CAPITULO V

MODELOS DE DISTRIBUCIÓNDE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

5-1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior consideramos algunas modelos de distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas específicas. Ahora nos dedicaremos a estudiar algunos modelos de distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas que aparecen con frecuencia en la teoría de la probabilidad.

Algunos modelos a estudiar son el modelo Uniforme, el modelo Normal o Gaussiano, el modelo Exponencial, el modelo Gamma, el modelo Weibull, el modelo de Cauchy, el modelo Beta, entre otros.

5-2 MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

5-2-1 MODELO NORMAL O GAUSSIANO

Es un modelo de probabilidad para variables aleatorias continuas de gran aplicación en ingeniería, en física y en las ciencias sociales. Es la función de probabilidad con más aplicaciones al campo de la Economía. Tiene amplias aplicaciones en casi todas las disciplinas científicas. Se verá que muchas variables aleatorias de interés pueden describirse por el presente modelo. Se aplicará además en numerosas técnicas de inferencia estadística.

La distribución normal fue introducida por el matemático francés Abraham de Moivre en 1733, fue utilizada para calcular probabilidades aproximadas asociadas con variables aleatorias binomiales cuando el parámetro binomial n es grande. Su resultado fue divulgado por Laplace en su libro "Teoría analítica de las probabilidades", (1812), en la actualidad se engloba en un teorema de probabilidad denominado "Teorema del Límite Central", uno de los teoremas más importantes de la teoría de la probabilidad.

Laplace aplicó la distribución normal en la teoría de los errores, observó una regularidad en la frecuencia que se presentaban ciertos errores, especialmente en los que se cometen en cada una de las mediciones. Los errores presentaban una distribución simétrica, que recibió el nombre de curva normal de errores. Laplace hace sus aportes a la distribución normal casi simultáneamente a Carl Friedrich Gauss, por lo que el modelo lleva su nombre.

En la práctica muchos fenómenos aleatorios pueden modelarse aproximadamente mediante una distribución de probabilidad normal. Algunos ejemplos que podemos enunciar es el comportamiento de la altura de los varones, el coeficiente intelectual de las personas, la velocidad en una dirección de las moléculas en gas, el error cometido en la medición de una cantidad física, otras variables como la Poisson o Binomial, que bajo ciertas condiciones pueden aproximarse a un modelo Normal, entre otros.

Por lo tanto podemos decir que la importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables aleatorias asociadas a fenómenos naturales que se distribuyen como una normal.

Se dice que una variable aleatoria X presenta una distribución de probabilidad normal si la mayoría de sus valores están concentrados alrededor de su promedio o esperanza matemática μ, conforme nos apartamos de este valor medio los valores de la variable son cada vez menos frecuentes, de igual forma a derecha e izquierda debido a su simetría.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad normal o de Gauss si es absolutamente continua con función de densidad, $f(x)$, dada por:

$$f_X: R \to R^+$$

Tal que:

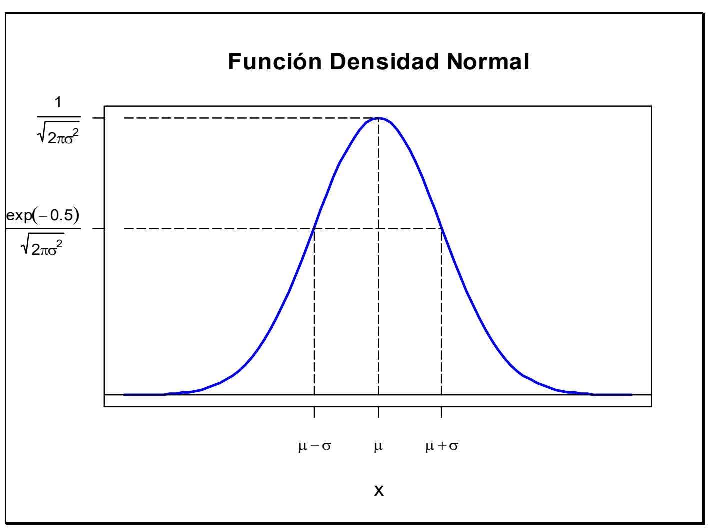
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2}; \quad con -\infty < x < \infty$$

Siendo $-\infty < \mu < \infty$; $\sigma^2 > 0$

$y\ \pi\ es\ un\ número\ irracional, \qquad \pi \cong 3{,}14159 \ldots$

Se observa que la variable X puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales. Esta distribución depende de dos parámetros que la describen, la media μ y la varianza σ^2. Se indica abreviadamente: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Su representación gráfica es:



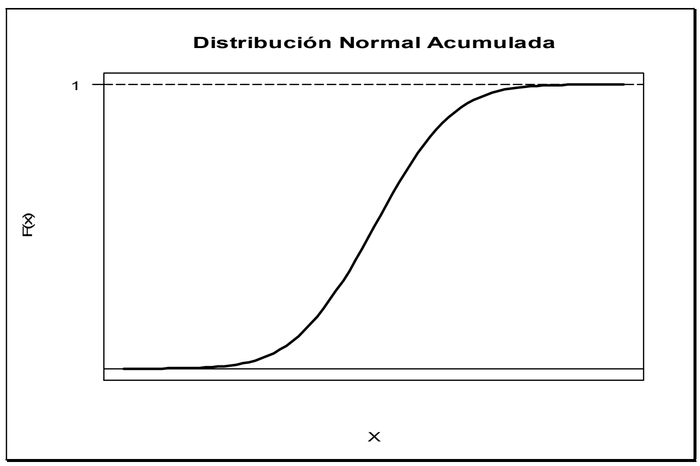
5-2-1-1 *FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA*

Su función de distribución acumulada se obtiene integrando la función densidad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(v)dv$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(v-\mu)^2} dv \;\; ; \; con -\infty < x < \infty$$

Su representación gráfica es:



5-2-1-2 *CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL*

Analizaremos algunas características de la distribución normal.

La función de densidad queda completamente definida por dos parámetros su esperanza matemática o media μ y su desviación estándar σ^2 y lo denotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es decir que para cada par de valores μ y σ^2, tenemos una función de densidad distinta.

Por lo tanto existe una familia de distribuciones normales.

La función densidad normal es una curva en forma de campana, que es simétrica respecto a la recta $x = \mu$.

Como la función densidad es simétrica respecto a la recta $x = \mu$, significa que dicha recta divide al área debajo de la curva en dos partes iguales, cada una de ellas entonces medirá 0,5. Por lo tanto el valor de la esperanza matemática μ, es también la mediana de la distribución.

Es una curva estrictamente positiva, por ser una función exponencial, $f_X(x) > 0,\; para\;\; todo\;\; x \in R.$

Es asintótica respecto al eje x, es decir que verifica:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

La función f_X tiene un máximo en $x = \mu$, llamado moda que vale: $f_X(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$. Por lo que se dice que la distribución es unimodal.

Por lo analizado se observa que la media μ es también mediana y moda de la función densidad de la distribución normal.

Existen dos puntos de inflexión en $x = \mu - \sigma \; y \; x = \mu + \sigma$

La función densidad para el punto de inflexión $x = \mu - \sigma$ vale:

$$f_X(\mu - \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(-\sigma)^2}$$
$$f_X(\mu - \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2}}$$

Calcularemos la función densidad en $x = \mu + \sigma$:

$$f_X(\mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2}}$$

Si se analiza el comportamiento de la función respecto a la concavidad en los intervalos obtenidos $(-\infty;\ \mu - \sigma), (\mu - \sigma;\ \mu + \sigma) \; y \; (\mu + \sigma;\ \infty)$

En el intervalo $(-\infty;\ \mu - \sigma)$, f_X es convexa, pasando a cóncava en el intervalo $(\mu - \sigma;\ \mu + \sigma)$, luego nuevamente la función, f_X, es convexa en el intervalo $(\mu + \sigma;\ \infty)$.

Curva de Gauss

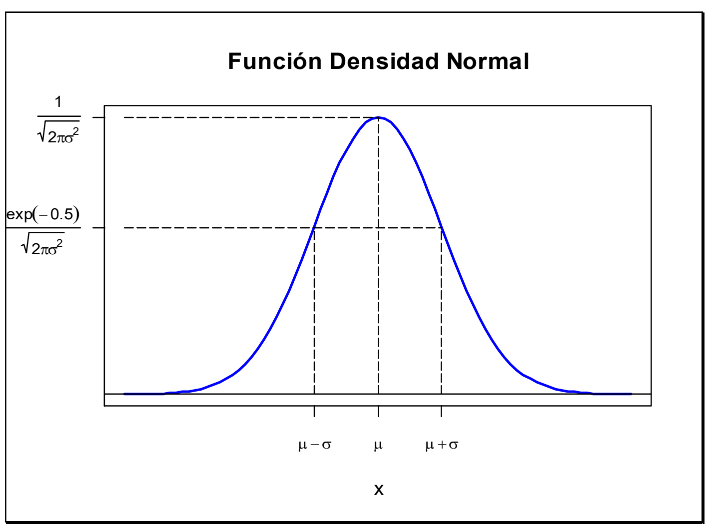


Figura 5-1: Función densidad normal con media μ y desviación estándar σ.

Para que $f_X(x)$ sea una función de densidad debe cumplir que toda el área debajo de la curva mida 1, es decir:

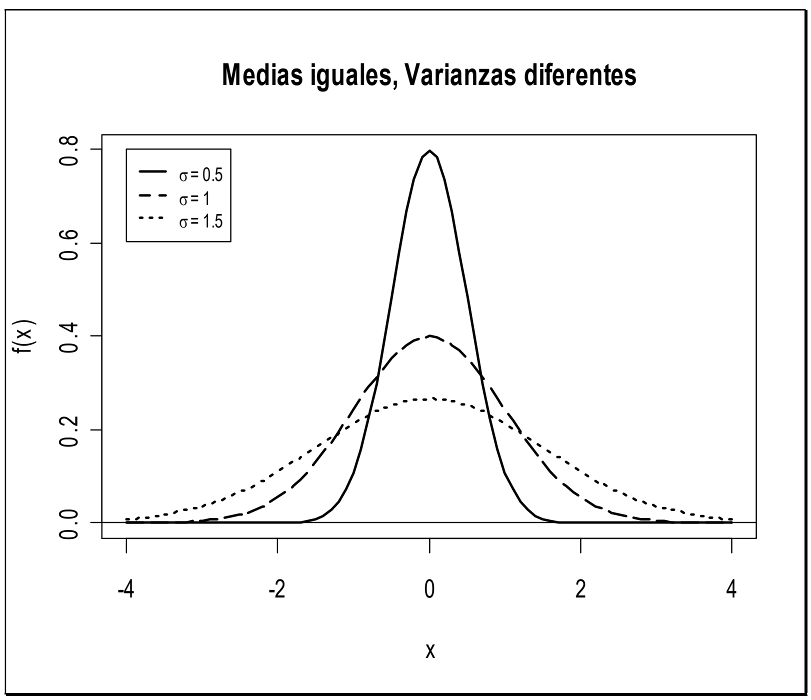
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2}\,dx = 1$$

Las demostraciones de cómo obtener la moda, puntos de inflexión y la demostración que el área debajo de la curva vale 1, se encuentra en el Apéndice 1.

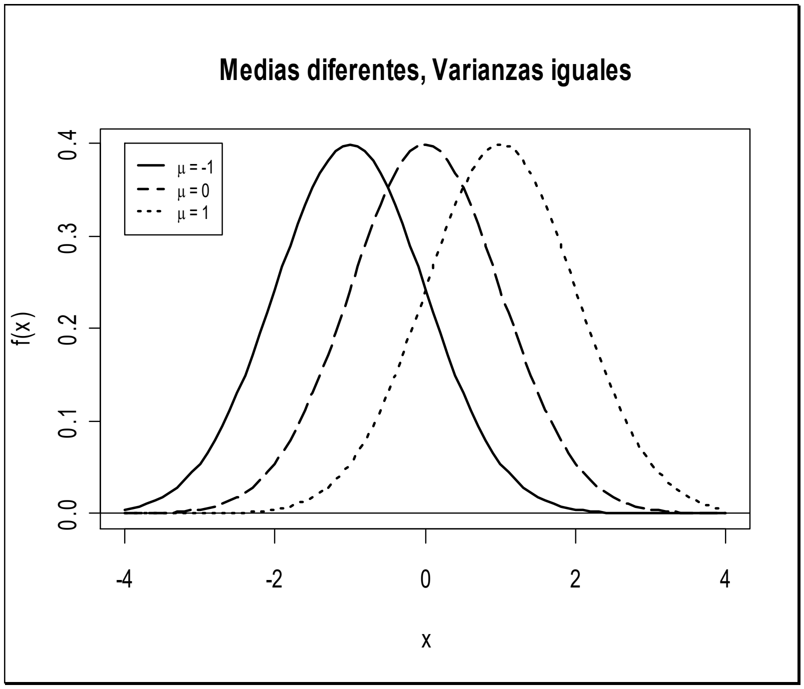
5-2-1-3 GRÁFICAS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL AL VARIAR SUS PARÁMETROS

Como hemos dicho tenemos una familia de curvas normales según los valores que toman sus parámetros $\mu,\ \sigma$. Veremos a continuación distintas gráficas de la curva normal según sus parámetros.



Gráficas de la función densidad normal con media cero y diferentes valores de la desviación estándar.

Obsérvese como cambian las gráficas a medida que cambian sus desviaciones típicas. A medida que la desviación estándar aumenta, la curva se achata y disminuye la concentración de los valores alrededor de la media.



