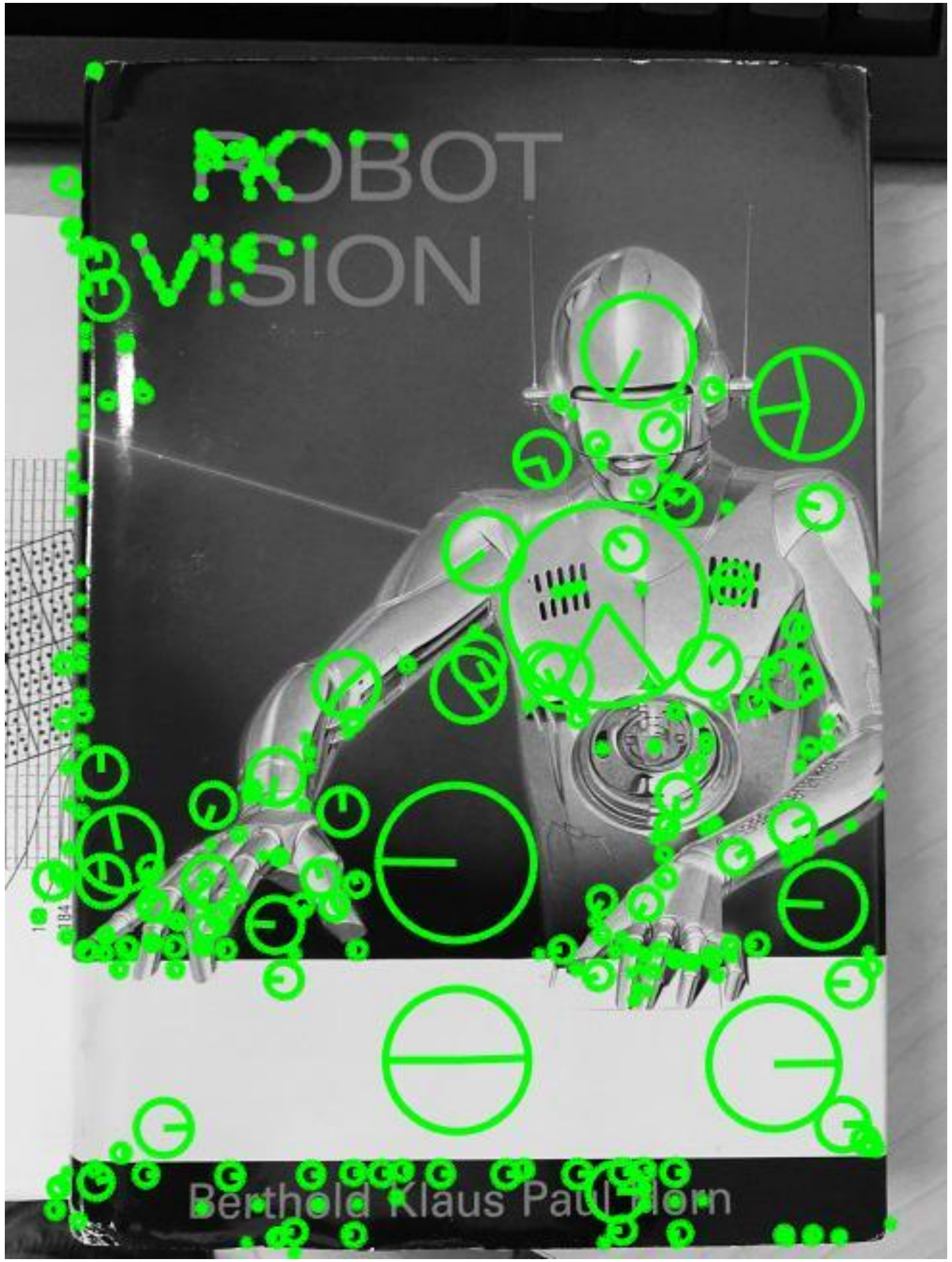
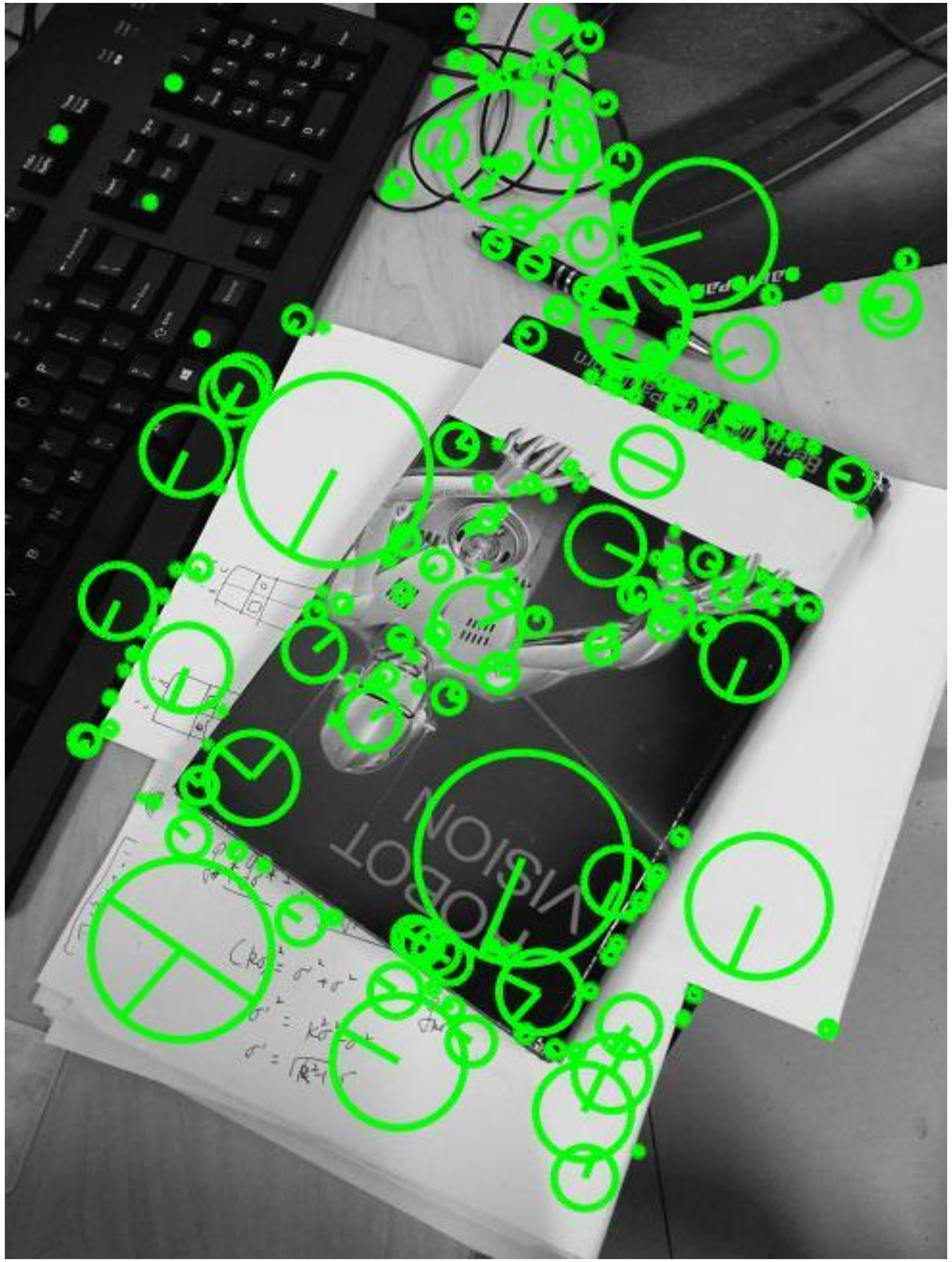
# 特征点匹配



ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


# 特征点匹配算法

两个特征集合：$\left\{F_i^{(1)}\right\}_{i=1}^{n}, \left\{F_i^{(2)}\right\}_{i=1}^{m}$，如何找到这两组特征之间的匹配关系？

特征之间的距离反映了特征之间的相似程度：

$$d_{i,j} = d\left(F_i^{(1)}, F_j^{(2)}\right) = \left\| F_i^{(1)} - F_j^{(2)} \right\|$$

$d_{i,j}$越小，$F_i^{(1)}, F_j^{(2)}$越相似，匹配程度越高。

与$F_i^{(1)}$最匹配的特征点是$F_k^{(2)}$，满足

$k = argmin_j d_{i,j} \ \&\& \ d_{i,k} < \tau$

```
for(i=1;i<=n; i++){
    M[i] = 0;
    min_dist = Inf;
    for(j=1;j<=m; j++){
        if(d[i][j]<tau && d[i][j]<min_dist){
            min_dist = d[i][j];
            M[i] = j;
        }
    }
}
```

