PRÁCTICO Nº 6: *ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS*

OBJETIVO: *Estimar parámetros poblacionales usando métodos estadísticos.*

1) Suponga que se quiere determinar la cantidad correcta de pintura que contienen los envases de 1 litro compradas a un conocido fabricante local. Por las especificaciones del productor se sabe que la desviación estándar de la cantidad de pintura es igual a 0,025 litros. Al seleccionar una muestra de 49 latas de las mismas características, el contenido promedio de pintura resultó ser igual a 0,996 litros.

a) ¿Es aceptable suponer que el contenido medio de pintura por lata tendría una distribución normal?
b) Estime el contenido real de la población de pintura en latas de un litro, mediante un intervalo de confianza del 99%.
c) Con base en estos resultados ¿es posible asegurar que el productor envasa menos de un litro en tales latas? ¿Por qué?
d) ¿Con qué grado de confianza podrá decirse que el contenido medio de pintura es de $0,996 \pm 0,005$?

Para resolver este ejercicio vamos a comenzar resolviendo y respondiendo ciertas situaciones y preguntas. Los iremos guiando para que quede planteada en forma correcta y completa una estimación de parámetros.
Marque con una X la opción correcta:
1.1) A partir de la situación problemática planteada es posible definir la variable en estudio como:
1) X: “Cantidad de latas de pintura que envasa el productor”.
2) X: “Volumen de las latas de pintura”.
3) X: “Contenido de pintura en los envases de un litro”.
4) Ninguna de las anteriores. La variable en estudio es ………………………………………………………………………………………

1.2) Según la información del enunciado, la variable en estudio, X:
1) Se distribuye normalmente.
2) No se sabe cuál es la distribución de la variable.
3) Sigue una distribución que es Binomial.
4) Ninguna de las anteriores. La distribución de la variable es ………………………………………………………………………………………..

1.3) La variable en estudio es:
1) Cuantitativa que se mide en escala ordinal.
2) Cualitativa que se mide en escala de razón.
3) Cuantitativa que se mide en escala de intervalos.
4) Cuantitativa que se mide en escala de razón.

1.4) La media muestral:
1) Sigue una distribución normal porque la variable que se estudia en la población está distribuida normalmente.
2) Sigue una distribución normal, porque para el tamaño de muestra que se ha seleccionado, se puede aplicar el teorema del límite central.
3) Con la información disponible en el enunciado del problema, no se puede saber cuál es la distribución de la media muestral.
4) Ninguna de las anteriores.

De esta forma estamos en condiciones de responder el ítem a) ¿Es aceptable suponer que el contenido medio de pintura por lata tendría una distribución normal?..

1.5) En relación a la distribución de la media muestral:

1) La media de la variable en estudio, X, coincide con la media de las medias de la muestras, $\overline{X}$.

2) La varianza de la media muestral, es n veces más pequeña que la varianza de la variable que se estudia en la población de la cual proviene la muestra.

3) Todas las anteriores.

1.6) Para denotar la distribución de la media muestral puede utilizarse la siguiente notación:

1) $\overline{X} \rightarrow$ Normal ($\mu_{\overline{X}} = \mu$; $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$)
2) $\overline{X} \rightarrow$ Normal ($\mu_{\overline{X}} = \mu$; $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/\sqrt{n}$)
3) $\overline{X} \rightarrow$ Normal ($\mu_{\overline{X}} = \overline{X}$; $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$)
4) $\overline{X} \rightarrow$ Normal ($\mu_{\overline{X}} = \overline{X}$; $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$)

1.7) De acuerdo a la información del enunciado, los valores numéricos asociados a la notación empleada, son:

1) $\bar{x} = 0{,}996$
2) $\sigma_x = 0{,}025$
3) $\sigma_{\bar{x}} = (0{,}025 / \sqrt{64}) = 0{,}0031$
4) Todas las anteriores.

Para poder responder el ítem b) Estime el contenido real de la población de pintura en latas de un litro, mediante un intervalo de confianza del 99%, plantearemos lo siguiente:

1.8) Para obtener una estimación por intervalo de la media de la población de las latas de pintura de un litro, la fórmula que corresponde aplicar es:

1) $\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n} < \mu_x < \bar{x} - z_{\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n}$
2) $\bar{x} - t_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n} < \mu_x < \bar{x} - t_{\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n}$
3) $\bar{x} - t_{1-\alpha/2}\ S_x / \sqrt{n} < \mu_x < \bar{x} - t_{\alpha/2}\ S_x / \sqrt{n}$
4) Cualquiera de las anteriores

1.9) Los valores que deben reemplazarse en la fórmula para calcular la estimación:

1) $z_{\alpha/2} = -2{,}58$; $\sigma_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 0{,}996$
2) $t_{\alpha/2} = -2{,}68$; $\sigma_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 0{,}996$
3) $z_{\alpha/2} = -2{,}58$; $S_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 0{,}996$
4) $z_{\alpha/2} = -2{,}58$; $\sigma_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 1$
5) $t_{\alpha/2} = -2{,}68$; $S_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 0{,}996$
6) $t_{\alpha/2} = -2{,}68$; $\sigma_x = 0{,}025$; $\bar{x} = 1$

1.10) Para un nivel de confianza del 99%, se debe concluir que:

1) El límite inferior del intervalo de confianza es igual a 0,9868 litros.
2) El límite superior del intervalo de confianza es igual a 1,0052 litros.
3) El error máximo de estimación es igual a 0,0092 litros.
4) Todas las anteriores.

