PRÁCTICO Nº 2: *VARIABLE ALEATORIA*

OBJETIVO: *ANALIZAR VARIABLES ALEATORIAS Y SUS CARACTERÍSTICAS*

1) Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

a) Producción mensual de vehículos en una empresa automotriz.
b) Tiempo de espera hasta acceder a un servidor.
c) Venta, en pesos, de cada vendedor de un comercio.
d) Vida útil de un rodamiento.
e) Cantidad de unidades defectuosas en una línea de producción.
f) Nivel de contaminación ambiental.
g) Cantidad de intentos hasta acertar en un blanco.
h) Sueldo de los empleados de cierta industria.

2) El grado con el cual una compañía se involucra con el desarrollo de nuevos productos depende, en gran medida, de sus competidores. Un estudio fue realizado sobre las compañías que utilizan tecnología avanzada, para analizar el número de nuevos productos que se lanzan al mercado anualmente. Los cálculos, en función de años anteriores, están dados en la siguiente tabla:

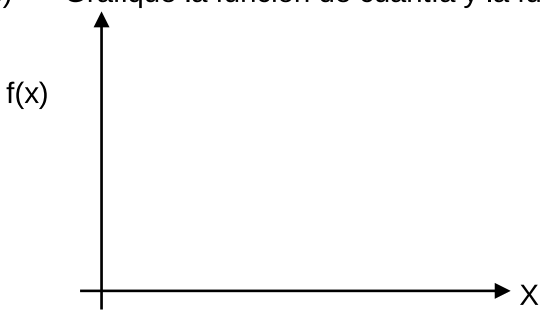
X	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	0,08	0,14	0,22	0,30	0,14	0,08	0,04

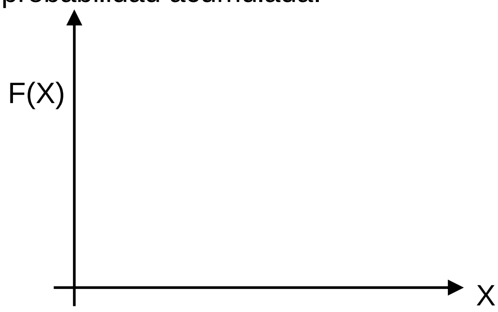
a) Enuncie la variable en estudio:
X: "…………………………………………………………………………………………………"

b) Construya la distribución de probabilidad acumulada de X.

$$F(X)\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X < 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 3 \le X < 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 4 \le X < 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 5 \le X < 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 6 \le X < 7 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 7 \le X < 8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 8 \le X < 9 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X \ge 1 \end{cases}$$

c) Grafique la función de cuantía y la función de probabilidad acumulada.





d) Enuncie las propiedades que debe cumplir la función de cuantía o función de probabilidad y verifique dichas propiedades en el ejemplo.

Propiedad 1

Propiedad 2

e) Calcule la probabilidad de que lancen al mercado entre 4 y 5 productos. Marque con una X el planteo correcto:

e.1) $P(4<X<5)$
e.2) $P(4\leq X<5)$
e.3) $P(4<X\leq 5)$
e.4) $P(4\leq X\leq 5)$

Y la probabilidad de que lancen al mercado entre 4 y 5 productos es: …………………..

f) Calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar. Interprete en términos del problema.

E(X)=
El valor esperado del número de nuevos productos que se lanzan al mercado anualmente es de ………………………………..

Var(X)=
El promedio de las desviaciones cuadráticas respecto de la media es igual a…………….………….nuevos productos que se lanzan al mercado anualmente, en la unidad correspondiente.

DE(X)=
El promedio de las desviaciones respecto de la media es de …………….………. nuevos productos que se lanzan al mercado anualmente.