# 特征点匹配算法

假设$d_{i,1}, d_{i,2}$是$d_{i,j}, j = 1..m$中的最小距离与次小距离：

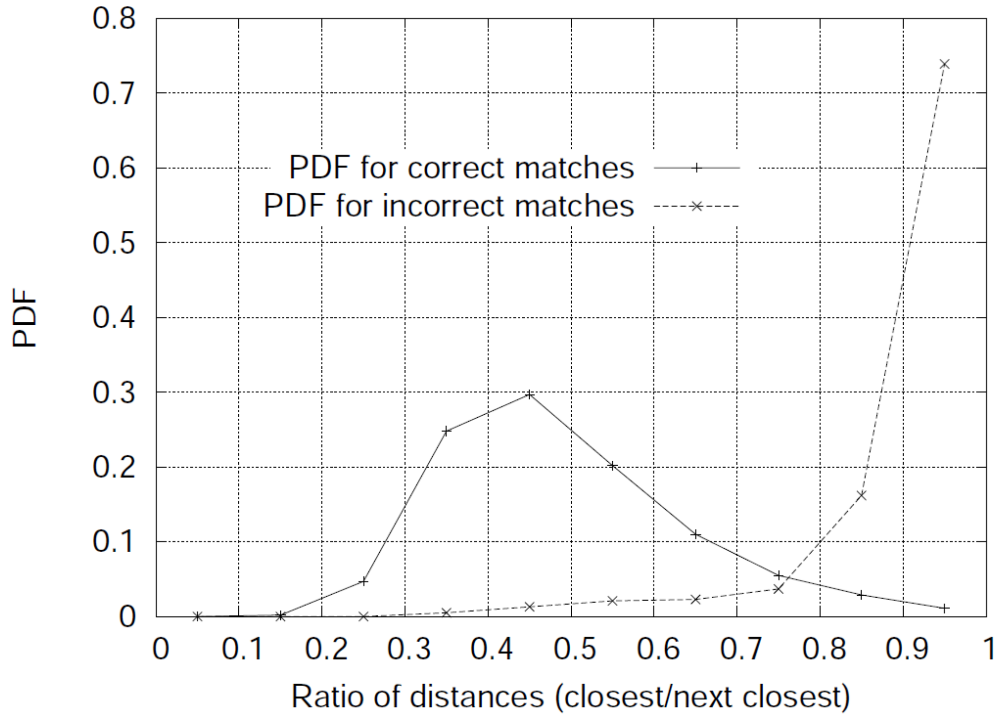
如果$d_{i,1}$与$d_{i,2}$相差很小➔$\left\langle F_i^{(1)}, F_1^{(2)} \right\rangle$很可能是错误匹配，为什么？

例如：

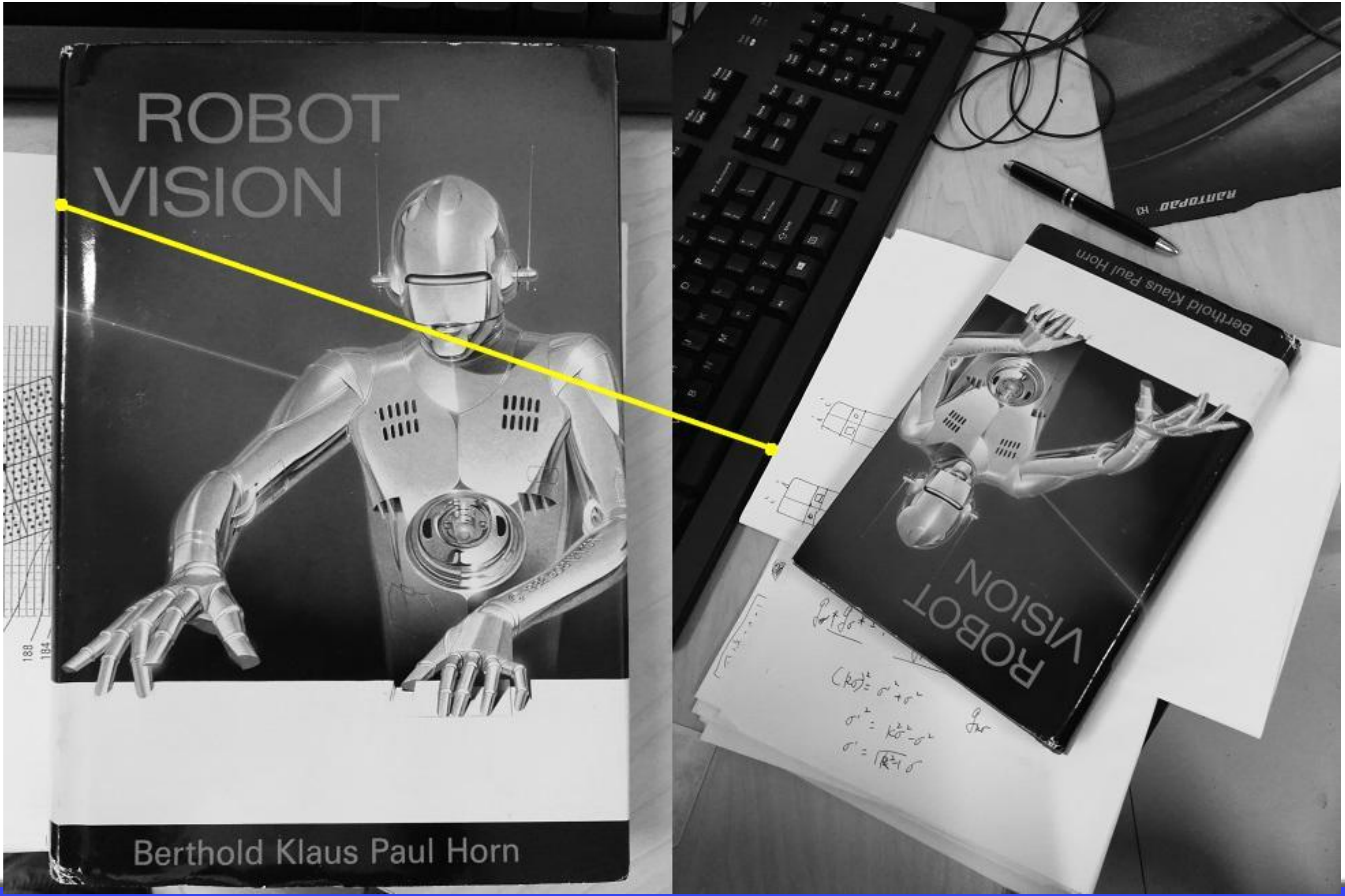
第一幅图像中的 $F_i^{(1)}$是背景点，与第2幅图像中的所有特征的距离都很大；

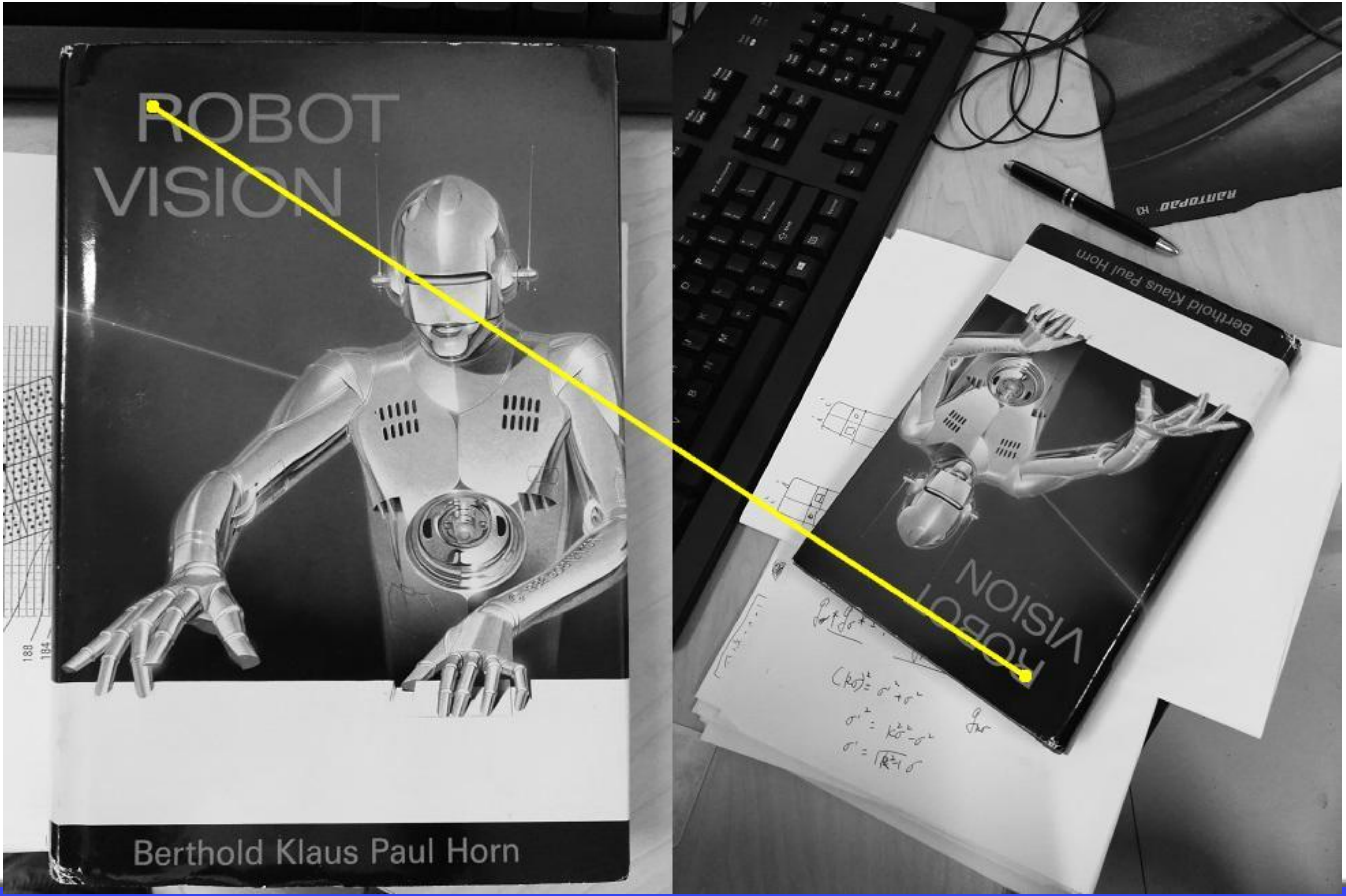
第二幅图像中有很多重复的模式，$F_i^{(1)}$与第2幅图像中的某些重复模式的特征距离都很小

