MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE V.A. DISCRETAS

Modelo Bernoulli

Modelo Binomial

Modelo Poisson

Modelo Geométrico

Modelo Hipergeométrico

Modelo Binomial Negativo

MODELOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS ESPECIFICAS

- En los puntos anteriores se ha definido v.a. y distribución de probabilidad y se han desarrollado sus propiedades generales.

- Ahora se estudiarán algunas distribuciones de probabilidad discretas específicas que resultan ser modelos útiles para la solución de problemas prácticos. Las mismas han sido deducidas tomando como ciertas determinadas hipótesis que se suponen válidas para los fenómenos aleatorios.

- Es por eso que al seleccionar una determinada distribución para ser aplicada a un caso práctico en concreto, deberá conocerse la naturaleza del mismo y las hipótesis de la distribución a emplear.

MODELO DE BERNOULLI

Una v.a. d. será Bernoulli cuando:

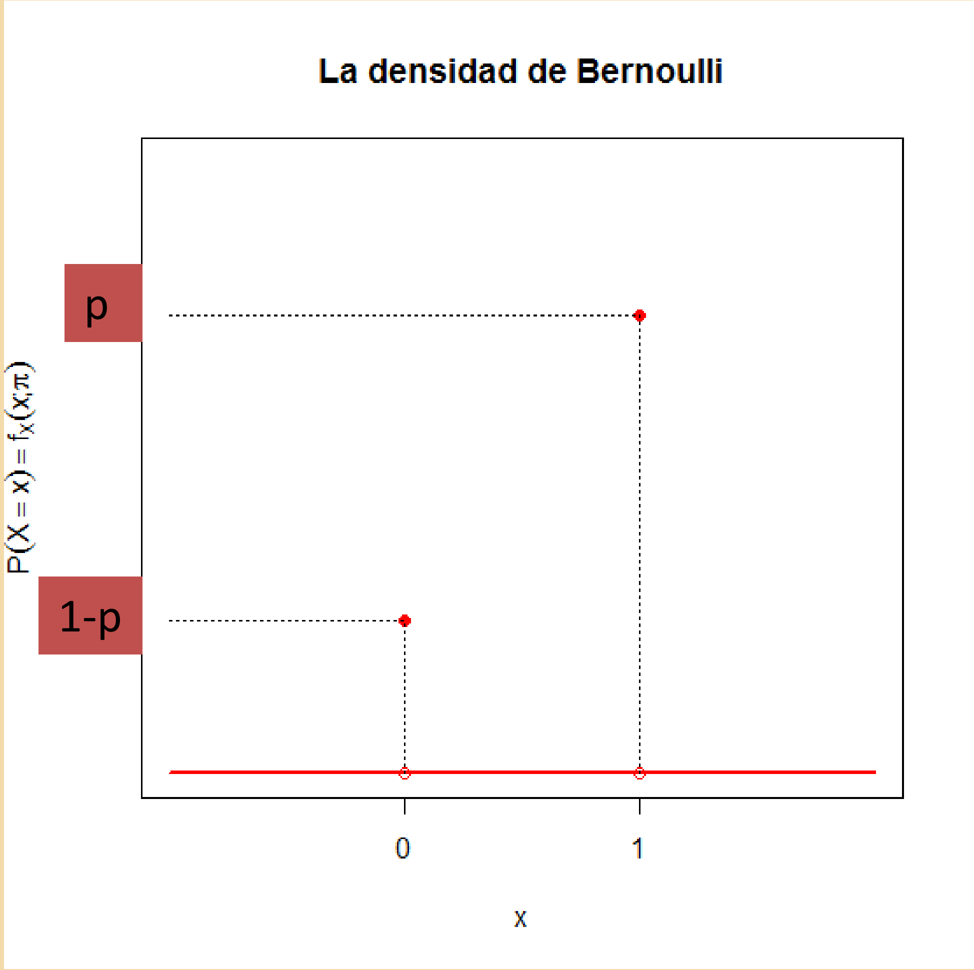
- El experimento aleatorio tenga sólo dos resultados mutuamente excluyentes: ocurrencia o no ocurrencia de un evento
- Se llamará "éxito" (e) a la ocurrencia del evento y "fracaso" (f) a la no ocurrencia
- La variable aleatoria siempre estará enunciada en función del éxito.
- $\Omega=\{e,f\}$; $X(e)=1$, $X(f)=0$
- $X(\Omega)= \{0,1\}$
- $P(X=1)=p \quad P(X=0)=1-p$

