ESTADÍSTICA APLICADA I

Unidad IV – Distribuciones de Probabilidad Continuas

Trabajo Práctico Nº 4

T. P. N°4: Ejercicio 2

2) Se sabe que el tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora tiene una distribución uniforme y que durante un periodo mínimo de treinta minutos seguramente llegó un cliente a la caja.

a) Enuncie la variable aleatoria en estudio.

X: "Tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora, en minutos".

X ~ Uniforme (a = 0, b = 30)

b) Dé la función densidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X.

$$f(x) \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 1 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

c) Encuentre el tiempo esperado en que un cliente llegue a dicha caja.

E(X) = (a + b) / 2 = 15

T. P. N°4: Ejercicio 2

X: "Tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora, en minutos".
X ~ Uniforme (a = 0, b = 30)

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 1 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

d) Calcule la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria.

$$Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{(30 - 0)^2}{12} = 75$$

$$DE(X) = \sqrt{Var(X)} = 8{,}66$$

El tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora se desvía en promedio de la media en 8,66 minutos.

T. P. N°4: Ejercicio 2

X: "Tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora, en minutos".
X ~ Uniforme (a = 0, b = 30)

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 1 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente llegue a la caja durante los últimos cinco minutos de ese periodo de treinta minutos?

P(25 < X < 30)

P(25 < X < 30) = $\int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, dx = 0{,}1667$

P(25 < X < 30) = F(30) – F(25) = (30/30) – (25/30) = 0,16667

Usando R:
punif(30,0,30)-punif(25,0,30)

T. P. N°4: Ejercicio 2

X: “Tiempo que tarda en llegar un cliente a cierta caja registradora, en minutos”.
X ~ Uniforme (a = 0, b = 30)

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq X \leq 30 \\ 1 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

f) Si en un dado momento se pone en funcionamiento la caja, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente durante los primeros cinco minutos?

P(X < 5)

P(X < 5) = $\int_0^5 \frac{1}{30}\, dx =$ **0,1667**

P(X < 5) = F(5) = 5/30 = 0,1667

Usando R
punif(5,0,30)

T. P. N°4: Ejercicio 22

22) Un ingeniero va todos los días de su casa en las afueras de la ciudad a su oficina en el centro de la ciudad. El tiempo promedio para un viaje de ida es 24 minutos, con una desviación estándar de 3,8 minutos. Suponga que la distribución de los tiempos de viaje está distribuida normalmente.

a) Enuncie la variable aleatoria. Su distribución y sus parámetros.

X: "Tiempo de viaje de un ingeniero, en minutos, de su casa en las afueras de la ciudad a su oficina en el centro de la ciudad".

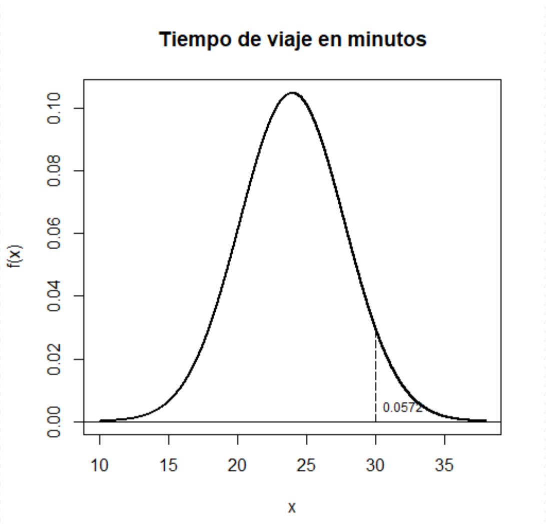
X ~ Normal (μ = 24, σ = 3,8)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el viaje tome al menos media hora?

P(X > 30) = 0,0572

1-pnorm(30,24,3.8)

```
x=seq(10,38,0.0001)
y=dnorm(x,24,3.8)
plot(x,y,type="l",lwd=2,ylab="f(x)",main="Tiempo de viaje en minutos")
abline(h=0)
lines(30,0.028,type="h",lty=5)
text(32,0.005,0.0572,cex=0.75)
```



T. P. N°4: Ejercicio 22

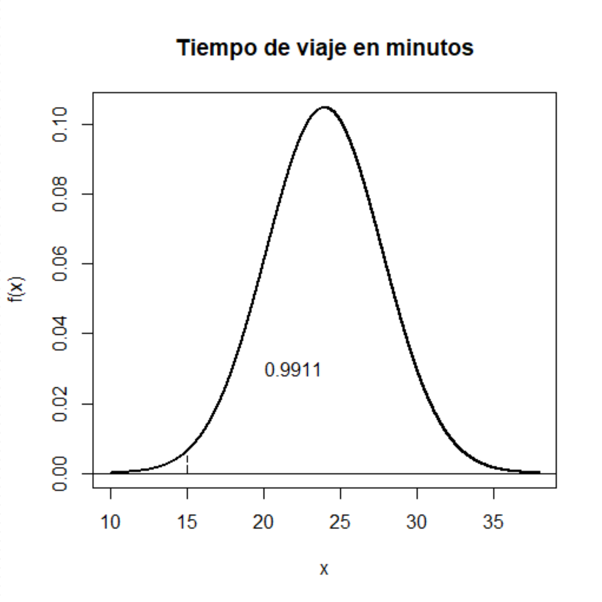
X: “Tiempo de viaje de un ingeniero, en minutos, de su casa en las afueras de la ciudad a su oficina en el centro de la ciudad”.
X ~ Normal (μ = 24, σ = 3,8)

c) Si entra a su trabajo a las 9:00 y él sale de su casa a las 8:45 horas, ¿qué porcentaje de las veces llega tarde?

