安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末考试试卷（A 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 C　　2、 B　　3、 A　　4、D　　5、 C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 1　　7、$\int_0^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　8、$(0,0,0)$ 或 $\vec{0}$　　9、绝对收敛　　10、$\frac{2\pi}{3}$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11、【解】设切点坐标 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则：$x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1$。令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则：$F_x'=2x,F_y'=4y,F_z'=2z$，因此，点 M_0 处切平面的法向量为 $\mathbf{n}=\{2x_0,4y_0,2z_0\}$，平面 $x-y+2z=0$ 的法向量为 $\mathbf{n}_0=\{1,-1,2\}$，又因为切平面平行于已知平面，则它们的法向量也平行，

即 $\mathbf{n}//\mathbf{n}_0$，故

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2},$$

即得：$y_0=-\frac{1}{2}x_0,z_0=2x_0,$ 故有：

$$x_0^2+2\cdot\frac{1}{4}x_0^2+4x_0^2=1$$

解得 $x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$，从而 $\mathbf{n}=2x_0\{1,-1,2\}$，故所求切平面方程为：

$$(x-x_0)-\left(y+\frac{1}{2}x_0\right)+2(z-2x_0)=0$$

即：$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$　　………………… 9 分

12、【解】 设 $F(x,y,z)=e^z-xyz-1$，则 $F_x'=-yz$，$F_y'=-xz$，$F_z'=e^z-xy$，由隐函数求导公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{e^z-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(e^z-xy\right)-yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{\left(e^z-xy\right)^2}$$

$$=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{\left(e^z-xy\right)^3}$$

…………………………………… 9 分

13、【解】

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^2\frac{1}{(x+y+z)^3}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y+2)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]\mathrm{d}y$$ ……… 9 分

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$$

14、【解】取 y 为参数，曲线 L 的参数方程为： $L: y=y, x=y^2,\ y:-1\to 1,$ 而 $\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y,$ 则：

$$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^2\times y\times 2y\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\mathrm{d}y=\frac{2y^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}$$ … 9 分

15、【解】设 Ω 为由 Σ 围成的空间闭区域， Ω: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi, 0\le r\le a$ ，由高斯公式，有

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ …………… 9 分

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\times 2\pi\times\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{12\pi}{5}a^5$$

16、【解】因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}x^2\right|=\left|x^2\right|<1\Rightarrow|x|<1$ ，

则收敛半径为$R=1,$当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散；当$x=1$时，

级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散；所以级数的收敛域为$(-1,1)$。

$\forall x\in(-1,1)$，设和函数为$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},S(0)=0$，两边求导可得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^{2}},x\in(-1,1)$$

两边求积分可得和函数：

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,x\in(-1,1)\end{aligned}$$

………… 9 分

四、综合题（每小题 8 分，共 8 分）

17、【解】上半球面可表示为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\},$$

面积微元为：

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以球面质量为：

$$\begin{aligned}M&=\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S=a\iint_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r\\&=\pi a\int_0^a\left(\sqrt{a^2-r^2}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)\mathrm{d}\left(a^2-r^2\right)\\&=\pi a\left[\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-2a^2\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi a^4\end{aligned}$$

……………………………… 8 分

五、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

18、【证明】因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \lim_{n\to\infty} v_n = 0,$ 由极限存在必有解，可知 $u_n^2 \le M u_n$，$v_n^2 \le N v_n$，其中 M, N 为正常数；再由比较判别法的极限形式，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛，而 $u_n v_n \le \frac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + v_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$ 收敛.

…………………………………… 8 分