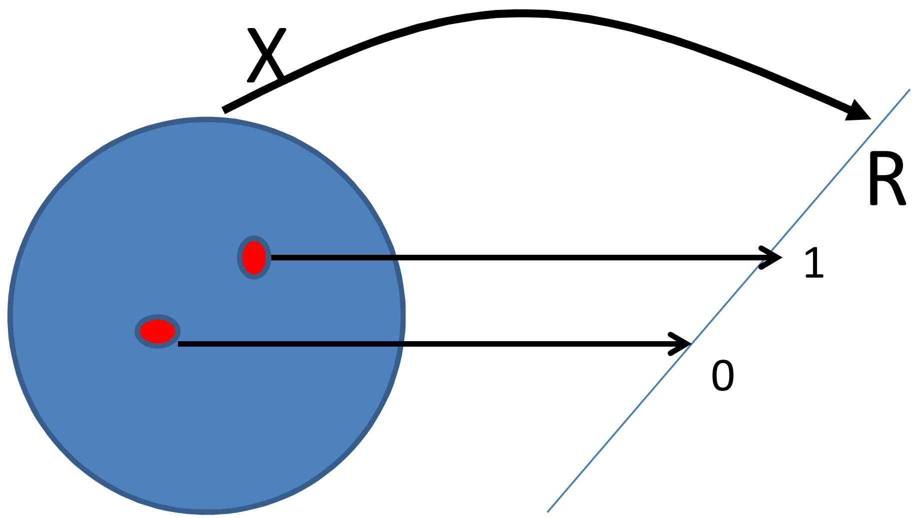
VARIABLE ALEATORIA

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE MENDOZA

VARIABLE ALEATORIA

- **Definición**
- Sea Ω el espacio muestral ligado a un experimento aleatorio. Una variable aleatoria (v.a.) es una función X que asigna a cada elemento ω del espacio muestral un número del conjunto de los números reales R.
-
-

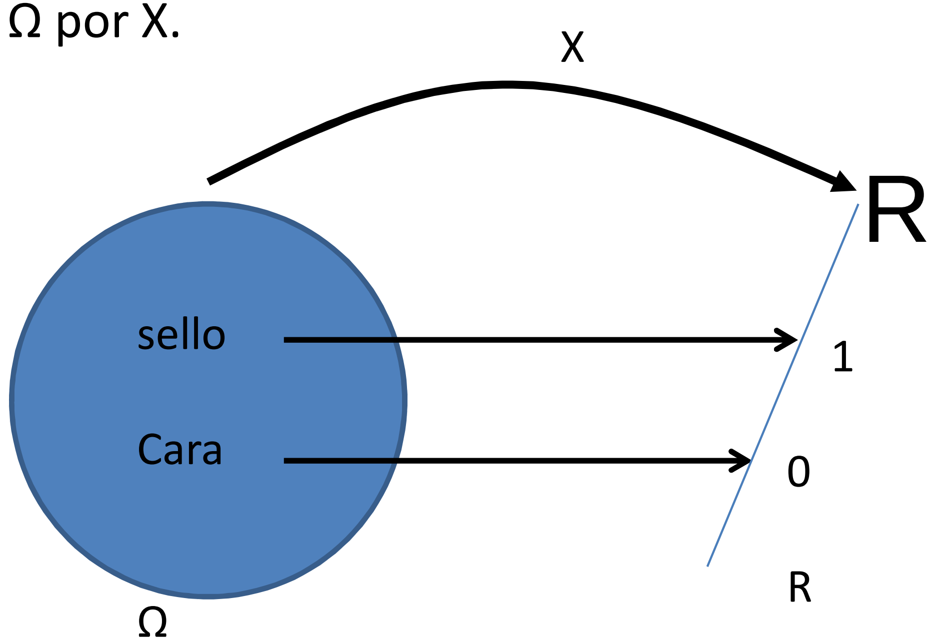


EJEMPLO 1: variable aleatoria

- Є= Arrojar una moneda
- Ω={cara, sello}
- X(cara)= 0;
- X(sello)=1
- X(Ω) = {0; 1} es la imagen de Ω por X.

$$X: \Omega \rightarrow R$$

$$X(\omega)=x$$



Ejemplo 2: Variable aleatoria

- Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha.
- El espacio muestral es:

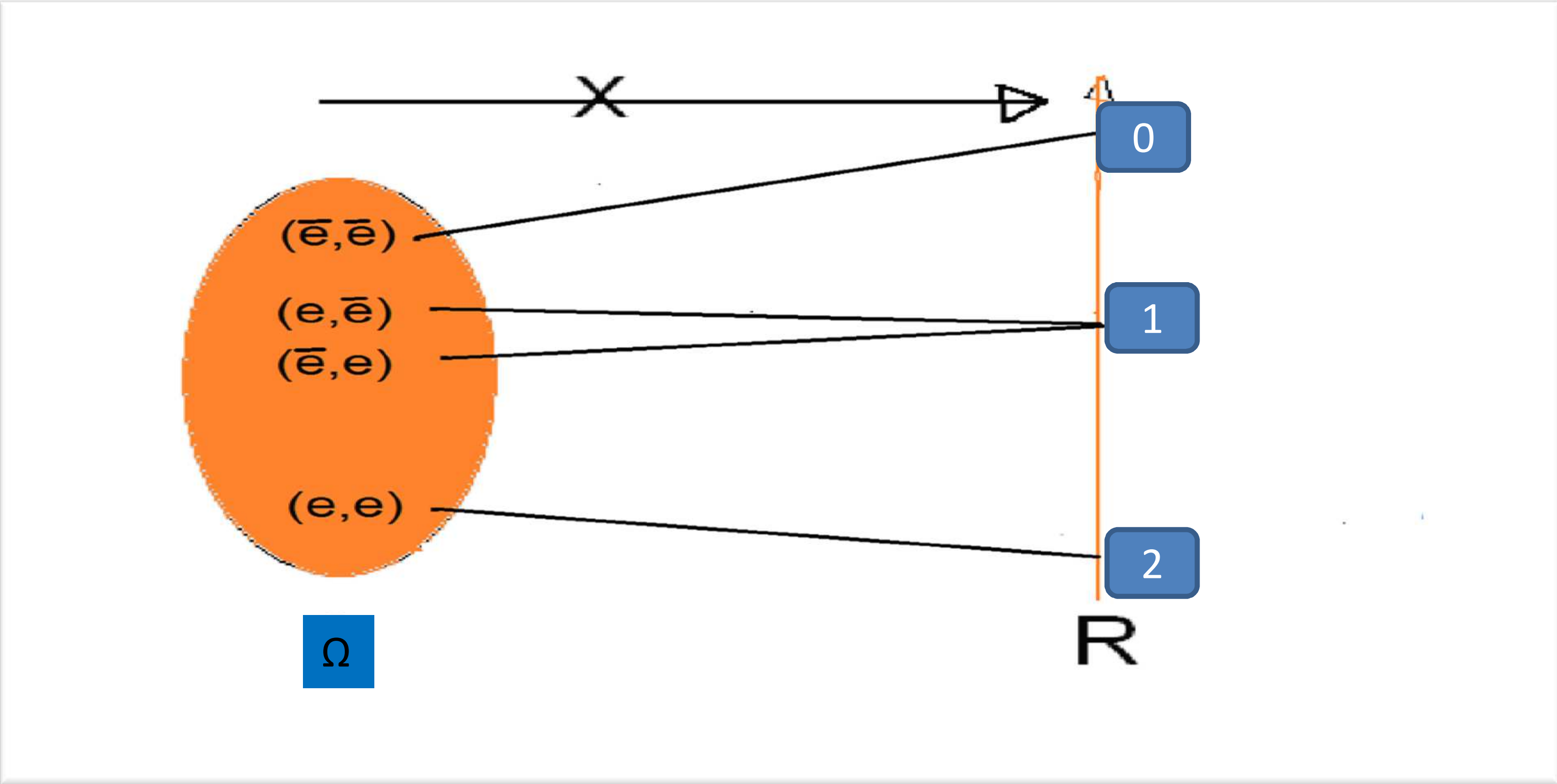
$$\Omega = \{(e',e'),(e,e'),(e',e),(e,e)\}$$

- Si definimos la variable aleatoria X como,

X : ***"número de cheques con error"***

- X ((e´,e´)) = 0
- X ((e´,e)) = X ((e,e´)) = 1
- X ((e,e)) = 2

EJEMPLO 2: Variable aleatoria



Ejemplo 2: Variable aleatoria

- Si calculamos su probabilidad de la variable
- X : "***número de cheques con error***"

- P({(e´,e´)}) = P(X=0) = 6/20

- P({(e,e´),(e´,e)}) = P(X=1)=12/20

- P({(e,e)}) = P(X=2) = 2/20

Clasificación de las variables ALEATORIAS

Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida en Ω.

- X es una variable aleatoria <u>**DISCRETA**</u> si $X(\Omega)$ es un conjunto finito o infinito numerable.

- X es una variable aleatoria <u>**CONTINUA**</u> si $X(\Omega)$ es un conjunto infinito no numerable.

EJEMPLO 3: V.A. DISCRETAS Y CONTINUAS

Ejemplo de la moneda

Ω = (cara; sello), $X(\Omega) = \{0; 1\}$

X es una variable aleatoria discreta

Ejemplo de los cheques

$\Omega = \{(e; e); (e'; e); (e; e'); (e'; e')\}$

X = "número de cheques con error"

$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

X es una variable aleatoria discreta

Ejemplo del círculo unitario

Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar un punto en el círculo de radio uno

$\Omega = \{(x,y)/x+y \leq 1\}$

$X(\Omega)=[-1,1]$

X es una variable aleatoria continua

Variable aleatoria continua

Ejemplo del círculo unitario

ε: "Seleccionar un punto en el círculo de radio uno"

- Ω **={(x,y)/x+y≤1}**

Sea A un suceso en **Ω** . Definimos la probabilidad de A por:

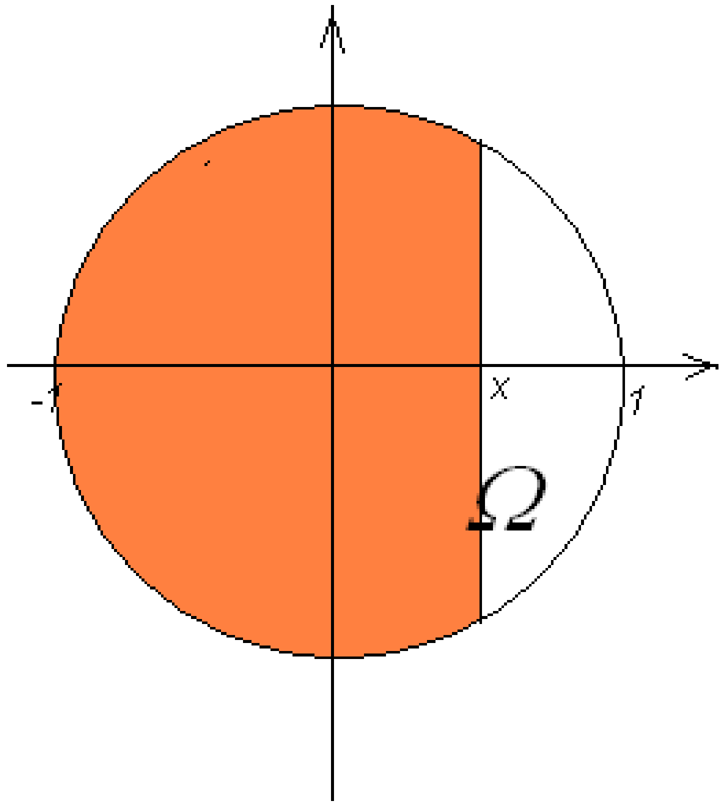
- P(A) =área de A/π para cada A∈ $\mathcal{P}$(Ω)

Definimos una función

- X : Ω ->R;
- X(x; y) = x

Evidentemente, **X(Ω) = [-1; 1]**

Variable aleatoria continua



Variables aleatorias discretas

VARIABLE ALEATORIA

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

El suceso “que la suma obtenida sea 7” es
A={(6,1), (5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)}.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

P(A)=6/36=1/6.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- ε: Lanzar dos dados
- Ω={
- ¿Cuántos elementos tiene? (sucesos elementales)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Como Ω tiene 36 elementos (sucesos elementales), el espacio de sucesos $\mathcal{P}(\Omega)$ tiene 2^{36} sucesos !!!! **Ω ES EQUIPROBABLE**

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- Si : Tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos
- *A* es “obtener suma 7”, *B* es “obtener dos resultados iguales” Y *C* es “obtener exactamente un 3”,
- ¿cuánto valen P(A), P(B) y P(C)?

- P(A)=6/36=1/6.
- P(B)=6/36=1/6.
- P(C)=10/36.

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos

Ω es el conjunto de los 36 pares ordenados que vimos en el gráfico anterior.