1.11) Si el intervalo de confianza obtenido, para un nivel de confianza del 99%, fuera el siguiente: (0,9868; 1,0052), se debe interpretar que:

1) El 99% de las latas de pinturas tienen entre 0,9868 y 1,0052 litros.
2) El contenido de pintura promedio en la muestra de 49 latas, se encuentra entre 0,9868 y 1,0052 litros.
3) Con una confianza del 99%, se concluye que el intervalo (0,9868; 1,0052) incluye al verdadero valor del contenido medio de pintura de la población de latas de un litro.
4) Ninguna de las anteriores.

1.12) Para poder responder el ítem c) *Con base en estos resultados ¿es posible asegurar que el productor envasa menos de un litro en tales latas? ¿Por qué? (Analizar y concluir teniendo en cuenta el intervalo de confianza obtenido)*

La respuesta para el ítem c) debe ser:
1) Con un 99% de confianza, se debe informar que el contenido medio de las latas de un litro, es un litro.
2) Con un 99% de confianza, se debe informar que el contenido medio de las latas de un litro, NO es inferior a un litro.
3) Con un 99% de confianza y en base a los resultados obtenidos en la muestra, se debe informar que no hay evidencia suficiente como para concluir que el contenido promedio de las latas de un litro, es menor de un litro.
4) Cualquiera de las anteriores.

1.13) Para responder el ítem d) ¿Con qué grado de confianza podrá decirse que el contenido medio de pintura es de 0,996 ± 0,005?
En el caso que nos ocupa, el error de la estimación viene dado por:
1) $e = \sigma_x / \sqrt{n}$
2) $e = t_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n}$
3) $e = t_{1-\alpha/2}\ S_x / \sqrt{n}$
4) $e = z_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n}$

1.14) De esta forma el valor del cuantil será de 1,4, por lo que en el R deberemos ingresar la siguiente notación para obtener el grado de confianza buscado.
1) pt(1.4,48)-pt(1.4,48)
2) pnorm(1.4,0,1)
3) pnorm(1.4,0,1)-pnorm(-1.4,0,1)
4) 1-pnorm(1.4,0,1)

1.15) Cuando se limita el error máximo de la estimación al valor 0,005 litros, el nivel de confianza que corresponderá a los datos de la muestra, es igual a:
1) 0,8321
2) 0,9192
3) 0,8385
4) Ninguna de las anteriores. El valor correcto es…………………………………….

1.16) Si el error de la estimación es igual a 0,005 litros, debe interpretarse que:
1) Entre el valor real del contenido medio de la población de latas de pintura y el valor de la estimación puntual obtenido en la muestra, no puede haber una diferencia superior a los 0,005 litros.
2) Entre el contenido promedio de la población de latas y el contenido promedio de las latas de la muestra, hay una diferencia de 0,005 litros.
3) Aproximadamente, cinco de cada mil latas tienen menos pintura que el valor indicado en el envase (un litro).

4) Con una confianza del 83,85% es posible concluir que, la diferencia entre el valor de la estimación puntual (0,996 litros) y el verdadero valor del contenido medio de las latas de pintura de un litro, no excede el valor de 0,005 litros.

5) Ninguna de las anteriores.

2) Se estudia el peso de cierto producto que se vende en bolsas. Es aceptable suponer que los pesos están distribuidos de manera normal, y se conoce de experiencias previas que la desviación estándar de la población es de 2,6 g. Los resultados obtenidos de la muestra ensayada, en gramos, son los siguientes: 452 - 450 - 454 - 450 - 456 - 450 - 456 - 450 - 452 – 450

La variable en estudio es:
X: "……………………………………………………………………………………."
La distribución de la variable en estudio:
X ~ ……………………... (………………………)
Parámetros conocidos:
……………………………………………………..

a) Realice una estimación puntual del peso medio de las bolsas de la población. Complete la siguiente proposición de forma que quede verdadera.
Media muestral: ………..

b) Estime mediante un intervalo de confianza del 95% el peso medio de las bolsas de la población. Complete las siguientes proposiciones de forma que queden verdaderas.

Corresponde aplicar la fórmula del intervalo de confianza para la ………….. (μ / σ) con σ ………………………..(*conocida/desconocida*).
Siendo la fórmula la siguiente:

……………………………………………………………………………………

El nivel de confianza es de………, siendo α = ………., por lo que α/2 =………..; por lo tanto $z_{\alpha/2}$ = …………..

El intervalo de confianza es………………………………………………..

Y debe interpretarse como, marcando la opción que interpreta correctamente el intervalo de confianza encontrado:

1) El resultado obtenido permite afirmar con certeza que el verdadero peso medio de cierto producto está comprendido entre 450,39 y 453,61 gramos.

2) El verdadero peso medio de cierto producto coincide con el punto medio del intervalo de confianza obtenido, con un 95% de confianza.

3) Con un 95% de confianza, se debe concluir que el intervalo (450,39: 453,61) contiene a la verdadera media del peso de cierto producto.

4) Cualquiera de las anteriores.

c) ¿Qué podemos asegurar con una probabilidad de 0,95 sobre la medida del error máximo de la estimación?
Corresponde aplicar:

$e = z_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / \sqrt{n}$

Completar los datos necesarios, donde:
$z_{\alpha/2}$ = ……………
σ_x = …………….
n = …………….
Realizar los cálculos correspondientes, y el error de estimación es …………gramos.