3) La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, que es el número de defectos por cada 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme está dada por:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

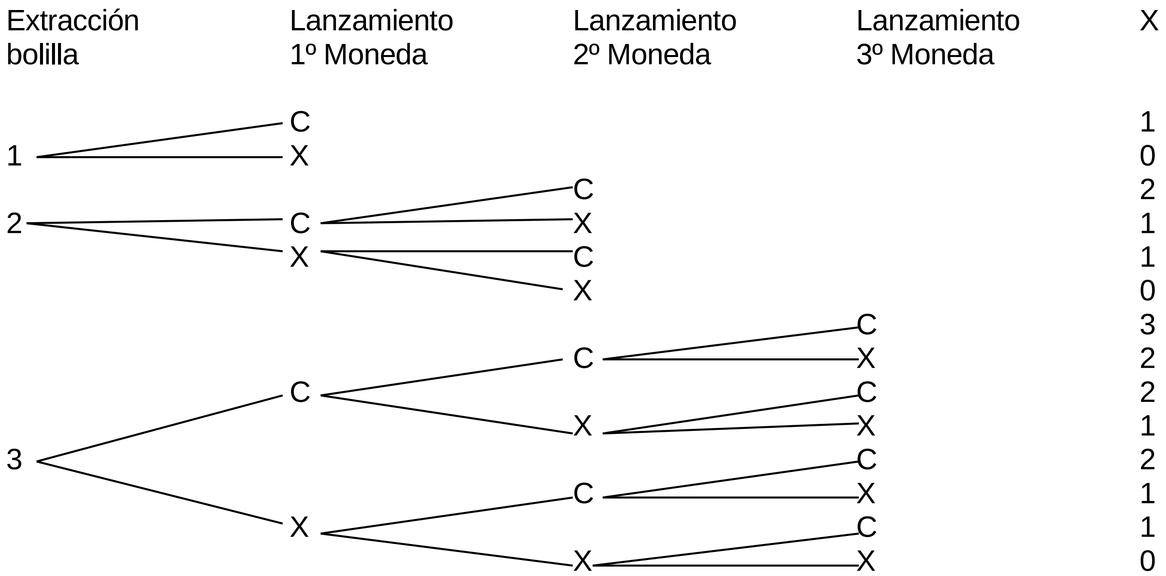
a) Enuncie la variable aleatoria en estudio.
b) Construya la distribución de probabilidad acumulada de X y grafique.
c) ¿Cuántos defectos se espera encontrar por cada 10 metros de tela?
d) Calcule la varianza de X utilizando la definición y utilizando la propiedad que determina una regla de cálculo más práctica.

e) Calcular la desviación estándar e interprete en el contexto del problema.
f) Interprete la forma de la distribución utilizando la esperanza y la desviación estándar.
g) Calcular la probabilidad de:
    f.1) P(X=3)
    f.2) P(2<X≤4)
    f.3) P(X>2)
    f.4) P(X≤2)
    f.5) P(3≤X≤5)
    f.6) P(X≥3)

4) Una caja contiene tres bolillas numeradas del 1 al 3, primero se extrae una bolilla y luego se lanza una moneda legal tantas veces como indique la bolilla. Calcule f(x), F(x) y grafique, siendo X: 'número de caras obtenidas'.

La variable en estudio es:
X: "……………………………………………………………………………………………………….."

Realizar un diagrama de árbol o diagrama más acorde para ubicarnos en la situación del problema.



De esa forma, ya sabemos que valores toma la variable en estudio. Entonces ahora calculemos lo siguiente:

P(X=0) = P(0) =

P(X=1) = P(1) =

P(X=2) = P(2) =

P(X=3) = P(3) =

Por lo que ahora estamos en condiciones de completar la siguiente tabla:

X	0	1	2	3
f(x)				
F(x)				

Y podemos construir la función de probabilidad y la función de probabilidad acumulada así:

$$f(x)\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$F(x)\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 1 \leq X < 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 2 \leq X < 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

Queda para el alumno los gráficos solicitados.

5) Se sabe por experiencia que la demanda diaria de un producto perecedero es como se muestra en la siguiente tabla:

X	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	0,05	0,12	0,20	0,24	0,17	0,14	0,08

a) Grafique la función de cuantía y la función de probabilidad acumulada.
b) Determine la probabilidad de que la demanda diaria sea de más de 4 productos.
c) Determine la probabilidad de que la demanda diaria este entre 3 y 6 productos.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda diaria sea de 4 ó menos de 4 productos?
e) Si cada artículo tiene un costo total de $ 45 con un precio de venta de $ 75, ¿cuál es la utilidad esperada? ¿con qué desviación?