X: “suma de los dos valores obtenidos”

X (Ω)={ 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

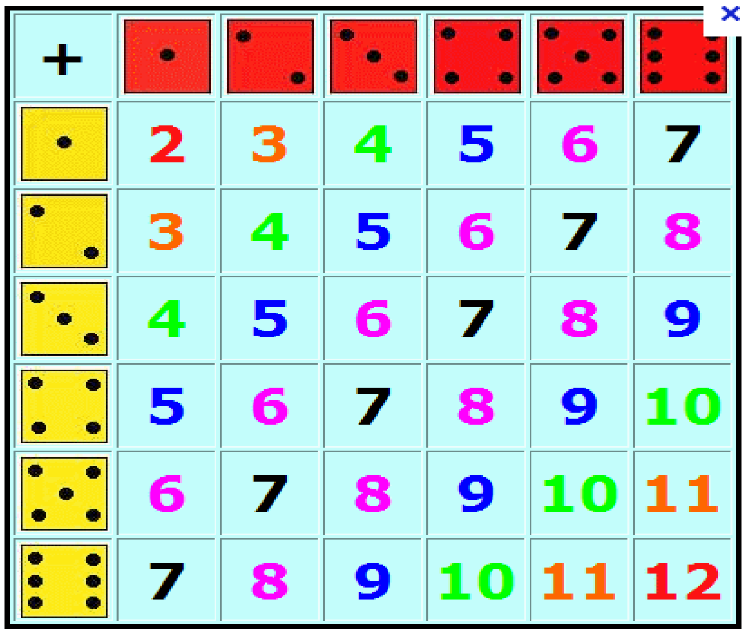
$P(X=7)=1/6$

$P(X=6)=5/36$

$P(X=12)=1/36$

$P(X=1)=0$

X(Ω) NO ES EQUIPROBABLE



VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- LA PROBABILIDAD SE CALCULA A SUCESOS Y NO HEMOS HECHO OTRA COSA:
- “X: la suma de los dos valores obtenidos es 7”

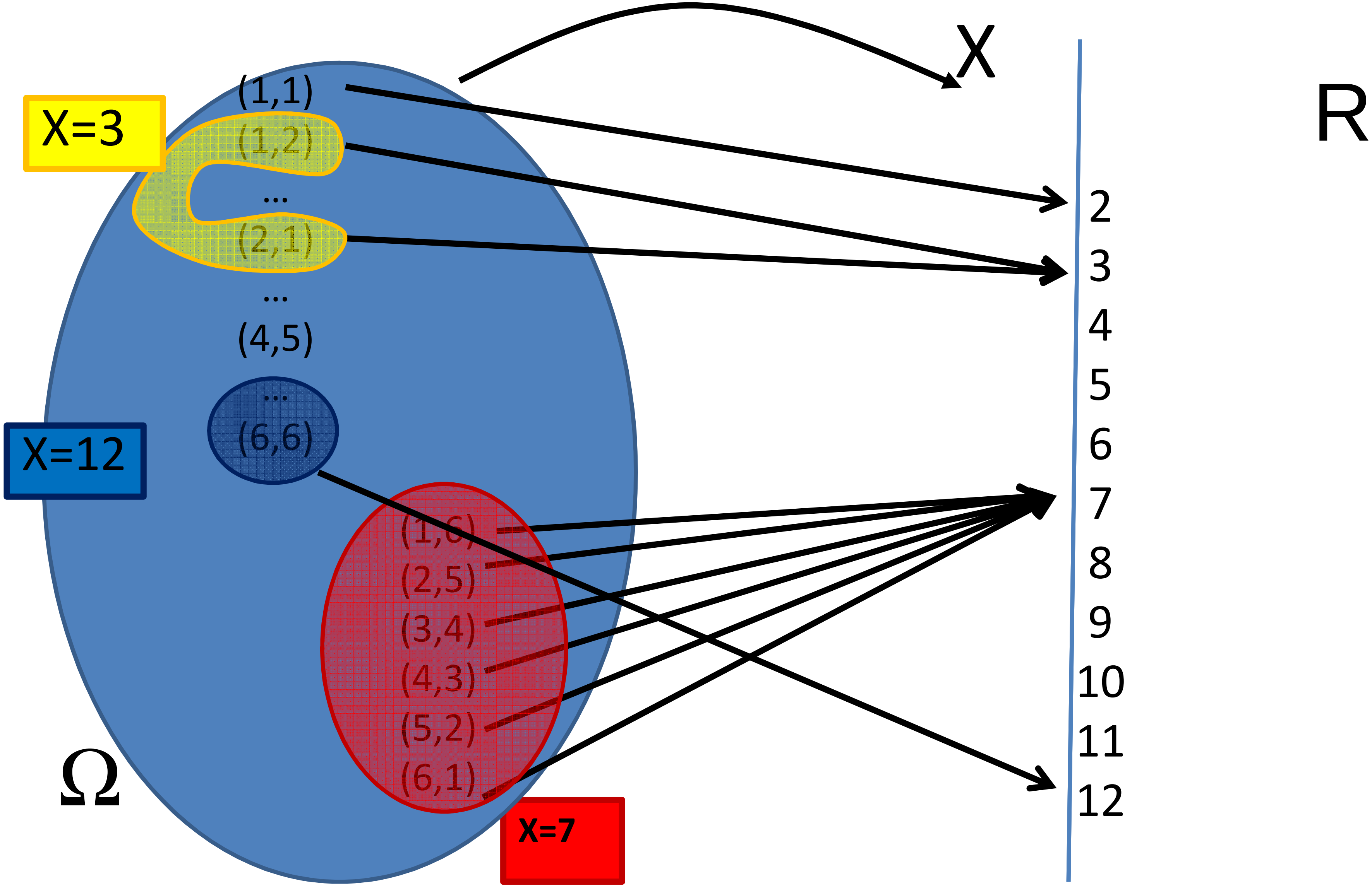
A={(6,1), (5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)}

- “X: la suma de los dos valores obtenidos es 12”

C= {(6,6)}

- ¿Qué suceso es
- “X: la suma de los dos valores obtenidos es1”?
- D={}=∅
- Si le calculamos la probabilidad
- P(D)=P(∅)=0

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS



VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Teniendo en cuenta que:

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos

Ω es el conocido conjunto de 36 elementos

X: suma de los valores obtenidos en los dados

En lugar de	Escritura reducida
{(6,6)}	X=12
{(2,1),(1,2)}	X=3
P({(2,1),(1,2)})	P(X=3)

Y ESTAMOS HACIENDO LAS CUENTAS BIEN PORQUE ESTAMOS CALCULANDO PROBABIILIDAD A SUCESOS.

Variables aleatorias discretas

Si seguimos tirando dos dados, ahora nos interesa ver si los dos resultados son iguales o no:

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos en la cara superior

- Ω es el conjunto formado por los 36 pares
- B :“obtener dos resultados iguales”
- B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
- P(B)=6/36

Variables aleatorias discretas

Definimos la variable aleatoria Y

$$Y: \Omega \rightarrow R$$

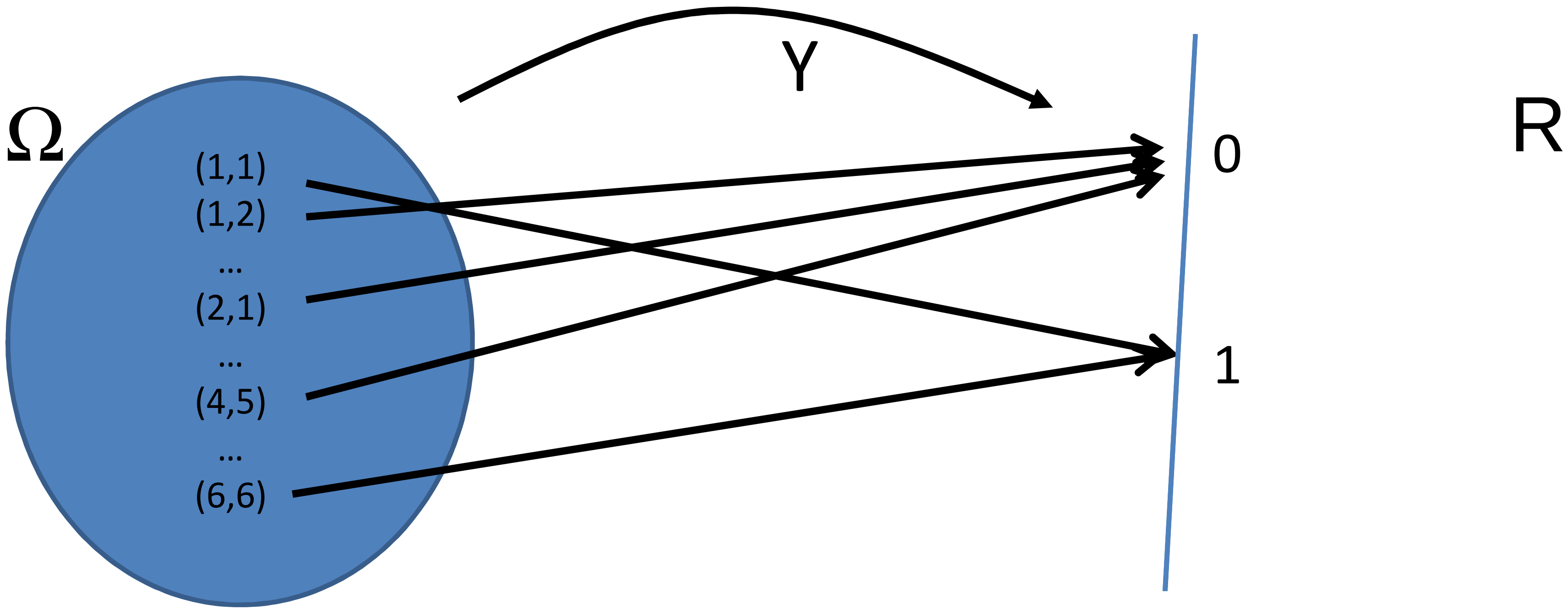
$$\omega \text{->} Y(\omega)=x$$

$$(a,b) \text{ ->} Y((a,b))=1 \text{ si } a=b$$

$$(a,b) \text{ ->} Y((a,b))=0 \text{ si } a\neq b$$

- Esta variable aleatoria toma los valores 0 y 1
- Es un caso especial de v.a. que se llama **v.a. de Bernoulli**.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS



B = “obtener dos resultados iguales”

B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)};   P(B)=6/36

Si consideramos la v.a. Y:

Y((1,1))=1; Y((2,2))=1…..Y(6,6)=1

Luego: P(Y=1)=6/36

P(Y=0)=30/36

FUNCION DE PROBABILIDAD de v.a.d.

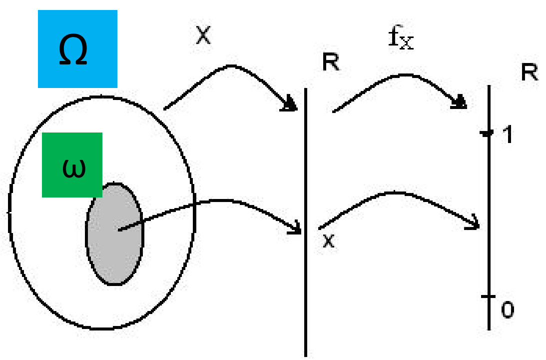
Es posible desarrollar una función matemática que asigne a cada *realización* de la v.a. X una determinada probabilidad.

<u>DEFINICION</u>: Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria discreta definida en Ω. Se llama función densidad de probabilidad a la función:

$f_x : R \to [0; 1]$;

$f_X(x) = P(\{\omega /\ \omega \in \Omega \wedge X(\omega)=x\})$

$f(x) = P(X=x)$



FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD de v.a.d.

En el ejemplo de los cheques
(experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha)

- X :"número de cheques con error obtenidos en las dos extracciones"
- X (e´,é) = 0
- X (e´,e) = X (e,e´) = 1
- X (e,e) = 2
- X(Ω) = {0,1,2}

<u>v.A discretas:</u> FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Seguimos con el ejemplo de los cheques

- Calculemos la función:

  $f_X(x) = P(X = x) = P(\{w/w \in \Omega \wedge X(\Omega) = x\})$

- $f_X(0) = P(X = 0) = P(\{w/w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 0\} = P(\{(e', e')\}) = 6/20$
- $f_X(1) = P(X = 1) = P(\{w/w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 1\}) = P(\{(e, e'), (e', e)\}) = 12/20$
- $f_X(2) = P(X = 2) = P(\{w/w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 2\}) = P(\{(e, e)\}) = 2/20$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{20} & si \quad x = 0 \\ \frac{12}{20} & si \quad x = 1 \\ \frac{2}{20} & si \quad x = 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

v.a. discretas: PROPIEDADES de la funcion de probabilidad

- 1) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in R$

- 2) $\displaystyle\sum_{x_j \in X(s)} f_X(x_j) = 1$

¿PODRIA SER f(x)>1 PARA ALGUNA x?