Y debe interpretarse del siguiente modo, marcando la opción correcta:
1) La diferencia entre el valor real del peso medio de cierto producto y el valor observado en la muestra, nunca excederá de 1,61 gramos.
2) Si se utiliza el valor 452 gramos (media muestral) como estimación del verdadero valor del peso de cierto producto, con una confianza del 95%, el error de estimación no sobrepasará de 1,61 gramos.
3) Entre el valor real del peso medio de cierto producto y el valor observado en la muestra, hay una diferencia de 1,61 gramos.
4) Cualquiera de las anteriores.

d) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para poder asegurar con una confianza del 99% que el error máximo de la estimación sea de 1 gramo?
Corresponde aplicar:
$n=(z_{1-\alpha/2}\ \sigma_x / e)^2$

Completar con los datos necesarios, donde:
$z_{\alpha/2}$ = ……………
σ_x = …………….
e = ……………..
Realizar las cálculos correspondientes, y el tamaño de muestra debería ser de ………………………

Y debe interpretarse del siguiente modo, marcando la opción correcta:
1) Para encontrar el verdadero peso medio de cierto producto, se deben ensayar 45 productos.
2) Si se ensayan 45 productos, el valor del peso medio muestral puede utilizarse como una estimación del valor del peso medio problacional de cierto producto.
3) Si se utiliza el valor 452 gramos (media muestral), como una estimación del verdadero peso medio de cierto producto, podemos tener una confianza del 99%, de que el error de estimación no excederá de 1 gramo, cuando el tamaño de la muestra de ensayos sea 45.
4) Cualquiera de las anteriores.

e) Grafique el error máximo probable de la media para un nivel de confianza del 95%, haciendo variar el tamaño de la muestra entre 10 y 155 unidades experimentales. Saque conclusiones.

3) Se llevan a cabo pruebas de resistencia a la tracción sobre dos tipos de cables. De experiencias previas se sabe que la desviación estándar de las resistencias para cada uno de los cables es conocida y que es posible suponer que las resistencias a la tracción de ambas poblaciones son normales e independientes. Las pruebas realizadas aportaron los siguientes datos:

Cable tipo	Tamaño de la muestra	Resistencia media muestral (kg/mm^2)	Desviación estándar de la población (kg/mm^2)
1	10	87,6	1,0
2	12	74,5	1,5

a) Construya un intervalo de confianza del 90% para la verdadera diferencia de la resistencia a la tracción de los cables. Saque conclusiones.
b) Si se adoptan tamaños de muestras iguales, determine el tamaño requerido de la muestra de modo que se tenga una confianza del 90% de que el error de la estimación sea menor que 0,50 kg.

4) El fabricante de turbinas hidráulicas considera al tiempo que transcurre hasta que es necesario reparar la máquina por problemas de cavitación en el rotor de la misma como una variable aleatoria con media 5000 horas y desviación estándar de 40 horas. A este tiempo lo llama vida eficaz y acepta que la distribución de la vida eficaz es muy próxima a la normal.
El fabricante introduce una mejora en el proceso de fabricación del rotor que aumenta el tiempo de la vida eficaz promedio a 5050 horas y disminuye la desviación estándar a 30 horas.
Para comprobar lo que afirma el fabricante, se toma del proceso "antiguo" una muestra aleatoria de tamaño 16, de la que se obtiene una media muestral de 4998 horas y una desviación estándar de 41 horas; de la muestra aleatoria del proceso "mejorado" de tamaño 25, se obtiene una media de 5052 horas y una desviación estándar de 29 horas. Construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera diferencia de la vida eficaz, si los procesos "antiguo" y "mejorado" pueden considerarse como poblaciones independientes.

5) Se desea vender esferas para utilizar en un mecanismo de precisión. Las especificaciones del producto, en cuanto al diámetro de tales esferas, indican que no deben superar las 4,40 pulgadas. De 9 mediciones realizadas se tienen los siguientes datos:

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Diámetro (pulgadas)	4,32	4,39	4,40	4,44	4,34	4,36	4,37	4,42	4,38

Suponiendo normalidad:
a) Halle un intervalo de confianza del 99% para el diámetro medio de las esferas.
Defina la variable en estudio:
X: "……………………………………………………………………………………"
X ~ …………………(…………………………)
Los datos de la muestra son:
$\bar{x}$ =
s =
n =

La fórmula que corresponde aplicar es:

……………………………………………………………………………………..

Queda para el alumno la resolución y aplicación de la fórmula.
Ahora plantearemos el ejercicio utilizando el software R.
Para ello, debemos realizar los siguientes pasos:

```
diametro=c(4.32,4.39,4.4,4.44,4.34,4.36,4.37,4.42,4.38)
t.test(diámetro,conf.level=0.99)
```

Y lo que se obtiene es lo siguiente:

```
One Sample t-test

data:  diametro
t = 348.09, df = 8, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
99 percent confidence interval:
 4.337779 4.422221
sample estimates:
mean of x
    4.38
```

El intervalo obtenido es …………………………………………………………………..
Y podemos concluir que: ………………………………..
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………..

b) ¿Qué se podrá decir, con una confianza del 99%, sobre la magnitud posible del error si se utiliza a la media de la muestra de estas 9 observaciones como una estimación de la media de la población?
$e = t_{1-\alpha/2} \; S_x / \sqrt{n}$
Los datos que tenemos son s_x y n.
Para poder obtener $t_{1-\alpha/2}$ debemos ingresar la siguiente notación en el software R:
qt(0.995,8)
Podemos concluir que: ……………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………..

c) Sin variar la magnitud del error máximo probable, ¿cuál sería el tamaño de la muestra para un nivel de confianza del 90%?
$n = (t_{1-\alpha/2} \; S_x^2) / e^2$
Los datos que tenemos son s_x y e (recientemente calculado en el ítem b)).
Para poder obtener $t_{1-\alpha/2}$ debemos ingresar la siguiente notación en el software R:
qt(0.95,8)
Podemos concluir que: ……………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………..

d) Construya un intervalo con un nivel de confianza del 95% para la varianza poblacional.

La fórmula que corresponde aplicar es:

……………………………………………………………………………………..