6) Se numeran cinco cartas del 1 al 5. Se sacan dos cartas al azar. Sea X: 'Suma de los números obtenidos'. Encontrar:

a) la distribución de X.
b) la media, la varianza y el desvío típico de X.

7) Se lanza una moneda insesgada hasta que salga una cara o cinco cruces. Encuentre el número esperado de lanzamientos de la moneda.

8) Una variable aleatoria con distribución continua X que puede asumir valores entre x=1 y x=3 tiene una función densidad dada por f(x)=1/2.

a) Demuestre que el área bajo la curva es 1.

Para los siguientes ítems marcar con una cruz la respuesta correcta, recuerde que solo una es verdadera:

b) Encuentre $P(2<X<2,5)$:
b.1) 1
b.2) 0,5
b.3) 0,25

c) Encuentre $P(X\leq 1,6)$:
c.1) $P(X<1,6) = 0,3$
c.2) $F(1,6) = 0,7$
c.3) $F(1,5) = 0,3$
c.4) $f(1,6) = 0,3$

d) Encuentre $P(X=2)$:
d.1) $P(X=2) = f(2) = 0,5$
d.2) $P(X=2) = F(2) = 0,5$
d.3) $P(X=2) = f(2) = 0$
d.4) Ninguna de las anteriores. La respuesta correcta es………………………..

e) Calcule la esperanza de X.
e.1) $E(X) = 1$
e.2) $E(X) = 2$
e.3) $E(X) = 3$

f) Calcule la desviación estándar de X.
f.1) $DE(X) = 0,3333$
f.2) $DE(X) = 0,5773$
f.3) $DE(X) = 2$

9) Dada la variable aleatoria X: "nº de caras obtenidas al lanzar 3 veces una moneda legal":

a) Describa el espacio muestral Ω.
b) ¿Qué valores asigna X a cada elemento de Ω?
c) Halle la función f_X de cuantía y grafíquela.
d) Halle la función F_X de distribución y grafíquela.
e) Calcule: $P(X=2)$ $P(X\leq 2)$ $P(X>2)$ $P(X<2)$ y $P(1\leq X\leq 3)$.
f) Calcule E(X) y Var(X).
g) Marque E(X) en el primer gráfico.

10) El montaje para un sistema de producción requiere 1, 2, 3, ó 4 horas, dependiendo del producto específico que será producido. Sea X la variable aleatoria que indica el número de horas utilizado. La siguiente función de distribución acumulada puede ser utilizada para determinar la probabilidad que un producto requiera x horas para su montaje:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{10} & si\ \ 1\leq x<2 \\ \dfrac{3}{10} & si\ \ 2\leq x<3 \\ \dfrac{6}{10} & si\ \ 3\leq x<4 \\ 1 & si\ \ x\geq 4 \end{cases}$$

a) Defina la variable en estudio y analice si es una variable aleatorio discreta o continua.
b) Encontrar la función de probabilidad e interprete el significado de f(2).
c) Muestre que la función propuesta es una función de probabilidad verificando las propiedades de dicha función.
d) Represente gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución acumulada.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto requiera por lo menos 3 horas para su montaje? Resuelva de dos formas distintas, utilizando la función de probabilidad y utilizando la función de distribución acumulada.
f) Calcule la esperanza y el desvío de la variable bajo estudio e interprete los valores obtenidos.

11) Una variable aleatoria continua X que puede asumir valores entre x=2 y x=5 tiene una función densidad dada por $f(x)=\dfrac{2(1+x)}{27}$.

a) Grafique su función de densidad.
b) Encuentre:
   I) $P(X<4)$ II) $P(X\leq 4)$ III) $P(X=4)$ IV) $P(3<X\leq 4)$
c) Halle F(X)
d) Halle E(X) y márquela en su gráfico.
e) Halle Var(X).