Como está definida como una PROBABILIDAD y el conjunto de llegada esta definido entre [0,1] no puede valer más de 1

EJEMPLO: V.A. DISCRETAS

- ε: tirar dos dados
- Ω es el conjunto de los 36 pares ordenados
- X: “suma de los dos valores obtenidos”
- X (Ω)={ 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

$$f: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow P(X=x)$$

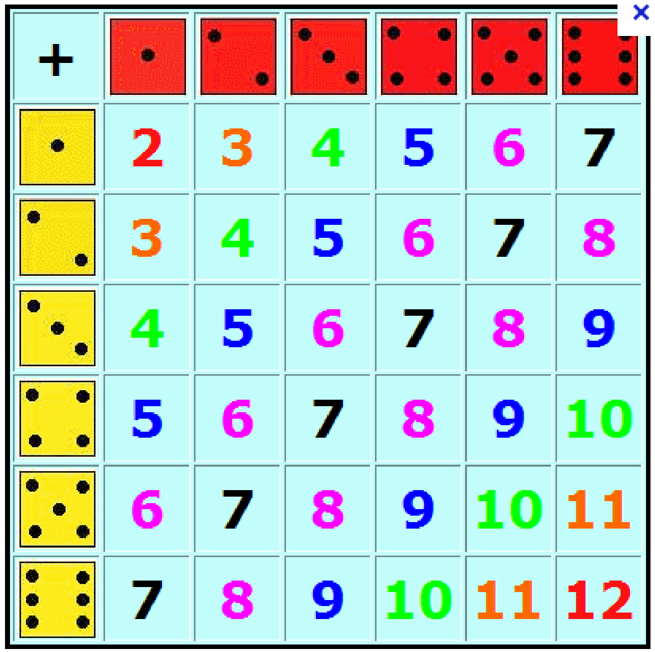
x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**otros**
f(x)												

EJEMPLO: V.A. DISCRETAS

X: "suma de los dos valores obtenidos"

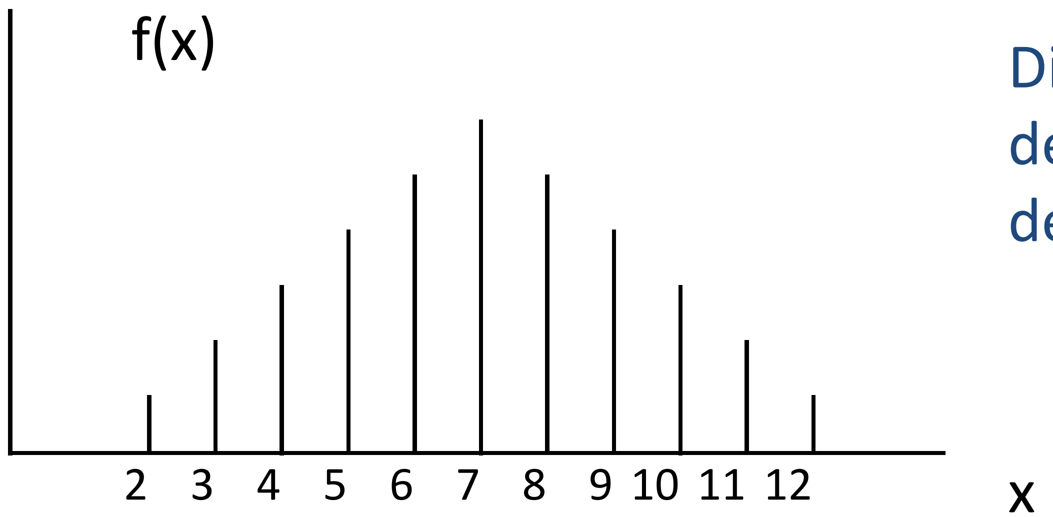
$$f: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow f(x) = P(X=x)$$



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	otros
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0

EJEMPLO: V.A. DISCRETAS



Distribución de probabilidad de X o función de probabilidad de la v.a. X

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**otros**
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0

V.A. DISCRETA: Función de distribución acumulada

$f: R \to [0,1]$

$x \to P(X=x)$

$F: R \to [0,1]$

$x \to P(X \leq x)$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	otros
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	???

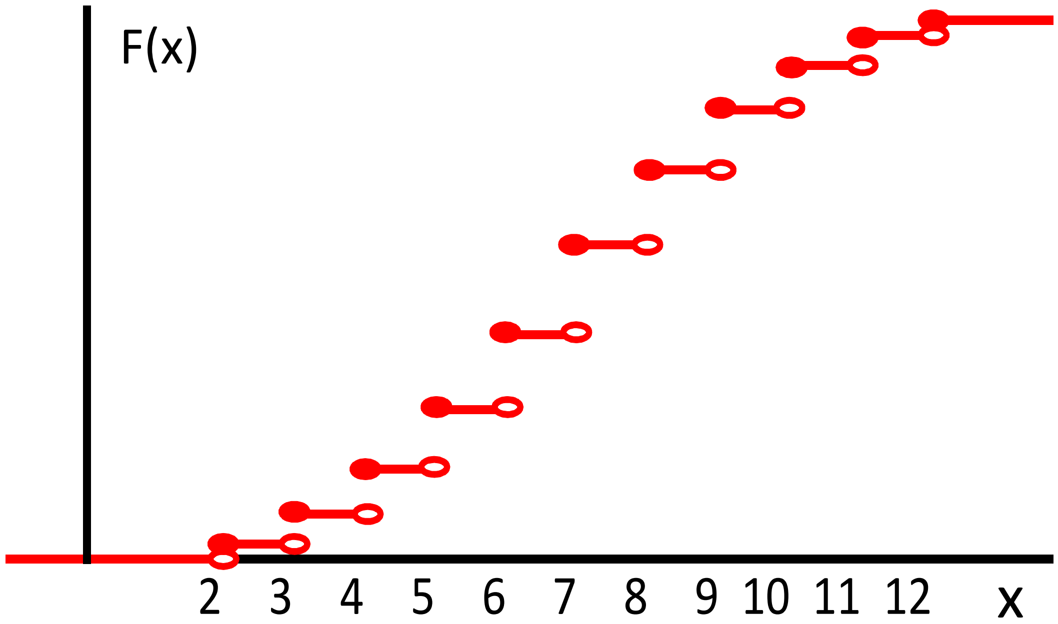
V.A. DISCRETA: Función de distribución acumulada

Representación gráfica F(x)

$$F: R \to [0,1]$$

$$x \to Fx) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$



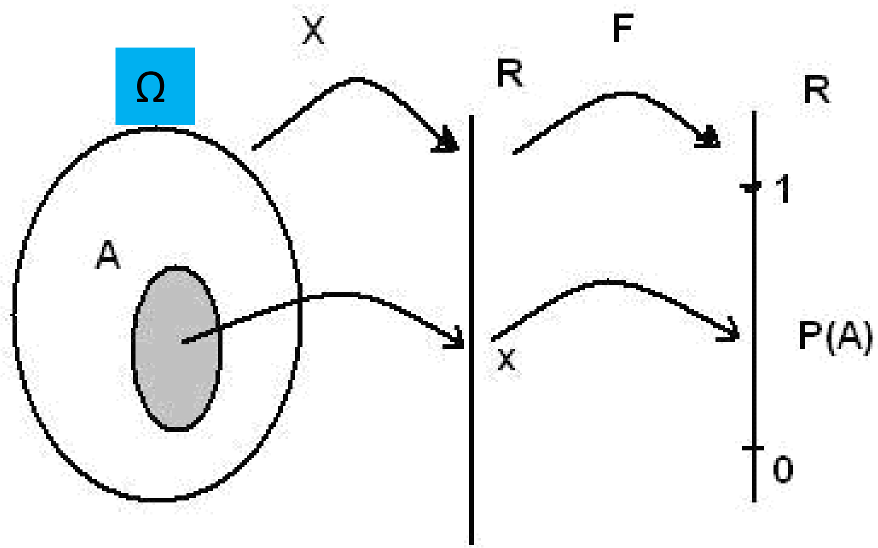
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	otros
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	???

Función de distribución acumulada de una v.a.d.

<u>Definición:</u> Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una v.a. definida en Ω. Se llama función de distribución acumulativa de la v.a. X a la función:

Fx: R → [0,1]

Fx (x) = P({ω/ω ε Ω ∧ X(ω) ≤ x}) = P(X≤x)



Función de distribución acumulada

En el ejemplo de los cheques

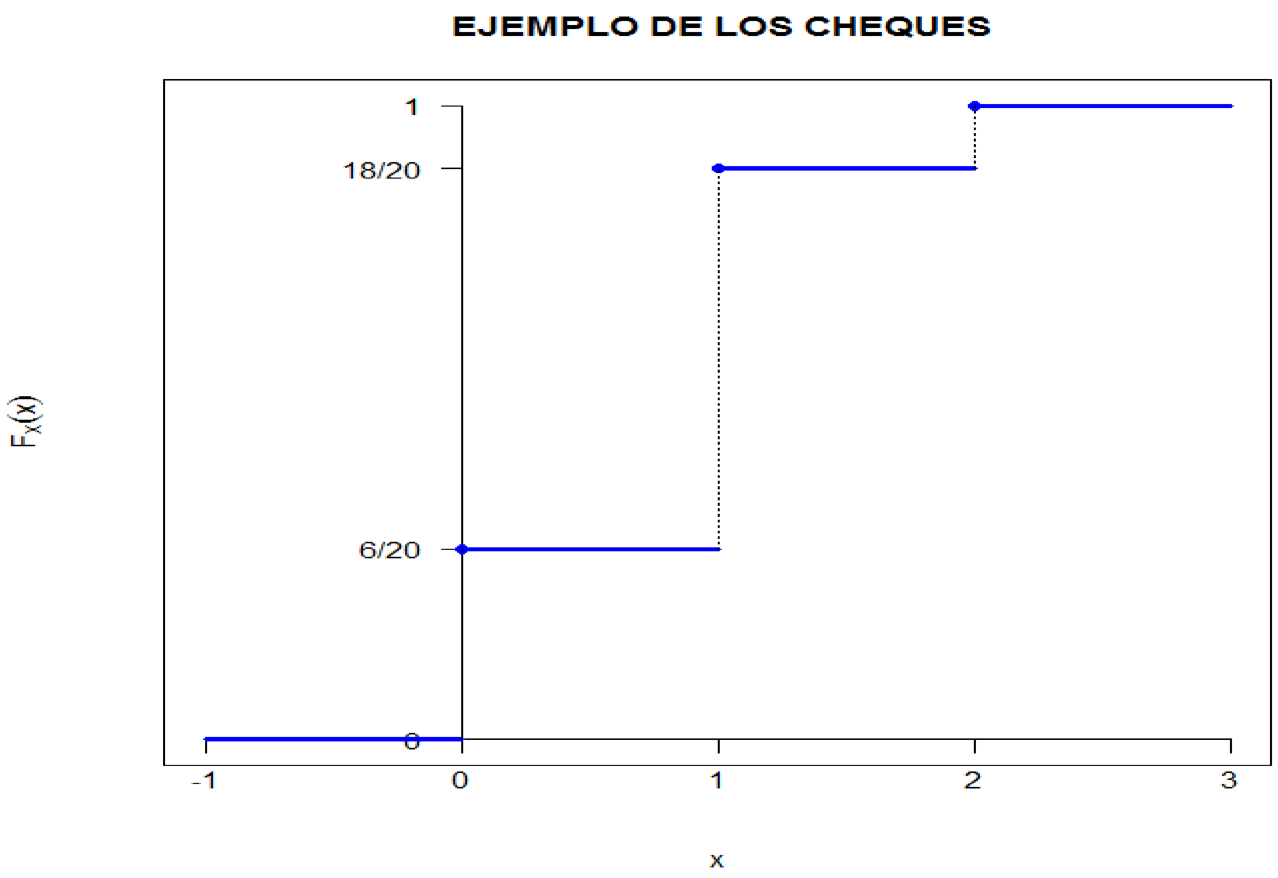
(experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha)

- $F_X(0)=P(\{\omega/\omega\in\Omega \wedge X(\omega)\leq 0\} = P(X\leq 0) = P(e´,e´) = 6/20$
- $F_X(1)=P(\{\omega/\omega\in\Omega \wedge X(\omega)\leq 1\} = P(X\leq 1) =$
  $P\{(e´,e´),(e,e´),(e´,e)\} = 18/20$
- $F_X(2)=P(\{\omega/\omega\in\Omega \wedge X(\omega)\leq 2\}) = P(X\leq 2) = P\{(e´,e´),(e,e´),(e´,e),(e,e)\} = 20/20$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & si & x<0 \\ \frac{6}{20} & si & 0\leq x<1 \\ \frac{18}{20} & si & 1\leq x<2 \\ 1 & si & x\geq 2 \end{cases}$$

Función de distribución acumulada

Gráfico de la función de distribución acumulada de una v.a.d.



PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN acumulada

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

2) F_X es no decreciente ó creciente en sentido amplio:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

3) La función Fx es una función continua por la derecha en cada punto. Es decir que la función es continua por intervalos y presenta discontinuidades o "saltos" en los que el valor de la función es igual al límite por la derecha:

$$\lim\limits_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x) \; ; \quad \forall\, x \in R$$

Función de distribución acumulada

- Estas se denominan propiedades fundamentales porque:

- Cualquier función de distribución acumulativa tiene que cumplir estas 3 propiedades, si una función no cumple alguna de ellas, no es una función de distribución.

