安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、B　　5、B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{2}{3}$

7. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

8. （0, 0）

9. $(2f_1'x+f_2'\dfrac{1}{y})dx+(2f_1'y-f_2'\dfrac{x}{y^2})dy$

10. 0

三、计算题

11.（9 分）　**解：**

设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，$F_x'=-3yz$，$F_y'=-3xz$，$F_z'=3z^2-3xy$，当 $z^2\neq xy$ 时，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$$

12.（9 分）

解：

$$\oiint_{\Sigma}(z-1)^2dS=\oiint_{\Sigma}z^2dS-\oiint_{\Sigma}2zdS+\oiint_{\Sigma}1dS$$

因为：$\oiint_{\Sigma}1dS=4\pi 3^2=36\pi$，$\oiint_{\Sigma}2zdS=0$，$\oiint_{\Sigma}z^2dS=\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma}3^2dS=108\pi$

所以，原式$=144\pi$

13.（9 分）**解：**S_1：$x^2+y^2\le 1$**取下侧**

由高斯公式

$$\iint_S (x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{6\pi}{5}$$

又因为：

$\iint (x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$
S_1
$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi$

所以，原式=$\dfrac{11\pi}{5}$

14．（9 分）**解：**

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds=2\int_0^a \sqrt{ax}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2$$

15. （9 分）

解：由题知，收敛域为$(-1,1)$.

对任意 $x\in(-1,1)$，设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

故 $s(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

16. （9 分）

先将其延拓为周期为2π的函数$F(x)$，且连续

对任意 $F(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\pi$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$，

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,[-\pi,\ \pi]$$

四、应用题（共 10 分）

17. **解：**由第二类曲线积分的物理意义和格林公式

$$W=\oint_L (y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)dxdy$$

$$=2\iint_D dxdy=2S_{椭圆}=4\pi$$

五、证明题（共 6 分）

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{1}{\ln n})$

$\sin(\frac{1}{\ln n})\sim\frac{1}{\ln n}$，$n\to\infty$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散，但$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$由莱布尼兹判别法可判断收敛

所以$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$条件收敛.