解决办法：拒绝$\frac{d_{i,1}}{d_{i,2}} > \gamma$的匹配

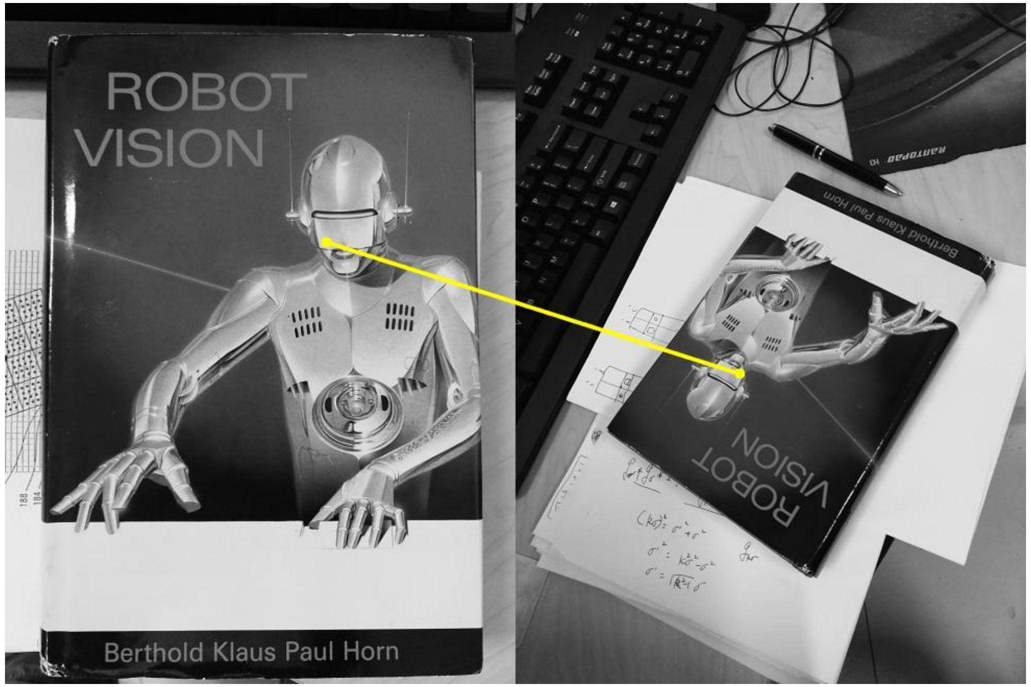


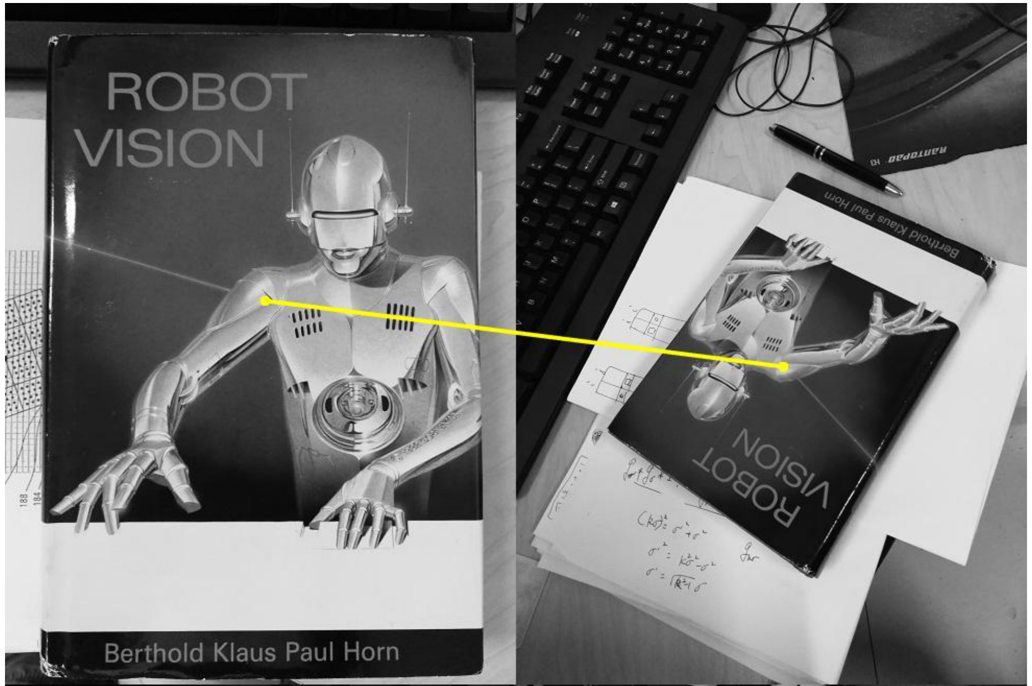

ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

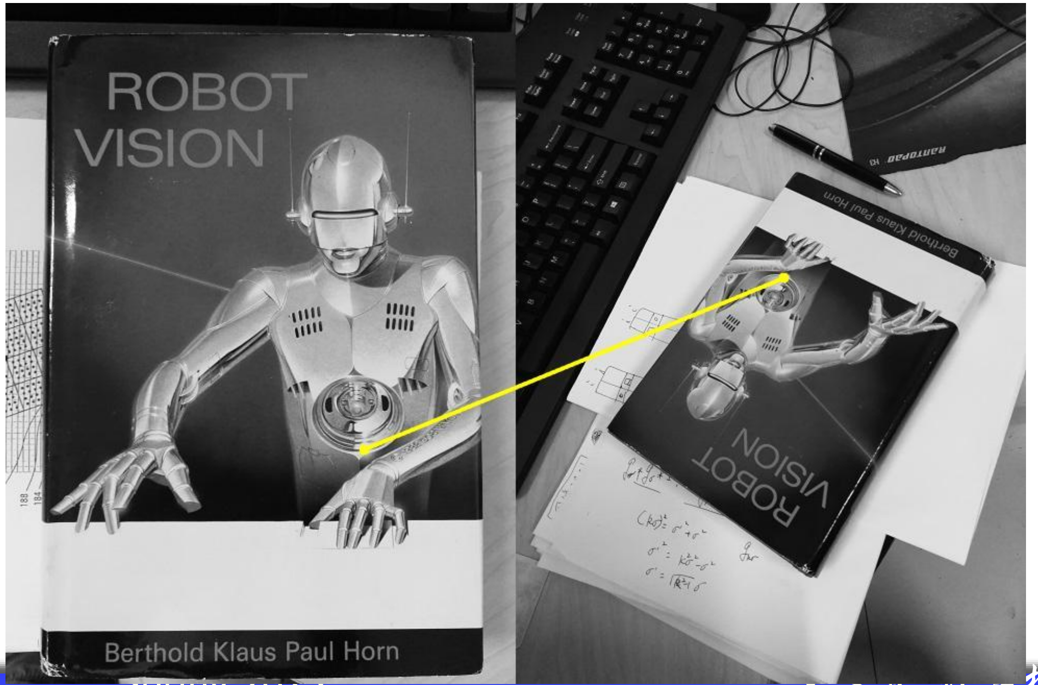

ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

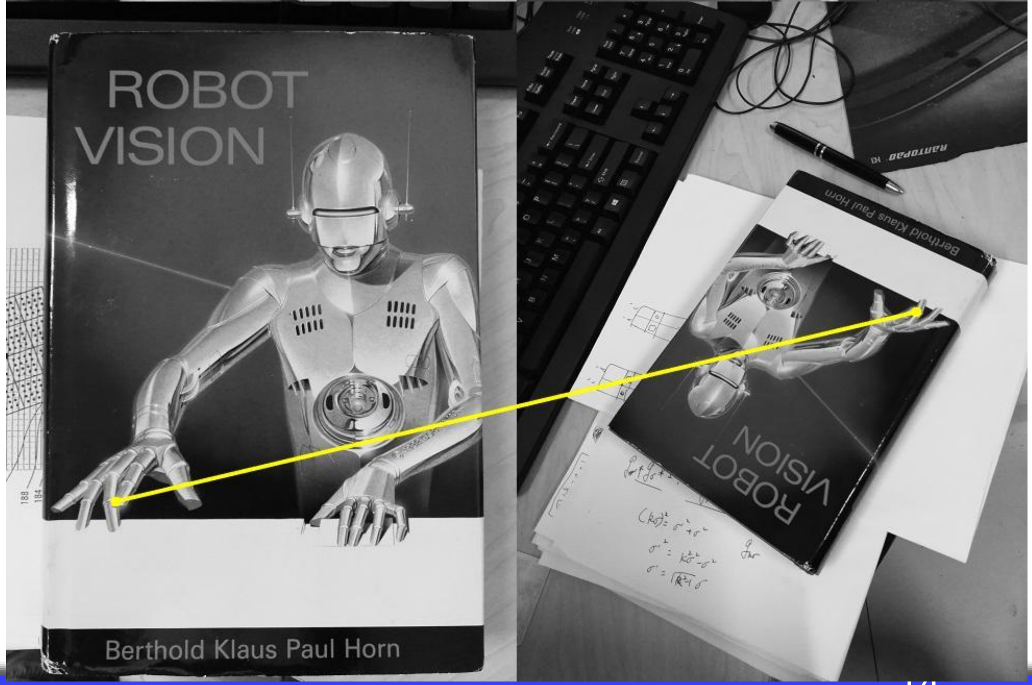

ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

# 用RANSAC找出一致特征(模型拟合)

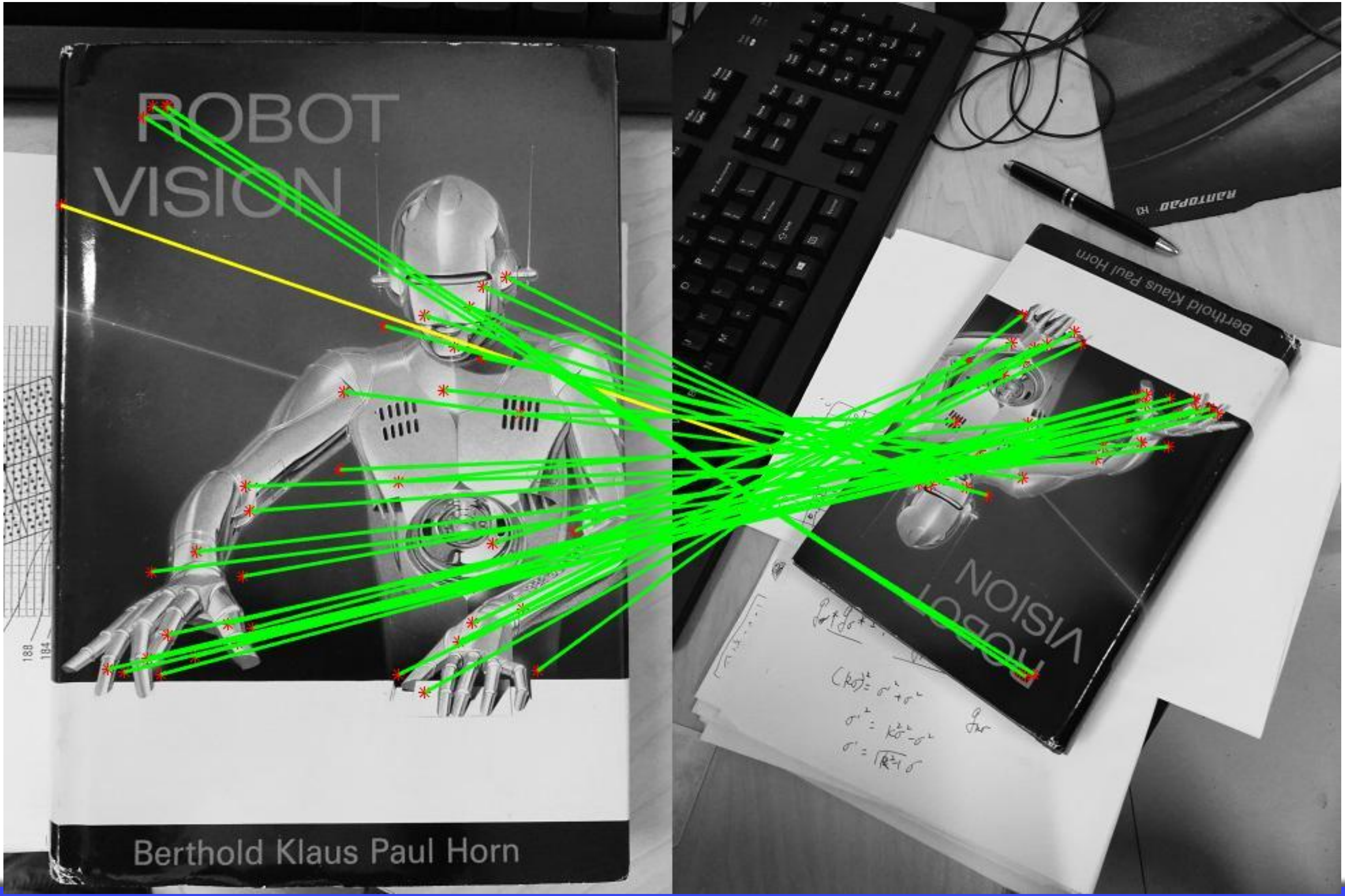
观测数据：

$$F^1 = \{(x_i, y_i, o_i^1, s_i^1)\}_{i=1}^{l}, F^2 = \{(u_i, v_i, o_i^2, s_i^2)\}_{i=1}^{l}$$

$$(x_i, y_i, o_i^1, s_i^1) \leftrightarrow (u_i, v_i, o_i^2, s_i^2)$$

$x, y$: 坐标; o: 方向; s: 尺度

模型： $$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = SR\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + T = \begin{bmatrix} S_x \cdot cos\theta & -S_x \cdot sin\theta \\ S_y \cdot sin\theta & S_y \cdot cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

# 用最小二乘法确定坐标变换

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow (u_i, v_i)\}_{i=1}^{K}$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = SR\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + T = \begin{bmatrix} S_x \cdot cos\theta & -S_x \cdot sin\theta \\ S_y \cdot sin\theta & S_y \cdot cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \cdot cos\theta & -S_x \cdot sin\theta & T_x \\ S_y \cdot sin\theta & S_y \cdot cos\theta & T_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_i + by_i + c = u_i \\ dx_i + ey_i + f = v_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i \cdot a + y_i \cdot b + 1 \cdot c + 0 \cdot d + 0 \cdot e + 0 \cdot f = u_i \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + x_i \cdot d + y_i \cdot e + 1 \cdot f = v_i \end{cases}$$

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ & & & \vdots & & \\ x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}}}_{A} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}}}_{\theta} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}}}_{\mu}$$

$$A\theta = \mu$$

# 用最小二乘法确定坐标变换

$$A\theta = \mu$$

$$\theta = A^{-1}\mu? \quad \times$$

$$\theta = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T}\mu \quad \surd$$