Gráficas de la función densidad normal con la misma desviación estándar y diferentes medias.

Obsérvese que las gráficas de la función densidad normal con igual desviación estándar son curvas iguales que al variar las medias estas se va trasladando sobre el eje x.

5-2-1-4 AREAS DEBAJO DE LA CURVA NORMAL

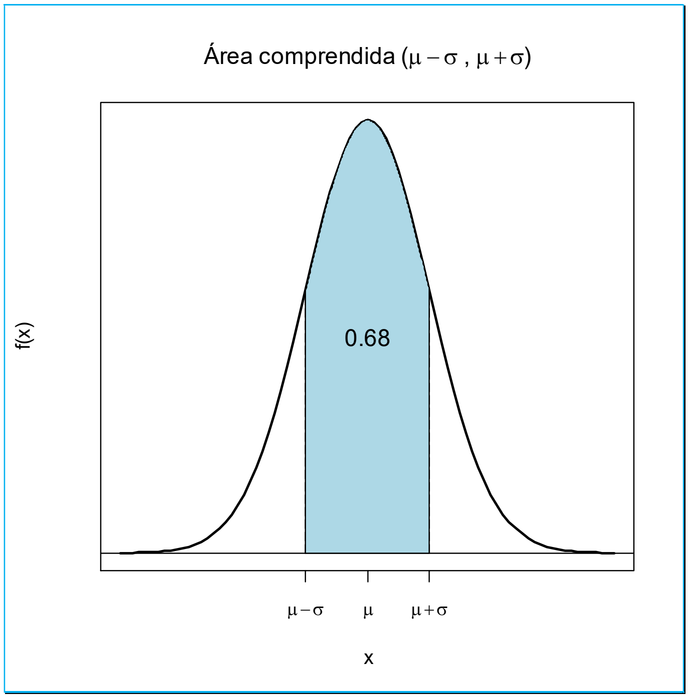
En una distribución con probabilidad normal, sin importar cuáles sean los valores de la media y de su desviación estándar el área total bajo la curva vale 1. Podemos ahora calcular otras áreas bajo de la curva normal tales como:

- El área bajo la curva comprendida en el intervalo $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma)$ es aproximadamente el 68,27 %.
- El área bajo la curva comprendida en el intervalo $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma)$es aproximadamente el 95,45 %.
- El área bajo la curva comprendida en el intervalo $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma)$es aproximadamente el 99,73.

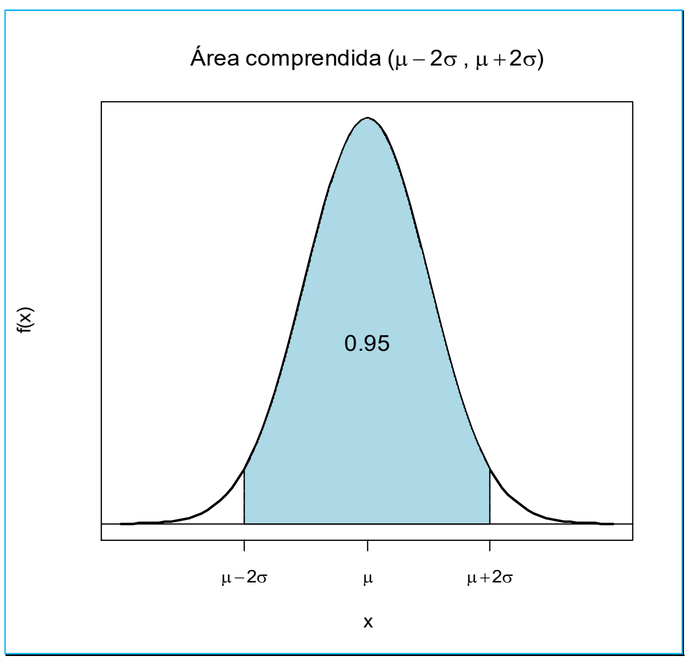
  Recordemos que las áreas bajo la curva representan probabilidades, por lo que es tan importante analizar las distintas áreas.

  Si interesa calcular la probabilidad de que una unidad de análisis tomada al azar de la población en estudio tome valores en un intervalo, se tiene que calcular el área bajo la curva en dicho intervalo.

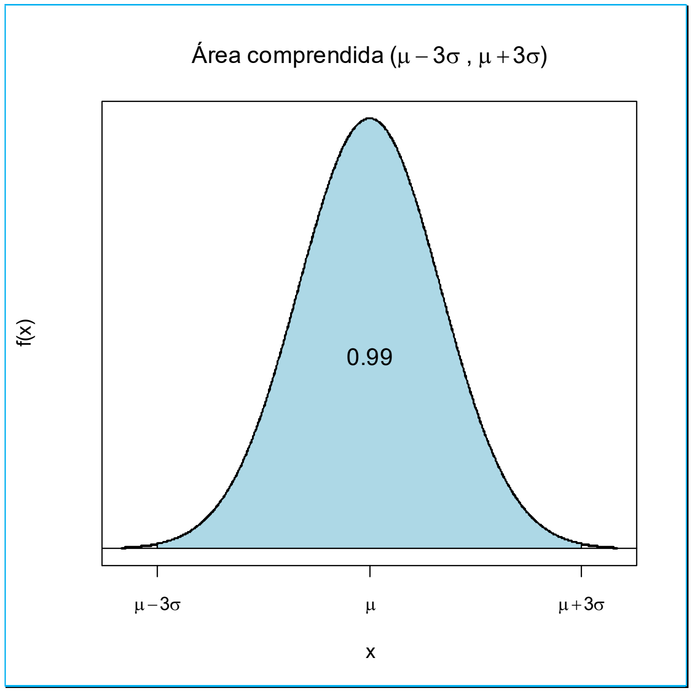
En el gráfico siguiente observamos el área de la curva comprendida entre $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma)$:



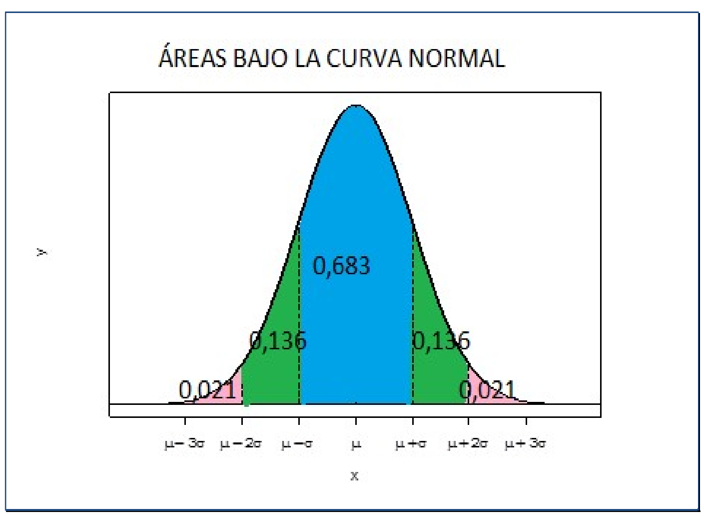
En el gráfico siguiente observamos el área de la curva comprendida entre $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma)$



En el gráfico siguiente observamos el área de la curva comprendida entre $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma)$:



En el gráfico siguiente observamos algunas áreas debajo de la curva:



5-2-1-5 FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL

La función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con parámetros $\mu\ y\ \sigma^2$, se obtiene como sigue:

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2}dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2}dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2+tx}dx$$

Desarrollemos el binomio al cuadrado del exponente de e

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x^2-2x\mu+\mu^2)+tx}dx$$

Realizando cálculos matemáticos tenemos:

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x^2-2x\mu+\mu^2-2\sigma^2tx)}dx =$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left[(x^2-2x\left(\mu+\sigma^2t\right)+\left(\mu+\sigma^2t\right)^2\right]+\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu+\sigma^2t\right)^2-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\left(\mu+\sigma^2t\right)\right)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu+\sigma^2t\right)^2-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\left(\mu+\sigma^2t\right)\right)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2+\frac{1}{2\sigma^2}2\mu\sigma^2t+\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sigma^2t\right)^2-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right)^2 + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dx$$

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right)^2} \; e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dx$$

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right)^2} \; dx$$

Considerando $\mu' = \mu + \sigma^2 t$, nos queda en la integral:

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\mu'\right)^2} \; dx$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\left(x-\mu'\right)^2} \; dx = 1 = F(x)$ dado que esta integrada $-\infty < x < \infty$

Entonces la función generadora de momentos de la variable X con distribución normal es:

$$\boxed{m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}} \quad (2.1.5)$$

Obtenida la función generadora de momentos se calculará la esperanza matemática y la varianza de la variable a partir de ella.

5-2-1-6 ESPERANZA MATEMÁTICA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL

Para el cálculo de la esperanza matemática derivamos la función generadora de momentos con respecto a t:

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = (\mu + \sigma^2 t).\, e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (2.1.6)$$

Evaluamos $m'_X(t)$ en $t = 0$, y obtenemos la esperanza:

$$\frac{d}{dt}m_X(t)\Big|_{t\,=\,0} \Rightarrow \boxed{E(X) = \mu}$$

Calcularemos ahora la varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para obtener $E(X^2)$ tenemos que calcular la derivada segunda de la función generadora de momentos, entonces tenemos que volver a derivar la expresión (2.1.6)

$$\frac{d^2}{dt^2}m_X(t) = \frac{d}{dt}\left[(\mu + \sigma^2 t).\, e^{\mu t\ \ \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}m_X(t) = \sigma^2.\, e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu + \sigma^2 t).(\mu + \sigma^2 t).\, e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}m_X(t) = \sigma^2.\, e^{\mu t\ \ \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu + \sigma^2 t)^2.\, e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}m_X(t) = e^{\mu t\ \ \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.\,[\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2]$$

En $t = 0$ obtenemos la esperanza de la variable X^2: $E(X^2)$

$$\frac{d^2}{dt^2}m_X(t)\Big|_{t\,=\,0} \Rightarrow \boxed{E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2}$$

Reemplazando en la expresión de la varianza tenemos:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Luego $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Si calculamos la raíz cuadrada de la varianza obtenemos la desviación estándar de la variable X.

$$DE(X) = \sigma$$

5-2-1-7 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

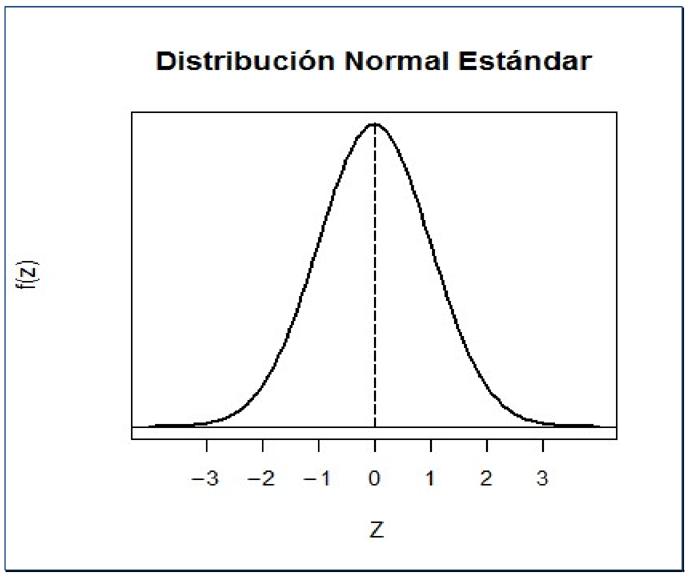
Una variable aleatoria con distribución normal con esperanza matemática $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$, se denomina variable aleatoria normal estándar o normal tipificada.

Su función de densidad es:

$$f_Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}z^2} \; ; \quad -\infty < z < \infty$$

Denotamos: $Z \sim N(0,1)$

La representación gráfica de su función densidad se denomina curva normal estándar o tipificada.



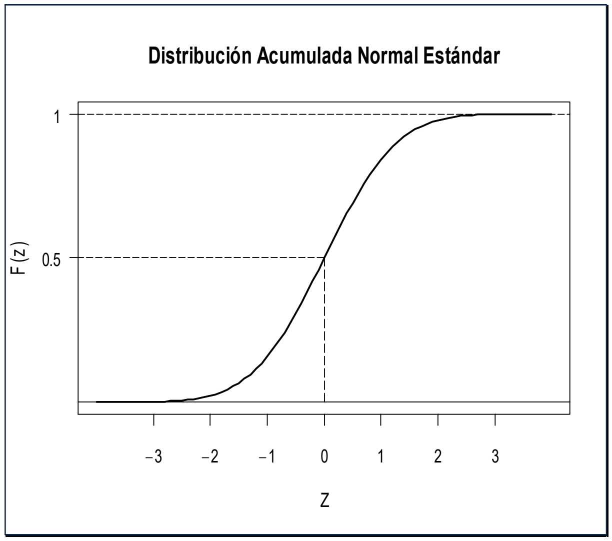
5-2-1-8 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA NORMAL ESTÁNDAR

Su función de distribución acumulada es:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(v)dv$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \; ; \; con - \infty < x < \infty$$

La representación gráfica de la función distribución acumulada es la siguiente:



5-2-1-9 PROPIEDADES DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

La función densidad de una variable con distribución normal estándar no depende de parámetros.

Su esperanza matemática vale $\mu = 0$, su varianza vale $\sigma^2 = 1$, y su desviación estándar o típica vale $\sigma = 1$.