- Cualquier $g_X : R \longrightarrow [0,1]$ que cumpla con estas tres propiedades es una función de distribución acumulativa de una v.a.

Variables aleatorias discretas

Relación entre f(x) y F(x)

- 1) Sea x una v.a.d. definida en Ω. Supongamos que se conoce f_X , entonces se obtiene la función F_X :

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} f_X(x_j) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j)$$

- 2) Supongamos que se conoce F_X , entonces se obtiene la función f_X :

$$f_X(x) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) - \lim_{h \to 0^-} F_X(x-h) = F_X(x) - \lim_{h \to 0^-} F_X(x-h)$$

Cálculo de F_X y f_X :

Veamos estas relaciones en el ejemplo de los cheques. Si queremos calcular:

1) la probabilidad de obtener a lo sumo un cheque con error a partir de la función de densidad, equivale a plantear

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \sum_{x_j \leq 1} f_X(x_j) = \sum_{x_j \leq 1} P\left(X = x_j\right) = \sum_{x_j = 0}^{1} P\left(X = x_j\right)$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) = \tfrac{6}{20} + \tfrac{12}{20} = \tfrac{18}{20}$$

2) la probabilidad de obtener exactamente un cheque con error a partir de la función de distribución acumulada, equivale a plantear

$$P(X = 1) = f_X(1) = F_X(1) - \lim_{h \to 0^-} F_X(1 - h) = F_X(1) - F_X(0) = \tfrac{18}{20} - \tfrac{6}{20} = \tfrac{12}{20}$$

ESPERANZA de una v.a.discreta

- Sea (Ω,P) un espacio de probabilidad y X una v.a.d. definida en Ω, con función de probabilidad $f_{X.}$ Se llama esperanza, valor esperado o media de la v.a. X al número, si existe:

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)$$

- La esperanza representa el valor promedio de una v.a., después de un número grande de experimentos; da una idea del "centro de equilibrio" o de la "Tendencia central" de la distribución de los valores de la v.a. X.
- Cabe aclarar que la esperanza de una v.a. puede no existir, ya que si el campo de variación de la v.a. no es un conjunto finito, sino que es un conjunto infinito numerable; la suma es una serie infinita. Por lo que la esperanza existirá si la serie es absolutamente convergente.

<u>EJEMPLO:</u> Esperanza

- En el ejemplo de los cheques
- X = "numero de cheques con error“

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$E(X)=\sum_{x_j\in X(S)} x_j f_X(x_j)=\sum_{x_j\in\{0,1,2\}} x_j P(X=x_j)$$

$$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=0+\tfrac{12}{20}+\tfrac{4}{20}=\tfrac{16}{20}$$

$$E(X)=0.8 \quad \textit{cheques con error}$$

- Este número es un “promedio esperado”, no un valor real y una forma de interpretar este resultado es: *“Se espera que el nº promedio de cheques con error sea de 0.8”*

Ejemplo: esperanza

La demanda (en unidades) de cierto producto varía de mes a mes, basándose en la información obtenida en el pasado, se puede construir una distribución de probabilidad de la demanda del producto en cuestión

Meses	Demanda por mes (x)	Probabilidad (f_X)
Enero	300	0,2
Febrero	400	0,3
Marzo	500	0,35
Abril	600	0,15

$$E(X) = \sum_{x_j \in X(S)} x_j f_X(x_j)$$

E(X)= 300. 0,2 + 400. 0,3 + 500. 0,35 +600. 0,15

E(X)= 445

El valor esperado o esperanza de la v.a. "demanda por mes“ es de 445 unidades. (Se espera una demanda de 445 unidades por mes)

Valor esperado de una función de probabilidad

Supongamos que la v.a. X toma ciertos valores x_i . Y que h(X) es una función de la v.a. X.

Formalmente esto significa:

X: $\Omega \to$R, h: R$\to$R. h$\circ$X: $\Omega \to$R es otra v.a.

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i)$$

Propiedades de la esperanza de una v.a. discreta

1) La esperanza de una constante es la constante misma:

$$X: \Omega \longrightarrow R, \qquad X(\Omega) = c, \ \forall \omega \in \Omega$$

$$E(c) = c$$

2) Sean "g", "h" dos funciones reales, g(X) y h(X) también son v. a., entonces la esperanza de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de las esperanzas de dichas funciones:

$$E(g(X) \pm h(X)) = E(g(X)) \pm E(h(X))$$

Propiedades de la esperanza de una v.a. discreta

3) La esperanza de una constante por una función, es el producto de la constante por la esperanza de la función:

$$E(c\ g(X)) = c\ E(g(X))$$

Combinando propiedades

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Varianza de una v.a.discreta

- Hemos visto que la Esperanza de una v.a. nos da idea del centro de la distribución de los valores de la v.a. X, pero no nos da información sobre la forma en que se distribuyen dichos valores.

- Puede ocurrir que tengamos dos v.a. X_1 y X_2 que tengan el mismo valor medio y sin embargo su funciones densidad sean diferentes.

- Una medida que refleja como se distribuyen los valores alrededor de la media es la **Varianza**.

Varianza de una variable a. discreta

La varianza de una variable aleatoria da una idea de la "forma de la distribución", es decir en cuanto se alejan los valores de la variable respecto del valor central.

$$\operatorname{var}(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X-\mu)^2 = \sigma^2$$

La diferencia $(X - E(X))^2$ nos indica cuánto se alejan los valores de la v.a. respecto de su “media” y la varianza considera el “promedio” de todas esas distancias.

$$\sigma_X^2 = \operatorname{var}(X) = \sum_{x_j \in X(S)} \big(x_j - E(X)\big)^2 \; f_X(x_j)$$

Desviación Estándar

- Notar que por su definición esta medida es no negativa.

Propiedades de la varianza de una variable aleatoria discreta

1) $V(a) = 0$ a es una constante

2) $V(a\,X) = a^2\,V(X)$

3) Fórmula abreviada: $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$$E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2\, f(x_i)$$

Siendo

4) $V(aX+b)=a^2V(X)+0=a^2V(X)$

Como la Varianza no posee las mismas dimensiones que los valores de la v.a., la ajustamos tomando la raíz cuadrada, definiendo de esa forma la DESVIACION ESTANDAR

Ejemplo 1: V.a. discretas

El ingeniero de transporte estudia el comportamiento del tránsito en un cruce de calles, para lo cual se dirige al mismo todos los días de la semana en la hora pico, alrededor del mediodía; espera que el semáforo cumpla un ciclo y registra el número de vehículos con dirección sur que se detienen antes de que el semáforo cambie a verde. Define su variable en estudio, X, como el número observado de vehículos detenidos en el semáforo, y después de analizar los resultados obtenidos decide asignar las siguientes probabilidades:

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

Ejemplo 1: v.a. discretas

En este ejercicio X es el número de vehículos detenidos en el semáforo y se pide:

a) Verificar si la función f(x) cumple las condiciones para ser una función de probabilidad.
b) Construir la función de distribución acumulada.
c) Representar gráficamente las funciones f(x) y F(x).
d) Calcular la probabilidad de que se forme una cola con 2 o más vehículos
e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de vehículos detenidos en el semáforo.

<u>Ejemplo 1</u>: Cálculo de f_X

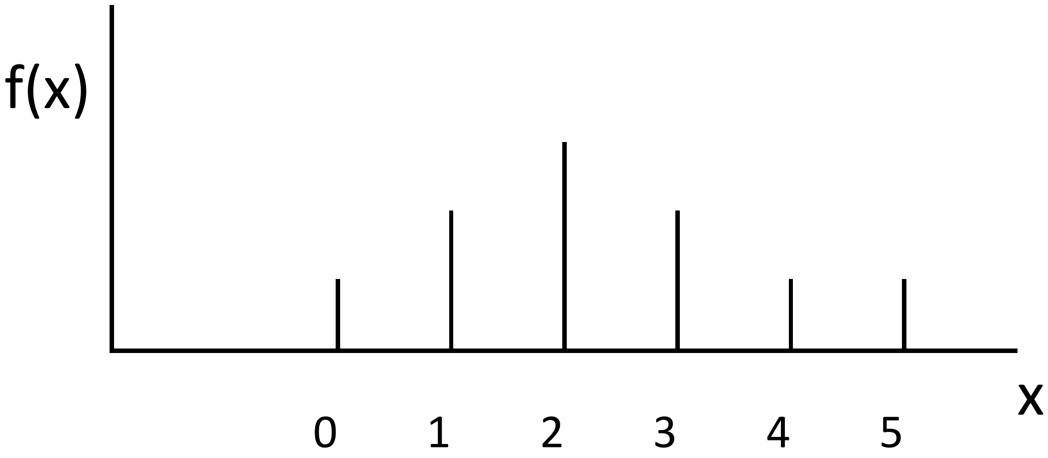
a) Verificar si la función f(x) cumple las condiciones para ser una función de probabilidad:

1)f(x) ≥ 0;

2) ∑ f(x) = 1;

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

La función de probabilidad f(x) está correctamente descrita con la tabla.
Hagamos su gráfico:

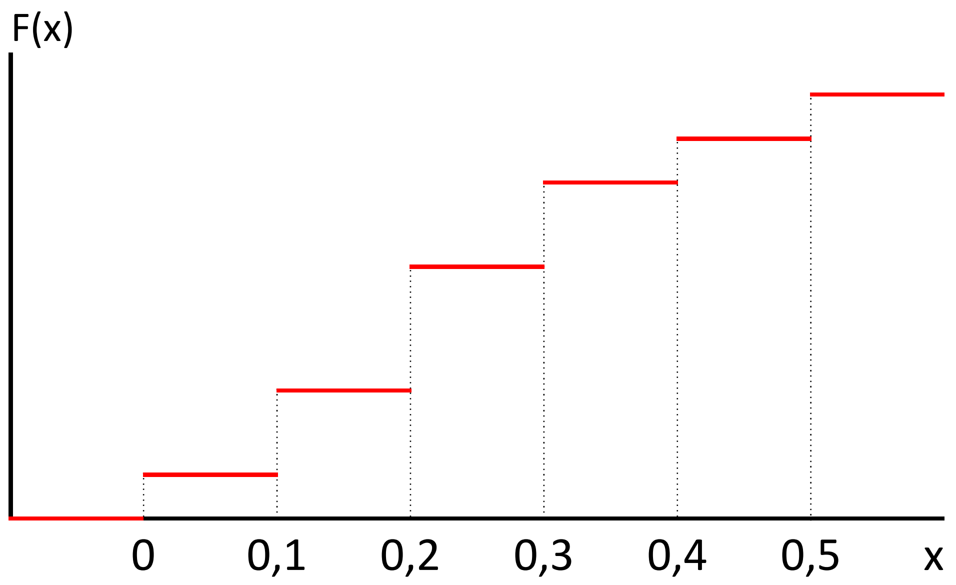


Ejemplo 1: Cálculo de F_X

b) Construir la función de distribución acumulada.
c) Representar gráficamente las funciones f(x) y F(x).

x	0	1	2	3	4	5	Otro
f(x)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0
F(X)	**0.1**	**0,3**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**1.0**	

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 0.1, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 0.3, & \text{si } 1 \le x < 2, \\ 0.6, & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 0.8, & \text{si } 3 \le x < 4, \\ 0.9, & 4 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$



- D)

Ejemplo 1: Cálculo de E(X) y Var(X)

e)Determinar el valor esperado y la varianza del número de vehículos detenidos en el semáforo.

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

$$\mathbf{E(X)} = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}1$$

$$\mathbf{E(X)} = \mathbf{2{,}3}$$

$$\mathbf{Var(X)} = E(X^2) - (E(X))^2 = 7{,}3 - (2{,}3)^2$$

$$\mathbf{Var(X)} = \mathbf{2{,}01}$$

$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}1 + 2^2 \times 0{,}3 + 3^2 \times 0{,}2 + 4^2 \times 0{,}1 + 5^2 \times 0{,}1 = \mathbf{7{,}3}$

Variables aleatorias discretas

Mencionemos otros ejemplos de v.a. discretas, que no sean finitas.

Ejemplo: número de veces que debo tirar un dado hasta obtener un "1".

En este ejemplo:

- ¿cuál es el experimento aleatorio?
- ¿cuál es el espacio muestral?
- ¿qué valores toma la v.a.?