伪逆(pseudo inverse)：$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

$$A^+ A = AA^+ = I$$

$$\theta = argmin_\theta \|A\theta - \mu\|^2$$

$$E(\theta) = \|A\theta - \mu\|^2$$

$$= (A\theta - \mu)^T (A\theta - \mu)$$

$$= \theta^T A^T A\theta - 2\theta^T A^T \mu + \mu^T \mu$$

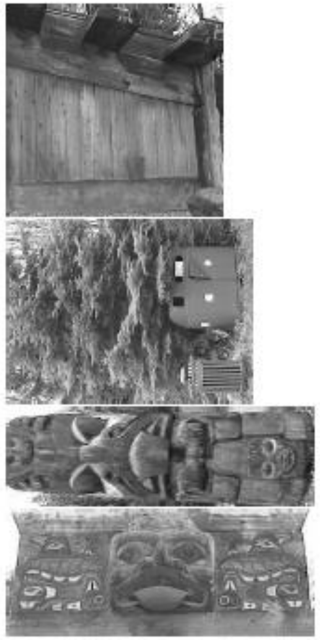
$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} = 2A^T A\theta - 2A^T \mu = 0 \Rightarrow$$

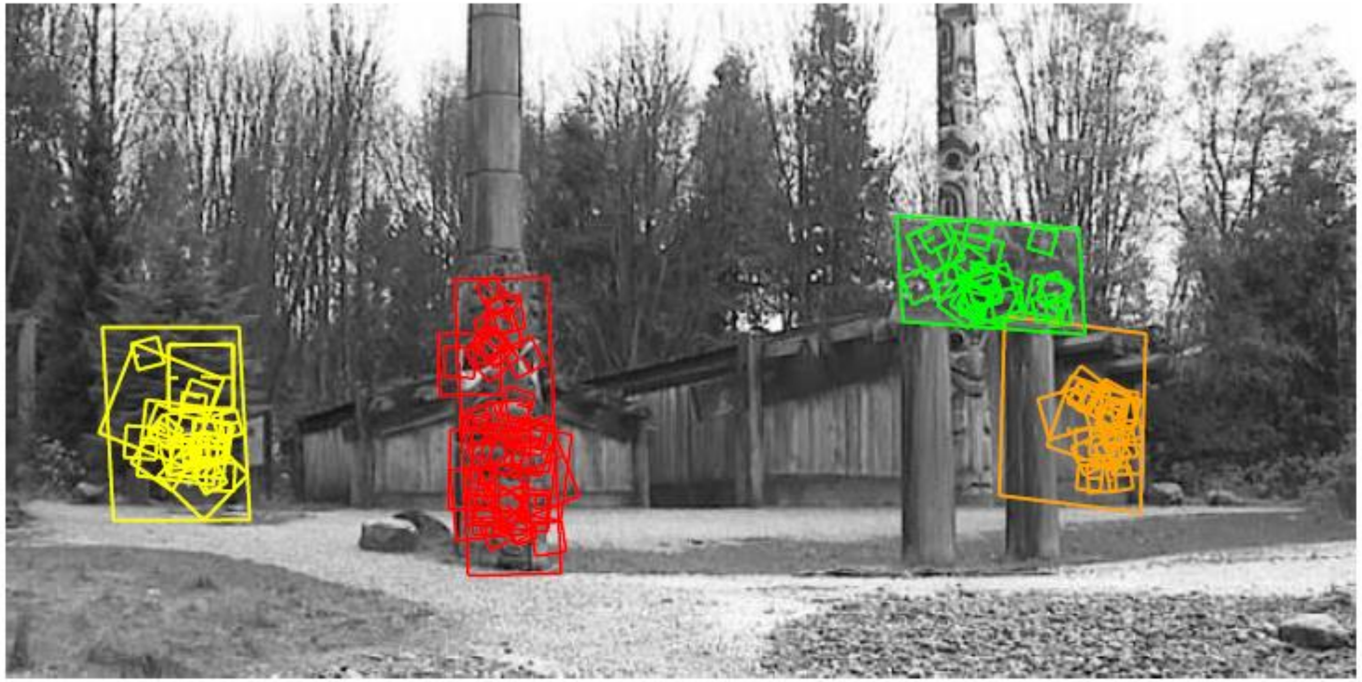
**Normal Equation** $\boxed{A^T A\theta = A^T \mu} \Rightarrow$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T \mu$$


ROBOT
VISION
Berthold Klaus Paul Horn

# 用特征匹配识别目标



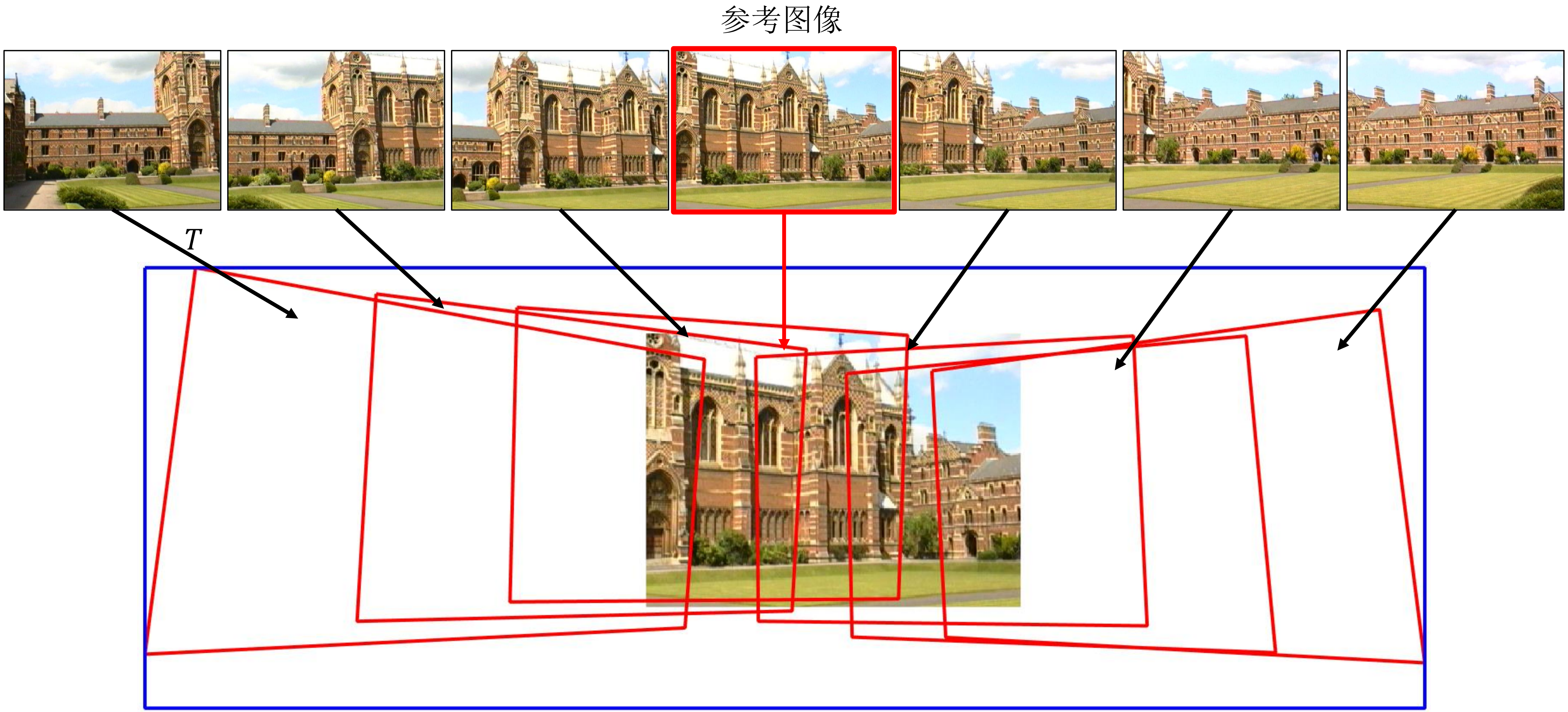
# 图像拼接(Image Stiching)

# 图像拼接

Image Credit: ArcSoft® 虹软

# 图像拼接

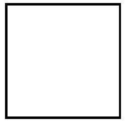
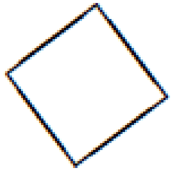
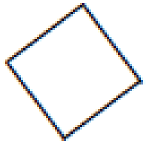
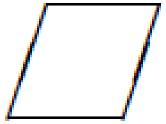
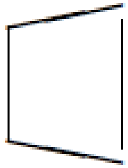
# 图像拼接