Para obtener $\chi^2_{0,025}$ y $\chi^2_{0,975}$ debemos ingresar la siguiente notación en R:
qchisq(0.025,8) y qchisq(0.975,8)
Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene el intervalo para la varianza poblacional: …………………………………………..
Podemos concluir que: ……………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

6) Aceptando que la distribución del consumo anual de energía eléctrica del tipo residencial de los clientes de una empresa distribuidora del servicio es aproximadamente normal, y que la medición de 31 clientes seleccionados aleatoriamente dio los siguientes resultados:

Consumo medio anual, en miles de MWh/año, de clientes con tarifa residencial

490,9	435,3	580,6	510,1	600,4	495,1	520,2	501,5
483,2	520,9	460,1	500,8	490,7	490,7	499,6	498,3
510,6	473,4	474,9	490,1	410,2	488,6	500,5	505,4
491,0	421,8	490,6	439,9	506,4	490,2	475,5	

a) Estime mediante un intervalo de confianza del 95%, el consumo medio anual de los usuarios residenciales del servicio.
b) Estime mediante un intervalo de confianza del 99%, la varianza del consumo medio anual de los clientes con tarifa residencial.

7) Los resultados dados por una A.R.T. sobre el análisis del peso de los empleados que trabajan en las oficinas y de los empleados que trabajan en la planta de producción. Al tomar una muestra del peso de diez empleados que trabajan en las oficinas, se encontró que el peso promedio es 90 kg, con una desviación estándar muestral de 5 kg. Los resultados obtenidos en la muestra de quince empleados que trabajan en la planta de producción fueron 87 y 4 kg, para el peso promedio y la desviación estándar muestral respectivamente. Suponiendo que el peso de los empleados está distribuido de manera normal, encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las medias de las poblaciones de los dos grupos de empleados. Por otra parte, supóngase que las dos poblaciones normales tienen la misma desviación estándar. Saque conclusiones.

8) La pintura para señalamiento vial de rutas y autopistas se distribuye en dos colores: blanco y amarillo. El interés se centra en el tiempo de secado de la pintura. Se sospecha que la pintura de color amarillo se seca más rápidamente que la blanca. Se obtienen las siguientes mediciones del tiempo de secado de ambos tipos de pintura, en minutos:

Blanca	120	132	123	122	140	110	120	107		
Amarilla	126	124	116	125	109	130	125	117	129	130

Suponga que el tiempo de secado está distribuido de manera normal.
Completar para que las proposiciones queden correctas.

Las variables en estudio son:

X_1: "……………………………………………………………………………………………"
X_2: "……………………………………………………………………………………………"

X_1 ~ …………………… (……………………………..)
X_2 ~ …………………… (……………………………..)

a) Realice una estimación puntual del tiempo de secado de la pintura blanca, y del tiempo de secado de la pintura amarilla.
$\bar{x}_1$ =
$\bar{x}_2$ =

b) Realice una estimación puntual de la desviación estándar del tiempo de secado de la pintura blanca y de la pintura amarilla.
s_1 =
s_2 =

c) Encuentre un intervalo de confianza para el cociente de varianzas de los tiempos de secados. A partir de este intervalo hallado, se puede considerar las varianzas iguales?
La fórmula correspondiente a aplicar es:

…………………………………………………………………………………………………

Utilizando el software R, debemos realizar los siguientes pasos:

```
blanca=c(120,132,123,122,140,110,120,107)
amarilla=c(126,124,116,125,109,130,125,117,129,130)
var.test(blanca, amarilla,conf.level=0.99)
```

Y lo que se obtiene es lo siguiente:

```
F test to compare two variances

data:  blanca and amarilla
F = 2.3805, num df = 7, denom df = 9, p-value = 0.2252
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
99 percent confidence interval:
  0.34575 20.26679
sample estimates:
ratio of variances
          2.380457
```

Podemos concluir que: se tiene un ……… de confianza, a partir de los datos de las muestras, de que hay homogeneidad entre los tiempos medios de secado de las pinturas blanca y amarilla, ya que el ……….. se encuentra en el intervalo, es decir, la suposición de que las varianzas son …………………….. está contemplada para el …………….. de confianza.

d) Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la diferencia entre los tiempos de secado promedio, suponiendo que las desviaciones estándar de éstos son iguales.
La fórmula correspondiente a aplicar es:

………………………………………………………………………………………………

Utilizando el software R, debemos realizar los siguientes pasos:
t.test(blanca, amarilla,conf.level=0.99)

Y lo que se obtiene es lo siguiente:

```
Welch Two Sample t-test

data:  blanca and amarilla
t = -0.30872, df = 11.487, p-value = 0.7631
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
99 percent confidence interval:
 -14.81672  12.11672
sample estimates:
mean of x mean of y
   121.75    123.10
```

Podemos concluir que: se tiene un ……….. de confianza, a partir de los datos de las muestras, de que el intervalo ………………………………….. contiene a la verdadera diferencia de medias poblacionales. Esto indica que no hay una diferencia significativa entre los tiempos de secado de cada una de las pinturas.

e) ¿Existe alguna evidencia que indique que la pintura amarilla se seca más rápidamente que la blanca?
……….. (*No/Si*) existe evidencia que indique que la pintura amarilla seca más rápidamente porque el …………., es decir, el valor que indica que no hay diferencias …………….(*está/no está*) incluido en el intervalo, todas esta afirmaciones las podemos realizar con un ………….de confianza.