Su función de densidad es simétrica respecto al eje $z = 0$, tiene dos puntos de inflexión en $z = -1 \; y \; z = 1$.

Por ser un caso particular de la distribución normal cumple con todas las propiedades de la distribución normal.

5-2-1-10 TRANSFORMACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN NORMAL A UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, definiremos ahora una variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, vamos a determinar cómo se distribuye esta variable Z.

Para lo cual encontraremos la función generadora de momentos de la variable Z.

$$m_Z(t) = E(e^{Zt}) = E\left[e^{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right).t}\right]$$

$$m_Z(t) = E(e^{Zt}) = E\left[e^{\left(\frac{Xt}{\sigma}\right)}.e^{\left(-\frac{\mu t}{\sigma}\right)}\right] = e^{\left(-\frac{\mu t}{\sigma}\right)}.\underbrace{E\left[e^{\left(\frac{Xt}{\sigma}\right)}\right]}_{(2.1.7)}$$

Comparamos este último factor (2.1.7), con la función generadora de momentos de la distribución normal conocida. Trataremos de asemejarlo a ella:

$m_X(t) = E(e^{Xt}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ (función generadora de momentos de una variable aleatoria normal) (2.1.8)

$$E\left[e^{\left(\frac{Xt}{\sigma}\right)}\right] = e^{\mu\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}\sigma^2 {\frac{t}{\sigma^2}}^{2}} = e^{\mu\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2}, \qquad (2.1.9)$$

Reemplazando en (2.1.9) en (2.1.7)

$$m_Z(t) = E(e^{Zt}) = e^{\left(-\frac{\mu t}{\sigma}\right)}.\, e^{\mu\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}+\frac{\mu t}{\sigma}+\frac{t^2}{2}}$$

$$m_Z(t) = E(e^{Zt}) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Se obtiene la función generadora de momentos de la variable aleatoria Z.
Comparando esta última expresión con la función generadora de momentos de la variable normal (2.1.8) tenemos:

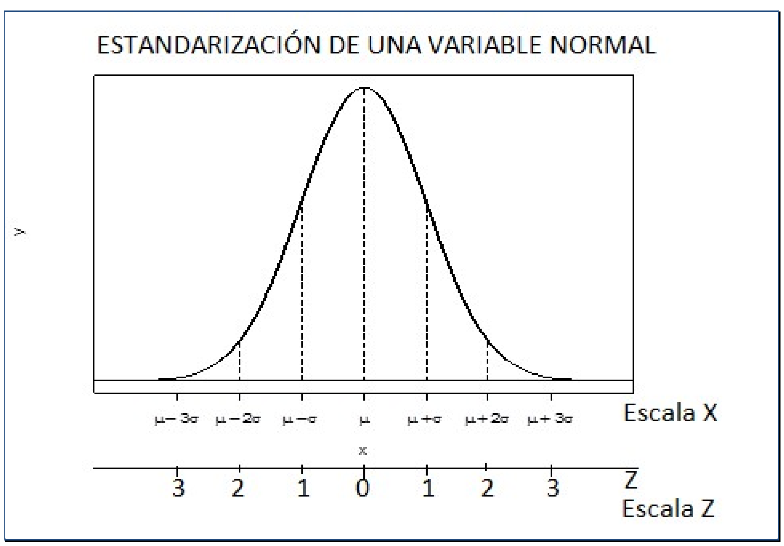
$$m_Z(t) = E(e^{Zt}) = e^{0t+1\frac{t^2}{2}}$$

Por lo que se deduce que Z es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros $\mu = 0$, y desviación estándar $\sigma = 1$. Denotamos $Z\sim N(0,1)$.

De acuerdo a esto, concluimos que cualquier variable con distribución normal $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, puede ser llevada a una variable con distribución normal estándar, con sólo hacer la transformación:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Este proceso se denomina estandarización de una variable aleatoria normal X.
En el gráfico siguiente se puede observar la relación entre la variable X y la variable estándarizada Z.



5-2-1-11 CÁLCULO DE LA ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ESTÁNDAR Z

Otra forma de calcular la esperanza y varianza de la variable transformada mediante la relación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, es aplicar las propiedades de esperanza y varianza de una variable.

Cálculo de la Esperanza de la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$;

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{1}{\sigma}.(X-\mu)\right)$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma}E\,(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}.[E(X) - E(\mu)]$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma}.[\mu - \mu] = 0$$

$$\boxed{E(Z) = 0}$$

Calculo de la varianza de la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = Var\left(\frac{1}{\sigma}.(X-\mu)\right)$$

$$Var(Z) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}.Var(X)$$

$$Var(Z) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

$$\boxed{Var(Z) = 1}$$

Luego $Z \sim N(0,1)$

5-2-1-12 CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

Si deseamos calcular probabilidades en una distribución normal por ejemplo la siguiente probabilidad:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\mu)^2}dx$$

Tenemos el inconveniente de que el cálculo de esta integral es muy complicado. Por ello para poder calcularla se lleva la distribución normal dada a una normal estándar, cuyos valores de probabilidad están tabulados. Es decir un método para calcular probabilidades es estandarizar la variable X y luego utilizar tablas.

Otro método es utilizar un software estadístico. Nosotros en este libro lo calcularemos con el software R, que es un software libre y puede ser bajado de internet gratis.

Ejemplo 5-1

Las alturas de los alumnos de una Universidad de Mendoza tienen una distribución normal con una media de 1,72 m. y una desviación estándar de 0,16 m. El secretario de deportes está organizando un equipo de básquet de la Universidad, una de las condiciones para ser elegido es la altura.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno mida más de 1,86m?
b) Suponga que el 10% de los alumnos más altos se les beneficiará con un pase al gimnasio de la Universidad. ¿Cuál es la altura mínima que debe tener un estudiante para obtener un pase al gimnasio?
c) ¿Cuál es la altura mínima que debe tener un estudiante, si el entrenador pretende que sólo el 28 % de los estudiantes más altos formen parte del equipo de básquet?
d) Si se sabe que la altura de un estudiante es mayor que 1,75m, ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor a 1,86m?
e) Se ha elegido a 20 alumnos al azar para formar parte del equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 5 de ellos, tengan una altura superior a 1,86 m?

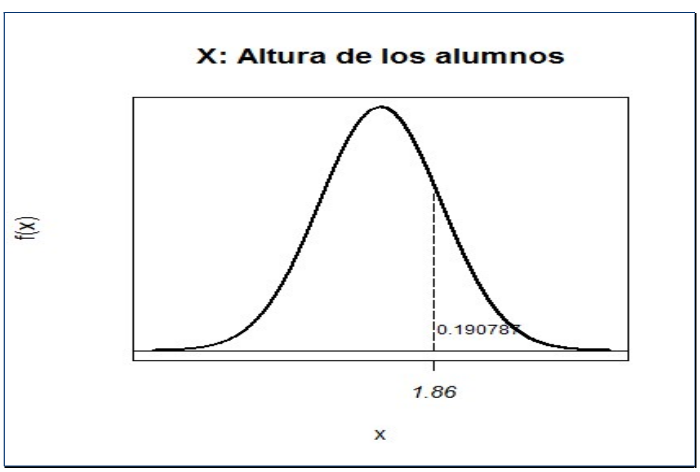
Resolución:

X: "Alturas de los alumnos de una Universidad de Mendoza"

$$X \sim N(\mu = 1{,}72;\ \sigma^2 = 0{,}16^2)$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno mida más de 1,86m?

$$P(X > 1{,}86) = \int_{1{,}86}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi 0{,}16^2}} . e^{-\frac{1}{2.0{,}16^2}.(x-1{,}72)^2} dx$$



Resolución con el software estadístico R:

Cuando se trabaja con la distribución normal en "R", las sentencias a utilizar son: $dnorm(x, \mu, \sigma), pnorm(x, \mu, \sigma)$, ó $qnorm(q, \mu, \sigma)$, según si se quiere conocer la función densidad en x o el valor de la función de distribución acumulada en x o un cuantil de la distribución normal respectivamente

En nuestro ejercicio 5-1 item a) observamos que la integral a resolver es un poco complicada, utilizaremos el software "R" para calcularla. Debemos tener en cuenta que R siempre calcula probabilidades "menores que", en este caso estamos interesados en calcular la probabilidad de mayores a 1,86, por lo que lo resolveremos aplicando el complemento, es decir:

$$P(X > 1{,}86) = 1 - P(X \leq 1{,}86)$$

Como hemos visto, cuando se está interesado en calcular las probabilidades de una distribución normal la sentencia es $pnorm(x, \mu, \sigma)$, cuidando el orden de los parámetros de la distribución.

Luego:

$$P(X \leq 1{,}86) = pnorm(1.86, \mu, \sigma)$$
$$P(X \leq 1{,}86) = pnorm(1.86, 1.72, 0.16)$$

Utilizamos el software "R" para calcular la $P(X \leq 1{,}86)$, la sentencia a aplicar es:

> $pnorm(1.86, 1.72, 0.16)$

> 0.809213

$$P(X > 1{,}86) = 1 - P(X \leq 1{,}86)$$
$$P(X > 1{,}86) = 1 - 0{,}809213 = 0.190787$$

También podemos colocar en R, "$1 - pnorm(1.86, 1.72, 0.16)$" y obtendremos directamente su resultado.

> $1 - pnorm(1.86, 1.72, 0.16)$

> 0.190787

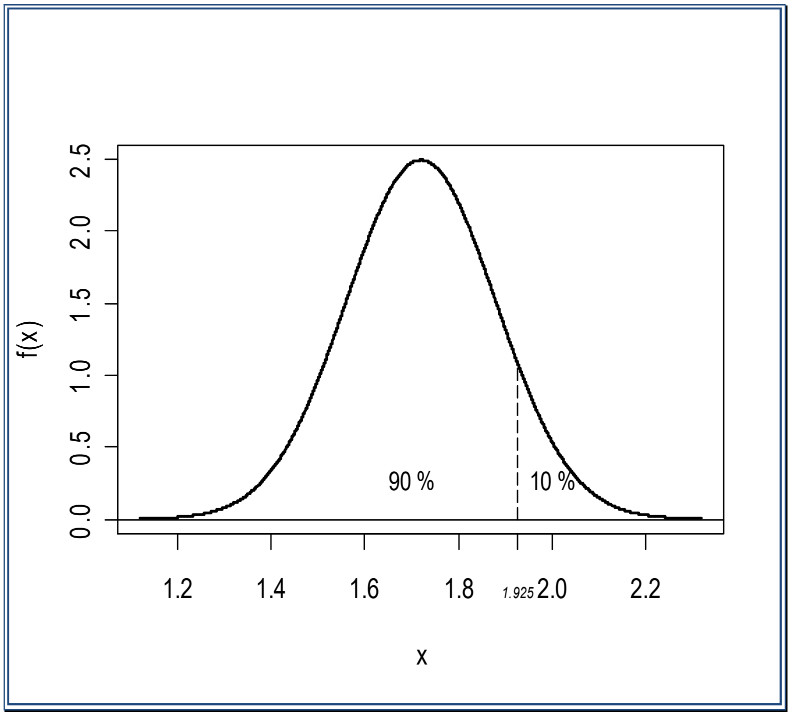
Interpretación: La probabilidad de que un alumno mida más de 1,86 m. es de 0,190787

b) Suponga que el 10% de los alumnos más altos se les beneficiará con un pase al gimnasio de la Universidad. ¿Cuál es la altura mínima que debe tener un estudiante para obtener un pase al gimnasio?

X: "Alturas de los alumnos de una Universidad de Mendoza"

$$X \sim N(\mu = 1{,}72;\ \sigma^2 = 0{,}16^2)$$

En el gráfico siguiente se representa la altura de los alumnos:



En este ítem nos están preguntando por el cuantil 0,90. Es decir:

$$P(X > x_{0,90}) = 0{,}10$$
$$F(x_{0,90}) = q = 0{,}90$$
$$F(x_{0,90}) = P(X \leq x_{0,90}) = 0{,}90$$
$$x_{0,90} = q_{0,90} = qnorm(0.90, \mu, \sigma)$$
$$x_{0,90} = qnorm(0.90, 1.72, 0.16) \cong 1{,}925\ m.$$

Resolución con el software estadístico R:

Para poder calcular el cuantil $x_{0,90}$, utilizamos el software "R", la sentencia a aplicar es:

$> qnorm(q, 1.72, 0.16)$

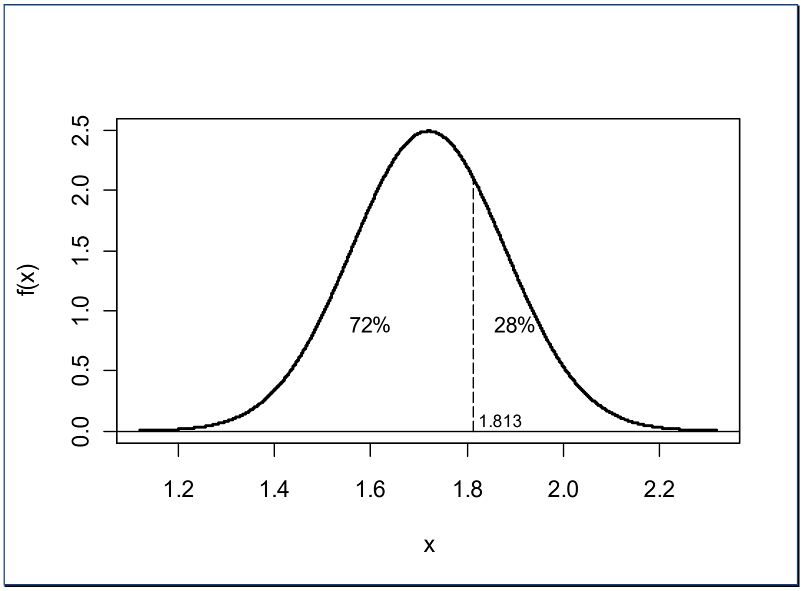
$> qnorm(0.90, 1.72, 0.16)$

> 1.925048

$$x_{0,90} = qnorm(0.90, 1.72, 0.16) \cong 1{,}925\ m.$$

Interpretación: La atura mínima que debe tener una alumno para pertenecer al 10% de los más altos de la Universidad es de 1,925 m. Es decir si mide 1,925 m. o más se beneficiará con un pase gratis al gimnasio de la Universidad.

