Inteligência Artificial

Luís A. Alexandre

UBI

Ano lectivo 2019-20

Conteúdo

Conteúdo

Introdução

- No mundo real é muito provável que nem todos os fatores que influenciam um problema sejam observáveis, em todos os instantes.
- Por outro lado, existem problemas com componentes aleatórias.
- Assim, nasce a necessidade de um agente lidar com a **incerteza**.
- A principal ferramenta para lidar com a incerteza é a **teoria das probabilidades**.

Exemplo

- Exemplo: diagnóstico de uma dor de dentes.
- Os diagnósticos envolvem incerteza.
- Uma regra para o diagnóstico usando lógica proposicional:

$$DorDentes \Rightarrow Cavidade$$

- Pode não estar correta: há mais causas para dor de dentes.

$$DorDentes \Rightarrow Cavidade \lor ProblemaGengivas \lor Abcesso \lor \ldots$$

- Não funciona pois há muitas possíveis causas.
- Podemos tentar inverter a lógica:

$$Cavidade \Rightarrow DorDentes$$

- Mas mesmo esta não é correta pois nem todas as cavidades causam dor.

Lógica e probabilidades

- Falhas no uso da lógica para lidar com este tipo de problema:
  - **não é prático**: é complicado listar todas as possíveis causas e consequências de uma regra;
  - **ignorância**: muitas vezes desconhecemos algumas causas e consequências;
  - **incerteza**: mesmo que todas as regras pudessem ser escritas, poderiam não se aplicar a um dado caso pois nem todas se poderão testar.
- O problema que encontramos aqui para o domínio médico aparece noutras áreas: economia, jardinagem, leis, design, etc..
- O agente só consegue ter **um dado grau de certeza** e não a certeza absoluta do que se está a passar.
- Para lidar com esta incerteza recorremos às probabilidades.

Conceitos básicos de probabilidades

- Podemos não ter a certeza do que afeta um paciente mas podemos atribuir um grau de certeza à nossa crença: diremos que existe 80% de hipótese de ele ter uma cavidade se tiver dor de dentes.
- Isto significa que para um conjunto grande de pacientes com os mesmos sintomas verificamos que em 80% dos casos a dor resulta de uma cavidade.
- Para aquele doente em concreto é óbvio que ele ou tem ou não tem a cavidade no dente, logo o que significa a probabilidade num caso concreto?
- As afirmações probabilísticas **dizem respeito ao nosso estado de conhecimento** e não ao que se passa na realidade.
- Dizemos: "A probabilidade de um paciente ter uma cavidade dado que tem dor de dentes é de 0.8".

Conceitos básicos de probabilidades

- Se soubermos que o doente teve problemas nas gengivas, podemos alterar a nossa afirmação para: "A probabilidade de um paciente ter uma cavidade dado que tem dor de dentes e problemas nas gengivas é de 0.4".
- Se tivermos informação que nos indique que o doente não tem cavidades (raio-X) podemos alterar para: "A probabilidade do paciente ter uma cavidade é praticamente 0".
- Estas afirmações não são contraditórias: apenas espelham o **estado do nosso conhecimento** face ao problema.

Incerteza e decisões racionais

- Se o nosso agente tiver várias possíveis ações que possa tomar, cada uma com uma dada probabilidade de resolver o problema, qual escolher?
- A resposta óbvia seria: usar a que tem a probabilidade mais elevada.
- Mas essa escolha pode não ser a melhor. Exemplo: "Qual a ação que um agente racional deve tomar se deseja chegar a horas a um aeroporto para não perder o voo (mora a 1 hora sem trânsito do aeroporto)?"
  - A1: "Sair de casa 1 hora antes do voo"
  - A2: "Sair de casa 2 horas antes do voo"
  - A3: "Sair de casa 3 horas antes do voo"
  - A4: "Sair de casa 24 horas antes do voo"
- A ação com maior probabilidade de nos permitir apanhar o voo será a A4, mas faz sentido do ponto de vista prático?