Variables aleatorias continuas

Variable aleatoria

Variable aleatoria continua

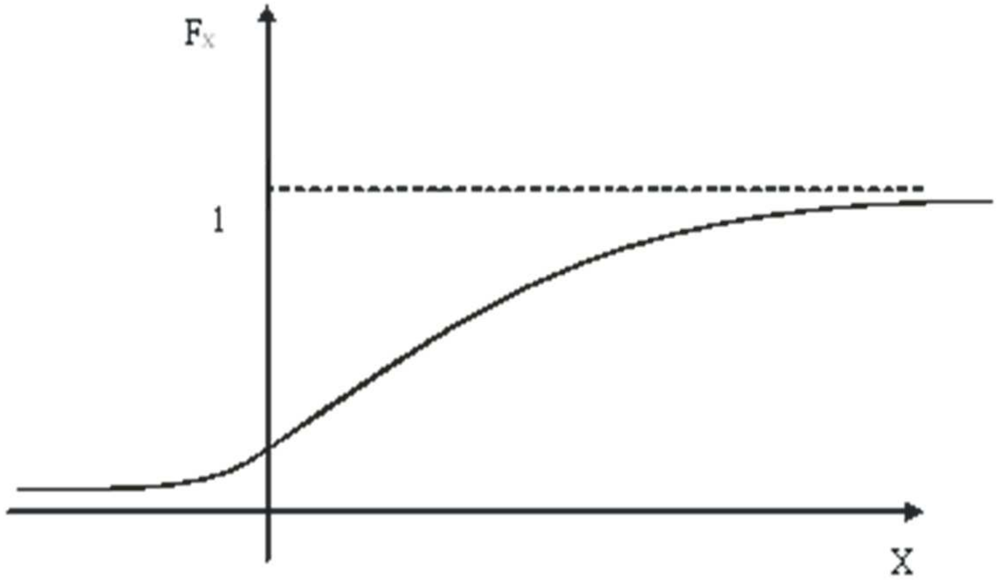
Definición: X es una variable aleatoria **CONTINUA** si $X(\Omega)$ es un conjunto infinito no numerable.

- Ejemplo:
- ε: seleccionar un alumno que cursa la carrera de ingeniería en Mendoza.
- Ω son los alumnos de ingeniería de Mendoza
- X: estatura de los alumnos de ingeniería (en m)
- $X(\Omega)=(1;1.90)$

Función de distribución acumulativa de una v. a. continua

- Sea $(\Omega; P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida en Ω. Se llama función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X a la función:
- $F_X : R \to [0; 1]$
- $F_X(x) = P(X \leq x)$ para cada $x \in R$

Función de distribución acumulativa

- La función de distribución acumulada de una v.a.c. es siempre una función continua, y su representación gráfica es del tipo:
- 

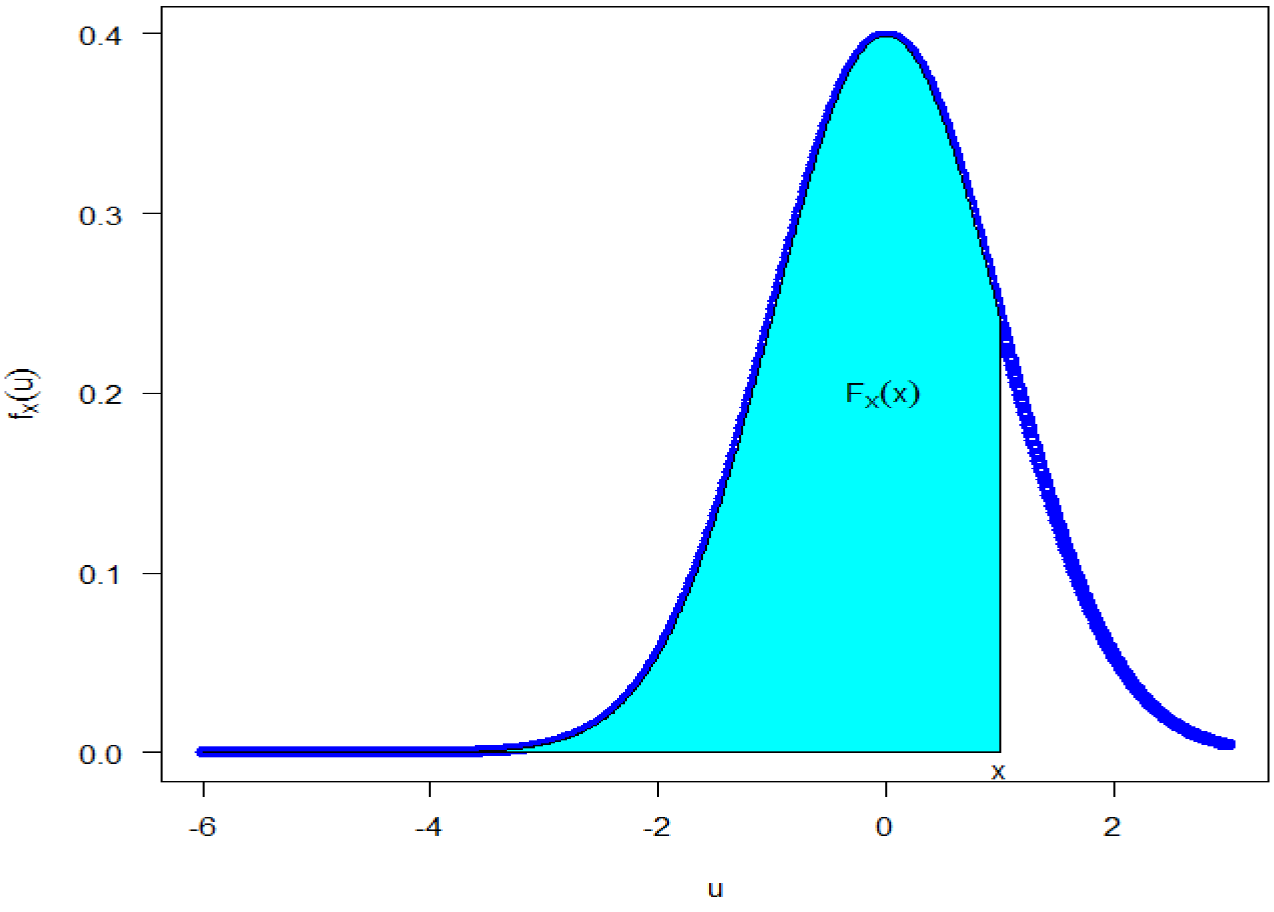
Propiedades Fundamentales de la función de distribución acumulativa

- i) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- ii) Es una función no decreciente o creciente en sentido amplio:
- $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
- iii) Es una función continua por derecha para todo x ε R
- $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X(x+h) = F_X(x)$$
- Iv) Fx es derivable en casi todo x.

Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua

- Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad, X una v. a. c. definida en Ω , con F_X. Se llama función densidad de la v. a. X a f_X tal que:
- $\mathbf{f_X : R \to R}$ tal que:
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$
- **Fx** es una primitiva de **fx**
- En consecuencia **f(x)** es la derivada de **F(x)** en cada punto donde F(x) es derivable

Función de densidad de probabilidad



Propiedades fundamentales $f_{\boldsymbol{X}}$

- i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \; \varepsilon \; R$
- Como f_X es la derivada de F_X y ésta es una función no decreciente, sus derivadas son no negativas.

- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

Observaciones

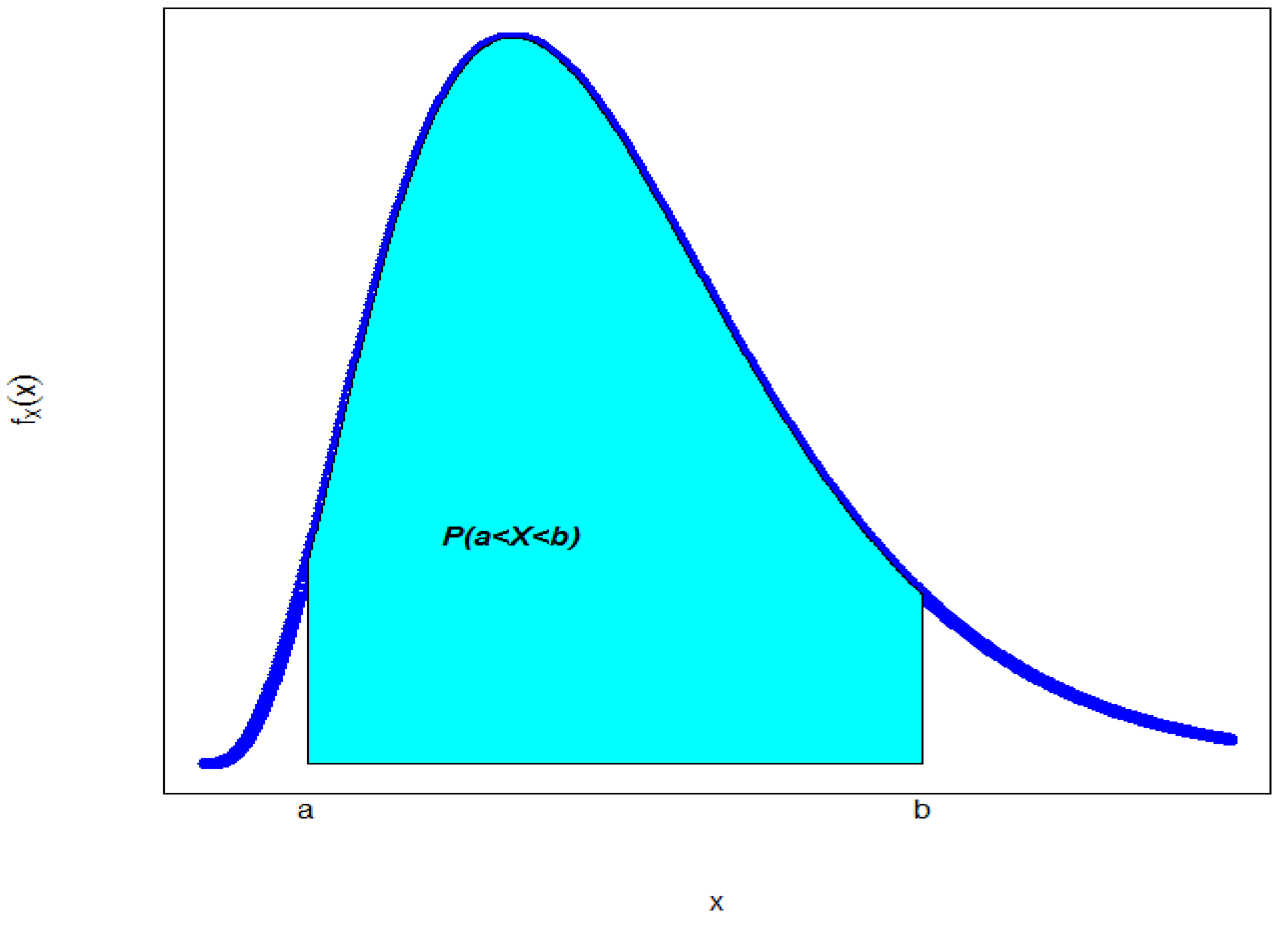
- La probabilidad es una medida dada por una integral definida, es decir, un área.
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$$= F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

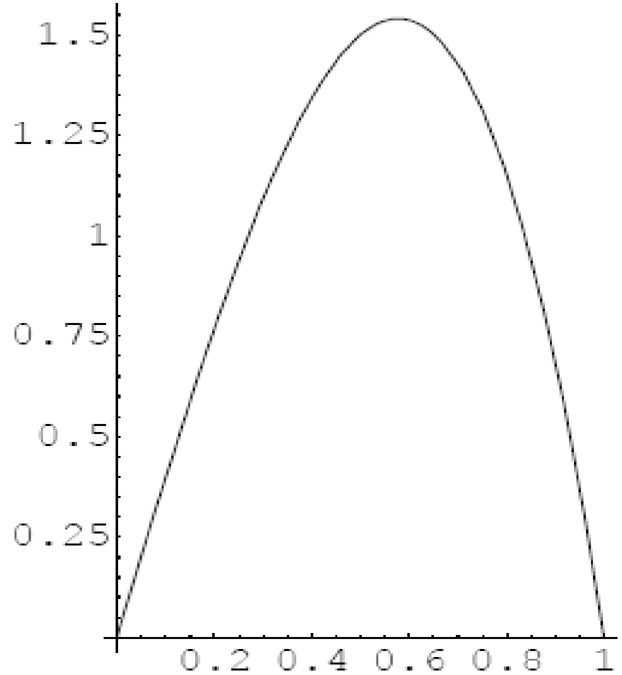
Función de densidad



Observaciones de f_X

Sea la función de densidad :

$$f(x) = 4x(1 - x^2),\ 0 \leq x \leq 1.$$



- fX puede tomar valores mayores que uno, fX no representa una probabilidad en x.

