安徽大学2022-2023学年第二学期
《高等数学A（二）》期末模拟考试试卷

（闭卷　满分100分　时间120分钟）

专业________ 院/系________ 学号________ 姓名________ 座号________

答题勿超装订线　装　订　线

一. 选择题（每小题3分，共15分）

1. 若y_1^*、y_2^*、y_3^*为微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个线性无关解，C_1、C_2、C_3为任意常数，则该微分方程的通解Y可以表示为（　　）

   A. $C_1y_1^*+C_2y_2^*+C_3$　　　　B. $C_1y_1^*+C_2y_2^*+C_3y_3^*$

   C. $C_1y_1^*+C_2y_2^*+(1-C_1-C_2)y_3^*$　　　　D. $C_1y_1^*+C_2y_2^*-(1-C_1-C_2)y_3^*$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{y^2}$（　　）

   A. $=0$　　B. $=1$　　C. $=\mathrm{e}$　　D. 不存在

3. 方程$e^{xz}+xy-yz-2=0$可在$(1,e,1)$邻域确定具有连续偏导数的隐函数（　　）

   A. $x=x(y,z)$　　B. $z=z(x,y)$　　C. $y=y(x,z)$　　D. $x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$

4. D_k是$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$在第$k$象限部分，$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$，则$I_{1,2,3,4}=$（　　）

   A. $0,\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}$　　B. $0,\frac{2}{3},0,-\frac{2}{3}$　　C. $0,-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}$　　D. $0,-\frac{2}{3},0,-\frac{2}{3}$

5. 若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$在$x=6$收敛、在$x=0$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$在$x=2$（　　）

   A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 无法判断

二. 填空题（每小题3分，共15分）

6. 下列命题中正确的是________________。

(1)$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$,$\vec{F}=(y^2-x,z^2-y,x^2-z)$，则$\nabla\cdot\vec{F}=-3$，$\nabla\times\vec{F}=(-2z,-2x,-2y)$;

(2)$f(x,y,z)=x^2y+z^2$，则$\nabla f|_{(1,2,0)}=(4,1,0)$且$f$在该点沿$\vec{u}=(1,2,2)$的方向导数为2;

(3)若$f(x,y)$在(x_0,y_0)邻域内可微，则其在该点任意方向的方向导数均存在;

(4)若$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则$y=y_0$是函数$f(x_0,y)$的驻点;

(5)$\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}dx\int_{-\cos x}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}f(x,y)dy$交换积分次序为$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}dy\int_{\arccos y-\pi}^{\pi-\arccos y}f(x,y)dx$;

(6)L为$x^2+y^2=1$与$y+z=0$交线，从z轴正向看为顺时针，则$\oint_L zdx+ydz=\pi$;

(7)$\sigma>0$时$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x+2023)^2}{\pi\sigma}}dx=2\sqrt{\pi\sigma}$，　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1$;

(8)$\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$展开为x的幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(x^n-x^{5n}\right)$，$x\in[-1,1]$;

(9)若$\int_L\dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$内的积分与路径无关，则$a=-1$。

7. $z=\arctan\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$，则$dz=$__________________。

8. 抛物面壳$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ \ (0\le z\le 1)$，壳面密度$\rho=z$，则其质量为____________。

9. 分段光滑金属丝L为$x^2+y^2=4$、$y=x$以及x轴在第一象限所围成的区域的边界，其线密度$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则该金属丝质量为____________。

10. $f(x)$是周期为2π的周期函数，且在$(-\pi,\pi]$上的定义为$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=7\pi$收敛于______。

三. **计算与证明题（每小题7分，共70分）**

11. 求微分方程$y''-5y'-6y=e^x\sin x-xe^{-x}$ 的通解。

12. $z=x^2f(xy,\dfrac{y}{x})$，其中$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

13. 求曲线$\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$在点$(2,-1,-1)$处的切线和法平面方程。

14. 计算$\oint_L xydx+z^2dy+zxdz$，其中L为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面$x^2+y^2=2ax$（$a>0$）的交线，从z正轴（远处）看为逆时针方向。

15. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{2x^3dydz+2y^3dzdx+2(z-1)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z}}$，$\Sigma$为曲面$z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的下侧。

16. 某一非均匀金属丝L方程为$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$z=\pi a$，$a>0$，线密度$\rho(x,y,z)=a|y|$，求金属丝L的质量。

17. $f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$具有连续偏导数，且$\forall t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。C为区域D内任意分段光滑的有向闭曲线，求$\oint_C yf(x,y)dx-xf(x,y)dy$。

18. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$的收敛域、和函数。

19. $f(x)=|\sin x|$，将$f(x)$展开为傅里叶级数。

20. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$的敛散性，并进行详细证明。

高等数学A（二）期末模拟测试卷

（小题解析）

1. (2分)关于二元函数在某点的性质，下列说法正确的是(　C　)

A.可偏导，则连续　　　　*B*.可偏导，则可微

C.不连续，则不可微　　　*D*.可微，则具有连续偏导数

偏导数连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 可微 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 偏导数存在(可偏导)

可微 $\Downarrow\not\Uparrow$ 连续

连续 $\not\Leftrightarrow$ 偏导数存在(可偏导)

A. 可偏导与连续没有必然联系，均不可互推；　×

B. 可微 $\Rightarrow$ 可偏导　×

C. 可微 $\Rightarrow$ 连续（逆否命题：不连续 $\Rightarrow$ 不可微）　✓

D. 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微　×

2. (3分)到平面$y=-\frac{1}{4}$和直线$\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{4}}{0}=\frac{z}{0}$距离相等的点集构成的方程为(　$y=z^2$　)

$$\left|y-\left(-\tfrac{1}{4}\right)\right|=\sqrt{\left(y-\tfrac{1}{4}\right)^2+z^2}\Rightarrow\left(y+\tfrac{1}{4}\right)^2-\left(y-\tfrac{1}{4}\right)^2=z^2\Rightarrow y=z^2$$

3. (3分)函数$f(x,y,z)=x^2y+z^2$在点$(1,2,0)$处沿向量$u=(1,2,2)$的方向导数为(　2　)

$$(f'_x,f'_y,f'_z)=(2xy,x^2,2z)\Rightarrow\overrightarrow{grad}f(P_0)=(4,1,0).$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3,\quad\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right),\quad\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)=\overrightarrow{grad}f(P_0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=2$$

4. (3分)$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和$x^2+y^2=1$交线上与$XOY$面距离最短的点坐标为(　$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{35}{12}$　)

设$z=5\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)=f(x,y)$，$x^2+y^2-1=0=\varphi(x,y)$.

记$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=5-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases}L'_x=-\frac{5}{3}+2\lambda x=0\\ L'_y=-\frac{5}{4}+2\lambda y=0\\ L'_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\quad x=\frac{5}{6\lambda}\ ①\quad y=\frac{5}{8\lambda}\ ②$$

$$\xrightarrow{代入①②}\left(\frac{5}{6\lambda}\right)^2+\left(\frac{5}{8\lambda}\right)^2=1\Rightarrow\lambda=\pm\frac{25}{24}$$

其中$\lambda=\frac{25}{24}$，z最小.

故所求坐标为$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$

6. (3分) $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$展开为x的幂级数为($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(x^n-x^{5n}\right)$)

$$\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)=\ln\frac{1-x^5}{1-x}=\ln(1-x^5)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(-x^5)^n-(-x)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}(x^{5n}-x^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x^n-x^{5n})\qquad x\in[-1,1)$$

7. (6分) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ ($\cos1+2\sin1$); $y=\ln\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$的弧长为($\frac{1}{2}\ln3$)

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$

又 $\begin{cases}\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{cases}$ 代入$x=1$ 可得: 原式$=\cos1+2\sin1$

(2) $y=f(x)=\ln\cos x$, $y'=f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\tan^2x}=|\sec x|=\sec x$

$$\Rightarrow s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln3$$

8. (3分) $\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$内的积分与路径无关，则$a=$ (-1)

$P=\frac{x}{x^2+y^2-1}$, $Q=-\frac{ay}{x^2+y^2-1}$, 积分与路径无关 $\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x\cdot2y}{(x^2+y^2-1)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{+ay\cdot2x}{(x^2+y^2-1)^2}$ $\Rightarrow-2xy=2axy\Rightarrow a=-1$

9. (3分) L为$x^2+y^2=1$与$y+z=0$交线，从z轴正向看为逆时针，则$\oint_L zdx+ydz=$ (π)

设 $\begin{cases}x=\cos t\quad(0\le t\le2\pi)\\ y=\sin t\\ z=-\sin t\end{cases}$ $\begin{cases}dx=-\sin t\,dt\\ dz=-\cos t\,dt\end{cases}$

$$\oint_L zdx+ydz=\int_0^{2\pi}(\sin^2t-\sin t\cos t)dt=\frac{2-\sin2t+\cos2t}{4}\Big|_0^{2\pi}=\pi$$