9) Un industrial está interesado en la uniformidad de la máquina que utiliza para dosificar áridos. De manera específica, es deseable que la desviación estándar σ del proceso de dosificación sea menor de 0,5 kg; de otro modo existe un porcentaje mayor del deseable de dosificaciones incorrectas. Supóngase que la distribución del peso del árido dosificado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 dosificaciones realizadas, se obtiene una varianza muestral de 0,19 $(kg)^2$.

a) Determine el intervalo de confianza "superior" del 95% para la varianza poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 95%, ¿apoyan los datos la condición de que la desviación estándar del proceso es menor que 0,5 kg?

10) Con el objeto de investigar el tiempo de secado de un nuevo tipo de pintura, se prepararon cuatro paneles de ensayo y se midió el tiempo de secado en los mismos, obteniéndose los siguientes resultados:

Panel	1	2	3	4
Tiempo	1h 54min	2h 2min	2h 5min	1h 55min

Con los datos de la muestra y suponiendo normalidad:

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la varianza del tiempo medio de secado real de la pintura.

b) Construya un intervalo de confianza del 95% para el tiempo medio de secado real de la pintura.

c) ¿Qué tamaño de muestra seleccionaría si, a nivel del 99%, es necesario limitar el error máximo probable al valor obtenido en el punto anterior?

11) Se debe efectuar el alumbrado en un predio municipal. Luego de analizar las propuestas de los distintos oferentes se vio la conveniencia de usar lámparas de dos fábricas del medio.

a) A los efectos de controlar la calidad de las lámparas, se realizaron pruebas de calidad, obteniéndose los siguientes resultados:

- Una muestra de 21 lámparas del fabricante A dio una vida media de 1400 horas y una desviación estándar de 120 horas.
- Una muestra de 25 lámparas del fabricante B dio una vida media de 1200 horas y una desviación estándar de 80 horas.

Se desea saber si es aceptable suponer que hay homogeneidad en la calidad de las lámparas empleadas en la obra, aunque hayan sido producidas por dos fábricas distintas, cada una con sus propios equipos, condiciones de elaboración y supervisión. Se acepta que el tiempo de vida de las lámparas de ambos proveedores está distribuido normalmente y son independientes. Analizar con un nivel de confianza del 90 %.

b) Si con el mismo tamaño de muestras se hubieran obtenido las mismas vidas medias muestrales, pero con desviaciones estándares de 120 y 70 horas respectivamente, ¿cuál sería la conclusión?

12) Una compañía de transporte debe decidir sobre la compra de neumáticos de tipo A o B. Para estimar la diferencia, se realiza una prueba empleando 16 neumáticos de cada marca. Los neumáticos se hacen trabajar hasta el desgaste total.

Los resultados son los mostrados en el cuadro siguiente:

Marca	Tamaño de la muestra	Recorrido Medio (km)	Desviación Estándar (km)
A	16	36.300	5.000
B	16	38.100	6.100

a) Construya un intervalo con un nivel de confianza del 90% para la diferencia de medias, suponiendo que las poblaciones tienen distribución normal y son independientes.

b) Determine un intervalo de confianza del 90%, para el cociente de las varianzas poblacionales. ¿Se justifica el supuesto de que las varianzas son iguales para calcular el intervalo de confianza para la diferencia de las medias?

13) El ingeniero a cargo del control de calidad de una planta debe detener el proceso de producción cuando se produce una rotura de los sacos en los que se envasa el producto que afecta una proporción superior a 0,008. Al realizar el control de la línea de bolsas de cemento portland de alta resistencia inicial observa que se rompieron 17 bolsas sobre un total de 1000, antes de salir de la planta.

a) ¿Debe detener el proceso de producción? Fundamente la respuesta construyendo un intervalo de confianza bilateral del 95% para la proporción real de sacos rotos.

b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra si se desea, con nivel de confianza del 95%, que la proporción de defectuosas esté dentro del 0,004 de la proporción verdadera de defectuosas?

c) ¿A qué conclusión llega si construye un intervalo de confianza unilateral para los datos del punto a?

d) Suponga que se realizan ajustes en el proceso de producción y que en una segunda muestra aleatoria de 500 sacos envasados se rompen 4. Con base en los datos muestrales, construya un intervalo de confianza bilateral para la diferencia de proporciones correspondientes (antes y después de los cambios), para emitir conclusiones a nivel de confianza del 95%.

14) En una muestra aleatoria de 500 clientes de una empresa local se encontró que 340 se habían suscripto al servicio de correo electrónico y 160 al de correo electrónico e Internet.

Completar para que las proposiciones queden correctas.

La variable en estudio es:

X: "……………………………………………………………………………………………."

X ~ ………………………..(…………………………………….)

$\hat{P}$ ~ ………………………(…………………………………….)

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la proporción actual de clientes suscriptos al correo electrónico de esa empresa de servicios.

Previo a construir el intervalo de confianza solicitado, completar los siguientes datos del problema:

x=

n=

$\hat{p}$ =

1-α = $\rightarrow z_{\alpha/2}$ =

La fórmula a aplicar es:

……………………………………………………………………………………………………
El intervalo de confianza para la proporción poblacional para el 95%,es:……………………………………………

Y podemos concluir que, se tiene un ……….% de confianza, en base a la evidencia …………………….., que el intervalo (……………; ……………..) contiene a la proporción real de ………………………………………………………………………..

b) ¿Qué puede decir acerca del error cometido en la estimación, con un 95% de confianza?

La fórmula a utilizar para la resolución es:

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}$$

El error cometido en la estimación será inferior a ………………. con una confianza de …………%. Y podemos concluir que ………………………………………………..
………………………………………………………………………………………………

c) A partir de los resultados obtenidos de la muestra preliminar ¿qué tan grande se requiere que sea la muestra, si se desea tener una confianza del 95% de que la estimación de p estará dentro de 0,02?