Observaciones de $\boldsymbol{f_X}$

- La probabilidad de que X tome un valor en un punto x, es decir

$$P(X=x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>o}}\int_{x-h}^{x} f_X(x)dx=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>o}} P(x-h<X\leq x)$$

$$P(X=x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>o}}(P(X\leq x)-P(X<x-h))$$

$$P(X=x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>o}}(F(X\leq x)-P(X<x-h))$$

$$P(X=x)=F(X\leq x)-\lim_{\substack{h\to 0\\ h>o}} P(X<x-h)$$

$$P(X=x)=F(X\leq x)-F(X\leq x)=0$$

Observaciones de $\boldsymbol{f_X}$

-La probabilidad es una medida dada por la integral definida es decir un área

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Como es un área, son iguales

$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

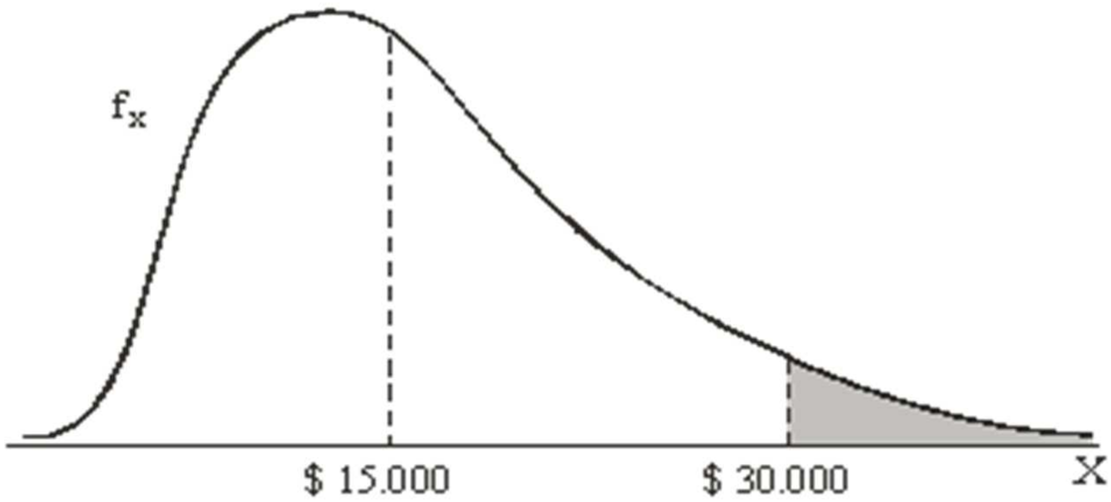
$P(X=a)=0$

Relación entre $\boldsymbol{f_X}$ y $\boldsymbol{F_X}$

- $\boldsymbol{f_X}$ es la función densidad y es la derivada de la función de distribución acumulada. Es decir , que en cada punto donde $\boldsymbol{f_X}$ es derivable se cumple:
- $f_X(x) = F'_X(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

Ejemplo

- Si calculamos aproximadamente la distribución del ingreso familiar con una curva suave como muestra la figura, podemos determinar qué proporción de los ingresos queda contenida en un intervalo dado (o la probabilidad de que el ingreso de una familia, elegida al azar, esté dentro del intervalo), observando el área correspondiente situada debajo de la curva.



- Al comparar el área de la región sombreada con el área total situada debajo de la curva (que representa el 100%), podemos decir a simple vista que más o menos entre el 10 y el 12% de las familias tienen ingresos anuales de $30.000 o más. Del mismo modo, es posible apreciar que cerca del 40 a 45% de las familias tienen ingresos de $15.000 o menos.

Función de distribución acumulada

Repasemos lo que teníamos en el caso discreto:

$f: R \to [0,1]$

$x \to P(X=x)$

$F: R \to [0,1]$

$x \to P(X \leq x)$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

En el caso continuo hay cambios:

$f: R \to R$

$x \to f(x)$

$F: R \to R$

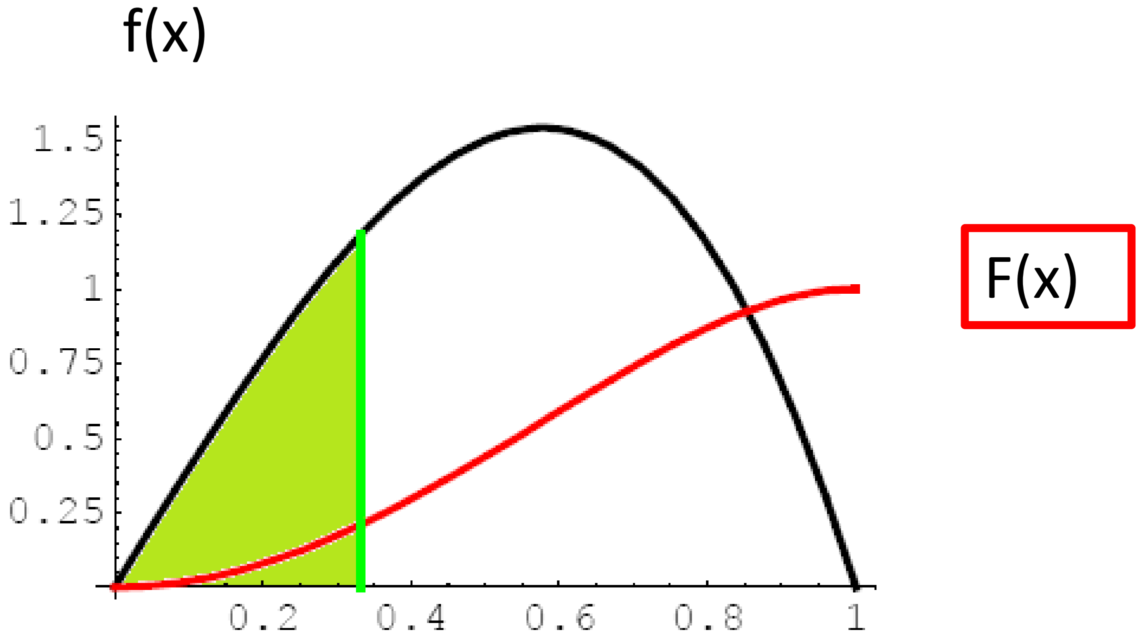
$x \to P(X \leq x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Función de distribución acumulada de una v.a.c.

Representación gráfica de la F(x) y f(x)

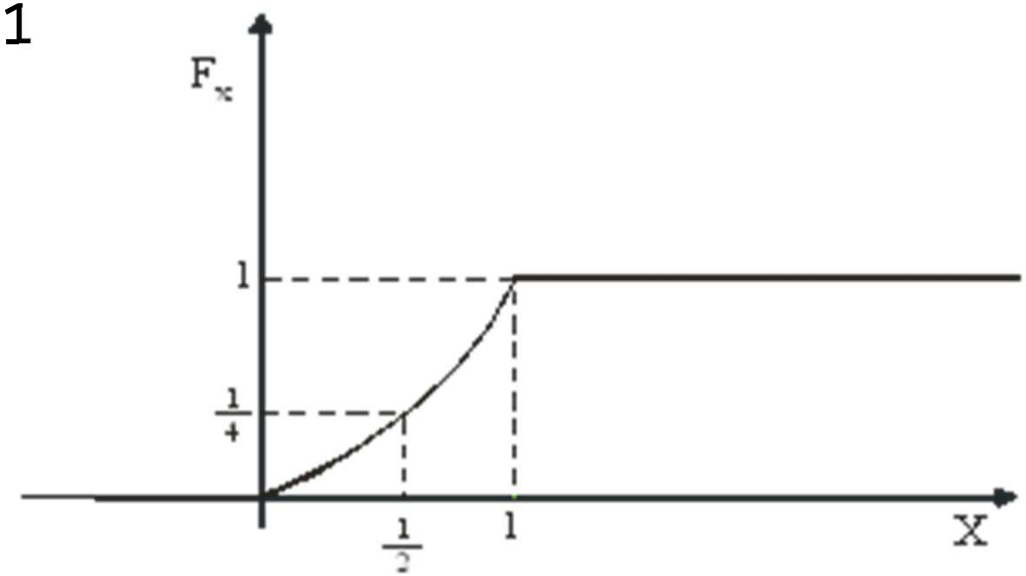
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$



Ejemplo

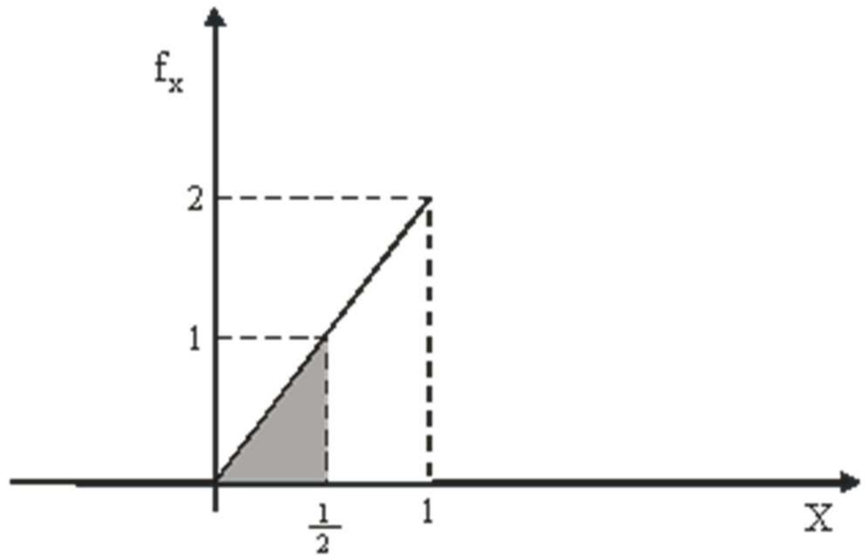
- Sea X: tiempo de llegada (en horas) del primer cliente a una playa de estacionamiento, cuya función de distribución acumulada esta definida por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



Ejemplo

- b) Calcule la función de densidad y represéntela
- $f_X(x) = F'_X(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- $f_X(x) = 2x$



- c) Compruebe si f_X cumple con las propiedades fundamentales
- i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$ (por ser la derivada de una función no decreciente)
- Ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

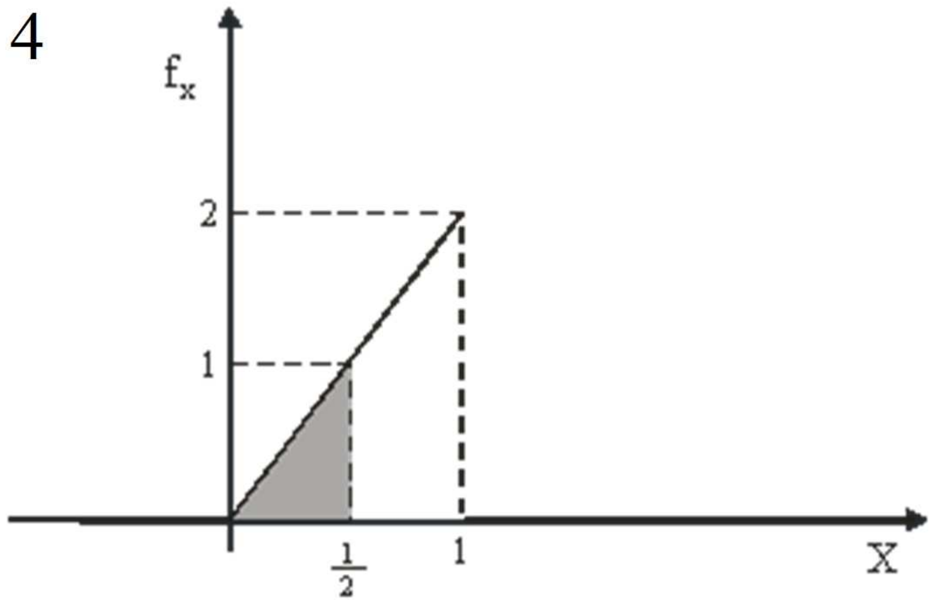
$$\int_0^1 2x \quad dx = 2\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$$