P(X > 15) = 0,9911

1-pnorm(15,24,3.8)

El 99,11% de las veces llega tarde a su trabajo.




```
x=seq(10,38,0.0001)
y=dnorm(x,24,3.8)
plot(x,y,type="l",lwd=2,ylab="f(x)",main="Tiempo de viaje en minutos")
abline(h=0)
lines(15,0.005,type="h",lty=5)
text(22,0.03,0.9911)
```

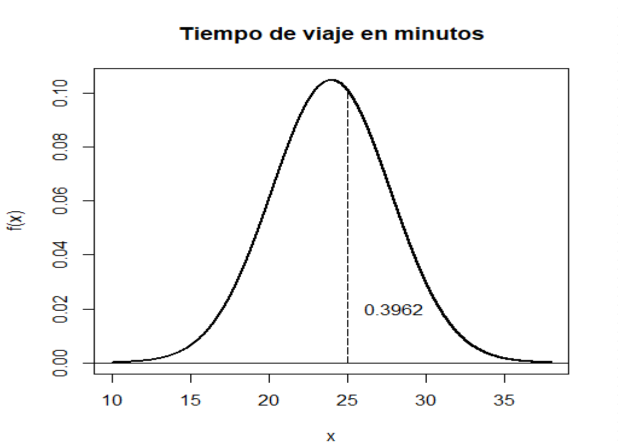
T. P. N°4: Ejercicio 22

X: “Tiempo de viaje de un ingeniero, en minutos, de su casa en las afueras de la ciudad a su oficina en el centro de la ciudad”.
X ~ Normal (μ = 24, σ = 3,8)

d) Saliendo a las 8:45 horas de su casa, ¿*<u>cuántos días</u>* se espera que llegue tarde en un mes con 24 días laborables?
Y: “Cantidad de días que llega tarde el ingeniero a su trabajo, en un mes con 24 días laborables”.
Y ~ Binomial (n = 24, p = 0,9911)
E(Y) = n p = 24 x 0,9911 = 23,79

e) Si sale de su casa a las 8:35 y el café se sirv
es la probabilidad de que pierda el café?
P(X > 25) = 0,3962

1-pnorm(25,24,3.8)



T. P. N°4: Ejercicio 10

10) El tiempo de vida (en horas) de cierto tipo de tubo electrónico es una variable aleatoria con una distribución exponencial de λ=0,02. Se pide:

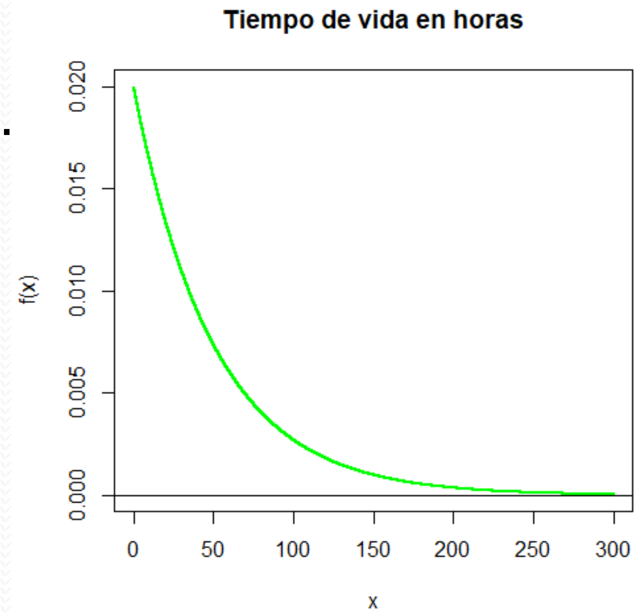
X: “Tiempo de vida, en horas, de cierto tipo de tubo electrónico”.

X ~ Exponencial (λ = 0,02)

a) Encuentre la función de densidad y grafíquela.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02\, e^{-0{,}02x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

```
x=seq(0,300,0.0001)
y=dexp(x,0.02)
plot(x,y,type="l",col="green",lwd=2,ylab="f(x)",main="Tiempo de vida en horas")
abline(h=0)
```



b) ¿Cuál es el tiempo de vida que se espera que tenga este tipo de tubo electrónico?

E(X) = 1 / λ = 50

El tiempo de vida que se espera que tenga este tipo de tubo electrónico es de 50 horas.

T. P. N°4: Ejercicio 10

X: "Tiempo de vida, en horas, de cierto tipo de tubo electrónico".
X ~ Exponencial (λ = 0,02)

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02\, e^{-0{,}02x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

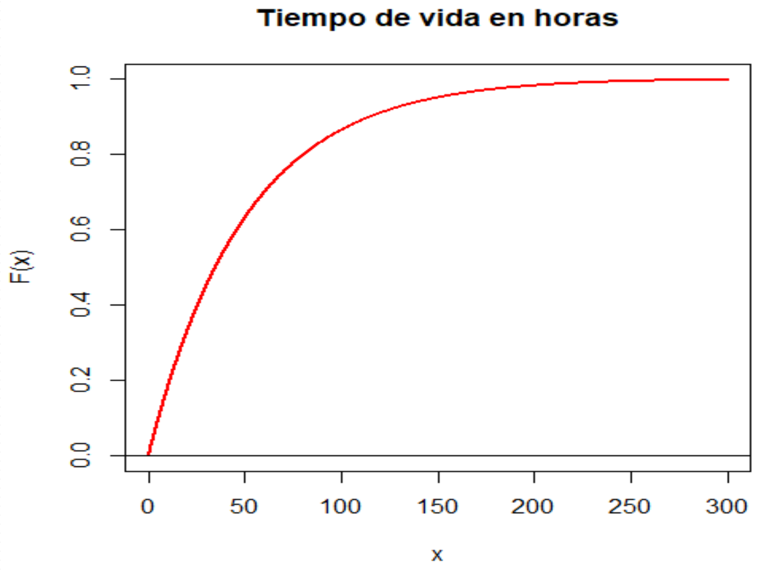
c) ¿Cuál es su desviación estándar? Interprete.