c) ¿Cuál es la altura mínima que debe tener un estudiante, si el entrenador pretende que sólo el 28 % de los estudiantes más altos formen parte del equipo de básquet?
En el gráfico siguiente se representa las alturas de los estudiantes:



Nuevamente nos están preguntando por el cuantil , $x_{0,72}$, es decir:

$$P\left(X > x_{0,72}\right) = 0{,}28$$
$$F(x_{072}) = P(X \leq x_{072}) = 0{,}72$$
$$x_{0,72} = q_{0,72} = qnorm(0.72, \mu, \sigma)$$
$$x_{072} = qnorm(0.72, 1.72, 0.16)$$
$$x_{0,72} = qnorm(0.72, 1.72, 0.16) \cong\ 1{,}813\ m$$
$$x_{0,72} \cong\ 1{,}813\ m$$

Resolución con el software estadístico R:

Utilizamos el software "R" para calcular el cuantil, $x_{0,72}$, la sentencia a aplicar es:
$> qnorm(q, 1.72, 0.16)$
$> qnorm(0.72, 1.72, 0.16)$
> 1.813255
Luego:

$$x_{0,72} = qnorm(0.72, 1.72, 0.16) \cong\ 1{,}813\ m$$

Interpretación: La mínima altura que debe tener un estudiante, para poder formar parte del equipo de básquet es de 1,813 m.

d) Si se sabe que la altura de un estudiante es mayor que 1,75m, ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor a 1,86m?

$$P(X > 1{,}86/X > 1{,}75) = \frac{P(X > 1{,}86 \cap X > 1{,}75)}{P(X > 1{,}75)} = \frac{P(X > 1{,}86)}{P(X > 1{,}75)} = \frac{1 - P(X \leq 1{,}86)}{1 - P(X \leq 1{,}75)}$$

$$P(X > 1{,}86/X > 1{,}75) = \ 0{,}4482415 \cong 0{,}448$$

Resolución con el software estadístico R:

Utilizamos el software "R" para calcular esta probabilidad, se observa que para calcular la probabilidad condicionada $P(X > 1{,}86/X > 1{,}75,)$ debemos resolver un cociente de probabilidades, como R trabaja con los operadores elementales matemáticos usuales +,-, /,*, entonces la sentencia a utilizar nos queda:

> $(1 - pnorm(1.86,\ 1.72, 0.16))/(1 - pnorm(1.75, 1.72, 0.16))$
> 0.4482415
Por lo tanto:

$$P(X > 1{,}86/X > 1{,}75) = \ 0{,}4482415 \cong 0{,}448$$

Interpretación: La probabilidad de que un estudiante mida más de 1,86 m. sabiendo que mide más de 1,75 m. es de 0,4482.

e) Se ha elegido a 20 alumnos al azar para formar parte del equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 5 de ellos, tengan una altura superior a 1,86 m?
Recordemos que en el ítem a) se calculó la probabilidad de que un alumno mida más de 1,86 m.

$$P(X > 1{,}86) = \ 0.190787$$

Vemos ahora que la variable en estudio ha cambiado, es:

Y: "Cantidad de alumnos que tienen una altura superior a 1,86 m."
Y es una variable aleatoria discreta y su distribución es binomial, lo anotamos:

$$Y \sim Binomial\ (n = 20, p = 0{,}190787)$$
$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = \ 0.1667169$$

Resolución con el software estadístico R:

Utilizamos el software "R" para calcular esta probabilidad:

>$1 - pbinom(5, 20, 0.190787)$
> 0.1667169

Interpretación: La probabilidad de que más de 5 estudiantes tengan una altura superior a 1,86 m. es de 0,1667169.

5-2-1-13 ALGUNAS PROPIEDADES DE UNA VARIABLE NORMAL - PROPIEDAD REPRODUCTIVA

- Un hecho importante acerca de variables normales es que si X esta normalmente distribuida con media μ varianza σ^2, y siendo a, b constantes, entonces la variable $Y = aX + b$, está normalmente distribuida con media $E(Y) = a\mu + b$ y varianza $Var(Y) = a^2.\sigma^2$.

Si

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La variable

$$Y = aX + b$$

Se distribuye

$$Y \sim N(a\mu + \ b;\ \ a^2.\sigma^2)$$

Esto se puede probar utilizando la función generadora de momentos:

$$m_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$m_Y(t) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = e^{tb}E(e^{taX})$$

$$m_Y(t) = e^{tb}.m_X(ta)$$

Aplicando (2.1.5)

$$m_Y(t) = e^{tb}.e^{\mu at\ \ \frac{1}{2}\sigma^2(at)^2}$$

$$m_Y(t) = e^{bt+\mu at+\frac{1}{2}\sigma^2(at)^2}$$

$$m_Y(t) = e^{(b+\mu a)t+\frac{1}{2}\sigma^2(at)^2}$$

Esta ecuación es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con media $\mu_Y = a\mu + \ b$ y varianza $\sigma_Y^2 = a^2\sigma^2$.

- Si X_1, X_2 son variables aleatorias independientes, con $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, la variable aleatoria suma $Y = X_1 + X_2$ se distribuye:

$$Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Esta propiedad se denomina propiedad reproductiva de la distribución normal, se demuestra utilizando función generadora de momentos.

- Si X_1, X_2 son variables aleatorias independientes, con $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, la variable aleatoria diferencia $Y = X_1 - X_2$ se distribuye:

$$Y = X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- Generalización: Si $X_1, X_2, \dots . X_n$ son n variables aleatorias independientes, con distribución $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, y a_i *constantes*, con $i = 1,2, \dots n$, entonces la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ se distribuye también normal,

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \sim N\left(\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i;\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

Ejemplo 5-2:
Probar que si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $siendo\ X_1\ y\ X_2$ variables aleatorias independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Para probar esta relación utilizaremos la función generadora de momentos:

$$m_{X_1+X_2}(t) = E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = E(e^{tX_1+tX_2}) = E(e^{tX_1}.e^{tX_2}) = E(e^{tX_1}).E(e^{tX_2})$$

$$m_{X_1+X_2}(t) = m_{X_1}(t).m_{X_2}(t) = e^{\mu_1t+\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2}.e^{\mu_2t+\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2} = e^{(\mu_1+\mu_2)t+\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\ )$$

Nota: se deja al lector analizar en cada paso que propiedad se aplicó.

Ejemplo 5-3:
Pruebe que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una muestra de una población representada por una variable aleatoria normal de media μ y varianza σ^2 y $a_1, a_2, \dots, a_n$, son constantes, entonces la variable aleatoria $Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ tiene distribución normal con media $\mu_Y = \mu\sum_{i=1}^{n} a_i$ y varianza $\sigma_Y^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2$

En símbolos:

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

La muestra $X_1, X_2, \dots, X_n \underbrace{\sim}_{iid} N(\mu, \sigma^2)$

La variable $Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \ \sim\ N(\mu\sum_{i=1}^{n} a_{i\,,}\ \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$

Para probar esta relación utilizaremos la función generadora de momentos:

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i)}\right) = E(e^{ta_1X_1}.e^{ta_2X_2} \dots e^{ta_nX_n})$$

$$m_Y(t) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{ta_iX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{ta_iX_i}) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(ta_i)$$

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu(ta_i)+\frac{1}{2}\sigma^2(ta_i)^2} = e^{\mu t\sum_{i=1}^{n} a_i+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$m_Y(t) = e^{\mu t \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Esta ecuación es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con media $\mu_Y = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i$ y varianza $\sigma_Y^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

Nota: se deja al lector analizar en cada paso que propiedad se aplicó.

5-2-2 MODELO UNIFORME

Una variable aleatoria X esta uniformemente distribuida en un intervalo (α, β) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}; & si\ \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \quad ; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde $\alpha\ y\ \beta$ son los parámetros de la distribución y pueden tomar valores entre:

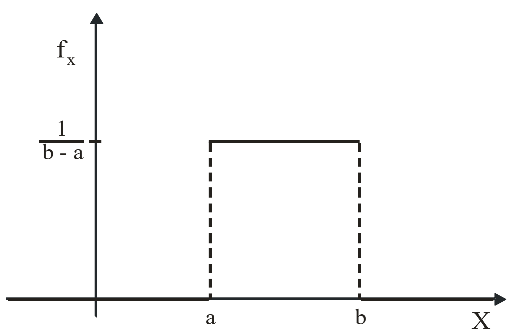
$$-\infty < \alpha < \beta < \infty$$

Se anota: $X \sim U(\alpha, \beta),\ con\ \alpha < \beta$

La representación gráfica de una variable aleatoria X

La distribución uniforme aparece en la práctica cuando suponemos que todos los intervalos de una misma longitud dentro del $[\alpha, \beta]$ tienen la misma probabilidad.

La probabilidad se distribuye uniformemente a lo largo del intervalo $[\alpha, \beta]$.



5-2-2-1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Su función de distribución acumulada se obtiene integrando su función densidad:

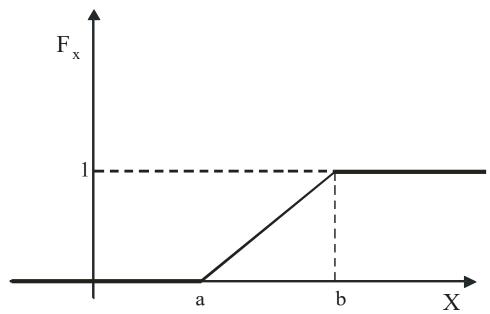
$$F_X(x) = \int_{\alpha}^{x} f_X(u)du = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} du$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{x} du = \frac{1}{\beta - \alpha} u \Big|_{\alpha}^{x}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}.(x - \alpha)$$

Luego:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < \alpha \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha}.(x - \alpha); & si\ \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & si\ x > \beta \end{cases};$$



La función anterior cumple con los requisitos para ser una función de densidad de probabilidad dado que:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $F(x) = \int_a^b \frac{1}{\beta - \alpha} dx = 1$

Demostración del cumplimiento de la 2da propiedad:

$$F(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{1}{\beta - \alpha}.(\beta - \alpha) = 1$$

Calculemos la probabilidad de que la variable X se encuentre en cualquier subintervalo $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_a^b dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\beta - \alpha}.(b - a)$$

Por lo tanto la probabilidad de que la variable X tome valores en cualquier subintervalo de $[\alpha, \beta]$, es igual a la longitud del intervalo que estamos calculando (a, b), dividida la longitud del intervalo $[\alpha, \beta]$, donde está definida la función densidad de la variable uniforme.

Nota: La suma de dos variables aleatorias uniformes no da otra variable aleatoria uniforme, es decir no cumple con la propiedad reproductiva.

5-2-2-2 ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIFORME

Para calcular la esperanza y varianza de la variable uniforme aplicaremos las definiciones respectivas. No se obtiene a partir de la función generadora de momentos debido que esta no está definida para $t = 0$. La media de una variable uniforme definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$, es*:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x. f_X(x) dx$$

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x. \frac{1}{\beta - \alpha} dx$$

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x. \frac{1}{\beta - \alpha} dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta - \alpha}. \int_{\alpha}^{\beta} x. dx = \frac{1}{(\beta - \alpha)}. \frac{x^2}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$E(X) = \frac{1}{(\beta - \alpha)}. \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = \frac{(\beta - \alpha).(\beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)}$$

$$E(X) = \frac{(\beta + \alpha)}{2}$$

La esperanza matemática de una variable uniforme definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$, es igual al punto medio del intervalo $[\alpha, \beta]$, precisamente lo que uno esperaría, en forma intuitiva.

5-2-2-3 VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIFORME

Calcularemos la varianza a partir de la definición de varianza.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Calcularemos primeramente la $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f_X(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 . \frac{1}{\beta - \alpha} dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 . dx = \frac{1}{(\beta - \alpha)} . \frac{x^3}{3} \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{(\beta - \alpha)} . \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3}$$

Reemplazando en:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3} - \left[\frac{(\beta + \alpha)}{2}\right]^2$$

$$Var(X) = \frac{4\beta^2 + 4\alpha\beta + 4\alpha^2 - 3\beta^2 - 6\alpha\beta - 3\alpha^2}{12}$$

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Ejemplo 5-2:
Un tren llega a una estación determinada a intervalos de 20 minutos, durante todo el día. Llega a la estación siempre a la hora en punto, y luego cada 20 minutos, por ejemplo a las 7 hs, 7:20 hs, 7:40 hs, 8 hs y así sucesivamente. Si un pasajero desea tomar el tren y llega a la estación en un momento entre las 7 hs. y 7:20 hs. de la mañana. El tiempo de espera de un pasajero para tomar el tren es una variable aleatoria con distribución uniforme.

a) Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria en estudio.
b) Encuentre la probabilidad de que el pasajero espere el tren menos de 10 minutos.
c) Encuentre la probabilidad de que espere por lo menos 17 minutos.
d) Calcule el percentil 70 e interprete.
e) ¿Cuánto tiempo se espera que tenga que aguardar al tren un pasajero cualquiera? ¿Con qué desviación estándar?