La fórmula a utilizar es:

$$n = \frac{z_c^2.\hat{p}.\hat{q}}{e^2}$$

La muestra tendrá un tamaño…………………………… Y podemos concluir que……
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

d) Asumiendo que no se dispone de una muestra preliminar para obtener información acerca de p, ¿qué tan grande se requiere que sea la muestra si se quiere tener una confianza al menos del 95% de que la estimación de p estará dentro de 0,02?

Para poder contestar este ítem, recordar lo siguiente:

"Si no se utiliza o no se conoce un valor de $\hat{p}$ como una estimación de p, se puede tener una confianza del (1-α) 100% de que el error será menor que una cantidad especificada e cuando el tamaño de la muestra sea aproximadamente".

La fórmula a utilizar es:

$$n = \frac{z_c^2}{4.e^2}$$

Y podemos concluir que……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

15) Se realiza un estudio para determinar la proporción de residentes en una ciudad y en sus suburbios que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear.

a) ¿Qué tan grande debe ser una muestra si se requiere una confianza al menos del 95% de que la estimación estará dentro del 0,04 de la proporción real de residentes de esa ciudad y sus suburbios que están a favor de la construcción de la planta de energía nuclear?

b) A falta de información previa, se tomó una muestra preliminar de tamaño 40 (observe que la muestra es mayor que treinta), resultando que 6 residentes estuvieron a favor de la construcción. Utilice esta estimación imperfecta para determinar en forma aproximada cuántas observaciones se necesitan para proporcionar el grado de precisión deseado en el punto anterior.

16) Se analiza la fracción de productos defectuosos producidos por dos líneas de producción. Una muestra aleatoria de 100 unidades provenientes de la línea 1 contiene 10 defectuosas, mientras que una muestra aleatoria de 120 unidades de la línea 2 tiene 25 que son defectuosas. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la diferencia en fracciones de productos defectuosos producidos por las dos líneas.

Antes de encontrar el intervalo de confianza solicitado, responder lo siguiente:

Completar para que las proposiciones queden correctas.
Las variables en estudio son:
X_1: "……………………………………………………………………………………"
X_2: "……………………………………………………………………………………"
X_1 ~ ……………………..(……………………….)
X_2 ~ ……………………..(……………………….)

Completar con los datos del problema:

x_1= x_2=
n_1= n_2=
$\hat{p}_1$= $\hat{p}_2$=
$1-\alpha$ = $\rightarrow z_{\alpha/2}$=

La fórmula correspondiente a aplicar es:

………………………………………………………………………………………………

Ahora estamos en condiciones de responder lo solicitado:
El intervalo de confianza para la diferencia de proporción poblacional para el 99%, es:
…………………………………………
Y se interpreta: ………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
Como este intervalo incluye al ……………… (*cero/uno*), podemos decir que …………(*Si/No*) hay diferencia significativa entre las proporciones de unidades defectuosas en cada línea de producción.

17) Como parte de un programa de capacitación industrial, algunos alumnos son instruidos con una técnica A, que consiste en adiestrarlos directamente en la máquina. Suponga que el puntaje obtenido por cada técnica puede ser aproximado por una distribución normal. Se toma una muestra aleatoria de 20 alumnos instruidos con esta técnica y los puntajes que obtuvieron en una prueba apropiada son:

Técnica	71	75	65	69	73	66	71	74	68	71
A	65	70	64	69	73	78	77	76	64	68

a) Plantee un estadístico insesgado para realizar una estimación puntual para la media poblacional. Obtenga su valor observado a partir de la muestra dada.
b) Plantee un estadístico insesgado para realizar una estimación puntual para la varianza poblacional. Obtenga su valor observado a partir de la muestra dada.
c) Enuncie la variable en estudio, de su distribución y sus parámetros.
d) Plantee una cantidad pivotal adecuada para construir un intervalo de confianza aleatorio para la media del puntaje obtenido por los alumnos al ser instruidos por una técnica A. ¿Cuál es su distribución?
e) Obtenga un intervalo de confianza observado a partir de la muestra e interprete.

18) Como parte de un programa de capacitación industrial, algunos alumnos son instruidos con la técnica A que consiste en adiestrarlos directamente en la máquina, mientras que otros son capacitados con la técnica B, que consiste en adiestrarlos con atención personal de un instructor. Suponga que el puntaje obtenido por cada técnica puede ser aproximado por una distribución normal. Se toma una muestra de 20 alumnos instruidos con cada una de las dos técnicas y los puntajes que obtuvieron en una prueba apropiada son:

Técnica	71	75	65	69	73	66	71	74	68	71
A	65	70	64	69	73	78	77	76	64	68
Técnica	72	77	84	78	69	70	77	73	65	75
B	77	68	76	78	69	81	62	69	80	75

a) Como observa al leer el problema tenemos dos poblaciones que podríamos decir población A y población B. Plantee la variable aleatoria en estudio de la población A, su distribución y sus parámetros. Idem para la población B.
b) Puede suponer que las varianzas de ambas poblaciones son iguales? Construya un intervalo de confianza del 95% para evaluar eso.
c) Plantee una cantidad pivotal adecuada para construir un intervalo de confianza para la diferencias de puntajes medios obtenidos por los alumnos de estas dos poblaciones. ¿Cuál es su distribución?
d) Obtenga un intervalo de confianza observado del 95% para la diferencia de puntajes medios entre los dos métodos. ¿Puede asegurar que alguno de los métodos es mejor?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1) Se estudia la trabajabilidad de un hormigón plástico compactado mediante vibración normal. De acuerdo a las especificaciones del Reglamento, el mismo debe encuadrarse en un ámbito de consistencia A-2, de aspecto levemente cohesivo. Para ello se ajusta el proyecto del hormigón de modo de obtener un asentamiento del tronco cono de 8 cm, y de experiencias anteriores se sabe que la precisión del equipo de trabajo permite lograr una variabilidad de los resultados cuantificada por una desviación estándar de 1,5 cm. Se acepta también que el asentamiento medido está distribuido normalmente. Los resultados obtenidos de una muestra ensayada, medidos en cm, son los siguientes:

7,5 8,0 8,0 7,5 7,0 8,5 8,0 9,0 7,0 8,0

a) Estime mediante un intervalo de confianza del 95% el asentamiento medio del hormigón estudiado.
b) ¿Qué podemos asegurar con una probabilidad de 0,95 sobre la medida del error máximo de la estimación?
c) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para poder asegurar con una confianza del 99% que el error máximo de la estimación sea de ½ cm?