12) Considere la función densidad $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

a) Evalúe k, para que dicha función sea una función de densidad (para poder determinar la constante k tenga en cuenta una de las propiedades de la función de densidad de probabilidad).
   a.1) k = 2/3
   a.2) k = 1
   a.3) k = 3/2
   a.4) Ninguna de las anteriores. La constante k es igual a …… ……………..

b) Encuentre la función de distribución acumulada, F(X):

$$F(x) \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \text{si } x \le \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \text{si } \ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \text{si } x \ge \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

c) Hallar P(0,3<X<0,6) utilizando la función acumulada F(x). La anotación correcta es:
   c.1) f(0,6) – f(0,3)
   c.2) F(0,5) – F(0,3)
   c.3) F(0,6) – F(0,3)
   c.4) f(0,4) + f(0,5)

   Marque con una X la respuesta correcta al planteo del ítem:
   c.5) 0,3
   c.6) 0,1892
   c.7) 0,1006

d) Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada.
e) Encuentre la Esperanza de la variable aleatoria y márquela en el gráfico realizado en el ítem d):
   e.1) 0,2667
   e.2) 0,5
   e.3) 0,6
   e.4) Ninguna de las anteriores. La esperanza es ……………………..

13) Dada la variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x) = k.x^2.(1-x)$ para $0 \le x \le 1$ y 0 para otro caso.

a) Determinar la constante k, para que dicha función sea una función de densidad.
b) Grafique su función de densidad.
c) Hallar F(x) y grafique.
d) Encuentre esperanza de la variable aleatoria y su desviación estándar.

14) Sea la variable aleatoria continua X: "duración en horas de un circuito electrónico" con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 500 / x^2 & x \geq 500 \\ 0 & x < 500 \end{cases}$$

a) Probar que f(x) es función de densidad. Grafique.
b) Hallar F(x) y grafíquela.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito dure entre 1500 y 2000 horas? Calcule de dos formas distintas, utilizando la función de densidad y utilizando la función de distribución acumulada. Marque en el gráfico de la función densidad el área que representa esta probabilidad.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure exactamente 100 horas?
e) ¿La variable aleatoria X tiene esperanza? Si contesta si encuéntrela e interprete.

15) Sea X: La duración de una batería de litio recargable (en ciento de horas). Con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 4x\,(9-x^2) / 81 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encontrar la duración esperada de la batería de litio recargable.
b) Encontrar la Var(X) y DE(X)
c) Represente gráficamente la función de densidad.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que una pila dure menos de 250 horas?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que una pila dure por lo menos 270 horas?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 150 y 250 horas?

16) Una compañía inversora tiene una impresora a la cual se accede de distintas terminales el modelo para el tiempo transcurrido entre el envió desde una terminal y su impresión está dada por la siguiente función de densidad de la variable aleatoria continua (en minutos):

$$f(t) = \begin{cases} c.t^2.(1-t)^4 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre la función de distribución acumulada de probabilidad.
b) Utilice la función de distribución acumulada para calcular la probabilidad P(T<0,75); P(T>0,5); P(0,2<T<0,8) interprete en términos del problema.
c) Encuentre el tiempo esperado de demora entre que se envía un trabajo de una terminal y su impresión. ¿Con qué desviación estamos trabajando?

17) La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia se asimila en una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}.e^{(-2/3)\,x} - \frac{1}{3}.e^{(-1/3)\,x} & x > 0 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad f(x).
b) Verifique que es una función de densidad comprobando que cumple con las propiedades de f(x).
c) Represente la función de densidad.
d) Calcular la probabilidad de que una llamada dure menos de 2 minutos o más de 10 minutos, utilizando la función de distribución dada.
e) ¿Cuál es el tiempo promedio de duración de una llamada telefónica de larga distancia?

18) Considere el experimento de arrojar dos dados legales, considere la variable aleatoria X: 'suma de los puntos que se observan al lanzar un dado legal'.

a) Determinar y graficar la función de probabilidad de X.
b) Determinar y graficar la función de distribución acumulada de X.
c) Calcular la esperanza, la varianza y la desviación estándar de X.
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 12?