DE(X) = $\sqrt{1/\lambda^2}$ = 50

El tiempo de vida se desvía en promedio de la media en 50 horas.

d) Hallar la función de distribución acumulada y grafíquela.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}02x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

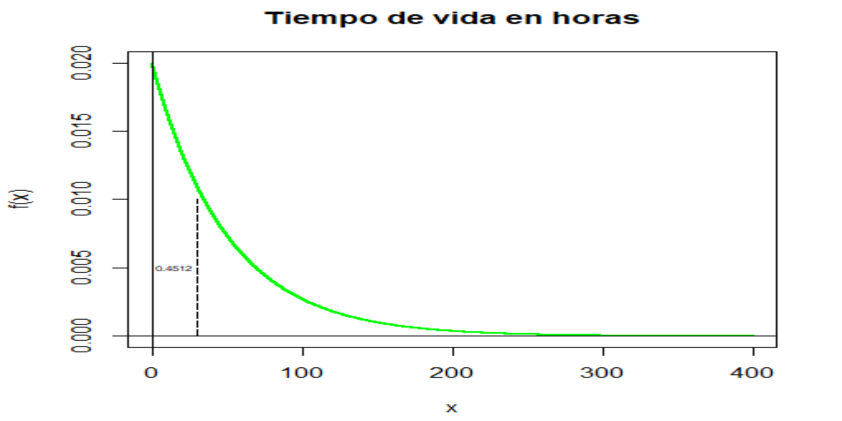


T. P. N°4: Ejercicio 10

X: “Tiempo de vida, en horas, de cierto tipo de tubo electrónico”.
X ~ Exponencial (λ = 0,02)

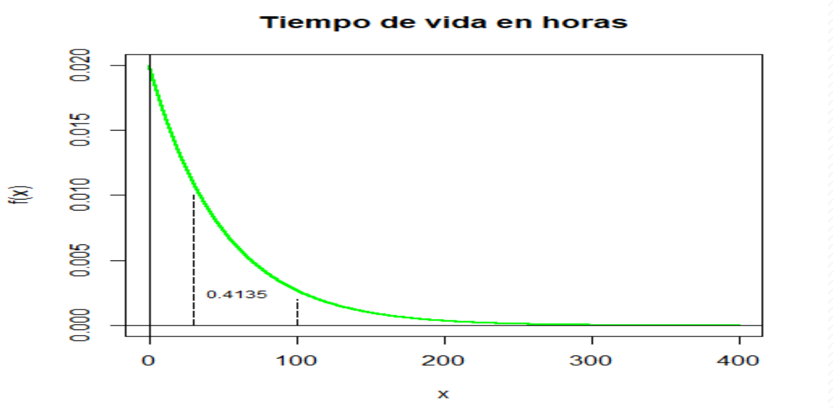
e) Hallar la probabilidad de que la vida de uno de esos tubos sea a lo sumo de 30 horas.

P(X < 30) = 0,4512
pexp(30,0.02)



f) Hallar la probabilidad de que la vida de uno de esos tubos dure menos de cien horas y más de 30 horas.

P(30 < X < 100) = F(100)-F(30)
P(30 < X < 100) = 0,4135
pexp(100,0.02)-pexp(30,0.02)



T. P. N°4: Ejercicio 10

X: "Tiempo de vida, en horas, de cierto tipo de tubo electrónico".
X ~ Exponencial (λ = 0,02)

g) ¿Cuál es el tiempo de vida máximo que tienen el 25% de aquellos tubos electrónicos que menos tiempo duran?

$P(X < q_{0,25}) = 0,25$

qexp(0.25,0.02)

$q_{0,25}$ = 14,38 horas

h) Halle bajo que cuantil estará el 30% de los tubos electrónicos que menos tiempo de vida tienen.

$P(X < q) = 0,30$

qexp(0.30,0.02)

$q_{0,30}$ = 17,83 horas

T. P. N°4: Ejercicio 16

16) Suponga que el tiempo, en horas, que toma reparar una bomba es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = ½$.

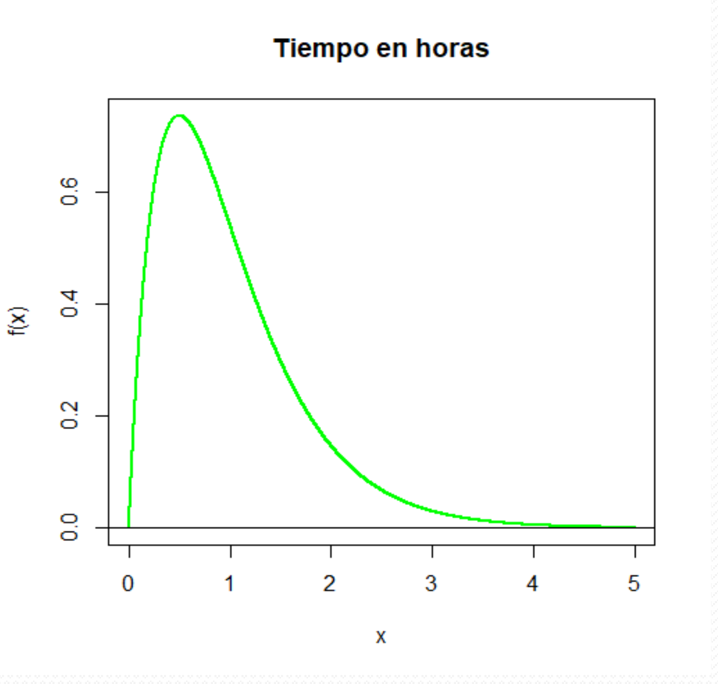
X: "Tiempo, en horas, que toma repara una bomba".