Solución: a) (6,9203 – 8,7797), $^{\delta}$=0,95; b) e=1,0941; c) n≥17

2) Se realizó un estudio para determinar si un aditivo agregado en la dosificación de hormigones para acelerar el tiempo de fragüe tenía alguna influencia en la resistencia a la compresión del mismo. Una muestra aleatoria de 62 probetas con aditivo ensayadas a los 7 días dan una resistencia media de 70,5 kg/cm², con desviación 6,5 kg/cm², en tanto que las 60 probetas sin aditivo, ensayadas a la misma edad, dieron una resistencia media de 86,8 kg/cm², con desviación 7,2 kg/cm². Suponga que de estudios anteriores se conocen las desviaciones poblacionales y son 5 y 5,5 kg/cm² para las probetas con y sin aditivo respectivamente. Suponiendo normalidad.

a) A nivel de confianza del 95%, ¿qué puede decir respecto de la influencia del aditivo en la resistencia del hormigón?
b) ¿Qué conclusión obtendría si desconoce las desviaciones poblacionales pero las supone iguales?
c) ¿Qué conclusión obtendría si desconoce las desviaciones poblacionales pero las supone distintas?

Solución: X_1: "Resistencia a la compresión en Kg/cm_2 en probetas sin aditivos" y X_2: "Resistencia a la compresión en kg/cm_2 en probetas con aditivos". a) (15,4864-17,1136), $^{\delta}$=0,95; la resistencia media con aditivo resulta menor que sin aditivo. b) (13,8427 – 18,7573), $^{\delta}$=0,95, igual que ítem anterior. c) (13,8385 – 18,7614), $^{\delta}$=0,95, igual ítem a).

3) Se compara la resistencia de dos tipos de rosca para bulones utilizados en construcciones metálicas. Se prueban 50 piezas de las roscas tipo A y 48 de las del tipo B, en condiciones similares. Las piezas del tipo A dan una resistencia media de 78,3 kg, con desviación estándar 5,6 kg. Las del tipo B dan una resistencia media de 76,5 kg, con desviación estándar 6,3 kg. Ambas con distribución normal. Se conoce de experiencias anteriores que las desviaciones poblacionales son 5 y 5,5 kg, para las roscas del tipo A y B respectivamente.

a) ¿Hay suficientes razones para concluir a nivel del 95% que la resistencia media de las roscas del tipo A es más elevada que las del tipo B?

b) ¿Cuál es la conclusión, si no conoce los parámetros poblacionales?

Solución: a) (1,0920 – 2,9079), δ=0,95; Hay suficientes razones para concluir, a un nivel del 95%, que la resistencia media de las roscas tipo A es más elevada que las de tipo B. b) (-0,5996 – 4,1996), δ=0,95, si no se conocen los parámetros poblacionales y $\sigma_A \neq \sigma_B$ la resistencia media de las roscas tipo A es igual a las de tipo B.

4) El artículo "Mix Design for Optimal Strength Development of Fly Ash Concrete" *(Cement and Concrete Research, 1989, Vol. 19, Nº 4, pp. 634-640)* investiga la resistencia a la compresión del hormigón cuando se mezcla con ceniza muy fina (una mezcla de silicatos, alúmina, hierro, óxido de magnesio y otros componentes).

La resistencia a la compresión, en MPa, de nueve muestras de hormigón en condiciones secas, a la edad de 28 días son las siguientes:

40,2 30,4 28,9 30,5 22,4 25,8 18,4 14,2 15,3

Suponiendo normalidad.

a) Encuentre un intervalo de confianza inferior del 99% para la resistencia a la compresión promedio.

b) Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 95% para la resistencia a la compresión promedio.

Solución: a) (16,9925 – Inf), δ=0,99; b) (18,6498 – 31,5947), δ=0,95

5) Se investiga el diámetro de las barras de acero del tipo F-22 utilizadas en construcciones livianas de acero de nuestro medio, fabricadas en dos diferentes máquinas de extrusión. Para ello se toman dos muestras aleatorias.

De la primera máquina los resultados obtenidos de 15 mediciones dan un diámetro medio de 8,73 mm con varianza 0,35 mm², mientras que para la segunda máquina, de 18 mediciones el diámetro y la varianza son 8,68 mm y 0,40 mm², respectivamente. Suponiendo que los diámetros de las poblaciones de barras producidos por ambas máquinas están distribuidos normalmente y que es posible aceptar que tienen la misma varianza, construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la diferencia en el diámetro promedio de la barra.

Solución: (-0,2164 – 0,3164), δ=0,95

6) Un artículo publicado en Fire Technology investigó dos agentes dispersores de espuma que pueden emplearse en las boquillas de los equipos extinguidores de fuego. Al tomar una muestra aleatoria de cinco observaciones con una espuma que forma una película acuosa (AFFF), se obtuvo una media muestral de 4,7 y una desviación estándar de 0,6. Una muestra aleatoria de cinco observaciones con concentrados de tipo alcohólico (ATC) tuvo una media muestral de 6,9 y una desviación estándar de 0,8. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en la dispersión de espuma promedio de estos dos agentes. ¿Puede obtenerse alguna conclusión sobre qué agente produce la mayor dispersión de espuma? Suponga que ambas poblaciones están bien representadas por distribuciones normales que tienen las mismas desviaciones estándar.