MODELO DE BERNOULLI

- $f_X(x) = p^x\,(1-p)^{1-x}$ si $x=0$ ó $x=1$

con $0<p<1$

- $x \approx \text{Bernoulli}(p)$



ESPERANZA Y VARIANZA DE LA VARIABLE BERNOULLI

$$E(X) = \sum_{x_j \in X(S)} x_j \; f_X(x_j) = 0 \cdot f_X(0) + 1 \cdot f_X(1) = 0 + p$$

$$\boxed{E(X) = p}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

$$E(X^2) = \sum_{x_j \in X(S)} x_j^2 \; f_X(x_j) = 0 \cdot f_X(0) + 1^2 \cdot f_X(1) = 0 + p = p$$

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = p(1 - p)}$$

<u>EJEMPLO 1</u>: MODELO DE BERNOULLI

ε: Lanzar una moneda legal

X : n° de sellos obtenidos al arrojar la moneda

X ˜ Bernoulli (p=0,5)

Ω ={cara, sello} ; X: $\Omega \rightarrow$R ;

X(cara)=0 ;

X(sello)=1

P({cara})= P(X=0)= $f_X(0)$= 1/2

P({sello})=P(X=1)= $f_X(1)$= 1/2

E(X)= p=1/2

var(X)= pq=1/2.(1- 1/2)= ¼

MODELO BINOMIAL

Características:

a) Debe efectuarse un número fijo de pruebas repetidas estadísticamente independientes (n).

b) Cada prueba es una variable Bernoulli, es decir tiene dos resultados posibles éxito y fracaso con probabilidades p y (1-p) respectivamente (resultados mutuamente excluyentes).

c) La probabilidad de éxito p, permanece constante de prueba en prueba.

MODELO BINOMIAL

- El interés de este modelo, está en determinar la probabilidad de obtener exactamente X= x éxitos durante n ensayos.