Respuestas:

a) Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria en estudio.
T: "Tiempo de espera de un pasajero (en minutos)"

$$T \sim U(0, 20)$$

Consideremos la función de densidad de una variable uniforme:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}; & si\ \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \quad ; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para nuestro caso en particular la función de densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}; & si\ 0 \leq t \leq 20 \\ 0 \ ; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) Encuentre la probabilidad de que el pasajero espere el tren menos de 10 minutos.

T es una variable uniforme en el intervalo (0 min, 20 min). Considere que a las 7:00 salió un tren, vuelve a salir a las 7:20 y luego a las 7:40 y así sucesivamente.
Un pasajero tendrá que esperar menos de 10 minutos si llega entre las 7:10 y las 7:20 entonces:

$$P(10 \leq T \leq 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{20} dt$$

$$P(10 \leq T \leq 20) = \frac{1}{20} \int_{10}^{20} dt = \frac{1}{20}.10 = 0{,}5$$

$$P(10 \leq T \leq 20) = 0{,}5$$

Interpretación: La probabilidad de que un pasajero tenga que esperar menos de 10 minutos es 0,5.

Resolución con el software estadístico R:

Cuando se trabaja con la distribución uniforme en "R", las sentencias son: $dunif(t, \alpha, \beta), punif(t, \alpha, \beta),$ ó $qunif(q, \alpha, \beta)$, según si se quiere conocer la función densidad en t o el valor de la función de distribución acumulada en t o un cuantil de la distribución uniforme respectivamente.
Con el software "R" para calcular la $P(10 \leq T \leq 20)$, la sentencia es:

```
>punif(20,0,20)-punif(10,0,20)
>0.5
```

c) Encuentre la probabilidad de que espere por lo menos 17 minutos.

Un pasajero tendrá que esperar por lo menos 17 minutos si llega entre las 7:00 y las 7:03 entonces:

$$P(0 \leq T \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{20} dt = \frac{1}{20} . 3 = 0{,}15$$

$$P(0 \leq T \leq 3) = 0{,}15$$

Interpretación: La probabilidad de que tenga que esperar más de 17 minutos es de 0,15.

Resolución con el software estadístico R:

Utilizamos el software "R" para calcular la $P(0 \leq T \leq 3) + P(20 \leq T \leq 23)$, la sentencia es:

> punif(3,0,20)-punif(0,0,20)
>0.15

d) Calcule el percentil 70 e interprete.

Se pide el percentil de la distribución uniforme $T \sim U(0, 20)$

$$F_X(t_{0,70}) = 0{,}70$$

$$F_X(t_{0,70}) = P(T \leq x_{0,70}) = \int_0^{t_{0,70}} \frac{1}{20} du = 0{,}70$$

$$F_X(t_{0,70}) = P(T \leq x_{0,70}) = \frac{1}{20} \int_0^{t_{0,70}} du = 0{,}70$$

$$\frac{1}{20} u \Big|_0^{t_{0,70}} = 0{,}70$$

$$\frac{1}{20} (t_{0,70} - 0) = 0{,}70$$

$$\frac{1}{20} (t_{0,70}) = 0{,}70$$

$$t_{0,70} = 0{,}70 \,.\, 20 = 14$$

Interpretación: El 70% de las veces el pasajero llega a la estación a las 7:14 hs. de la mañana o antes, y el 30% de las veces llega a la estación a las 7:14 hs. o más tarde.

Resolución con el software estadístico R:

Cálculo con el software "R":

$> qunif(q, \alpha, \beta)$

$> qunif(0.70, \alpha, \beta)$

$> qunif(0.70, 0, 20)$

> 14

e) ¿Cuánto tiempo se espera que tenga que aguardar al tren un pasajero cualquiera? ¿Con qué desviación estándar?

Como el tren llega cada 20 minutos, podemos tomar un intervalo de $(0,20)$ luego si aplicamos la definición de esperanza para dicho intervalo:

$$E(T) = \frac{(\beta + \alpha)}{2}$$

$$E(T) = \frac{20}{2} = 10$$

$$E(T) = 10\ min.$$

Interpretación: se espera que en promedio tenga que aguardar 10 minutos a que llegue el tren.
Calcularemos la varianza del tiempo de espera del pasajero:

$$Var(T) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$Var(T) = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{20^2}{12} = \frac{400}{12}$$

$$D.E.(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{\frac{400}{12}} \cong 5{,}7735$$

$$D.E.(T) = 5{,}77\ min.$$

Se espera que en promedio tenga que esperar 10 min para tomar el tren con una desviación estándar de aproximadamente 5,77 minutos.

A continuación se estudiará algunas variables aleatorias que están definidas sólo en el intervalo $x \geq 0$, tienen como característica que son distribuciones asimétricas a derecha. La mayor parte del área bajo la función densidad se encuentra cerca del origen y su función densidad disminuye gradualmente cuando los valores de la variable X aumenta.

Son ejemplo las variables que se distribuyen con un modelo Gamma, un modelo Exponencial, un modelo Chi- cuadrado, modelo F-Fisher –Snedecor.

5-2-3 MODELO GAMMA

El modelo gamma es un ejemplo de una distribución adecuada para modelizar el comportamiento de una variable aleatoria continua con asimetría positiva. Por ejemplo: los intervalos de tiempo entre dos fallas del motor de un aeroplano, posee una distribución de frecuencias sesgada que puede modelarse con dicha distribución Gamma. Este modelo juega un papel importante en teoría de colas y en problemas de confiabilidad.

Una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parámetros α, λ con $\alpha > 0 \; y \; \lambda > 0$, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}; & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & si \; x < 0 \end{cases}$$

Donde $\lambda > 0$; $\alpha > 0$

La distribución gamma tiene dos parámetros α es el parámetro de forma y λ el parámetro de escala (o alcance a la derecha).

Si se cumple esto se anotará: $X \sim G(\lambda, \alpha)$

$\Gamma(\alpha)$ representa el valor en el punto (α) de la función gamma $\Gamma(\alpha)$ la que se define:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx; \;\; \alpha > 0 \;\; (2.3.1)$$

Esta función gamma es denominada función factorial. La integración por partes de $\Gamma(\alpha)$ nos da:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \quad para \; \alpha > 0$$

Ejemplo 5-3:
Calcular $\Gamma(7.8)$

$$\Gamma(7.8) = 7 * \Gamma(6.8)$$

Cuando el número no es un entero su cálculo se complica por lo que se utilizará el software R para calcular $\Gamma(6.8)$:

Sentencia para calcular con R:

```
>gamma(6.8)
> 496.6061
```

Luego:

$$\Gamma(6.8) = 496.6061$$
$$\Gamma(7.8) = 7 * \Gamma(6.8) = 7 * 496.6061 \cong 3476.24$$

5-2-3-1 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN GAMMA $\Gamma(\alpha)$ *O FUNCIÓN FACTORIAL*

Cálculo de $\Gamma(\alpha)$ siendo α un número entero

En el caso que α sea un número entero, y si aplicamos la integral (2.3.1) repetidas veces tenemos:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\Gamma(\alpha - 2)$$

$$\Gamma(\alpha) = \cdots \qquad .$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots 3 \ldots \ldots \Gamma(1)$$

Donde

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-\infty} - (-e^0) = 1$$

$$\Gamma(1) = 1$$

Luego

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! \quad para\ cada\ \alpha\ número\ entero\ positivo$$

Ejemplo 5-4:

Como:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

$$\Gamma(8) = 7!$$

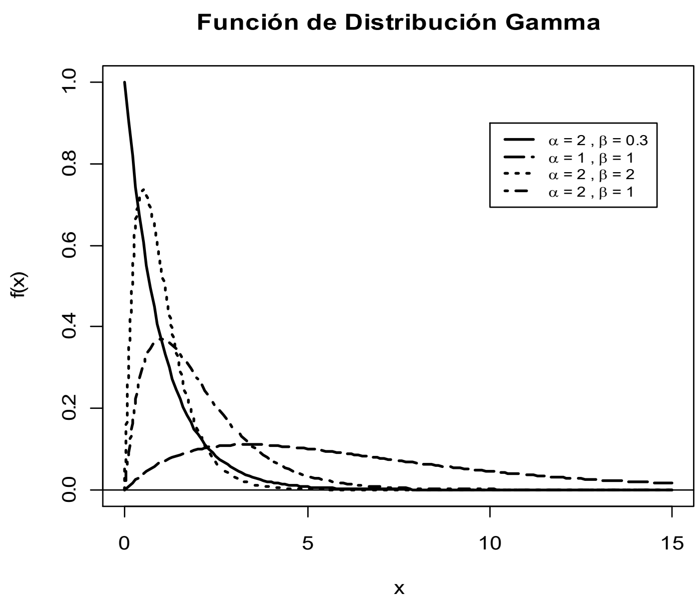
$$\Gamma(8) = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$$

Recordemos que:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Esta distribución sirve para modelar en general problemas de teoría de colas, teoría de confiabilidad, problemas de tráfico en líneas telefónicas, ingresos familiares entre otros.

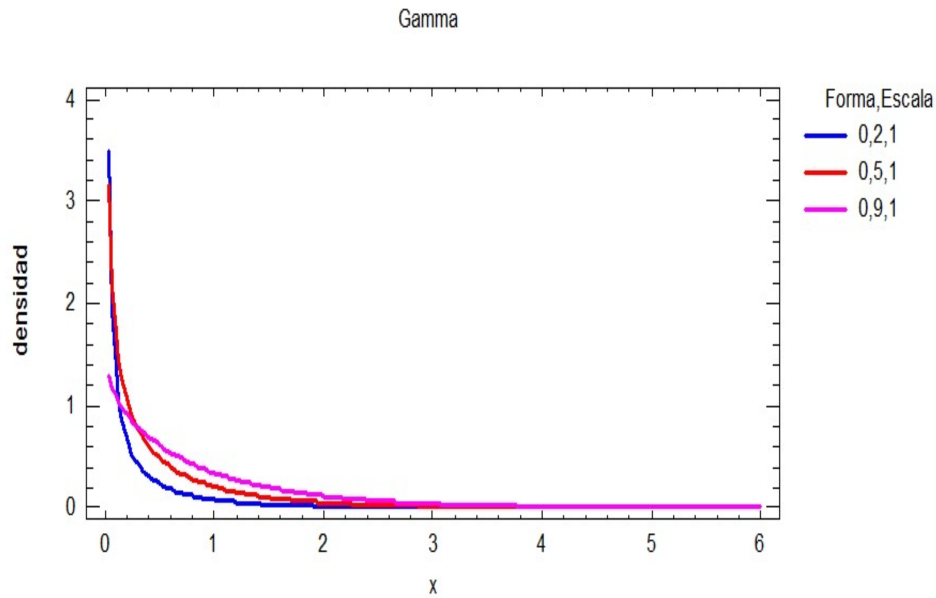
5-2-3-2 GRÁFICAS DE LA DISTRIBUCIÓN GAMMA



En la gráfica de la función densidad gamma para el parámetro $\lambda = 1$ se observa cuando alfa es menor o igual a 1, la función disminuye en forma estricta, cuando x aumenta desde cero.

Cuando alfa es mayor a 1, la función aumenta desde cero hasta un máximo y luego disminuye.

El parámetro λ se llama de escala porque los valores diferentes de 1 alargan o comprimen la función densidad en la dirección x.



5-2-3-3 FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DEL MODELO GAMMA

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$
$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

Recordemos que la función densidad del modelo gamma está definido para valores de $x \geq 0$, luego la función generadora de momentos estará definida desde el valor 0, entonces:

$$m_X(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$
$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \qquad (2.3.2)$$

Para resolver la integral anterior utilizaremos el método de sustitución haciendo el siguiente cambio de variable:

$$u = (\lambda - t)x \ \Rightarrow x = \frac{u}{\lambda - t}$$

Los límites de integración varían:

$$x = 0 \ \rightarrow u = 0$$
$$x \rightarrow +\infty \ \ u \rightarrow +\infty$$

$$du = (\lambda - t)dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\lambda - t}$$

Reemplazando en (5.2.3)

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda - t}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{\lambda - t}$$

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\lambda - t)}{(\lambda - t)(\lambda - t)^\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du}_{\Gamma(\alpha)}$$

La integral es $\Gamma(\alpha)$ por (2.3.1)

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda - t)^\alpha} \Gamma(\alpha) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$$

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$$

Esta expresión es válida para $0 \leq t < \lambda$

5-2-3-4 ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA GAMMA

A partir de la función generadora de momentos del modelo gamma obtendremos la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X.

