安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等数学 A（二）》（A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．A； 2．D； 3．C； 4．C； 5．B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．$\frac{\pi}{3}$； **7**．$\frac{1}{1+x^2}$； **8**．$\frac{1}{2}(e-1)$； 9．-18π； **10**．$\frac{\pi^2}{2}$.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11．解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

………………… 9 分

12.解： 由特征方程 $4r^2+4r+1=0$，得两等根 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}$.

故微分方程的通解为 $y=\left(c_1+c_2x\right)e^{-\frac{x}{2}}$，两边对 x 求导，得 $y'=\left(-\frac{1}{2}c_1+c_2-\frac{1}{2}c_2x\right)e^{-\frac{x}{2}}$，由初始条件 $y\big|_{x=0}=2,y'\big|_{x=0}=0$，得 $c_1=2,c_2=1$，故所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

………………… 9 分

13.解 利用柱坐标变换

$$\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2r^2\cdot rdz=2\pi\int_0^2r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{16}{3}\pi .$$

………………… 9 分

14.解：由于直线$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+t \\ z=1+2t \end{cases}$过点$P(2,-1,1)$，方向向量为$\vec{v}=\{3,1,2\}$，

所求平面的法向量为$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\{-2,4,1\}$，

从而所求平面方程为$-2(x-3)+4(y+1)+(z-3)=0$，

即$2x-4y-z=7$． …………………… 9 分

15．解：Σ在yoz面的投影为矩形域D_{yz}:$0\le y\le 1, 0\le z\le 3$，

原式=$\iint\limits_{\Sigma} xdydz$=$\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}dydz$ ．

$$=\int_0^1 dy\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz=3\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{3}{4}\pi$$

…………………… 9 分

16．解：

由$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，得收敛区间$-1<x<1$．

且当$x=1$时，级数均收敛，当$x=-1$时，级数发散，

故收敛域为$(-1,1]$． …………………… 4 分

令其和函数为$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，显然$s(0)=0$

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},-1<x<1.$ $s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$

因级数在$x=1$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),-1<x\le 1$．

…………………… 9 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+5+\lambda(x+y-1)$

解方程组 $\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0 \\ L_y=2y+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y-1=0 \end{cases}$，得唯一驻点 $x=y=\dfrac{1}{2}$，又

$A=z_{xx}=2, B=z_{xy}=0, C=z_{yy}=2 \quad AC-B^2=4>0, A>0$，故当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时，

$z\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{2}$ 为极小值，无极大值。

……………… 10 分

18．解：三角形斜边所在的直线方程为 $x+y=a$，薄片的质量

$$M=\iint_{D_{xy}}\rho(x,y)d\sigma=\iint_{D_{xy}}(x+y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x+y)\,dy=\frac{1}{3}a^3$$

……………… 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

19．证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

因 $\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$,，而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，得原级数非绝对收敛，

但 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0, u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}=u_{n+1}$，故由莱布尼兹判别法，

交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 收敛，故原级数条件收敛.

……………… 6 分