X ~ Gamma ($\alpha = 2$, $\beta = 1/2$)

a) Plantee la función de densidad de la variable aleatoria X.

b) Grafique la función de densidad utilizando R.

```
x=seq(0,5,0.00001)
y=dgamma(x,2,2)
plot(x,y,type="l",col="green",lwd=2,ylab="f(x)",main=
"Tiempo en horas")
abline(h=0)
```



c) Encontrar la media y la desviación estándar.

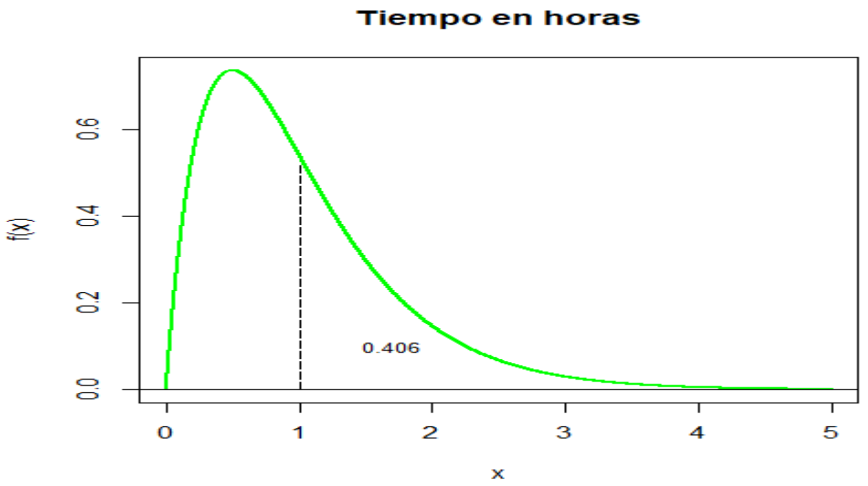
$E(X) = \alpha \beta = 1$

$DE(X) = \sqrt{\alpha \beta^2} = 0,7071$

T. P. N°4: Ejercicio 16

X: "Tiempo, en horas, que toma repara una bomba".
X ~ Gamma (α = 2, β = 1/2)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente servicio tome más de 1 hora reparar la bomba?



P(X > 1) = 0,4060

1-pgamma(1,2,2)

e) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente servicio al menos se requieran 2 horas para reparar la bomba?

P(X > 2) = 0,0916

1-pgamma(2,2,2)

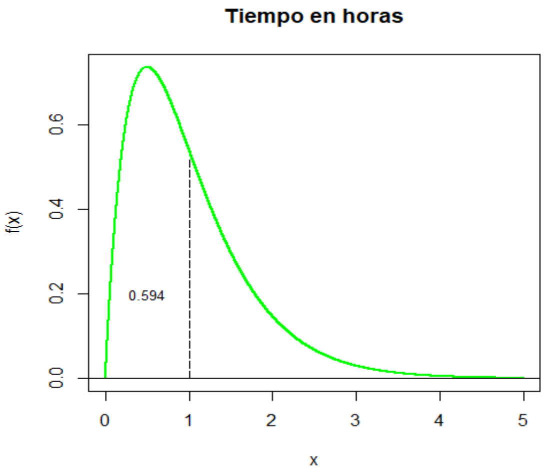
T. P. N°4: Ejercicio 16

X: “Tiempo, en horas, que toma repara una bomba”.
X ~ Gamma (α = 2, β = 1/2)

f) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente servicio el tiempo que toma reparar una bomba sea menor que la media?

P(X < 1) = 0,5940

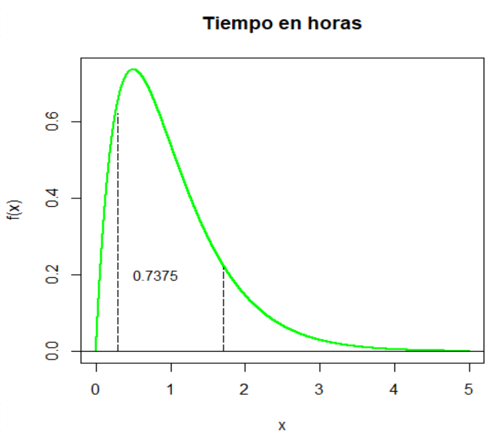
pgamma(1,2,2)



g) Encontrar la probabilidad de que el tiempo que toma reparar una bomba se encuentre dentro de una desviación estándar de la media.

P((E(X) – DE(X) < X < (E(X) + DE(X))
P((1 - 0,7071) < X < (1 + 0,7071))
P(0,2929 < X < 1,7071) = 0,7375

pgamma(1.7071,2,2)-pgamma(0.2929,2,2)