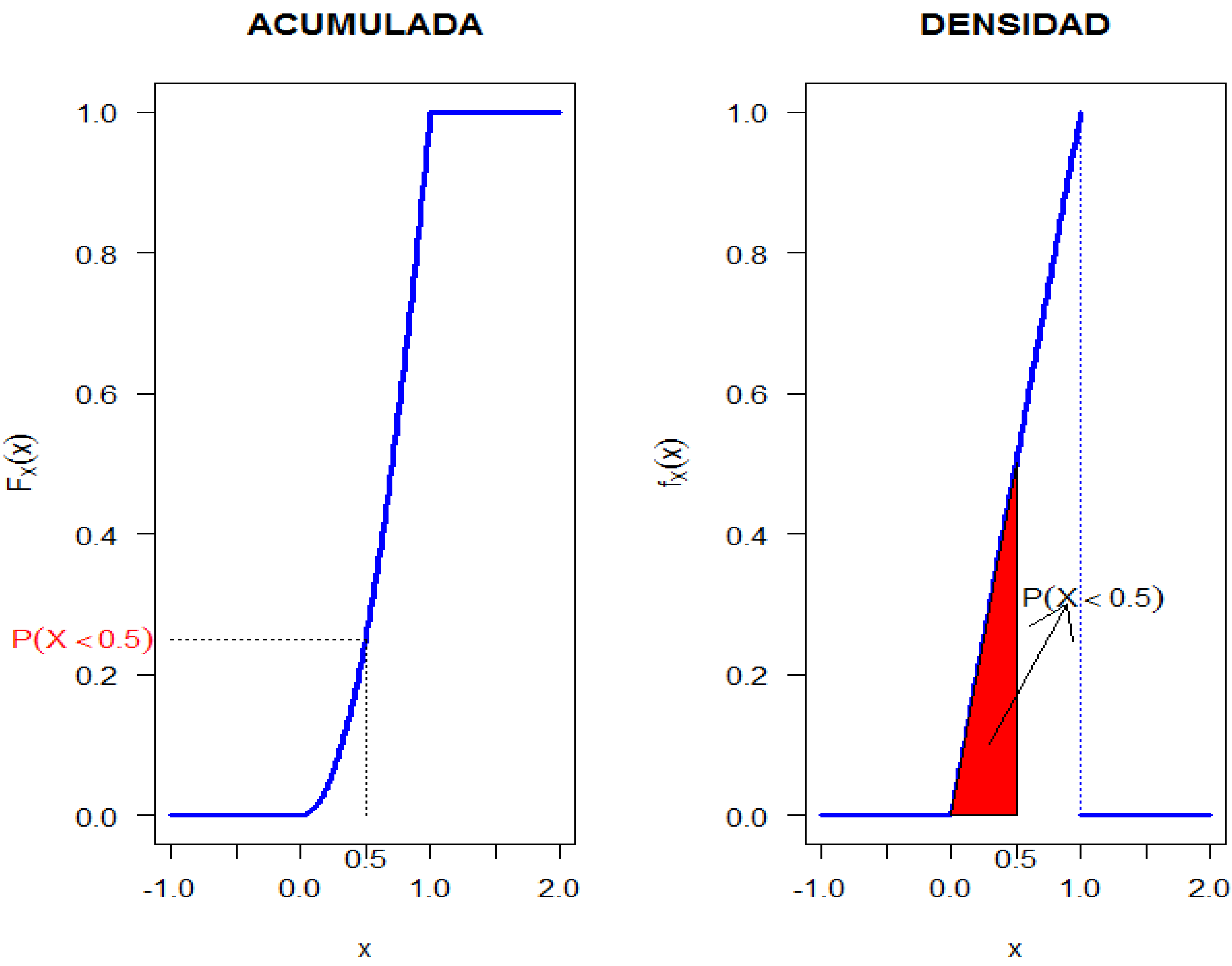
Ejercicios

- d) Calcule la probabilidad que el cliente llegue antes de media hora y represéntela

$$P(X \leq \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \quad dx = \frac{1}{4}$$

- La probabilidad de que
- un cliente llegue antes
- de media hora es 0,25.




ACUMULADA
DENSIDAD
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$F_X(x)$
$f_X(x)$
P(X < 0.5)
P(X < 0.5)
-1.0
0.0
0.5
1.0
2.0
x
x

Esperanza de una v.a.continua

Recordemos el caso de una v.a. discreta:

$$E(X)=\sum_{x_i} x_i \, f(x_i)$$

Es lógico que ahora se defina como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx = \mu$$

Si los valores de X, x, son vistos como los puntos de una varilla de material cuya densidad no es uniforme sino que viene dada en cada punto x por f(x), E(X) es el centro de gravedad de la varilla.

Esperanza de una v. a. continua

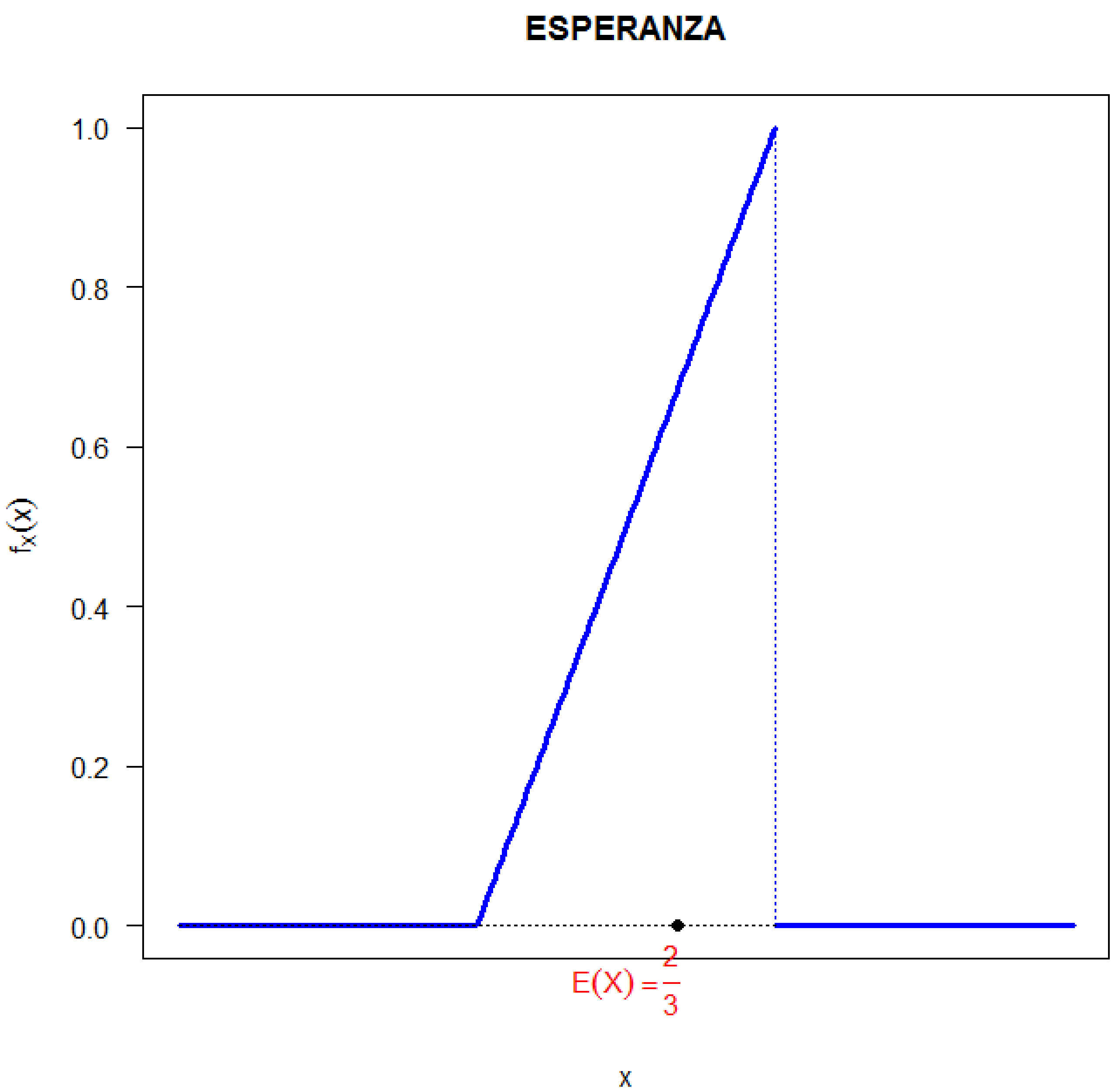
- Sea X una v. a. c. y fx su función de densidad, llamamos Esperanza de X al número (si es finita)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

- En el ejemplo en que la v. a. X representa el tiempo hasta la llegada del primer vehículo a la playa de estacionamiento, la esperanza es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

- interprete


ESPERANZA
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$f_X(x)$
$E(X) = \frac{2}{3}$
x

Esperanza de una variable aleatoria continua

Supongamos que X es una v.a. continua con función de densidad f y que h(X) es una función de X.

Formalmente esto significa:

X: $\Omega \rightarrow$R, h: R$\rightarrow$R.   h$\circ$X: $\Omega \rightarrow$R es otra v.a..

$$E(h(X)) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

Propiedad de la esperanza:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Varianza de una variable aleatoria continua

Sea la v.a. X con valor esperado μ y función de densidad f.

$V(X)=\sigma^2$ se define por:

$$V(X)=\sigma^2=E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$V(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

La desviación estándar de X es:

$$DE(X)=\sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

Propiedades de la varianza v.a.c

Fórmula abreviada:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2\ ) - \mu^2$$

$E(X^2)$ se calcula haciendo… ¿qué?

$$E(X^2)= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)+0 = a^2V(X)$$

Varianza

- $\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18\ (hs)^2$

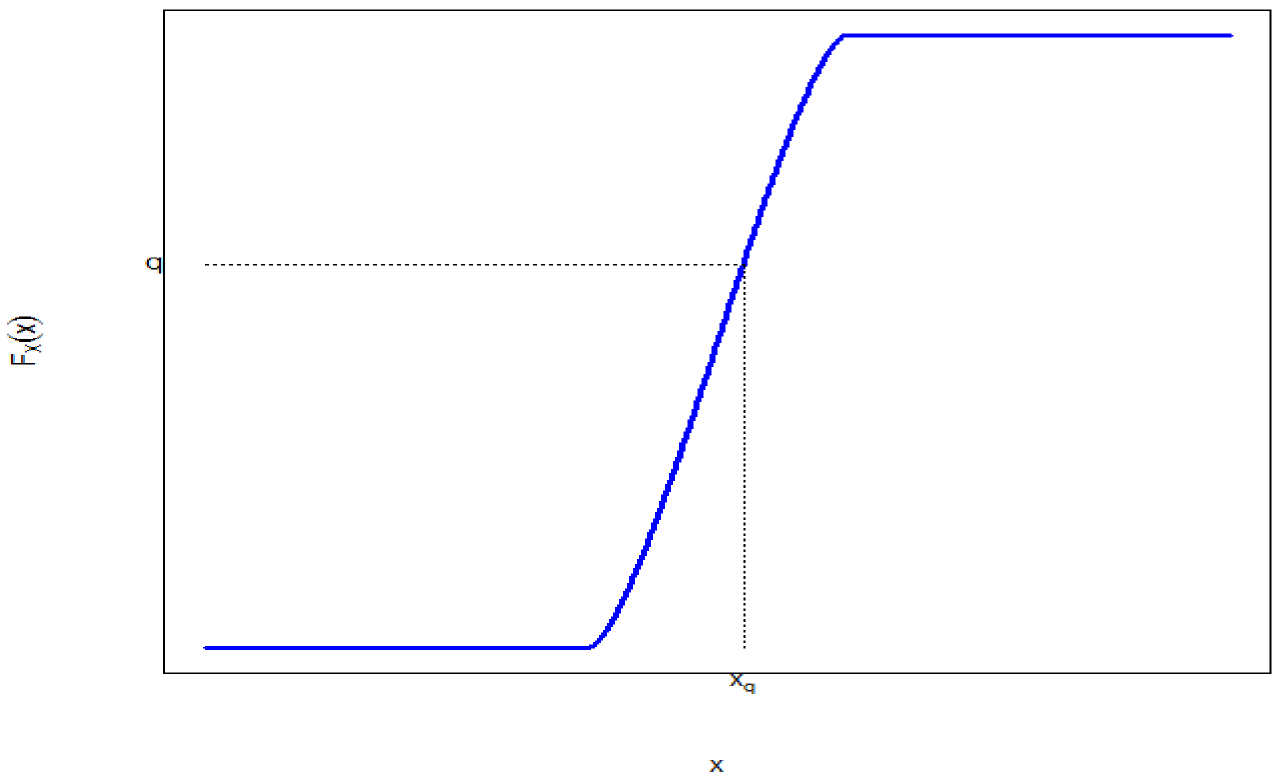
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}(horas)^2} \cong 0{,}24 horas$$

- En promedio, el tiempo de llegada del primer cliente a la playa de estacionamiento se desvía de su esperanza en 0,24 horas.