Para el cálculo de la esperanza matemática derivamos la función generadora de momentos con respecto a t:

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha = \frac{d}{dt}(\lambda^\alpha . (\lambda - t)^{-\alpha})$$

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \lambda^\alpha . (-\alpha) . (\lambda - t)^{-\alpha-1} . (-1)$$

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \lambda^\alpha . \alpha . (\lambda - t)^{-\alpha-1}; \quad (2.3.2.1)$$

$$\frac{d}{dt} m_X(t = 0) = \lambda^\alpha . (-\alpha) . (\lambda)^{-\alpha-1} . (-1)$$

$$m'_X(t=0) = \alpha.\lambda^{-1}$$

Evaluamos $m'_X(t)$ en $t = 0$, y obtenemos la esperanza:

$$m'_X(t=0) = \frac{\alpha}{\lambda} \; ;$$

Luego la esperanza de X:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \; ; \qquad (2.3.2.2)$$

Calcularemos ahora la **varianza**:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para obtener $E(X^2)$ tenemos que calcular la derivada segunda de la función generadora de momentos, entonces tenemos que volver a derivar la expresión $(2.3.2.1)$

$$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t) = \frac{d}{dt} m'_X = \frac{d}{dt}\left[\lambda^{\alpha}.\alpha.(\lambda - t)^{-\alpha-1}\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t) = \lambda^{\alpha}.\alpha.(-\alpha - 1)(\lambda - t)^{-\alpha-2}.(-1)$$

$$m''_X(t) = \lambda^{\alpha}.\alpha.(\alpha + 1)(\lambda - t)^{-\alpha-2}$$

Evaluamos $m''_X(t)$ en $t = 0$, para obtener el momento de segundo orden no centrado $E(X^2)$:

$$m''_X(t=0) = \lambda^{\alpha}.\alpha.(\alpha + 1)(\lambda)^{-\alpha-2}$$

$$m''_X(t=0) = \alpha.(\alpha + 1)(\lambda)^{-2}$$

$$m''_X(t=0) = E(X^2) = \alpha.(\alpha + 1)(\lambda)^{-2}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha.(\alpha + 1)}{(\lambda)^2}; \qquad (2.3.2.3)$$

Reemplazando en la fórmula de varianza $(2.3.2.2)$ y $(2.3.2.3)$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Nos queda:

$$Var(X) = \frac{\alpha.(\alpha+1)}{(\lambda)^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Por lo tanto la desviación estándar es:

$$D.E.(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

$$\sigma_X = D.E.(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

5-2-3-5 PROPIEDAD REPRODUCTIVA DEL MODELO GAMMA

Dadas dos variables aleatorias independientes con distribución Gamma y parámetro de escala λ común,

$X \sim G(\lambda, \alpha_1)$ y $Y \sim G(\lambda, \alpha_2)$

la suma de dichas variables es también una variable aleatoria Gamma con parámetros: el parámetro de escala común y con parámetro de forma la suma de los parámetros de forma de las variables consideradas.

$$X + Y \sim G(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$$

Ejemplo 5-5:

La planta de energía de una determinada ciudad tiene una capacidad diaria de 10 millones de kw/h. El consumo diario de energía eléctrica de esta ciudad, en millones de kw/h. es una variable aleatoria que tiene distribución Gamma con parámetro de forma α=4 y parámetro de escala λ=1/3.

a) Plantee la función de densidad de la variable aleatoria en estudio.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que este abastecimiento sea insuficiente un día determinado?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado el consuma diario de energía se encuentre entre 7 y 9 millones de kw/h?
d) ¿Cuánto debería ser el consumo máximo diario de energía para que este asegurado su abastecimiento en un 90%?
e) ¿Cuál es el consumo promedio diario de la planta de energía?, ¿Con qué desviación estándar?

Solución:

a) Plantee la función de densidad de la variable aleatoria en estudio.

X: “Consumo diario de energía eléctrica de una ciudad en millones de kw/h”

$$X \sim G(\alpha = 3, \lambda = 0{,}6)$$

La función de distribución Gamma es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}; & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Para nuestro ejemplo:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{\Gamma(3)} x^{3-1} e^{-\frac{3}{5}x} = \frac{0.216}{2} x^2 . e^{-0.6x} = 0{,}108x^2 . e^{-0.6x}$$

Luego la función densidad de la variable aleatoria X es:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}108x^2 . e^{-0.6x}; & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que este abastecimiento sea insuficiente un día determinado?
Para que sea insuficiente la demanda debe ser mayor que su capacidad diaria.

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} 0{,}108x^2 . e^{-0.6x} dx = 0{,}06197$$

Resolución con el software estadístico R:

Cuando se trabaja con la distribución gamma en “R”, las sentencias son: $dgamma(x, \alpha, \lambda)$, $pgamma(x, \alpha, \lambda)$ ó $qgamma(q, \alpha, \lambda)$, según si se quiere conocer la función densidad en x o el valor de la función de distribución acumulada en x o un cuantil de la distribución uniforme respectivamente.

Para resolverlo con R, la sentencia es:
> $1 - pgamma(10, 3, 0.6)$
> 0.0619688
Interpretación: la probabilidad de que el abastecimiento sea insuficiente en un día determinado es de 0,0619688.

Podemos utilizar un nuevo comando:
lower.tail: Parámetro booleano, si es TRUE (por defecto), las probabilidades son P[X ≤ x], de lo contrario, P [X > x].
lower.tail= F
lower.tail=TRUE
> $pgamma(x,\ shape, scale,\ lower.tail = F)$

Para nuestro ejemplo:
$> pgamma(10,\ 3, 0.6,\ lower.tail = F).$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado el consuma diario de energía se encuentre entre 7 y 9 millones de kw/h?

$$P(7 < X < 9) = \int_7^9 0.108x^2. e^{-0.6x}dx = 0.1154801$$

Resolución con el software estadístico R:

Para resolverlo con R, la sentencia es:
$> pgamma(9, 3, 0.6) - pgamma(7, 3, 0.6)$
> 0.1154801
Interpretación: la probabilidad de que el consumo diario de energía eléctrica se encuentre entre 7. y 9 millones de kw/h. es de 0,1154801.

d) ¿Cuánto debería ser el consumo máximo diario de energía para que este asegurado su abastecimiento en un 90%?

Nos pide encontrar el cuantil 0,90 entonces:

$$P\left(X \leq x_{0,90}\right) = 0{,}9$$

$$P\left(X \leq x_{0,90}\right) = \int_0^{x_{0,90}} 0{,}108x^2. e^{-0.6x} = 0{,}90$$

$$x_{0,90} = 8.870534 \text{ kw/h}$$

Resolución con el software estadístico R:
///
Para resolverlo con R empleamos la función cuantiles cuya sentencia es:
$> qgamma(q, 3, 0.6)$
$> qgamma(0.9, 3, 0.6)$
> 8.870534
Interpretación: Para asegurar un abastecimiento del 90% el consumo máximo diario de energía debería ser de 8.870534 millones de kw/h

e) ¿Cuál es el consumo promedio diario de la planta de energía?, ¿Con qué desviación estándar?

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

$$\sigma_X = D.E.(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$
$$\sigma_X = D.E.(X) = \frac{\sqrt{3}}{0,6} = 2.40$$

Interpretación: el consumo promedio diario es de 5 millones de kw/h. con una desviación estándar de 2.40 millones de kw/h.

5-2-3-4 CASOS PARTICULARES DEL MODELO GAMMA: MODELO EXPONENCIAL NEGATIVO- MODELO CHI-CUADRADO

En el modelo gamma cuando el parámetro α, toma el valor $\alpha = 1$, obtenemos el modelo exponencial negativo. Modela problemas para tiempo de falla o tiempo de espera.

Cuando el modelo gamma sus parámetros toma los valores $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, obtenemos el modelo denominado chi- cuadrado.

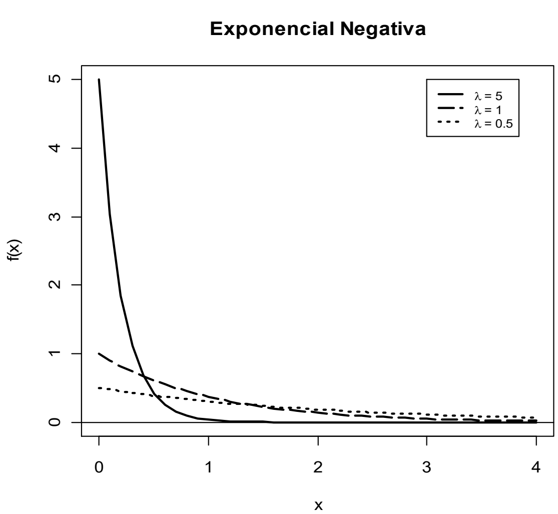
5-2-4 MODELO EXPONENCIAL

Como hemos dicho esta distribución es un caso particular de la distribución Gamma cuando el parámetro $\alpha = 1$. Modela problemas de tiempo- falla.

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución exponencial negativo si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x}; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Con parámetro $\lambda > 0$. Se anota: $X \sim Exponencial\ (\lambda)$

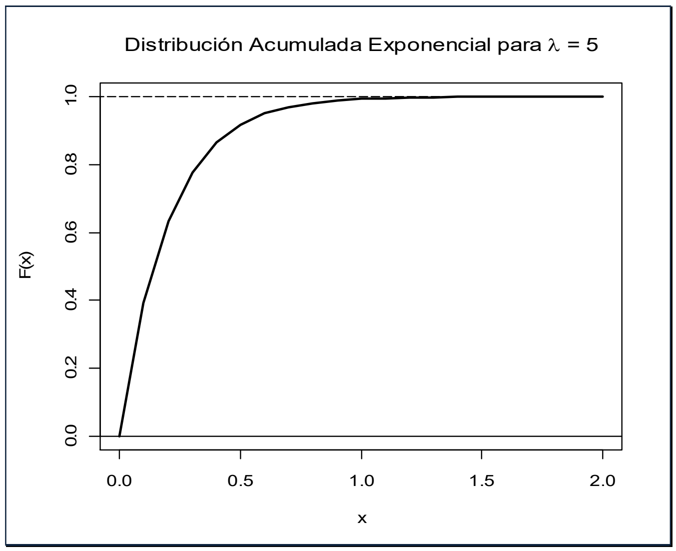


5-2-4-1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

A partir de la función densidad se calcula la función de distribución acumulada obteniendo:

$$\int_0^x \lambda . e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$



5-2-3-1 FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DEL MODELO EXPONENCIAL

A partir de la función generadora de momentos de la distribución gamma, calcularemos la función generadora de momentos de la exponencial reemplazando el valor del parámetro α por el valor de la distribución exponencial, $\alpha = 1$.

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, \qquad f.g.m\ de\ la\ gamma$$

Para $\alpha = 1$ nos queda:

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad donde\ 0 \leq t < \lambda$$

5-2-4-2 ESPERANZA, VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UNA VARIABLE ALEATORIA EXPONENCIAL NEGATIVA

Esperanza de una variable exponencial negativa:

Para calcular la esperanza de una variable exponencial. Consideraremos la esperanza de la distribución Gamma y dado que la distribución exponencial es un caso particular de la Gamma para cuando su parámetro $\alpha = 1$, entonces reemplazaremos α por su valor en la esperanza de la distribución Gamma:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}\ ;\ \ (Esperanza\ D.Gamma)$$

$para\ \alpha = 1\ tenemos$:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\ \ \ (Esperanza\ D.Exponencial)$$

Varianza de una variable exponencial negativa:

De la misma forma que se calculó la esperanza calcularemos la varianza de una variable con distribución exponencial.

La varianza de una variable con una distribución Gamma es:

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$Para\ \alpha = 1\ tenemos$:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}\ \ (Varianza\ D.Exponencial)$$

Por lo tanto la desviación estándar de una variable exponencial negativa es:

$$\sigma_X = D.E.(X) = \frac{1}{\lambda}$$

5-2-3-3 PROPIEDAD REPRODUCTIVA DEL MODELO EXPONENCIAL

Como consecuencia de la propiedad reproductiva de la distribución Gamma es que si tenemos k variables con distribución exponencial independientes con parámetro λ común, la suma de ellas seguirá una distribución Gamma

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim G(\lambda, k)$$

Hemos dado algunas aplicaciones donde se utiliza esta distribución, veremos ahora un ejemplo que utilizaremos mucho en este curso. Esta distribución continua está relacionada con la distribución de Poisson.ya estudiada con las distribuciones discretas.

Consideremos un proceso donde los sucesos ocurren de acuerdo a una distribución de Poisson, entonces si estamos interesados en determinar la distribución probabilística del tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos podemos utilizar el modelo exponencial.

Ejemplo si la llegada de los clientes a una estación de servicios se produce de acuerdo con la distribución de Poisson, entonces si ahora nos interesa estudiar los intervalos de tiempo entre llegadas podremos utilizar el modelo exponencial.

La distribución exponencial tiene el mismo parámetro λ que la distribución de Poisson.

Ejemplo 5-6:

En un centro de servicio de traslados de emergencia en ambulancias, el tiempo entre llamadas sucesivas para el pedido de un traslado de emergencia sigue una distribución exponencial, con un tiempo promedio entre llegadas de llamadas es de 1,25 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 1 hora entre dos llamadas sucesivas?
b) ¿cuál es la probabilidad de esperar entre 1 y 2 horas entre dos llamadas sucesivas?

Respuestas:

X: "Tiempo entre la llegada de llamadas sucesivas para el pedido de un traslado de emergencia"

X ~ Exponencial (λ)

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1{,}25\ horas\ (\ tiempo\ promedio\ entre\ la\ llegadas\ de\ llamadas)$$

$$luego\ \lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\ (llamadas\ /hora)$$

Función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}8.\,e^{-0{,}8x}; & \text{si x} \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 1 hora entre dos llamadas sucesivas?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_0^1 0{,}8.\,e^{-0{,}8x}dx = 1 - 0{,}8.\frac{e^{-0{,}8.x}}{-0{,}8}\Bigg|_0^1 = e^{-0{,}8}$$

$$P(X > 1) = 0{,}4493$$

Resolución con el software estadístico R:

Cuando se trabaja con la distribución exponencial en "R", las sentencias son: $dexp(x,\lambda)$, $pexp(x,\lambda)$ ó $qexp(q,\lambda)$, según si se quiere conocer la función densidad en x o el valor de la función de distribución acumulada en x o un cuantil de la distribución uniforme respectivamente.