19) Un jugador lanza dos monedas no cargadas. Gana \$2 si salen 2 caras y \$1 si sale 1 cara. Por otra parte, pierde \$3 si no sale ninguna cara.

a) Determinar el valor esperado del juego. Interprete.
b) Un juego se considera equitativo o justo si la esperanza de ganar es igual a cero ¿Diría que el juego es justo?
c) Si el juego debe ser justo, ¿cuántos debería perder el jugador si no sale ninguna cara?

20) Se lanza una moneda al aire 3 veces. Si se obtienen al menos 2 caras se permite tirar un dado y recibir en dólares el número de puntos obtenido. ¿Qué es lo que puede esperar ganar en este juego en un intento?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

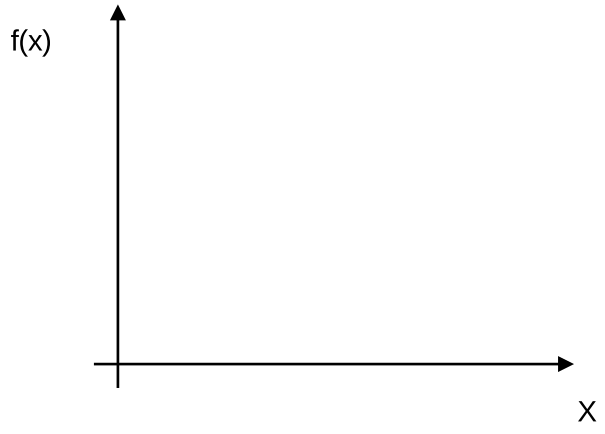
1) Los estudios realizados por los ingenieros de una empresa distribuidora de energía, han permitido estimar que el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh, se puede modelar, razonablemente, como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad esta dada por:

$f(x) = 1/9 \; x \; e^{-x/3}$ para $x \geq 0$
$f(x) = 0$ en otro caso

Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera?

a) Definir la variable en estudio:
X: "……………………………………………………………………………………………………….."

b) Graficar la función de densidad de probabilidad para el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh.



c) Marque con una X la opción que considere correcta. Para responder tenga en cuenta sólo la representación gráfica de la función de densidad de probabilidad, f(x). (NO debe realizar cálculos, sólo debe observar el gráfico).

c.1) La probabilidad de que el consumo diario de energía eléctrica en la región exceda los 25 GWH, es menor de 0,10.
c.2) La probabilidad de que el consumo diario de energía eléctrica en la región sea menor de10 GWH, es menor de 0,50.
c.3) Todas las anteriores.
c.4) Ninguna de las anteriores.

d) Seleccione la opción que responde al planteo de la solución del problema:
"Si la planta de energía eléctrica de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera?"

d.1) P(X = 12 GWh)
d.2) P(X > 12 GWh)
d.3) P(X < 12 GWh)
d.4) Ninguna de las anteriores

e) Observe la gráfica de la función de densidad de probabilidad para el consumo diario de energía eléctrica en la región y marque la opción que corresponda a la respuesta de la consigna del problema.
Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera es:
e.1) Mayor de 0,50
e.2) Entre 0,50 y 0,75
e.3) Entre 0,50 y 0,25
e.4) Menor de 0,15

f) Marque la opción que corresponda al valor numérico correcto de la respuesta de la consigna del problema:
f.1) 0,9080
f.2) 0,4020
f.3) 0,0920
f.4) 0,0001

g) Calcule el valor esperado del consumo diario de energía eléctrica en la región expresado en GWh, y marque la opción que le corresponde.
g.1) 3 GWh
g.2) 6 GWh
g.3) 12 GWh
g.4) 24 GWh

h) Marque la opción correcta. Se puede demostrar que:
h.1) $E(X^2) = 54$
h.2) V(X) = 18
h.3) E(X) = 6
h.4) Todas la anteriores

2) Se lanza un par de dados no cargados. Sea X: 'suma de los dos números que salgan sea par'.
a) Encontrar la distribución de X.
b) Encontrar la esperanza, la varianza y la desviación estándar.