Utilidade

- Concluímos que **escolher a ação com maior probabilidade** de conseguir atingir o nosso objetivo **nem sempre será a melhor opção**.
- Temos que levar em conta a **utilidade** do estado que resulta duma ação.
- A teoria da utilidade diz que **cada estado tem um dado grau de utilidade** e que **o agente deve preferir estados com maior grau de utilidade**.
- **A utilidade depende do agente**. O mesmo estado pode ser muito útil para um agente e pouco para outros: um empate com um mestre de xadrez é ótimo para o comum dos mortais mas mau para um grande mestre de xadrez.

Teoria da decisão

- Para que o agente possa tomar a sua decisão deve então levar em conta a **probabilidade** de uma dada ação o levar a um estado que deseja e a **utilidade** o estado que resulta dessa ação:
  Teoria da decisão = Teoria das probabilidades + Teoria da utilidade
- **Um agente é racional** se e só se escolhe a ação que tem maior **utilidade esperada**:

$$UE(a) = \sum_{e \in E(a)} P(e)U(e)$$

  onde e é um estado, $U(e)$ é a utilidade do estado e, $E(a)$ é o conjunto dos estados que podem resultar da ação a e $P(e)$ é a probabilidade da ação a resultar no estado e.
- Note-se que a **utilidade** é característica de um estado mas a **utilidade esperada** é característica duma ação.

Incerteza e decisões racionais

- Voltando ao exemplo anterior, se atribuirmos probabilidades e utilidade ao estado resultante das ações podemos ter algo como:

Ação	Resultado (estado)	Probabilidade	Utilidade	Utilidade esperada
A1	Apanhar voo espera max 0h	0.5	5	
	Perder voo após 1h	0.5	0.4	
A2	Apanhar voo espera max 1h	0.8	4	
	Perder voo após 2h	0.2	0.3	
A3	Apanhar voo espera max 2h	0.9	3	
	Perder voo após 3h	0.1	0.2	
A4	Apanhar voo espera max 23h	0.99	1	
	Perder voo após 24h	0.01	0.1	

- A escolha final é uma ação cujo estado resultante não tem a maior utilidade, mas a ação tem a maior utilidade esperada.

Conteúdo

Conceitos básicos de probabilidades

- Suponhamos que iremos realizar uma experiência cujo resultado desconhecemos.
- Embora não saibamos qual o resultado da experiência, conhecemos quais são os **resultados possíveis**.
- O conjunto de todos os resultados possíveis chama-se o **espaço amostral** S.
- Exemplos:
  - Se formos lançar uma moeda temos $S = \{Cara, Coroa\}$;
  - Se formos lançar um dado temos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
  - Se formos lançar duas moedas temos $S = \{(Cara, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara), (Coroa, Coroa)\}$.
- Qualquer sub-conjunto de S é chamado um **acontecimento**.
- Ex.: Se $A = \{(Cara, Cara), (Cara, Coroa)\}$ então é o acontecimento em que são lançadas duas moedas e a primeira fica com $Cara$.

Conceitos básicos de probabilidades

- Dados dois acontecimentos A e B de um espaço amostral, definimos um novo acontecimento $A \cup B$ (**união**) que consiste em todos os resultados que estejam em A ou em B ou em ambos.
- Ex.: No lançamento de uma moeda, se $A = \{Cara\}$ e $B = \{Coroa\}$ então temos que $A \cup B = \{Cara, Coroa\} = S$.
- Da mesma forma podemos definir um novo acontecimento $A \cap B$ (**interseção**) que consiste em todos os resultados que estejam simultaneamente em A e em B.
- Podemos também definir o **complemento de um acontecimento** A como todos os resultados de S que não estão em A. Escrevemos o complemento como $\bar{A}$.
- Finalmente, podemos considerar o **evento nulo**, $\emptyset$, que consiste em zero resultados.