Cuantiles de una variable aleatoria continua

- Si x es una variable aleatoria continua su función de distribución acumulativa es una función continua.
- Luego, dado un valor q $(0 < q < 1)$ existe un valor x_q de la variable aleatoria X tal que
- $P(X \leq x_q) = F_X(x_q) = q$.
- cuantil x_q

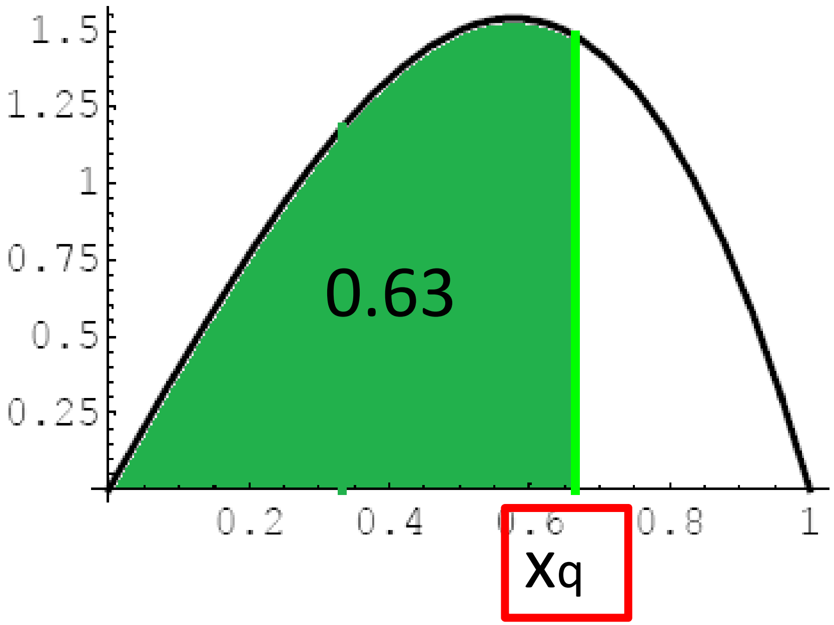
Gráfico de un cuantil

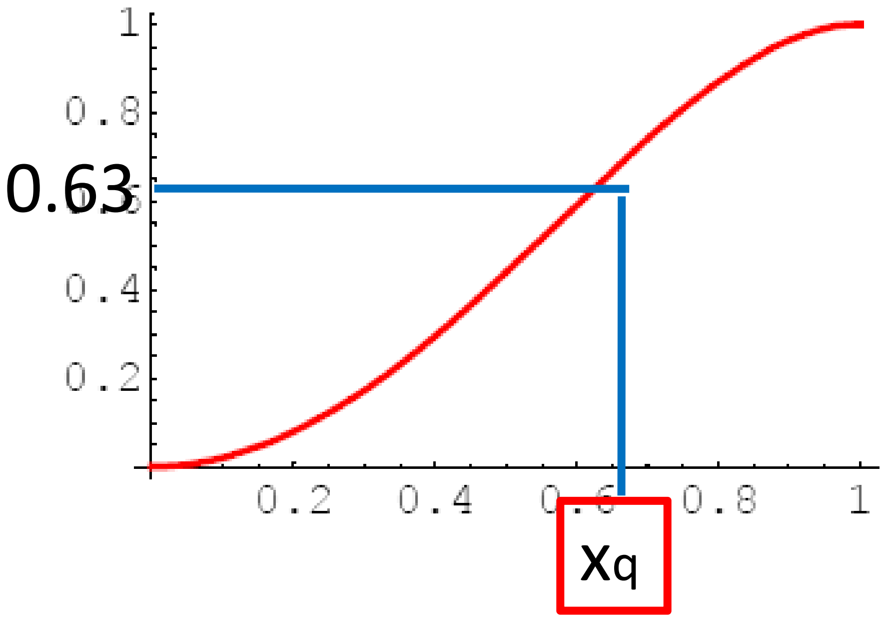


Ejemplo de un cuantil o percentiles de una distribución continua

- ¿Cuál es el percentil 63?
- Llamémoslo q por un momento
- $P(X \leq x_q)=0.63$, o sea
- $F(x_q)=0.63$

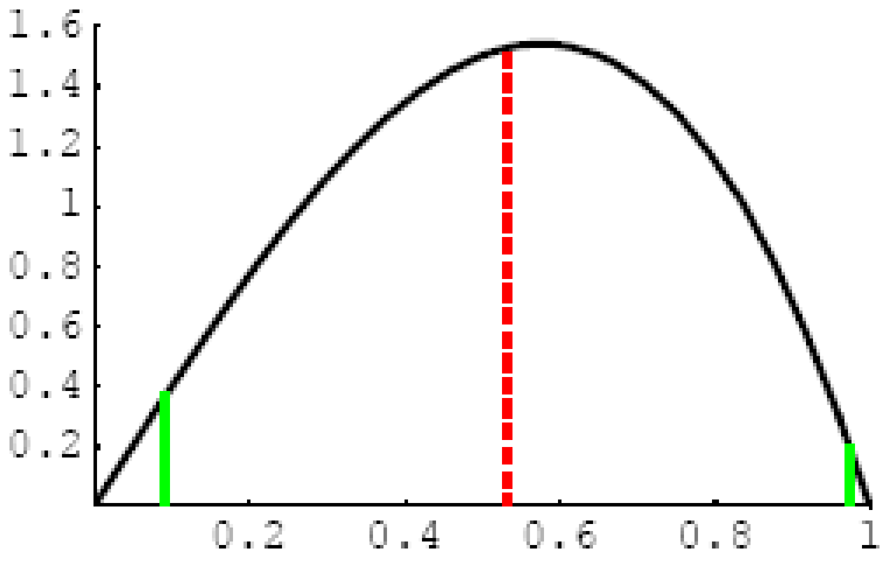
$$\int_{-\infty}^{x_q} f(x)\,dx = 0.63.$$





Teorema de Chebyshev

- La probabilidad de que cualquier v.a. X tome un valor dentro de k desviaciones estándar de la media es al menos $1-1/k^2$.
- $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$



k	$1-1/k^2$
1	0
1.5	0.55
2	0.75

VARIABLE ALEATORIA

ejercicios

Autoevaluaciones

1. Una variable aleatoria es una función que asigna un número real a cada resultado en el espacio muestral de un experimento estadístico. **V**

7. El volumen de nafta que se pierde por evaporación durante el llenado del tanque de combustible, es una variable aleatoria *discreta*. **F**

8. El número de moléculas raras presentes en una muestra de aire es una variable aleatoria *continua*. **F**

10. En la mayoría de las aplicaciones prácticas, las variables aleatorias *continuas* representan datos medidos, mientras que las variables aleatorias *discretas* representan datos contados. **V**

16. El conjunto de pares ordenados [$x, f(x)$] se llama *función de probabilidad*, *función masa de probabilidad*, *función de cuantía* o *distribución de probabilidad* de la variable aleatoria **discreta** X. **V**

18. La probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome valores menores o iguales que el particular valor x, está dada por el valor de la función masa de probabilidad $f(x)$. **F**

20. Tanto en el caso de variables aleatorias *discretas* como *continuas*, la probabilidad de que la variable aleatoria Y tome el particular valor y, está dado por el valor de $f(y)$. **F**

22. La distribución acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X, con distribución de probabilidad $f(x)$, toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$. **F**

26. Dada una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad $f(x)$, se cumple siempre la siguiente igualdad: $P(X < x) = P(X \leq x)$. **F**

27. Si la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X toma el valor $f(3)=0{,}15$, debe interpretarse que la probabilidad de que dicha variable exceda el valor *3* es 0,15. **F**

28. Si la función de la distribución acumulada de una variable aleatoria discreta X toma el valor $F(2)=0{,}4$, debemos interpretar que la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor *2* es igual a 0,4. **F**

29. Una de las condiciones que debe cumplir la función de masa de probabilidad, $f(x)$, de la variable aleatoria discreta X, es que $-1 \leq f(x) \leq +1$. **F**

35. La función de densidad de probabilidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua X, siempre y sin restricciones, toma valores iguales o mayores que cero. **V**

36. La función de densidad de probabilidad $f(y)$ de una variable aleatoria continua Y, no puede tomar valores mayores que uno. **F**

37. Cuando una variable aleatoria continua X toma el particular valor $x = mediana$, la función de distribución acumulada toma el valor 0,5. **V**

48. La *mediana* de una variable aleatoria continua X, se puede obtener a partir de la función de distribución acumulada, para el valor particular de $x = 0{,}5$. **F**

39. Dada una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$, se cumple que $P(X = x) = 0$. Esto debe ser interpretado como que es imposible que la variable aleatoria X asuma el particular valor x. **F**

40. Si se tiene una variable aleatoria continua U con función de densidad de probabilidad $f(u)$ y función de distribución acumulada $F(u)$, siempre se cumple lo siguiente: $P(u_1 \leq U < u_2) = F(u_2) - F(u_1)$, donde $u_2 > u_1$ son particulares valores de la variable aleatoria U. **V**

41. Si se tiene una variable aleatoria continua V con función de densidad de probabilidad $f(v)$, siempre se cumple que: $P(a \leq V < b) = P(a \leq V \leq b)$, donde a y b son particulares valores de la variable aleatoria V. **V**

45. Dada una variable aleatoria discreta X, si $F(7) = F(5)$, entonces $f(7) = f(5)$. V o F **F**

46. Si X es una variable aleatoria continua que toma valores sólo en el intervalo [2; 4], entonces la función $f(x) = 0{,}5$ puede ser la función de densidad de probabilidad de la variable X. V o F **F**

50. Dada una variable aleatoria continua X, con función de densidad de probabilidad $f(x)$ definida en el intervalo [3; 6], se cumplirá siempre que la $P(X \geq 3) = 1$. **V**

54. La sección de una viga de madera puede formarse abulonando dos escuadrías. Se dispone de secciones individuales de (3"x 2"); (3"x 3") y (3"x 4"). Sea X la variable a clasificar, definida como la altura total de la sección obtenida, de base igual a 3". **D**

70. El valor esperado de una variable aleatoria, describe cómo se distribuye la función de probabilidad en su rango. **F**

71. El valor esperado de la variable aleatoria $Y = 2X - 1$, es igual al doble del valor esperado de la variable aleatoria X. **F**

75. La varianza de la variable aleatoria $Y = 2X - 1$, es cuatro veces mayor que la varianza de la variable aleatoria X. **V**

80. El valor esperado de una *constante* es siempre igual a cero. **F**

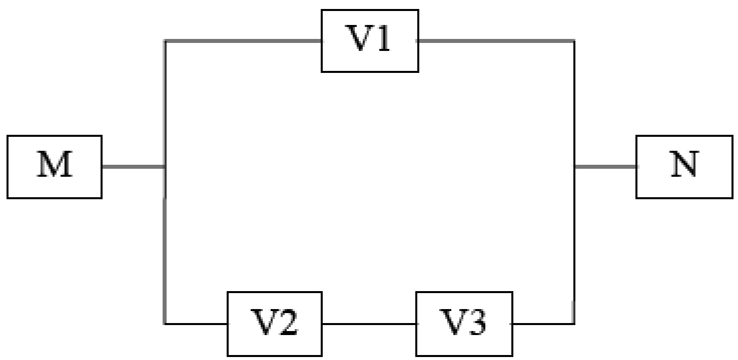
82. El valor esperado de la *suma algebraica* de dos variables aleatorias, es siempre igual a la suma de los valores esperados de las mismas. **F**

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \quad V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

Ejercicio 1

3-1.2.*

En el esquema mostrado, el sistema de agua fluye a través de las válvulas V1, V2 y V3, desde M hacia N. Las válvulas V1, V2 y V3 trabajan de manera independiente y cada una se abre, con probabilidad igual a 0,80 cuando recibe la señal de accionamiento a distancia. Encontrar la función masa de probabilidad para el número de válvulas abiertas entre M y N después de enviar la señal.



Ejercicio 1: planteo

X: número de válvulas abiertas entre M y N después de enviar la señal.

Hay que hallar la función masa de probabilidad de X.

Valores que toma X: 0,1,2,3.

Completemos una tabla:

X	0	1	2	3
f(x)	0.008	0.096	0.384	0.512

Ejercicio 2

3-1.5.

Al estudiar el tiempo de espera de un vehículo en una estación de peaje determinada, X, se estableció para dicho tiempo la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = c \,.\, x^2 \,.\, (1 - x)^4$$

para $0 \text{ min} \leq x \leq 1 \text{ min}$

$$f(x) = 0$$

en otro caso

a) Determinar el valor de la constante c para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad.
b) Calcular el valor esperado y la varianza del tiempo de espera en la estación de peaje.
c) Encontrar la probabilidad de que un vehículo tenga que esperara menos de treinta segundos en dicha estación de peaje.

Ejercicio 2: planteo y solución

- $f(x) = c \cdot x^2 \cdot (1-x)^4$
  para 0 min ≤ x ≤ 1 min
- $f(x) = 0$
  en otro caso

- X: tiempo de espera de un vehículo en una estación (min)

a) Hallar c

$$\int_0^1 c\, x^2 (1-x)^4 \, dx = 1$$

c=105

Ejercicio 2

b) Hallar E(X) y V(X)

$$E(X) = \int_0^1 105\ x^3 (1-x)^4\ dx$$

E(X)=0.375

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 105\, x^4 (1-x)^4\, dx$$

V(X)=0.026

c) P(X<0.5)= $\int_0^{0.5} 105\, x^2 (1-x)^4\, dx$ = 0.7734

Ejercicio 3

3-1.8.*

Los estudios realizados por los ingenieros de una empresa distribuidora de energía, han permitido estimar que el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh, se puede modelar, razonablemente, como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad dada por:

$f(x) = 1/9 \, . \, x \, . \, e^{-x/3}$ *para* $x \geq 0$

$f(x) = 0$ *en otro caso*

Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento de energía sea inadecuado en un día cualquiera?

X: consumo diario de energía eléctrica en GWh

P(X>12)= 1 – F(12) = $1 - \int_0^{12} \frac{1}{9} x e^{-x/3} \, dx$ = 0.0916

Ejercicio 4

3-1.10.

El espesor de un entablonado de madera que algún cliente ordena, en pulgadas, es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$F(x) = 0$ para $x < 1/8$

$F(x) = 0{,}2$ para $1/8 \leq x < 1/4$

$F(x) = 0{,}9$ para $1/4 \leq x < 3/8$

$F(x) = 1$ para $3/8 \leq x$

Determinar las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 1/8)$
b) $P(X \leq 1/4)$
c) $P(X \leq 5/16)$
d) $P(X > 1/4)$
e) $P(X \leq 1/2)$