Entonces para resolver el ejercicio propuesto con R, la sentencia a utilizar es $pexp(x,\ \lambda)$, como se quiere calcular la probabilidad de mayores a 1, se calcula por complemento:

> $1 - pexp(1, 0.8)$
>0.449329
$P(X > 1) = \underbrace{1 - pexp(1, 0.8)}_{con\ R} = 0,4493$

Interpretación: La probabilidad de esperar más de 1 hora entre dos llamadas sucesivas es de 0,4493.

b) ¿cuál es la probabilidad de esperar entre 1 y 2 horas entre dos llamadas sucesivas?

$$P(1 < X < 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \int_1^2 0{,}8.\,e^{-0{,}8x}dx = 0{,}8.\frac{e^{-0{,}8.x}}{-0{,}8}\bigg|_1^2$$

$$P(1 < X < 2) = -e^{-0{,}8x}\Big|_1^2 = 0{,}2474$$

Resolución con el software estadístico R:

Para resolverlo con R, la sentencia a utilizar es:
> $pexp(2, 0.8) - pexp(1, 0.8)$
> 0.2474324

Interpretación: La probabilidad de esperar entre 1 y 2 horas entre dos llamadas sucesivas es aproximadamente de 0,2474

Ejemplo 5-7:

En el ejemplo 5-6 en vez de estudiar el tiempo entre llamadas para el pedido de un traslado de emergencia, considere la cantidad de llamadas realizadas en un lapso de tiempo dado.

a) Utilice la distribución de Poisson para calcular la probabilidad de que no haya llamadas en una hora.
b) Calcule la probabilidad de que haya dos llamadas en una hora.
c) Calcule la probabilidad de que no haya llamadas en dos horas.

En el ejemplo 5-6 se estudió la variable:
X: "Tiempo entre llamadas sucesivas para el pedido de un traslado de emergencia
Con distribución Exponencial
X ~ Exponencial (λ)

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1{,}25\ horas\ (\ tiempo\ promedio\ entre\ la\ llegadas\ de\ llamadas)$$

$$luego\ \lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\ (llamadas\ /hora)$$

Ahora estudiaremos la variable:
Y: “Número de llamadas para realizar un traslado de emergencia en un tiempo dado.

$$Y \sim Poisson(\lambda)$$

Se observa que ambas distribuciones tienen el mismo parámetro:

$$\lambda = 0{,}8 \; (llamadas\;/hora)$$

a) Utilice la distribución de Poisson para calcular la probabilidad de que no haya llamadas en una hora.

Y: “Número de llamadas para realizar un traslado de emergencia en una hora”.

$$Y \sim Poisson(\lambda = 0{,}8 \; llegadas \; / \; hora)$$

$$P(Y = y) = f_Y(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \quad función\ de\ probabilidad$$

$$P(Y = 0) = f_Y(y = 0) = \frac{e^{-0{,}8}0{,}8^0}{0!} = 0{,}4493$$

Resolución con el software estadístico R:

Para resolverlo con R, la sentencia a utilizar es $dpois(x, \lambda)$:
> dpois(0, 0.8)
> 0.449329

$$P(Y = 0) = f_Y(y = 0) = \underbrace{dpois(0, 0.8)}_{con\ R} = 0{,}449329$$

La probabilidad de no lleguen llamadas en una hora es aproximadamente de 0,4493.

b) Calcule la probabilidad de que haya dos llamadas en una hora.

Y: “Número de llamadas para realizar un traslado de emergencia en una hora”.

$$Y \sim Poisson(\lambda = 0{,}8 \; llegadas \; / \; hora)$$

$$P(Y = y) = f_Y(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$$

$$P(Y = 2) = f_Y(y = 2) = \frac{e^{-0{,}8}0{,}8^2}{2!} = 0{,}1438$$

Resolución con el software estadístico R:

Para resolverlo con R, la sentencia a utilizar es: $dpois(x, \lambda)$
$> dpois(2{,}0.8)$
> 0.1437853

La probabilidad de que lleguen dos llamadas en una hora es aproximadamente 0,1438

c) Calcule la probabilidad de que no haya llamadas en dos horas.

Z: "Número de llamadas para realizar un traslado de emergencia en dos hora".

$$Z \sim Poisson(\lambda = 1{,}6\ llegadas\ /\ 2hora)$$

$$P(Z = z) = f_Z(z) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!}$$

$$P(Z = 0) = f_Z(z = 0) = \frac{e^{-1,6}1{,}6^0}{0!} = 0{,}2019$$

Nota: Observe que el intervalo de tiempo ha cambiado con relación a los ítems anteriores, estamos trabajando en un intervalo de dos horas. Debido a esto el parámetro ha variado.

Resolución con el software estadístico R:

Para resolverlo con R, la sentencia a utilizar es $dpois(x, \lambda)$:

```
> dpois(0,1.6)
> 0.2018965
```

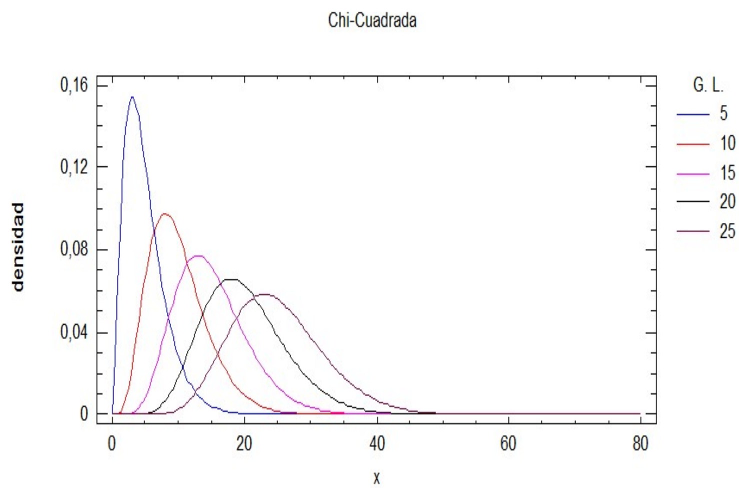
Interpretación: La probabilidad de que no lleguen llamadas en un lapso de dos horas es de aproximadamente 0,2019

5-2-5 MODELO CHI-CUADRADO

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución chi-cuadrado si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x}; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \; 2^{\frac{n}{2}}} \; x^{\frac{n}{2}-1} \; e^{-\frac{x}{2}} \; I_{(0,\infty)}(x)$$



5-2-5-1 ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CHI-CUADRADO

5-10 PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE MODELOS DE DISTRIBUCIÓN CONTINUA

5.1 Represente la función densidad normal para cada uno de los siguientes parámetros:

a) $\mu = 0, 1, 2, -1, -2; \;\; con\, \sigma = 1$

b) $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5; con\, \mu = 0$

c) Describa el significado de ambos parámetros.

5.2 El tiempo que requiere una persona en completar una encuesta es en promedio de 20 minutos con una varianza de 16 minutos cuadrados; se asume que el tiempo requerido para completar una encuesta sigue una distribución Normal. Se pide:

a) Grafique la función densidad y la función de distribución acumulada de la variable en estudio. Utilice el software R.

b) La probabilidad de que una persona requiera entre 18 min. y 25 min. en responder la encuesta. Represente la presente situación en la gráfica de la función densidad.

c) La probabilidad de que requiera menos de 20 min en responder la encuesta. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

d) El porcentaje de personas que requieren más de 24 min. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

e) Por debajo de que valor se encuentran el 25% de los menores tiempos que se requieren para completar la encuesta. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

f) ¿Qué tiempo mínimo requiere el 5% de los que más se demoran en completar la encuesta?

g) Entre que valores se encuentra el 95% de los tiempos requeridos para completar la encuesta alrededor de la media. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

h) Hallar el recorrido intercuartil. Interprételo en términos del problema.

5.3 La venta anual de un medicamento en una determinada farmacia, tiene una distribución normal con media \$850 y desviación estándar \$125.

a) Enuncie la variable aleatoria en estudio. Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada de la variable.

b) El gerente comercial se pregunta:

ba) ¿Cuál es la probabilidad de que la venta anual de dicho medicamente este entre \$700 y 950\$? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

bb) ¿Cuál es la probabilidad de que la venta anual del medicamento sean menor a \$550? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

bc) ¿Cuál es la probabilidad de que la venta anual sean superior a \$900? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

bd) ¿Cuál es la mediana y la moda de la venta anual del medicamento?

c) Entre que valores se encuentra el 95% de la venta anual de dicho medicamento alrededor de la media. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

d) Entre que valores se encuentra el 50% central de la venta anual del medicamento? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

5.4 El consumo medio bimestral por familia de energía eléctrica en una ciudad es de 550 kwh. con una desviación estándar de 82 kwh. Suponiendo que el consumo de energía eléctrica se distribuye normalmente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo bimestral de una familia sea superior a 420 kwh? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.
b) Si una familia consume 380 kwh. bimestralmente, ¿qué porcentaje de familias consume menos? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia consuma bimestralmente entre 320 kwh. y 620 kwh? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.
d) ¿Qué cantidad de kwh. mínima tendría que consumir bimestralmente una familia para pertenecer al 5% de las que más consumen? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad. Marque el cuantil correspondiente.
e) El gobierno nacional resuelve que el 30% de las familias que menos consumen recibirán subsidio, ¿cuál es el valor máximo de kwh. que puede consumir una familia bimestralmente para recibir subsidio? Represente la situación correspondiente en la gráfica de la función de densidad. Marque el cuantil correspondiente.
f) ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo bimestral de una familia sea superior a 420 kwh. en más de 3 bimestres de los 6 que tiene un año?, suponga independencia bimestral. (Ayuda: enuncie la variable en estudio, indique el modelo de probabilidad que refleja la situación, plantee los parámetros de la distribución)

Rtas:
$a)\ 0{,}9436; b)\ 0{,}0190;\ c) 0{,}8008; d) x_{0,95} = 684{,}88;\ e) x_{0,30} = 506{,}99; f)\ 0{,}9968.$

5.5 El nuevo sistema computarizado implementado por la empresa pública de servicios postales ocasiona problemas de retraso en el procesamiento de las encomiendas. Según el departamento de informática hoy en día, el 25% de las encomiendas no han sido distribuidas en los 15 días subsiguientes de haberlas recibido. Considere que el tiempo requerido por este organismo para entregar una encomienda está distribuido en forma normal con una desviación de 3 días.

a) Enuncie la variable en estudio, su distribución y sus parámetros.
b) Calcule el tiempo promedio requerido para entregar una encomienda.
c) Grafique la función de densidad de la variable bajo estudio.
d) Determine la probabilidad de que el tiempo necesario para la entrega de una encomienda sea de más de 13 días. Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.
e) ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para la entrega de una encomienda este entre 12 y 15 días.

f) Entre que cuantiles se encuentra el 90% de la población alrededor de la media. Represente la situación en la gráfica de la función de densidad. Marque los cuantiles correspondientes.

g) Bajo que cuantil estará el 25% de los tiempos mínimos requeridos para entregar una encomienda. Represente la situación planteada en la gráfica de la función densidad. Marque el cuantil correspondiente.

Rtas: $b)\ \mu = 12{,}68;\ d)\ 0{,}36944;\ e)\ 0{,}34134;\ f) x_{0,05} = 7{,}0654;\ x_{0,95} = 16{,}9346;$ $g)\ x_{0,25} = 9{,}9765.$

5.6 Se supone que la demanda mensual de smartphones en una compañía de telefonía móvil es aproximadamente normal, con una demanda media de 82 smartphones y una desviación estándar de 1,8 smartphones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda de smartphones supere los 84, en un mes particular?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda mensual sea de hasta 70 smartphones?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda mensual se encuentre entre 80 y 85 smartphones?

d) La política de la empresa es que la probabilidad de desabastecimiento sea aproximadamente del 2% ¿Cuántos smartphones se deben tener en stock para alcanzar éste objetivo?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda sea superior a 84 smartphones durante exactamente 3 meses en el primer semestre del año? (Enuncie la variable en estudio, plantee la distribución de la variable y sus parámetros)

f) Calcule la probabilidad de que la demanda sea superior a 84 smartphones en por lo menos 3 meses en el primer semestre del año.

g) Calcule el número esperado de meses en que se espera que la demanda de smartphones sea superior a 84, en el primer semestre del año.

5.7 El ancho de una ranura fabricada en aluminio esta normalmente distribuida con $\mu = 0{,}9\ cm\ y\ \sigma = 0{,}0030\ cm.$ Los límites de especificaciones están dados por $0{,}9 \pm 0{,}0050.$

a) ¿Qué porcentaje de piezas fabricadas serán defectuosas?

b) ¿Cuál es el valor máximo permitido de desviación estándar de forma de no admitir más de 1 de cada 100 unidades sean defectuosas cuando se distribuye normal con $\mu = 0{,}9\ cm\ y\ \sigma$?

Rta: a) $a)\ 9{,}5\%;\ \ b)\ \sigma = 0{,}0019\ cm.$

5.8 La vida media de un motor de combustión interna es de 150.000 km. con una desviación estándar de 30.000 km. La vida de un motor de combustión interna puede considerarse como una variable aleatoria normal. El fabricante garantiza la vida útil del motor, pero desea que no más del 12% de los motores fallen antes de la expiración de la garantía. ¿Durante cuántos km debería ser válida la garantía? Represente la situación en la gráfica de la función densidad de la variable aleatoria en estudio.