Conceitos básicos de probabilidades

- Consideremos uma experiência com espaço amostral S. Para cada acontecimento A assumimos que se define um número chamado a **probabilidade do acontecimento** A, $P(A)$, que obedece às seguintes condições:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
  2. $P(S) = 1$.
  3. Para qualquer sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots,$ que sejam **mutuamente exclusivos** ($A_i \cap A_j = \emptyset$, quando $i \neq j$) temos

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1}$$

- Ex.: Se no lançamento de uma moeda, ambas as faces forem igualmente prováveis, vem $P(\{Cara\}) = P(\{Coroa\}) = 0.5$.
- Ex.: Se no lançamento a moeda estivesse viciada, poderíamos ter $P(\{Cara\}) = 0.7$ e $P(\{Coroa\}) = 0.3$.

Conceitos básicos de probabilidades

- Como achar a **probabilidade da união de dois acontecimentos** $P(A \cup B)$ em geral, mesmo quando não forem mutuamente exclusivos?
- Consideremos $P(A) + P(B)$ que é a soma da probabilidade de todos os resultados em A com a probabilidade de todos os resultados em B.
- Resultados que estejam em ambos os acontecimentos serão contados duas vezes, mas só aparecem uma vez em $P(A \cup B)$, logo temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{2}$$

- Ex.: no lançamento de duas moedas não viciadas,
  - cada possível resultado tem probabilidade 0.25;
  - seja $A = \{(Cara, Cara), (Cara, Coroa)\}$ e $B = \{(Cara, Cara), (Coroa, Cara)\}$.
  - Qual a probabilidade de sair a primeira ou a segunda moedas $Cara$?
  - Vamos ter $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.5 - 0.25 = 0.75$

Conceitos básicos de probabilidades

- Consideremos agora a experiência que consiste em lançar dois dados não viciados.
- Temos 36 resultados possíveis, cada um igualmente provável, logo com probabilidade $= 1/36$.
- Ex.: Qual a probabilidade da soma dos valores dos dois dados dar 11?
  - Só existem 2 casos em que isso acontece, com os acontecimentos $A = \{(5, 6)\}$ e $B = \{(6, 5)\}$. Logo, usando a eq. (2) vem: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/36 + 1/36 - 0 = 1/18$.
  - Como os acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos podíamos ter usado a terceira propriedade das probabilidades (equação (1)).
- Ex.: Qual é a probabilidade de a soma dos valores dos dois dados dar 11 e ao mesmo tempo o valor obtido no primeiro dado ser 5? Fácil, 1/36 (só temos 2 casos em que a soma é 11 e só num deles o primeiro dado vale 5).

Conceitos básicos de probabilidades

- Agora imagine-se que se lança o primeiro dado e ele dá 5, e agora queremos saber a probabilidade de a soma dos valores dos dois dados dar 11.
- O que procuramos agora é uma **probabilidade condicional**: queremos saber qual a probabilidade de um acontecimento A sabendo que outro, B, já aconteceu.
- Escrevemos
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3)$$
para $P(B) > 0$.
- Então para respondermos à questão anterior temos $A =$"probabilidade de a soma dos valores dos dois dados dar 11." e $B =$"primeiro dado vale 5".
- $P(B) = 1/6$ e $P(A \cap B) = 1/36$, logo $P(A|B) = 1/6$.

Conceitos básicos de probabilidades

- Resumo:
  - a probabilidade de a soma dos valores dos dois dados dar 11 vale $1/18$;
  - a probabilidade de a soma dos valores dos dois dados dar 11 **sabendo** que o primeiro dado deu 5 vale $1/6$.
- Compreende-se: é mais provável obter uma soma 11 se já tiver um dos dados com valor 5.
- Antes do lançamento do dado temos uma **probabilidade a priori** $P(Total = 11)$.
- Após o lançamento do primeiro dado, temos mais informação e podemos obter a probabilidade condicional ou **a posteriori** $P(Total = 11|D1 = 5)$.
- O nosso agente vai estar interessado em usar probabilidades condicionais pois quer ir juntando toda a informação que vai recolhendo sobre o ambiente para poder tomar decisões.