# 图像拼接

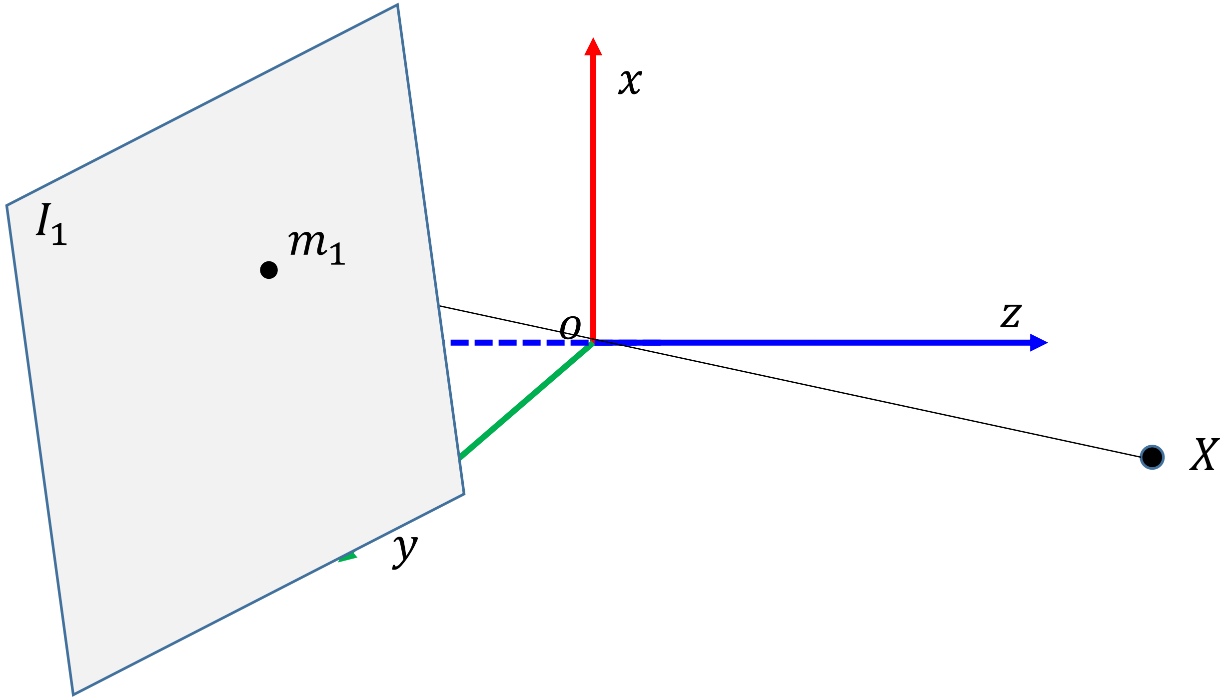
- 1.确定运动模型(Motion Model)
  - 一幅图像中的像素坐标到另一幅图像像素坐标的映射
  - 参数化模型$q = M(p;\theta)$
- 2.模型拟合(确定模型参数)
  - 建立样本集合
    - 特征匹配/像素匹配
  - 拟合模型参数
- 3.全局配准(Global Registration)
  - 全局优化多幅图像之间的所有运动模型
- 4.图像合成(Compositing)
  - 选择参考视角
  - 合成像素值
  - 去鬼影…

# 运动模型

| Name | Matrix | Number of d.o.f. | Preserves | Icon |
|---|---|---|---|---|
| Translation | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 2 | Orientation $+\cdots$ |  |
| Rigid (Euclidean) | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 3 | Lengths $+\cdots$ |  |
| Similarity | $\begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 4 | Angles $+\cdots$ |  |
| Affine | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 6 | Parallelism $+\cdots$ |  |
| Projective | $\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ | 8 | Straight lines |  |

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形1：纯旋转相机(Rotation Camera): 光心位置不变，只改变相机的朝向



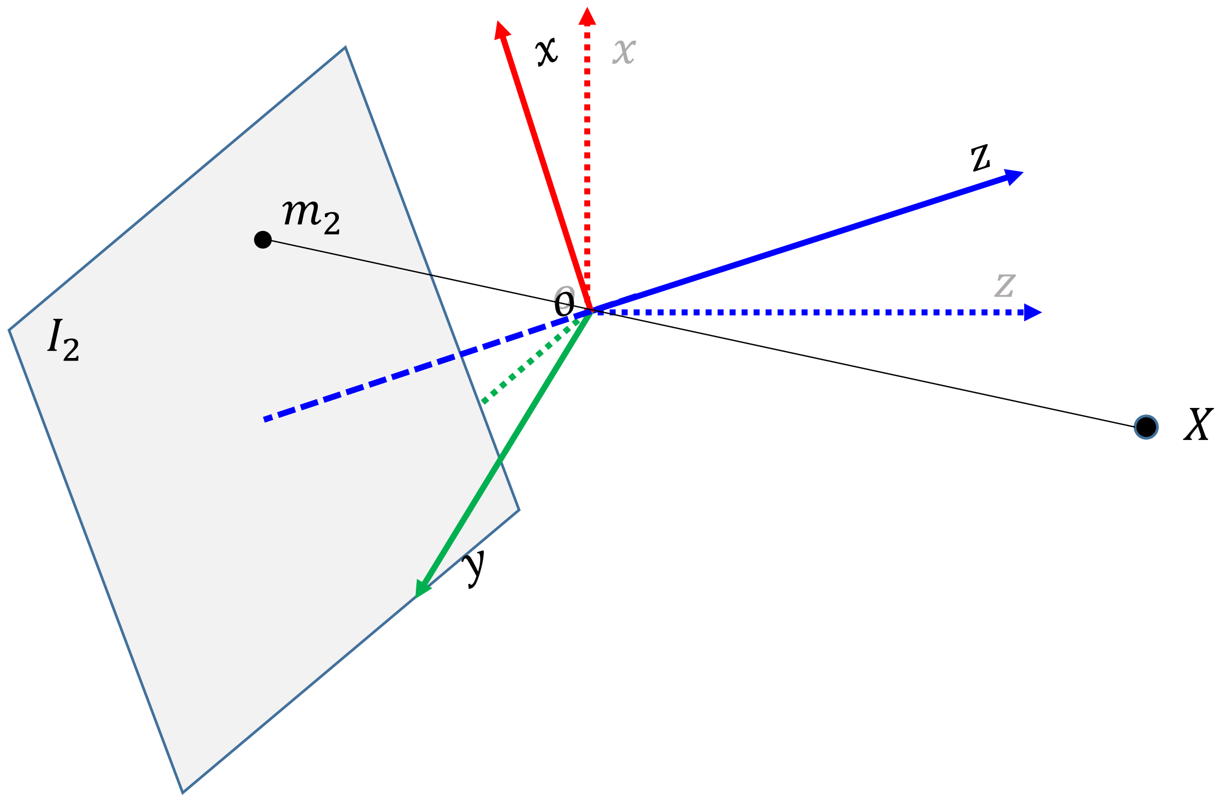

世界坐标系=相机坐标系：

$$P_1 = K(I_{3\times3}, \vec{0})$$

$$m_1 \sim P_1 \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = KX$$

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形1：纯旋转相机(Rotation Camera): 光心位置不变，只改变相机的朝向



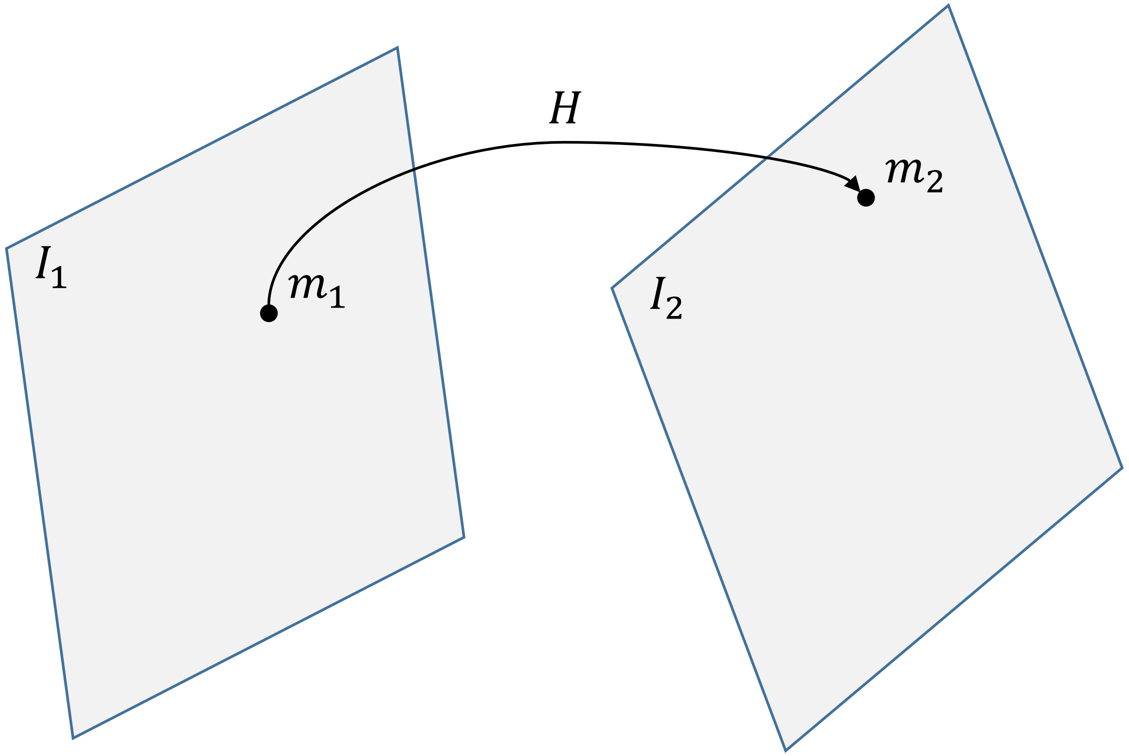

相机旋转之后，外参数为$(R,\vec{0})$：

$$P_2 = K(R,\vec{0})$$

$$m_2 \sim P_2 \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = KRX$$

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形1：纯旋转相机(Rotation Camera): 光心位置不变，只改变相机的朝向