T. P. N°4: Ejercicio 16

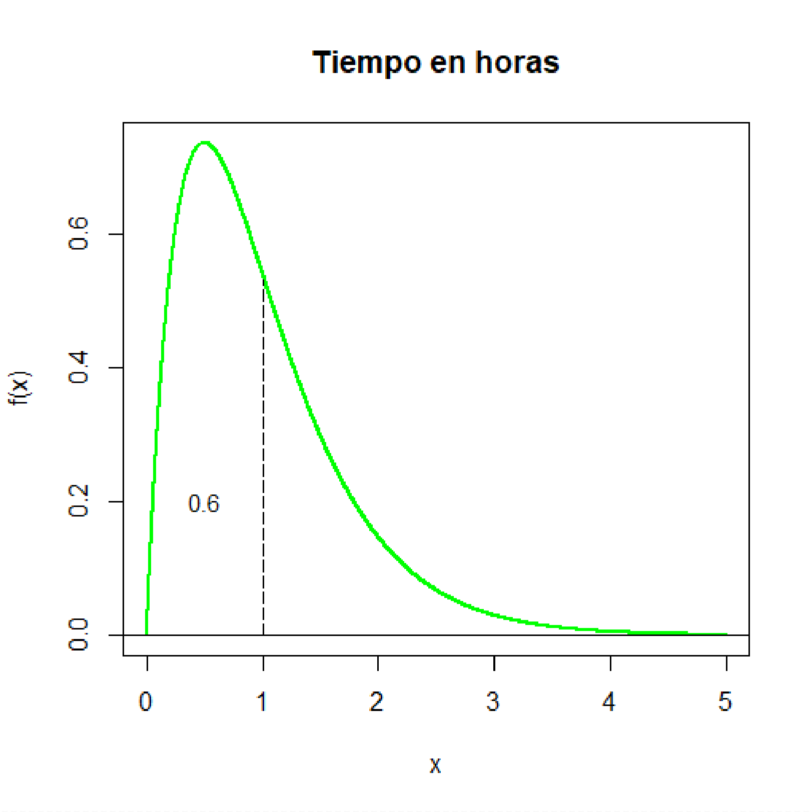
X: "Tiempo, en horas, que toma repara una bomba".
X ~ Gamma (α = 2, β = 1/2)

h) Calcule el percentil 60 e interprete en términos del problema.

P(X < q) = 0,60
qgamma(0.6,2,2)

$q_{0,6}$ = 1,01

El 60% del tiempo que se tarda en reparar una bomba es de 1,01 horas o menos.



T. P. N°4: Ejercicio 6

6) El diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico tiene una distribución normal con media 0,2508 pulgadas y desviación estándar de 0,0005 pulgadas. Las especificaciones del diámetro del eje son 0,2500 ± 0,0015 pulgadas. ¿Qué proporción de ejes cumplen con este requisito?

6.1) Marque con una X la opción correcta.

a) Cantidad de ejes de unidades de almacenamiento óptico.
b) Diámetro de una unidad de almacenamiento óptico, en pulgadas.
c) Diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico, en pulgadas.
d) Tolerancia del diámetro de los ejes.

X: "Diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico, en pulgadas."

T. P. N°4: Ejercicio 6

6) El diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico tiene una distribución normal con media 0,2508 pulgadas y desviación estándar de 0,0005 pulgadas. Las especificaciones del diámetro del eje son 0,2500 ± 0,0015 pulgadas. ¿Qué proporción de ejes cumplen con este requisito?

6.2) Identificar la distribución de la variable en estudio, marcando la opción correcta.

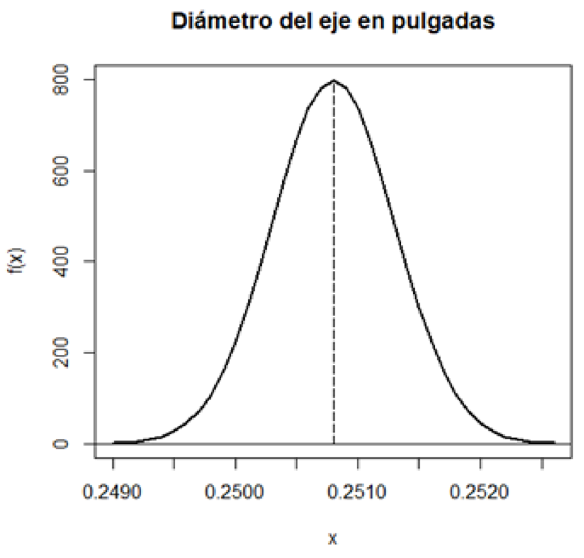
a) Normal y sus parámetros son: media=0,2508 pulgadas y desviación estándar=0,0005 pulgadas.
b) X ~ Normal (μ = 0,2508 pulgadas, σ = 0,0005 pulgadas)
c) X ~ N (μ = 0,2508 pulgadas, σ = 0,0005 pulgadas)
d) Cualquiera de las anteriores.

Cualquiera de las anteriores.

T. P. N°4: Ejercicio 6

6.3) Grafique la función de densidad de probabilidad. Si el diámetro está distribuido normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que un eje de una unidad de almacenamiento óptico seleccionada al azar cumpla con las especificaciones del diámetro?
Responda observando el gráfico sin realizar cálculos manuales.

a) Es menor que 0,5.
b) Se debe estimar leyendo su valor en el eje de ordenadas, f(x).
c) Se podría obtener calculando la integral definida de la función de densidad de probabilidad entre 0,2485 y 0,2515.
d) Todas las anteriores.