Conteúdo

Inferência

- Vejamos como é possível **chegar a conclusões** tirando partido da teoria das probabilidades.
- A nossa **base de conhecimento** será a distribuição conjunta dos acontecimentos que estão envolvidos no mundo que estamos a considerar.
- Exemplo: um domínio que consiste em 3 acontecimentos booleanos *DorDentes*, *Cavidade* e *Carie*.
- A distribuição conjunta é

	DorDentes		$\neg$*DorDentes*	
	Carie	$\neg$*Carie*	*Carie*	$\neg$*Carie*
Cavidade	0.10	0.02	0.08	0.03
$\neg$*Cavidade*	0.01	0.06	0.20	0.50

Inferência

- Note-se que a soma das probabilidades tem que dar 1.
- Se quisermos apenas a probabilidade relativa a uma única variável, somamos os valores de todos os eventos em que ela está envolvida e obtemos a **probabilidade marginal**:
$$P(Cavidade) = 0.10 + 0.02 + 0.08 + 0.03 = 0.23$$
- Este processo é genericamente representado como
$$P(A) = \sum_{B \in Z} P(A, B) \quad (4)$$
onde Z representa o conjunto de variáveis envolvidas no problema.
- Exemplo (não são independentes, usar equação (2)):
$P(Cavidade \cup DorDentes) =$
$0.10+0.02+0.08+0.03+0.10+0.02+0.01+0.06-(0.10+0.02) = 0.30$

Inferência

- Temos uma relação semelhante para o caso em que as probabilidades são condicionais em vez de conjuntas (aplicar a equação (3) à anterior):
$$P(A) = \sum_{B \in Z} P(A|B)P(B)$$
- O que normalmente precisamos de fazer é: achar a probabilidade condicional de alguma variável dada informação sobre outras.
- Fazemos isso usando a equação (3) e depois avaliando a partir da distribuição conjunta.
- Exemplo: achar a probabilidade de ter uma cavidade dado que tem dor de dentes:
$$P(Cavidade|DorDentes) = \frac{P(Cavidade \cap DorDentes)}{P(DorDentes)} = \frac{0.12}{0.19} = 0.63$$
- Exercício: ache a $P(\neg Cavidade|DorDentes)$

Inferência

- $$P(\neg Cavidade|DorDentes) = \frac{P(\neg Cavidade \cap DorDentes)}{P(DorDentes)} = \frac{0.07}{0.19} = 0.37$$
- Concluímos que $P(\neg Cavidade|DorDentes) = 1 - P(Cavidade|DorDentes)$, como seria de esperar.
- Nas contas feitas vemos que o fator $1/P(DorDentes)$ manteve-se constante.
- Isto significa que podemos reescrever as expressões anteriores substituindo este fator por uma constante α:

$$P(Cavidade|DorDentes) = \alpha P(Cavidade \cap DorDentes)$$

$$P(\neg Cavidade|DorDentes) = \alpha P(\neg Cavidade \cap DorDentes)$$

Inferência

- Só temos que garantir que α seja tal que a soma destas duas probabilidades dê 1.
- Isto permite-nos achar os valores destas probabilidades mesmo desconhecendo o valor de $P(DorDentes)$ (TPC).
- Podemos então escrever que

$$P(X|Y) = \alpha P(X, Y) \tag{5}$$

Conteúdo

Regra de Bayes

- Olhando de novo para a equação (3) verificamos que podemos escrever a mesma equação trocando os nomes às variáveis:

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B, A) = P(B|A)P(A)$$

- Como $P(A, B) = P(B, A)$ vem

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Isto permite escrever

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{6}$$

que é a chamada **Regra de Bayes**.