Rta: $114.750{,}4\ km.$

5.9 Una empresa impermeabilizaciones que ofrece soluciones de impermeabilización desarrolladas a medida según las complejidades específicas de su techo, desaprovecha cierta cantidad de material. La empresa encontró que el material de impermeabilización desaprovechado sigue una distribución normal con media 4,1 % y desviación estándar 0,6% de un trabajo a otro.

a) En un determinado trabajo de impermeabilizar, ¿cuál es la probabilidad de que el desperdicio del material exceda del 5%?

b) Si la cantidad necesaria para un determinado trabajo de impermeabilización de un techo es de 470 m. y se dispone de 500 m. de material. ¿Cuál es la probabilidad de que el material disponible sea suficiente?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un determinado trabajador exceda el 5% de desperdicio de material en 8 de cada 10 trabajos de impermeabilización que le corresponde realizar, considerando independencia entre ellos? (Ayuda: enuncie la variable aleatoria en estudio, plantee su distribución y parámetros)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador del ítem c) exceda el 5% de desperdicio de material en al menos 8 de los 10 trabajos correspondientes?

Rtas: $a)\ 0{,}06681; b)\ el\ material\ es\ suficiente;$
$c)\ f(8) = 1{,}55 * 10^{-8}; d) P(Y \geq 8) = 1{,}58 * 10^{-8}$.

5.8 La tasa de ingresos media por hora para administrativos financieros en una determinada región es de $32.62 y la desviación estándar es $2,32. Suponga que estas tasas de ingresos están distribuidas normalmente.

a) Representa la función densidad de la variable aleatoria en estudio.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un administrativo financiero tenga un ingreso entre $30 y $ 35 por hora?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tasa de ingreso por hora de un administrativo financiero sea menos de $28 por hora?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que un administrativo financiero tenga un ingreso de $ 32,62 por hora?
h) ¿Cuál es el ingreso mínimo que deberá tener un administrativo financiero para pertenecer al 10% de los administrativos que más ganan? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.
i) ¿Cuál es el ingreso máximo que deberá tener para pertenecer al 25% de los que menos ganan? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.
j) ¿Entre que valores de ingresos se encuentran el 50% central de la distribución? Represente la situación en la gráfica de la función de densidad.

5.9 El tiempo necesario para realizar una evaluación integradora escrita en un determinado curso de Estadística Aplicada en una Universidad Nacional de Mendoza, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media de 80 minutos y con desviación estándar de 10 minutos.

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que realice el examen en una hora o menos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante termine el examen en más de 60 minutos pero en menos de 75 minutos?
c) Sabiendo que un alumno después de transcurrido una hora no ha terminado su examen, ¿cuál es la probabilidad que lo termine antes de los 90 minutos?

d) Suponga que en la clase hay 45 alumnos y que el tiempo para resolver el examen es de 90 minutos. ¿Cuántos estudiantes se espera que no terminen el examen a tiempo?
Rta: $a)\ F(60) = 0{,}02275; b)0{,}28579; c)0{,}83765; d)\ 7{,}1395 \cong 8\ estudiantes.$

5.10 El voltaje medido en un circuito eléctrico tiene una distribución normal con media 120 voltios y desviación estándar de 11 voltios.

a) Si se toma una medida del voltaje del circuito eléctrico, ¿cuál es la probabilidad de que mida entre 110v. y 130 v.?
b) Si se toma una medida del voltaje del circuito eléctrico, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 130 v.?
c) Si se toman 3 medidas independientes del voltaje, ¿cuál es la probabilidad de que las tres medidas estén entre 110v. y 130 v.?
d) Si se toman 3 medidas independientes del voltaje, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 midan entre 110v. y 130 v.?
Rtas: $a)\ 0{,}6366979; b)\ 0{,}18165; c) f(3) = 0{,}25811; d)0{,}699938$

5.11 La variación de los diámetros de los tornillos producidos por una máquina industrial es una variable aleatoria normal con media 2 cm. y desviación estándar de 0,1 cm. Otra máquina industrial produce tuercas, la variación de los diámetros de los agujeros de las tuercas siguen una distribución normal con una media de 2,02 cm. y una desviación típica de 0,08 cm. Ambas máquinas son independientes entre sí. Un tornillo y una tuerca ajustarán si el tornillo calza en la tuerca y el juego entre ellos no es mayor a 0,15 cm.

a) Si se selecciona al azar un tornillo y una tuerca, es decir un par, ¿Cuál es la probabilidad que ajusten?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que de cuatro pares de tornillos y tuercas existan por lo menos dos pares que ajusten?
c) De los cuatro pares de tornillos y tuercas cuanto pares se espera que ajusten?, ¿con que desviación estándar?
Rtas: $a)p = 0.40703; b)p = 0{,}53691; c)E(Z) = 1{,}62812; DE(Z) = 0{,}77005$

5.12 Un caño cilíndrico se forma conectando tres caños de longitud $L_1,\ L_2\ y\ L_3$, cada uno fabricada en forma independiente por distintas máquinas en empresas diferentes. La longitud del primer caño L_1, tiene una distribución normal con media 15 m. y desviación estándar 0,3 m. La longitud del segundo caño L_2, tiene distribución normal con media 28 m. y desviación estándar 0.6, igualmente la longitud del tercer caño L_3, tiene distribución normal con media 23 m. y desviación estándar 0.5 m. Las tres secciones se unen superponiéndose en 0,8 m. en cada unión. Suponga que el caño se puede utilizar en la construcción de las cañerías de desagüe de efluentes en una industria si su longitud total esta entre 63,7 y 65,3 m. ¿Cuál es la probabilidad de que el caño se utilice en esta industria?
Rta: 0.6575787

5.13 Los ensayos de fatiga han demostrado que los diámetros de los ejes de las peleteadoras que disminuye por debajo de los 4 cm fallan rápidamente. La producción de piezas se realiza mediante el mecanizado de ejes con un torno de control numérico. El diámetro medio de los ejes se distribuye en forma normal y desviación 0,02 cm.

a) El encargado de producción programa el torno para un valor medio de 4,05 cm. Calcule la probabilidad de obtener un eje de la peleteadora de 4,0 cm o menos. Determine si la prevención tomada es suficiente o no.

b) Si se desea obtener como máximo un 5% de defectuosos, en qué valor medio programaría el torno, si fuera el encargado de producción?

Rtas: $a)\ p = 0{,}00261; La\ prevención\ tomada\ es\ suficiente;\ \ b)\ \mu = 4{,}0329$

5.14 Se regula una máquina expendedora de bebidas refrescantes para que sirva en promedio 150 ml por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida expedida se distribuye en forma normal con una desviación estándar de 10 ml.

a) ¿Qué proporción de vasos contendrán más de 170 ml.?
b) ¿Qué proporción de vasos contendrán entre 120 ml. y 160 ml. de bebidas refrescantes?
c) Si los vasos utilizados en la máquina tiene una capacidad de 180 ml. ¿Cuántos vasos se derramarán al servir los próximas 500 pedidos?
d) ¿Por debajo de que valor obtendremos el 25% de los vasos menos llenos?
e) ¿Qué cantidad de bebida tendrán el 95% de los vasos alrededor de la media?
f) ¿Cuál es el valor mínimo que deberá tener el 5% de los vasos que más contenido de bebida contienen?

5.15 El consumo medido en pesos de una familia en cajas de cereales es una variable aleatoria continua con distribución uniforme, con esperanza \$65 y varianza igual a 1008.333 pesos^2.

a) Encuentre los parámetros de la distribución uniforme.
b) Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria en estudio. Grafíquela.
c) Encuentre y grafique la función de distribución acumulada de la variable aleatoria en estudio.
d) Determine la probabilidad de que dicho consumo este comprendido entre \$60 y \$80. Represente la situación en la gráfica de la función densidad.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo sea superior a \$ 75? Represente la situación en la gráfica de la función densidad.

Rtas: $a)\ a = 10; b = 120; b)\ f(x) = \frac{1}{110}\ ;\ \ si\ 10 < x < 120;$

$$c)\ F(x) = \frac{1}{110}(x - 10);\ \ si\ \ 10 < x < 120\ ;\ d)\ \ 0{,}1818;\ \ e)\ 0{,}4091$$

5.16 En una empresa de producción de detergente líquido, el llenado y rotulado de las botellas es un proceso automatizado. Las etiquetas de las botellas indica que el contenido es de $150\ cm^3$ por botella. El contenido de las botellas de detergente se distribuye en forma uniforme de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} & para\ 100 \le x \le 200 \\ 0 & para\ cualquier\ otro\ valor \end{cases}$$

a) Enuncie la variable en estudio, su distribución y sus parámetros.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido de una botella de detergente esté entre $125\ \mathrm{cm}^3$ y $150\ \mathrm{cm}^3$?

c) ¿Cuál es la probabilidad de qué elijamos una botella al azar y su contenido sea mayor de $150\ \mathrm{cm}^3$?

d) ¿Cuál es la probabilidad de qué el contenido de una botella sea menor de $130\ \mathrm{cm}^3$?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella contenga exactamente $180\ \mathrm{cm}^3$?

f) En el control de calidad se acepta que una botella contenga lo indicado en la etiqueta más o menos $28\ \mathrm{cm}^3$, es decir $150 \pm 28\ \mathrm{cm}^3$. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella de detergente no satisfaga estos estándares de calidad?

g) ¿Qué contenido medio tendrán las botellas de detergente?, ¿Con que desviación estándar?

Rtas: $b)\ 0{,}25;\ c)\ 0{,}5;\ d)\ 0{,}3;\ e)\ 0;\ f)\ 0{,}44;$
$g)\ E(X) = 150; Var(X) = 833{,}33;\ DE(X) = 28{,}87.$

5.17 Los pesos de las personas de una población se distribuyen normalmente con media 72 kg. Y desviación típica o estándar 6 kg. De una población de 200 personas. ¿Cuántas personas se espera que tengan un peso entre 70 kg. y 74 kg.?
Rta: E(X)=

5.18 En una ciudad costera se estima que las temperaturas máximas en el mes de enero sigue una distribución normal con $\mu = 23℃$ y $\sigma = 4\ ℃$. Calcular el número de días del mes en que se espera alcanzar máximas entre $21℃\ y\ 25℃$.
Rta: E(X)=10,41 días; con p=0,34688

5.19 Probar que si $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2), X_2 \sim N(\mu, \sigma^2),\ además\ X_1 y\ X_2$ son variables aleatorias independientes entonces $X_1 + X_2 \sim N\ (2\ \mu, 2\sigma^2)$

5.20 Generalice el ejercicio anterior para n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

5.21 Demuestre que si X es una variable aleatoria con una distribución F de Fisher-Snedecor con m y n grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente, entonces la variable aleatoria Y recíproca a X, es decir $Y = 1/X$ se distribuye también como una F de Fisher-Snedecor con n, m grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente.

5.22 Si $X_1, X_2, \ldots X_n$ son n variables aleatorias independientes que tienen distribuciones Chi-cuadrada con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ grados de libertad respectivamente, entonces demuestre que la variable aleatoria suma $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; tiene distribución Chi-cuadrada con $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ grados de libertad.

5.23 Se quiere comprar un terreno de 200 m^2 y se conoce que también hay otros compradores interesados. Las ofertas realizadas por el terreno es una variable aleatoria que está uniformemente distribuida entre 100.000 a 150.000 dólares.

a. Si un comprador ofrece hasta 120.000 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que su oferta sea aceptada?
b. Si un comprador ofrece más de 140.000 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que su oferta sea aceptada?
c. ¿Cuánto se espera que se oferte en promedio, con que desviación estándar?

5.24 La concentración de cloro combinado residual en el agua potable se encuentra distribuida en forma uniforme en el intervalo de 0 a 3 partes por millón. Si se considera que la concentración de cloro combinado residual no debe superar las 2 ppm. Determine:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra, la concentración de esta sea tóxica?
b) Calcule la concentración media y su desviación estándar.
c) La probabilidad de que la concentración sea exactamente su media.

5.25 Se garantiza el tiempo de duración de una lámpara led como el triple del tiempo que dura una lámpara de bajo consumo. El tiempo de duración de la lámpara led está distribuido en forma exponencial con un promedio de 10.000 horas.

a. Plantee la función de densidad de la variable aleatoria en estudio.
b. Encuentre la función de distribución acumulada.
c. Hallar la probabilidad de que la lámpara dure por lo menos 15.000 hs.
d. Halle la probabilidad de que dure entre 12.000 hs. y 16.000 hs.
e. Encuentre el cuantil 0,95 e interprete.
f. ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara led dure más de 12.000 hs. si se sabe que sigue funcionando después de las 10.000 hs?

5.26 Para cierta prueba de conocimiento la calificación obtenida por los alumnos se distribuye en forma normal con media 60 puntos y con un desvío de 6 puntos.

a) Se desea aprobar al 75% de los alumnos. ¿Cuál es la calificación mínima aprobatoria?
b) ¿Qué porcentaje de las calificaciones se encuentran entre 50 y 70 puntos?

5.27 Si el espesor de cierto tipo de aros tiene una distribución normal con media 1.96 mm. y desviación estándar de 0,12 mm. ¿Cuántos aros de una producción de 1000 tendrán un espesor entre 1,8 y 2,1 mm?