$$P_1 = K(I_{3\times3}, \vec{0})$$

$$m_1 \sim P_1 \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = KX$$

$$P_2 = K(R, \vec{0})$$

$$m_2 \sim P_2 \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = KRX$$

$$\Downarrow$$

$$X = K^{-1} m_1$$

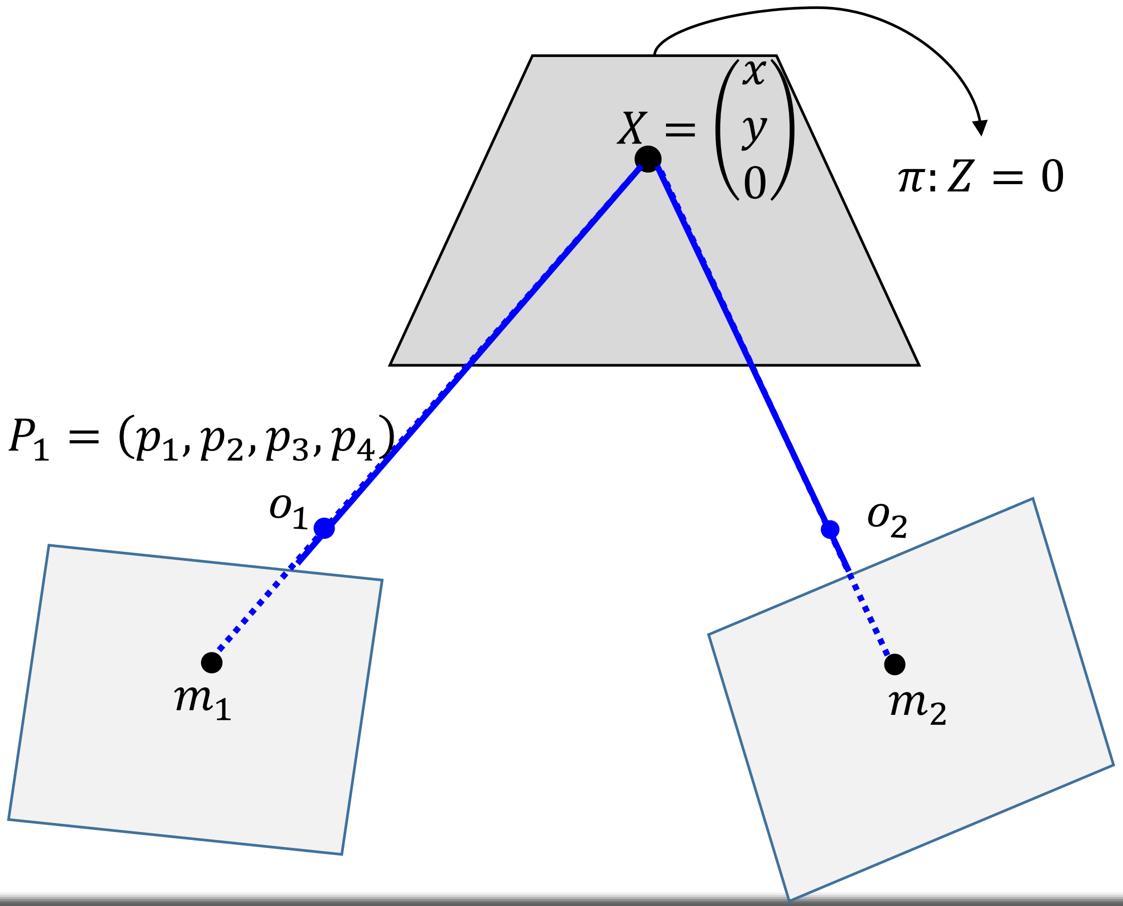
$$m_2 = KRX = KRK^{-1} m_1$$

$$m_2 = Hm_1$$

Homography:$H = KRK^{-1}$

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形2：光心位置可变，但是拍摄对象为静止的平面景物




$$m_1 = P_1 X = (p_1, p_2, p_3, p_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (p_1, p_2, p_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_1 u$$

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$:平面点$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$的齐次坐标

$H_1$：景物平面$\pi$到成像平面的单应变换

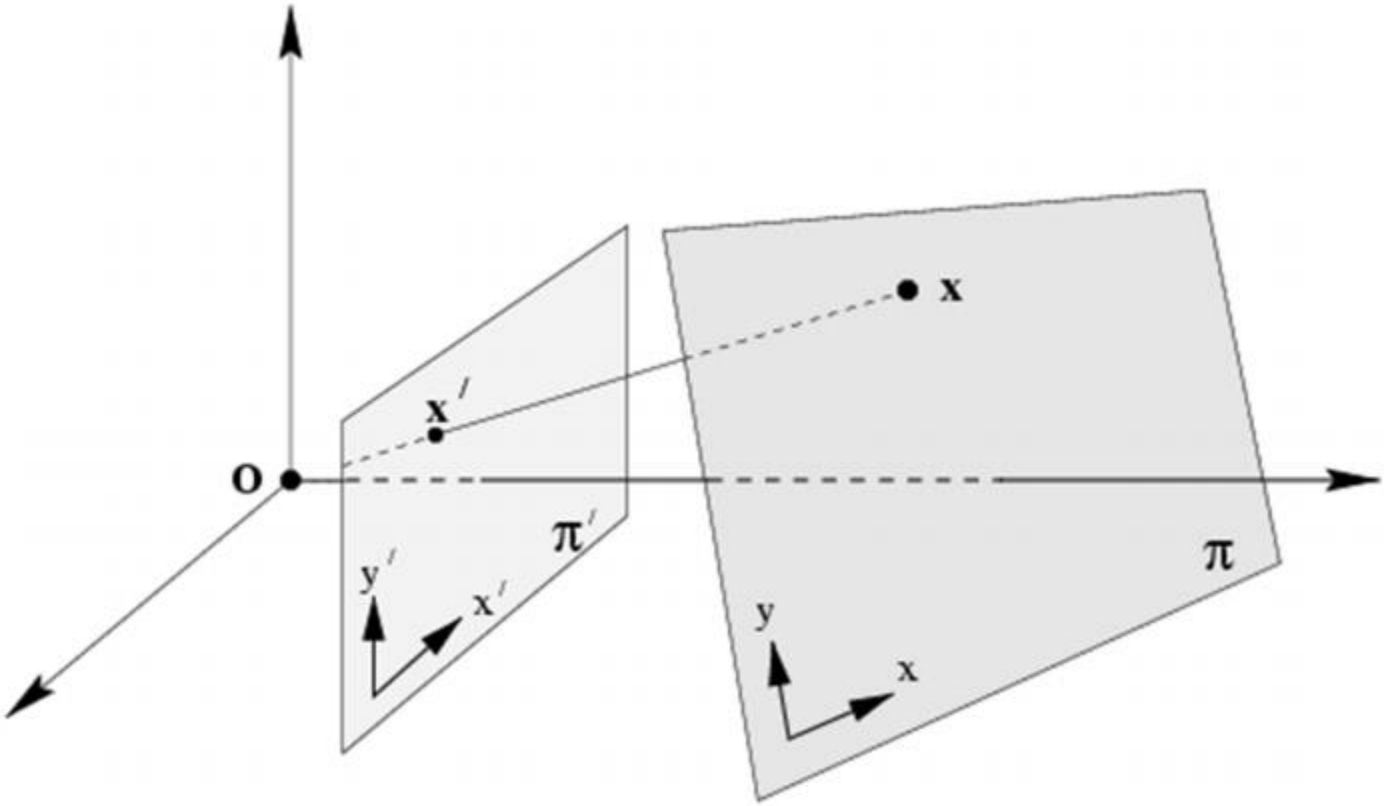
$$m_1 = H_1 u, m_2 = H_2 u \Rightarrow m_2 = H_2 H_1^{-1} m_1 = H m_1$$