T. P. N°4: Ejercicio 6

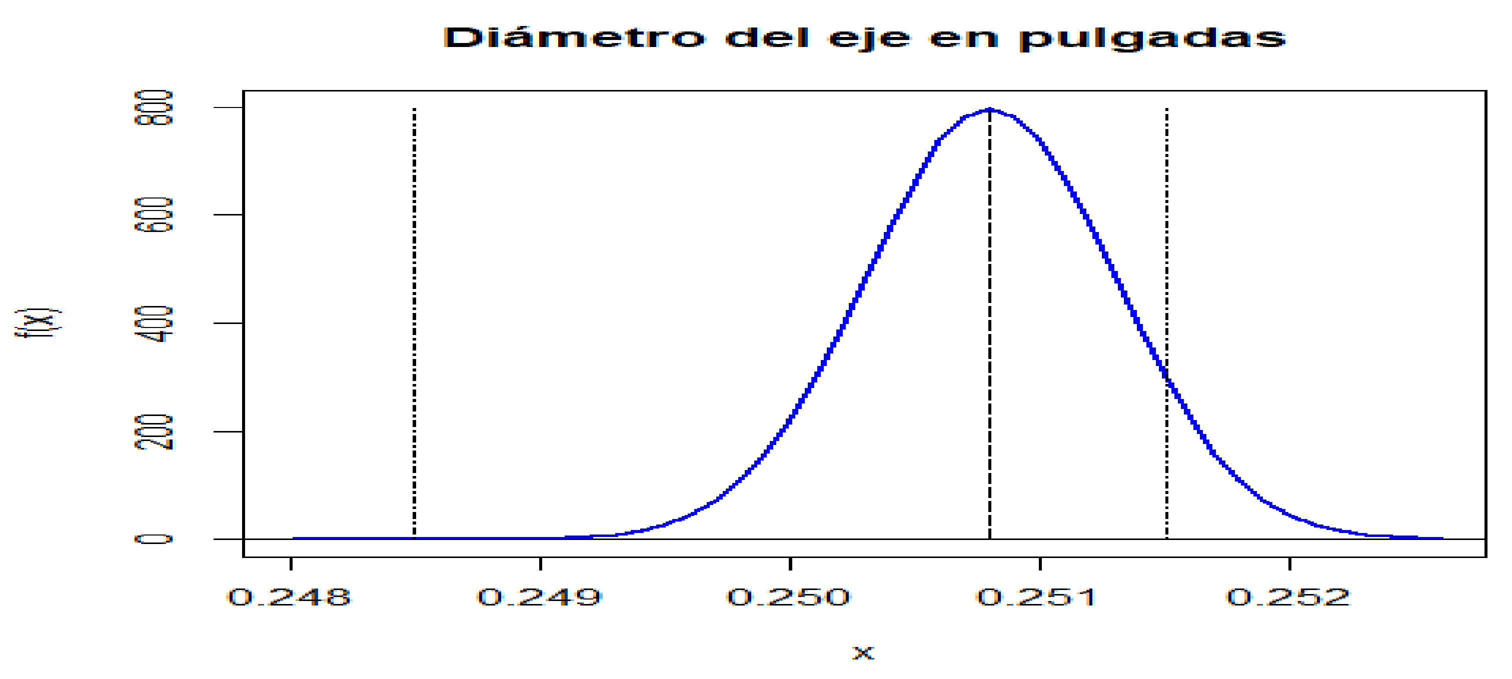
Las especificaciones del diámetro del eje son 0,2500 ± 0,0015 pulgadas.

a) Es menor que 0,5.

b) Se debe estimar leyendo su valor en el eje de ordenadas, f(x).

c) Se podría obtener calculando la integral definida de la función de densidad de probabilidad entre 0,2485 y 0,2515.

d) Todas las anteriores.



T. P. N°4: Ejercicio 6

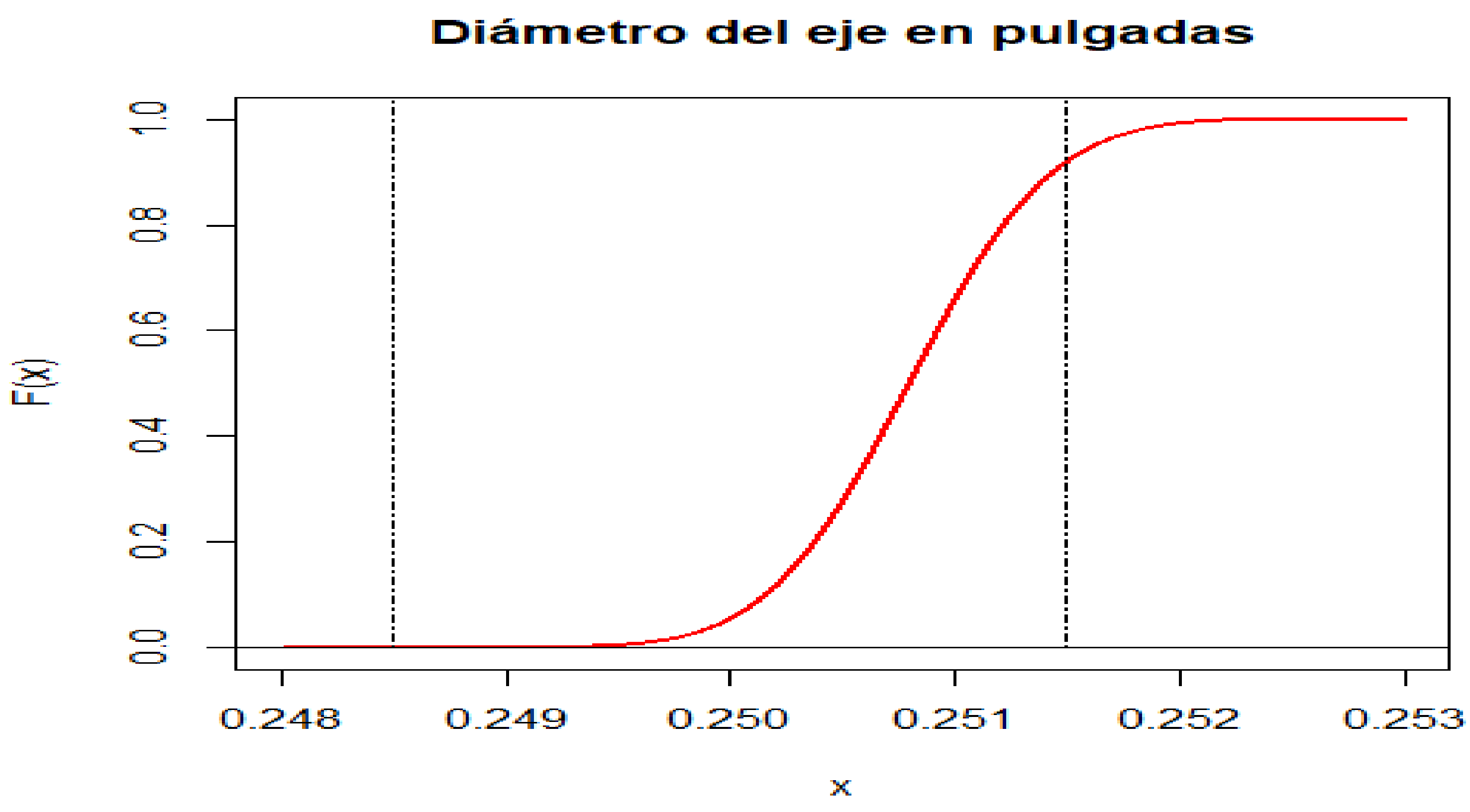
6.4) Grafique la función de distribución acumulada. Si el diámetro está distribuido normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que un eje de una unidad de almacenamiento óptico seleccionada al azar cumpla con las especificaciones del diámetro?
Responda observando el gráfico sin realizar cálculos manuales.