Regra de Bayes

- Muitas vezes vemos apenas o efeito de uma causa desconhecida.
- Podemos usar a RB para descobrir a **probabilidade de uma dada causa estar por trás de um efeito** observado com:

$$P(causa|efeito) = \frac{P(efeito|causa)P(causa)}{P(efeito)}$$

- Se não sabemos qual a causa entre várias possíveis, podemos achar as probabilidades condicionais acima para as várias causas e ficamos a saber qual é a mais provável geradora do efeito observado.
- A probabilidade $P(efeito|causa)$ é na **direção da causa**: tenho uma causa e procuro o efeito.
- A probabilidade $P(causa|efeito)$ é na **direção do diagnóstico**: tenho um efeito e quero saber qual a causa.
- Exemplo: no diagnóstico médico normalmente temos os efeitos ($DorDentes$) e queremos saber a causa ($Cavidade$?).

Independência condicional

- A definição para **independência condicional** de duas variáveis X e Y dada a variável Z é

$$P(X, Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z) \tag{7}$$

- Exemplo:

$$P(DorDentes, Carie|Cavidade) =$$

$$P(DorDentes|Cavidade)P(Carie|Cavidade)$$

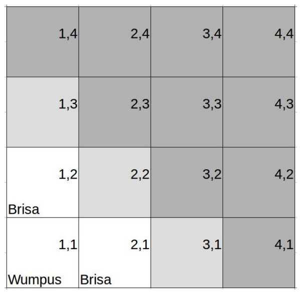
- Qual é a vantagem?
  - Isto permite que os sistemas de inferência que lidam com n variáveis escalem com $O(n)$ em vez de $O(2^n)$, o que é muito importante.
  - É mais fácil ter informação relativa a independência condicional que a independência absoluta.

Conteúdo

Mundo Wumpus

- Consideremos um mundo composto por 16 quadrados numa grelha de lado 4:
- Temos um agente chamado Wumpus que se desloca neste mundo.

- O mundo é perigoso: os quadrados podem ter poços com probabilidade 0.2.
- O Wumpus inicia o seu passeio por este mundo sempre no quadrado [1,1] que é o único que se sabe não conter poço.
- Se um quadrado tem um poço, os quadrados à sua volta têm uma brisa.



Incerteza no Mundo Wumpus

- O Wumpus não sabe o que existe em cada quadrado antes de o visitar.
- Exemplo: após ter visitado os 3 quadrados a branco na fig. anterior, sabemos que 3 quadrados podem ter um poço: [1,3] ,[2,2], [3,1] (estão a cinzento claro).
- A **inferência lógica** não permite que o agente saiba nada sobre esses 3 quadrados, logo **acaba por decidir aleatoriamente** sobre qual será visitado de seguida.

Incerteza no Mundo Wumpus

- Com um agente probabilístico vamos conseguir agir melhor.
- Queremos **achar a probabilidade de cada um desses quadrados ter um poço**, em função do conhecimento adquirido pelo Wumpus.
- Precisamos das seguintes variáveis:
  - $PC_{i,j}$ é verdade se o quadrado $[i,j]$ contém um poço, senão é falsa.
  - $B_{i,j}$ é verdade se o quadrado $[i,j]$ tem brisa, senão é falsa.
- Como a existência de um poço num dado quadrado é **independente** da existência de poços noutros quadrados, vem:

$$P(PC_{1,1},\dots,PC_{4,4}) = \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{4} P(PC_{i,j})$$