$H = H_2 H_1^{-1}$：成像平面1到成像平面2的单应变换

**不同位置的相机，拍摄同一个平面场景，得到的两幅照片的像素坐标变换为单应变换**

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形2：光心位置可变，但是拍摄对象为静止的平面景物




特例：相机静止不动，平面景物相对于相机有运动。等效于平面景物不动，但是相机发生了运动。

两个不同位置的平面景物的像坐标之间的变换是单应变换。

# 平面投影变换（平面单应变换Homography）

情形2：光心位置可变，但是拍摄对象为静止的平面景物

特例：拍摄的非平面景物距离相机非常远（无穷远），景物上的点可以看作是无穷远点。那么景物本身可以看作是无穷远平面。

无穷远平面$\pi_\infty$到两个不同相机成像平面的坐标映射为无穷远单应:

$$\forall u \in \pi_\infty : m_1 = H_1 u, m_2 = H_2 u \Rightarrow m_2 = H m_1, H = H_2 H_1^{-1}$$

从不同位置和角度拍摄的距离相机非常远的同一个非平面景物，那么得到的两幅图像之间的坐标变换可以近似看作是单应变换。

# 根据匹配的特征点估计单应矩阵

假设通过特征点匹配已经确定了$K$对匹配点$(x_i, y_i)_{i=1}^{K} \leftrightarrow (u_i, v_i)_{i=1}^{K}$，如何估计单应矩阵$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_i = \dfrac{h_{11}x_i + h_{12}y_i + h_{13}}{h_{31}x_i + h_{32}y_i + h_{33}} \\ v_i = \dfrac{h_{21}x_i + h_{22}y_2 + h_{23}}{h_{31}x_i + h_{32}y_i + h_{33}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i \cdot h_{11} + y_i \cdot h_{12} + 1 \cdot h_{13} + 0 \cdot h_{21} + 0 \cdot h_{22} + 0 \cdot h_{23} - u_i x_i \cdot h_{31} - u_i y_i \cdot h_{32} - u_i \cdot h_{33} = 0 \\ 0 \cdot h_{11} + 0 \cdot h_{12} + 0 \cdot h_{13} + x_i \cdot h_{21} + y_i \cdot h_{22} + 1 \cdot h_{23} - v_i x_i \cdot h_{31} - v_i y_i \cdot h_{32} - v_i \cdot h_{33} = 0 \end{cases}$$

# 根据匹配的特征点估计单应矩阵

假设通过特征点匹配已经确定了$K$对匹配点$(x_i, y_i)_{i=1}^{K} \leftrightarrow (u_i, v_i)_{i=1}^{K}$，如何估计单应矩阵$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$?

$$\begin{cases} x_i \cdot h_{11} + y_i \cdot h_{12} + 1 \cdot h_{13} + 0 \cdot h_{21} + 0 \cdot h_{22} + 0 \cdot h_{23} - u_i x_i \cdot h_{31} - u_i y_i \cdot h_{32} - u_i \cdot h_{33} = 0 \\ 0 \cdot h_{11} + 0 \cdot h_{12} + 0 \cdot h_{13} + x_i \cdot h_{21} + y_i \cdot h_{22} + 1 \cdot h_{23} - v_i x_i \cdot h_{31} - v_i y_i \cdot h_{32} - v_i \cdot h_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1, y_1, 1, 0, 0, 0, -u_1 x_1, -u_1 y_1, -u_1 \\ 0, 0, 0, x_1, y_1, 1, -v_1 x_1, -v_1 y_1, -v_1 \\ \vdots \\ x_k, y_k, 1, 0, 0, 0, -u_k x_k, -u_k y_k, -u_k \\ 0, 0, 0, x_k, y_k, 1, -v_k x_k, -v_k y_k, -v_k \end{bmatrix} [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T = \vec{0}$$

$$A\mu = \vec{0}$$

# 根据匹配的特征点估计单应矩阵

$$A\mu = \vec{0}$$

$$\mu = [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T \Leftrightarrow H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$H \sim \lambda H$：$H \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda u \\ \lambda v \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda H \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$　　$H$的9个参数$\mu$是冗余的

$A\mu = \vec{0}$有无穷多个解　　　加入约束条件：$\|\mu\|^2 = \mu^T\mu = 1$

$$\mu^* = argmin_\mu \|A\mu\|^2, \qquad s.t. \quad \mu^T\mu = 1$$

其它方法请参考Szeliski: Computer Vision –Algorithms and Applications, 第9章

# 根据匹配的特征点估计单应矩阵

假设通过特征点匹配已经确定了$K$对匹配点$(x_i, y_i)_{i=1}^{K} \leftrightarrow (u_i, v_i)_{i=1}^{K}$，

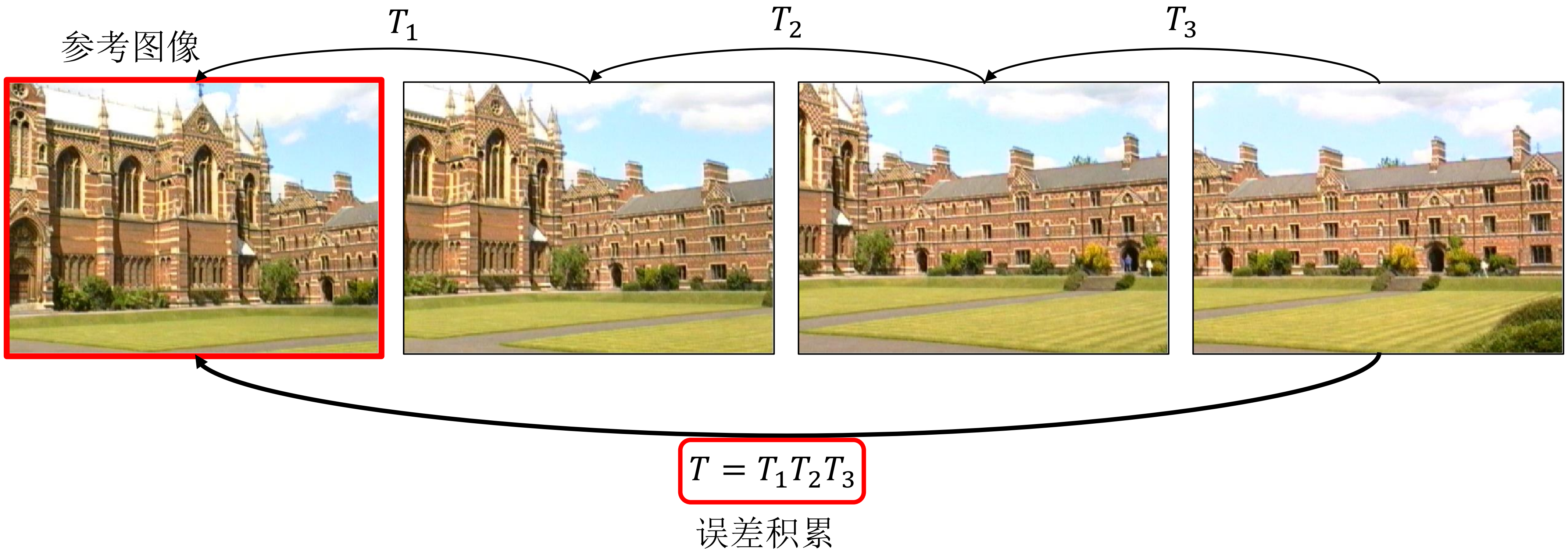
如何估计单应矩阵$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$?

$$\mu^* = argmin_{\mu} \|A\mu\|^2, \qquad s.t. \quad \mu^T \mu = 1$$

匹配点中包含外点？ RANSAC, M-Estimator……

# 全局优化

多幅图像直接拼接的误差积累效应



# 全局优化

拼接多幅图像$\{I_i\}_{i=1}^{n}$：$I_i$到$I_j$的坐标变换为$T_{ij}(\theta_{ij})$

$I_i$中的第$l$个特征点为$x_i^l$ $\quad c_{i,j}^{l,m}=\begin{cases}1 & x_i^l \leftrightarrow x_j^m \\ 0 & otherwise\end{cases}$

$$x_i^l \leftrightarrow x_j^m \Rightarrow \begin{cases} T_{ij}\left(x_i^l;\theta_{ij}\right)=x_j^m \\ T_{ji}\left(x_j^m;\theta_{ji}\right)=x_i^l \end{cases}$$

$$E(\Theta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\sum_{l,m} c_{i,j}^{l,m}\left\|T_{ij}\left(x_i^l;\theta_{ij}\right)-x_j^m\right\|^2$$

# 总结

- 1. 特征匹配
  - 匹配准则
  - 模型估计
- 2. 图像拼接
  - 由特征匹配计算图像运动模型
  - 利用运动模型把图像变换到统一坐标系中
  - 像素融合