安徽大学 2019—2020 学年第二学期
《高等数学 A（二）》（B 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．A； **2**．D； **3**．A； **4**．B； **5**．D

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}-\vec{k}\right)$； **7**．$\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$； **8**．$\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy$； **9**．0； **10**．$\frac{2\pi}{3}$.

三．计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11．解：由特征方程 $r^2+2r+5=0$，得两根 $r_1=-1+2i,r_2=-1-2i$.

故微分方程的通解为 $y=\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)e^{-x}$，两边对 x 求导，得 $y'=\left(\left(2c_2-c_1\right)\cos 2x-\left(c_2+2c_1\right)\sin 2x\right)e^{-x}$，由初始条件 $y\big|_{x=0}=3,y'\big|_{x=0}=1$，得 $c_1=3,c_2=2$，故所求特解为 $y=\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right)e^{-x}$. .... 9 分

12．解：令

$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-1-z,\vec{n}\big|_{(2,1,4)}=\left\{2x,2y,-1\right\}\big|_{(2,1,4)}=\left\{4,2,-1\right\}$

故切平面方程为 $4\left(x-2\right)+2\left(y-1\right)-\left(z-4\right)=0$，即 $4x+2y-z-6=0$

法线方程为 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ .... 9 分

13.解: V 在 z 轴上的投影为 $\left[0,1\right]$，在此区间内任取一 z，作垂直 z 于轴的平面，截得一圆环 $D_z:\frac{z^2}{4}\le x^2+y^2\le z^2$，且它的面积为 $\frac{3\pi}{4}z^2$，用截面法得

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\frac{3}{4}\pi z^3dz=\frac{3}{16}\pi\ =2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{16}{3}\pi\ .$$

.... 9 分

14. 解：添加直线 $\overline{AB}$，方向由 A 点到 B 点，于是 $\int_{L\cup\overline{AB}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=-\iint\limits_D m\,dxdy=-\dfrac{m\pi}{8}(a-b)^2$，而

$\int_{\overline{AB}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=0$

故 $\int_L\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=-\dfrac{m\pi}{8}(a-b)^2$

………………… 9 分

15. 解：将 Σ 分为上半球面 $\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和下半球面 $\Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\Sigma$ 在 xoy 面的投影为 D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$，故 $\iint\limits_\Sigma z\,dxdy=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

………………… 9 分

16．解：

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，得收敛区间 $-1<x<1$．且当 $x=\pm1$ 时，级数均发散，

故收敛域为 $(-1,1)$.　　　　………………… 4 分

令其和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，

于是 $s(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，$(-1<x<1)$.

………………… 9 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：过椭球面上第一卦限点 (x_0,y_0,z_0) 作切平面，切平面方程为：$\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，得与三个坐标轴的交点为 $x=\dfrac{a^2}{x_0},y=\dfrac{b^2}{y_0},z=\dfrac{c^2}{z_0}$. 于是四面体体积为 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6}\cdot\dfrac{1}{x_0y_0z_0}$

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$

解方程组$\begin{cases} L_x = yz+\lambda\cdot\dfrac{2x}{a^2}=0 \\ L_y = zx+\lambda\cdot\dfrac{2y}{b^2}=0 \\ L_z = xy+\lambda\cdot\dfrac{2z}{c^2}=0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$，得唯一驻点 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}.$

故所求切点坐标$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right).$

.... 10 分

18．解：球心坐标为$(0,0,a)$，由于该球体的质量分布关于 z 轴对称，所以它的重心坐标位于 z 轴上，而密度函数为 $\rho(x,y)=x^2+y^2+z^2$，故

$\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_V z\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz}{\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz}=\dfrac{5}{4}a.$ 从而球体的重心坐标为$\left(0,0,\dfrac{5}{4}a\right)$

.... 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

19．证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$，记 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}=1,$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，得原级数非绝对收敛，

但

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}=0, u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)<0$，

即 $u_{n+1}<u_n$.

故由莱布尼兹判别法，原级数收敛，且为条件收敛.

.... 6 分