Incerteza no Mundo Wumpus

- Para um caso com n poços, temos:

$$P(PC_{1,1},\dots,PC_{4,4}) = 0.2^n 0.8^{16-n}$$

- Vamos então tentar obter a probabilidade do quadrado [1,3] ter um poço, dada a informação que o agente Wumpus recolheu até ao momento.
- Seja $Poços = \neg PC_{1,1} \cap \neg PC_{1,2} \cap \neg PC_{2,1}$ e $Brisas = \neg B_{1,1} \cap B_{1,2} \cap B_{2,1}$ a informação já recolhida e *Desconhecido* a informação ainda não obtida sobre os poços do Mundo Wumpus.
- Então, usando as equações (4) e (5) :

$$P(PC_{1,3}|Poços, Brisas) =$$
$$\alpha \sum_{Desconhecido} P(PC_{1,3}, Desconhecido, Poços, Brisas)$$

Incerteza no Mundo Wumpus

- Como existem 12 quadrados com informação desconhecida e as variáveis em *Desconhecido* são booleanas, esta soma tem $2^{12} = 4096$ termos.
- Mas há muitos quadrados que não podem influenciar a nossa decisão sobre o [1,3].
- Seja *Fronteira* o conjunto das variáveis relativas aos poços em [2,2] e [3,1].
- Seja *Outros* o conjunto das variáveis relativas aos poços dos quadrados desconhecidos.
- Obtemos (após alguma manipulação é possível eliminar *Outros*):

$$P(PC_{1,3}|Poços, Brisas) =$$
$$\alpha P(PC_{1,3}) \sum_{Fronteira} P(Brisas|Poços, PC_{1,3}, Fronteira)P(Fronteira) \quad (8)$$

Incerteza no Mundo Wumpus

- Esta soma só envolve 4 termos ao contrário da original que envolvia 4096.
- Os termos $P(Brisas|Poços, PC_{1,3}, Fronteira)$ valem 1 ou 0 consoante são ou não possíveis.
- Os casos possíveis para acharmos $P(Fronteira)$ são (estão limitados devido às brisas existentes e ao valor de $PC_{3,1}$):

Caso	1	2	3	4	5
[1, 3]	Poço	Poço	Poço	Não	Não
[2, 2]	Poço	Poço	Não	Poço	Poço
[3, 1]	Poço	Não	Poço	Poço	Não
$P(Fronteira)$	0.04	0.16	0.16	0.04	0.16

- Para acharmos $P(Fronteira)$ usamos a informação abaixo da linha tracejada (dada a definição de *Fronteira*). Ex.: para o segundo caso temos, $P(Fronteira) = P(PC_{2,2}, \neg PC_{3,1}) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$.

Incerteza no Mundo Wumpus

- Resultado (substituir na equação (8) os termos achados):

$$P(PC_{1,3}|Poços, Brisas) =$$

$$\alpha(0.2)(0.04 + 0.16 + 0.16) = \alpha(0.2 \times 0.36)$$

- Podemos fazer cálculos análogos para o caso em que não existe poço em [1,3], usando a mesma equação, trocando o valor lógico de $PC_{1,3}$:

$$P(\neg PC_{1,3}|Poços, Brisas) =$$

$$\alpha(0.8)(0.04 + 0.16) = \alpha(0.8 \times 0.2)$$

- Como $P(PC_{1,3}|Poços, Brisas) = 1 - P(\neg PC_{1,3}|Poços, Brisas)$ vem $\alpha = 4.31$ logo $P(PC_{1,3}|Poços, Brisas) = 0.31$.

Incerteza no Mundo Wumpus

- Cálculos semelhantes permitem obter $P(PC_{2,2}|Poços, Brisas) = 0.86$.
- O caso do quadrado [3,1] irá resultar no mesmo valor que obtivemos para o quadrado [1,3] por terem condições idênticas.
- Conclusão:
  - A lógica diz-nos apenas que podem existir poços em [1,3], [2,2] e [3,1] e iriamos decidir aleatóriamente qual visitar.
  - Com as probabilidades ficamos a saber quão provável é a existência de um poço em cada um destes quadrados.
  - Descobrimos que a nossa escolha como movimento para continuar a explorar o Mundo Wumpus não deverá ser o quadrado [2,2], mas sim um dos outros dois.

Leitura recomendada

- Russell e Norvig, cap. 13.