Solución: a)

X	2	4	6	8	10	12
f(x)	1/18	3/18	5/18	5/18	3/18	1/18

b) E(X)=7; Var(X)=6,3333 y DE(X)=2,5166

3) Un cliente lleva a un banco cinco cheques, de los cuales dos tienen error en la fecha. El cajero elige sucesivamente y sin reposición dos de los cheques y observa si tiene error. Indique:

a) El experimento aleatorio,
b) El espacio muestral S de posibles resultados.
c) Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
   c_1. Que el segundo cheque no tenga error.
   c_2. Que los dos cheques tengan error.
   c_3. Que el segundo cheque no tenga error, si el primero ya lo tiene.
   c_4. Que sólo el primer cheque tenga error.
d) ¿Son los elementos del espacio muestral equiprobables? Justificar la respuesta.

Solución: a) Seleccionar 2 cheques de 5, de los cuales 2 tienen error en la fecha; b) $\Omega = \{(e_1,e_2),(e_1,e'_2),(e'_1,e_2),(e'_1,e'_2)\}$; c_1) 12/20; c_2) 2/20; c_3) ¾; c_4) 6/20

4) Refiriéndonos al ejercicio anterior, considera la variable aleatoria X: "Número de cheques con error".

a) Encuentre y grafique la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X.
b) Encuentre y grafique la función de distribución acumulada de probabilidades de la v.a. X.
c) Calcule P(X=0), P(X<1) y P(1≤X<3).
d) A partir del gráfico de la distribución acumulada calcule la probabilidad de que sólo un cheque tenga error.

Solución: a y b)

X	0	1	2
f(x)	6/20	12/20	2/20
F(x)	6/20	18/20	1

c) P(X=0) = 6/20; P(X<1) = 6/20; P(1≤X<3) = 14/20; d) 12/20

5) La distribución acumulada de una variable aleatoria X es la siguiente:

$$F_X(x)\begin{cases} 0 & x\langle -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \le x\langle 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x\langle 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \le x\langle 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de F(x).
b) Determine la función densidad de probabilidad de X.
c) Calcule las probabilidades:
   I) P(X ≤ 1)
   II) P(X = 1)
   III) P (-1≤ X < 2)
   IV) P (-1 ≤ X ≤ 2)
   V) P (1 < X ≤ 3)

Solución: b)

X	-1	1	2	3
f(x)	1/4	1/4	1/6	1/3
F(x)	1/4	1/2	2/3	1

c) I) P(X≤1) = 1/2; II) P(X=1) = ¼; III) P(-1≤X<2) = ½; IV) P(-1≤X≤2) = 2/3; V) P(1<X≤3) = 1/2

6) El tiempo transcurrido, en horas, entre dos conductores sucesivos que rebasan la velocidad máxima y son identificados por una unidad de radar, es una variable aleatoria con distribución continua cuya distribución acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{4}x} & si \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Encuentre la función de densidad. Grafíquela.
b) Encuentre la probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos infractores sucesivos: utilizando la distribución acumulada de X y la función densidad de X.
c) Encuentre la probabilidad P(5<X<8) interprete en términos del problema
d) Encuentre el tiempo que se espera que transcurra entre dos conductores que rebasan la velocidad máxima.

Solución: a) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1/4 * e^{-\frac{1}{4}x} & si \quad x > 0. \end{cases}$

b) P(X<12) = 0,95021; c) P(5<X<8) = 0,1512; d) E(X) = 4

7) La función de densidad de la variable aleatoria continua X es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} . x + \frac{1}{5} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular:
a) E(X) y DE(X)
b) Hallar F(x)
c) Encuentre: P(X<2), P(X≤2), P(X=2) y P(1<X≤3)

Solución: a) E(X)= 2,1333, DE(X)=2,4221;

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & enotrocaso \\ \frac{x^2}{80} + \frac{x}{5} & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

c) P(X<2) = 9/20; P(X≤2) = 9/20; P(X=0) = 0; P(1<X≤3) = 1/2