Solución: (-0,9831 – 1,0831), $^{\delta}$=0,95. Podemos concluir que ambos agentes producen igual dispersión de espuma. El intervalo contiene el cero, con un nivel de confianza del 95%.

7) En un experimento se comparó el consumo de combustible para dos tipos de camiones con motor diesel, en condiciones similares. Doce vehículos del Tipo A y diez del Tipo B se probaron a 90 km/h. Si los doce camiones promediaron 16 km/l con desviación 1 km/l y los diez camiones consumieron 11 km/l con desviación 1,8 km/l. Ambas se distribuyen de forma normal.

- **a)** Construya un intervalo de confianza del 98% para el cociente de las varianzas de los recorridos por litro de los vehículos tipo A y B. ¿Qué conclusión obtiene?
- **b)** Determine un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre los rendimientos medios de cada tipo de camión, suponiendo que los rendimientos tienen distribución normal y varianzas iguales. ¿Qué conclusión obtiene?

Solución: a) (0,6996 – 16,7764), $^{\delta}$=0,98; b) (3,9023 – 6,0977), $^{\delta}$=0,9

8) En el laboratorio de ensayo se ha observado que las probetas de hormigón están siendo moldeadas deficientemente, hecho este que está afectando al resultado de ensayo obtenido.

- **a)** Calcule un intervalo de confianza del 96% para la proporción de probetas de hormigón moldeadas defectuosamente, cuando se halla que en una muestra de 100 probetas, 8 son defectuosas.
- **b)** ¿Qué tamaño debe tener la muestra si se desea, con nivel de confianza del 98%, que la proporción de defectuosas esté dentro del 0,05 de la proporción verdadera de defectuosas?

Solución: a) (0,0244- 0,1356), $^{\delta}$=0,96; b) n≥160

9) Un artículo publicado en *Engineering Horizons* informa que 117 de 484 egresados de Ingeniería planeaban continuar estudiando para obtener un grado más avanzado. Si se considera esto como una muestra aleatoria de todos los graduados en 1990, encuentre un intervalo de confianza del 90% para la proporción de graduados que planean continuar con su educación.

Solución: (0,2098 – 0,2737), $^{\delta}$=0,90

10) En una muestra aleatoria de 1000 viviendas en determinada ciudad, se encuentra que 228 de ellas utilizan calefacción de derivados del petróleo.

- **a)** Encuentre el intervalo de confianza del 99% para la proporción de viviendas en esa ciudad que tiene ese tipo de calefacción.
- **b)** ¿Qué tan grande debe ser la muestra si se requiere una confianza al menos del 99% de que la estimación estará dentro del 0,025 de la proporción real de viviendas en esa ciudad que tiene ese tipo de calefacción?

Solución: a) (0,1938 – 0,2622), $^{\delta}$=0,99; b) n≥1875

11) Según el Environment News (abril de 1975), "el análisis continuo de los niveles de plomo en el agua potable de varias comunidades de Boston reveló niveles elevados de plomo en los suministros de agua de Somerville, Brighton y Beacon Hill …". Los resultados preliminares de un estudio efectuado en 1974 indicaron

que "el 20% de 248 hogares que se analizaron en estas comunidades reveló niveles elevados que exceden el estándar de la Agencia de Salud Pública de EE.UU. de 50 p.p.m". Al contrario, en Cambridge, que añade corrosivos al agua, "solamente el 5% de los 110 hogares analizados mostró niveles de plomo mayores que el estándar".
Obtenga un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de proporciones de hogares que tienen niveles de plomo que exceden el estándar entre las comunidades de Somerville, Brighton y Beacon Hill, y la comunidad de Cambridge.

Solución: (0,0857 – 0,2143), $^{\delta}$=0,95

Ahora a repasar un poco la teoría!

Este capítulo es muy importante para comprender la siguiente unidad y por supuesto para su futuro trabajo como ingeniero.
Para autoevaluarse responda las siguientes preguntas, puede consultar el los apuntes de clases o cualquier libro.

- ¿Qué entiende por inferencia estadística?
- ¿Cuáles son los métodos clásicos de estimación?
- ¿Qué se espera de un buen estimador?
- ¿Qué significa que un estimador sea insesgado?
- ¿Qué significa que un estimador sea el más eficiente?
- ¿Todos los estimadores que son más eficientes son insesgados?
- ¿Qué es una estimación puntual?
- ¿Qué es una estimación por intervalos?
- Respecto a los tipos de estimación analizados, ¿cuál es el más preciso?, ¿cuál es más confiable?
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar la media poblacional? Analice cada una de las posibilidades y las condiciones que deben darse para utilizarlas correctamente.
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar la diferencia de medias poblacionales? Analice cada una de las posibilidades y las condiciones que deben darse para utilizarlas correctamente.
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional? Analice las condiciones que deben darse para utilizarlo correctamente.
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar la diferencia de proporciones poblacionales? Analice las condiciones que deben darse para utilizarlo correctamente.
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar la varianza poblacional? Analice las condiciones que deben darse para utilizarlo correctamente.
- ¿Cómo se calcula un intervalo de confianza para estimar el cociente de varianzas poblacionales? Analice las condiciones que deben darse para utilizarlo correctamente.
- Analice las condiciones para calcular tamaños de muestra según la información disponible.