a) Se puede calcular haciendo una diferencia entre lecturas del eje de abscisas de la F(x).
b) Se puede calcular haciendo una diferencia entre lecturas del eje de ordenadas de la F(x).
c) Se puede estimar como fracción del área bajo la curva encerrada por la función representada.
d) Cualquiera de las anteriores.

```
x=seq(0.249,0.253,0.0000001)
y=pnorm(x,0.2508,0.0005)
plot(x,y,type="l",lwd=2,ylab="F(x)",col="red",main="Diámetro del eje en pulgadas")
abline(h=0)
```

T. P. N°4: Ejercicio 6

a) Se puede calcular haciendo una diferencia entre lecturas del eje de abscisas de la F(x).
b) Se puede calcular haciendo una diferencia entre lecturas del eje de ordenadas de la F(x).
c) Se puede estimar como fracción del área bajo la curva encerrada por la función representada.
d) Cualquiera de las anteriores.



T. P. N°4: Ejercicio 6

6) El diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico tiene una distribución normal con media 0,2508 pulgadas y desviación estándar de 0,0005 pulgadas. Las especificaciones del diámetro del eje son 0,2500 ± 0,0015 pulgadas. ¿Qué proporción de ejes cumplen con este requisito?

6.5) La proporción de ejes que cumplen con las especificaciones es:

a) 0,9192
b) 0,4999
c) 0,2696
d) 0,9973

P((0,25 - 0,0015) < X < (0,25 + 0,0015))
P(0,2485 < X < 0,2515) = 0,9192

La proporción de ejes que cumplen con las especificaciones del diámetro es de 0,9192.

Ejercicios: NORMAL

El gerente general de una industria de la alimentación en Mendoza, estaba interesado en conocer cómo se distribuían los salarios de los trabajadores de su empresa, el director del departamento de investigaciones y desarrollo determinó que estos se distribuyen en forma normal con media 247,5 pesos la hora y la desviación estándar es de 13,5 pesos por hora.

X: "Salarios, en pesos por hora, de los trabajadores de una industria alimenticia de Mendoza."
X ~ Normal (μ= 247,5; σ = 13,5)

a) El porcentaje de trabajadores que recibe salarios entre 244,5 y 247,5 por hora es:
$P(244,5 < X < 247,5) = 0,0879$

pnorm(247.5,247.5,13.5) - pnorm(244.5,247.5,13.5)

El 8,79 % de los trabajadores recibe un salario entre 244,5 y 247,5 pesos por hora.

Ejercicios: NORMAL

X: “Salarios, en pesos por hora, de los trabajadores de una industria alimenticia de Mendoza.”
X ~ Normal (μ= 247,5; σ = 13,5)

b) La probabilidad de que los trabajadores reciban salarios superiores a 248,5 pesos por hora es:

P(X > 248,5) = 0,4705

1 - pnorm(248.5,247.5,13.5)

La probabilidad de que los trabajadores reciban salarios superiores a 248,5 pesos por hora es de 0,4705.

Ejercicios: NORMAL

X: "Salarios, en pesos por hora, de los trabajadores de una industria alimenticia de Mendoza."
X ~ Normal (μ= 247,5; σ = 13,5)

d) La probabilidad de que los salarios sean superior a 248,5 pesos por hora en más de 6 horas en una jornada de trabajo es de: (considere la jornada de trabajo de 8 horas y suponga independencia en los sueldos en cada hora de la jornada)

Y: "Cantidad de horas de trabajo de los trabajadores".
Y ~ Binomial (n = 8, p = 0,4705)

$P(Y > 6)$
$P(Y > 6) = 1 – P(Y \leq 6) = 1 – F(6)$
$P(Y > 6) = 0,0240$

1-pbinom(6,8,0.4705)

Ejercicios: NORMAL

X: “Salarios, en pesos por hora, de los trabajadores de una industria alimenticia de Mendoza.”
X ~ Normal (μ= 247,5; σ = 13,5)

c) El salario que debe percibir un trabajador de esta industria para que sólo el 10% ganen más es de:

$P(X > q) = 0,10$

qnorm(0.9,247.5,13.5)
$q_{0,9} = 264,80$

Ejercicios: EXPONENCIAL

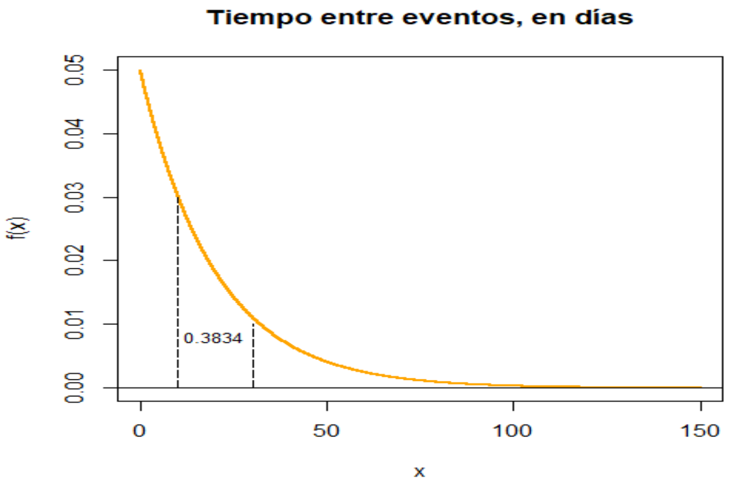
En una central hidroeléctrica ocurren aleatoriamente a lo largo del tiempo "eventos menores de operación". El tiempo medio entre dos eventos es de 20 días. Se sabe que el tiempo entre dos eventos se distribuye en forma exponencial. Encuentre:

X: "Tiempo, en días, entre dos eventos menores de operación de una central hidroeléctrica".
X ~ Exponencial (λ = 1/20)

a) La probabilidad de que el tiempo para el siguiente evento menor de operación se encuentre entre 10 y 30 días.

P(10 < X < 30) = 0,3834

pexp(30,0.05) - pexp(10,0.05)



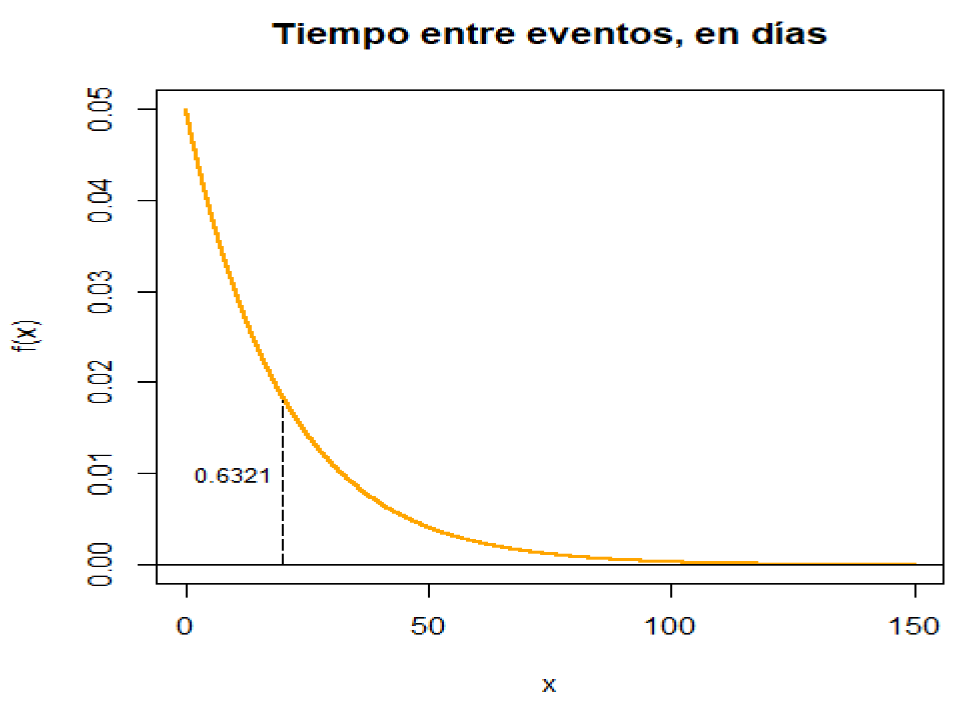
Ejercicios: EXPONENCIAL

X: "Tiempo, en días, entre dos eventos menores de operación de una central hidroeléctrica".
X ~ Exponencial (λ = 1/20)

b) La probabilidad de que el tiempo entre eventos sea, a lo sumo, de 20 días.

P(X < 20) = 0,6321

pexp(20,0.05)



Ejercicios: EXPONENCIAL

X: "Tiempo, en días, entre dos eventos menores de operación de una central hidroeléctrica".
X ~ Exponencial (λ = 1/20)

c) La probabilidad de que el tiempo entre eventos sea menor de 15 días, si se sabe que ha pasado más de 10 días del anterior evento menor.

P(X < 15 / X > 10)
P(X < 15 / X > 10) = P(10 < X < 15) / P(X > 10)
P(X < 15 / X > 10) = 0,2212

(pexp(15,0.05)- pexp(10,0.05)) / (1-pexp(10,0.05))

Ejercicios: EXPONENCIAL

d) En vez de considerar el tiempo entre dos eventos, considere la cantidad de eventos menores de operación que ocurren aleatoriamente en una central hidroeléctrica en un lapso de tiempo dado.

Y: "Cantidad de eventos menores de operación que ocurren en una central hidroeléctrica, en un día".

Y ~ Poisson (λ = 0,05 eventos/día)

d1) Calcular la probabilidad de que no se produzcan eventos menores en un día.

P(Y = 0) = 0,9512

dpois(0,0.05)

d2) Calcular la probabilidad de que se produzcan más de un evento menor de operación en dos días.

Z: "Cantidad de eventos menores de operación que ocurren en una central hidroeléctrica, en dos días".

Z ~ Poisson (λ = 0,1)

P(Z > 1) = 1 – P(Z ≤ 1) = 1 – F(1) = 0,0047

1-ppois(1,0.1)