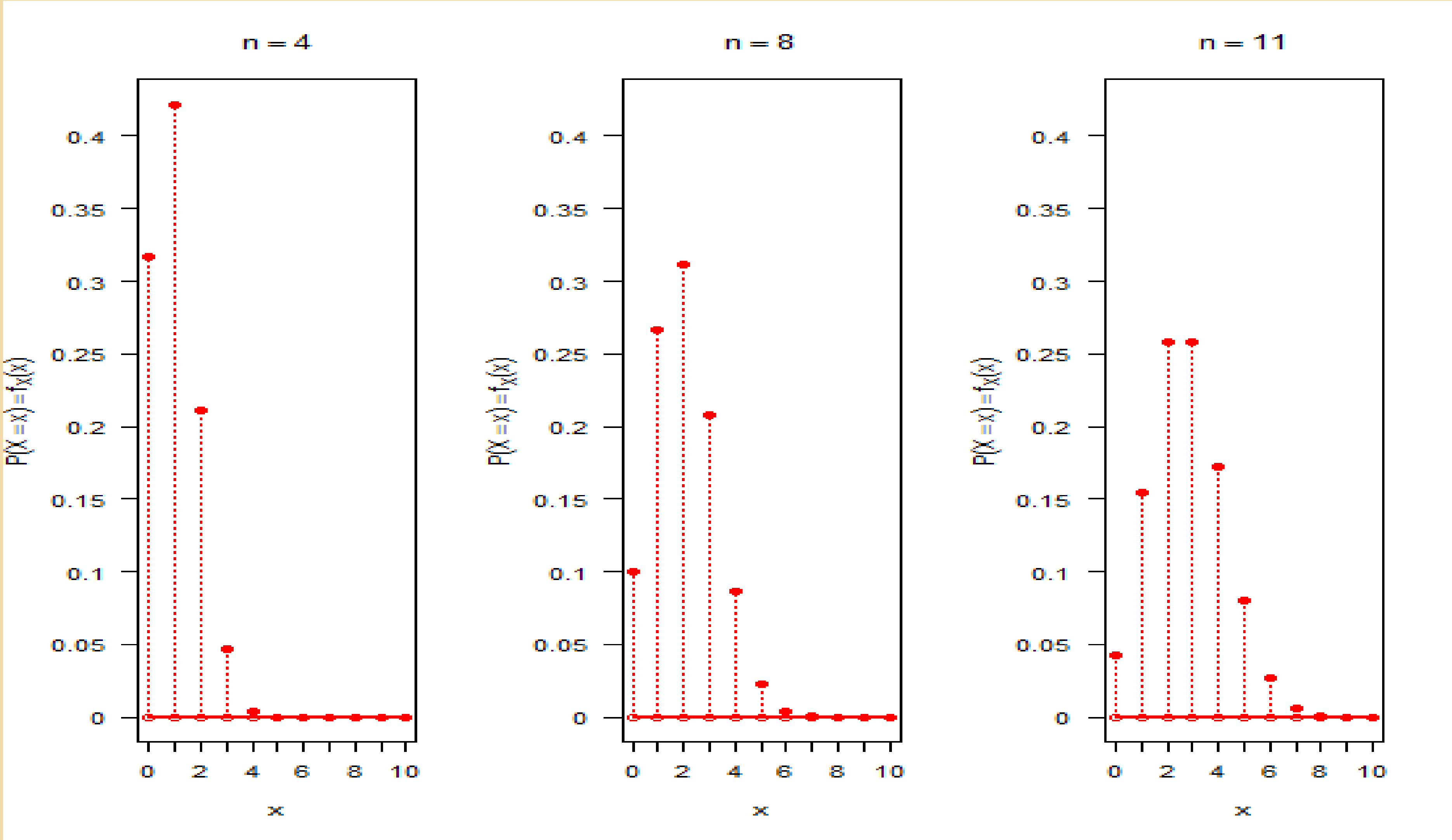
  $X(\Omega)=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$

X es el número de éxitos en n ensayos independientes

$$f_X(p) = \frac{n!}{x!\ (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n \quad ; \text{ con } 0<p<1$$

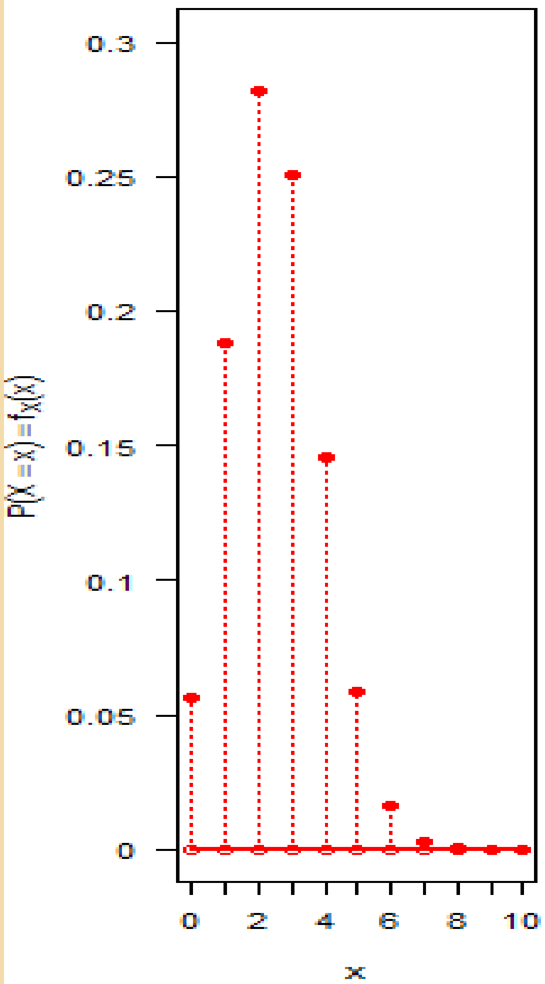
X ˜ Binomial (n;p)

LA FAMILIA BINOMIAL

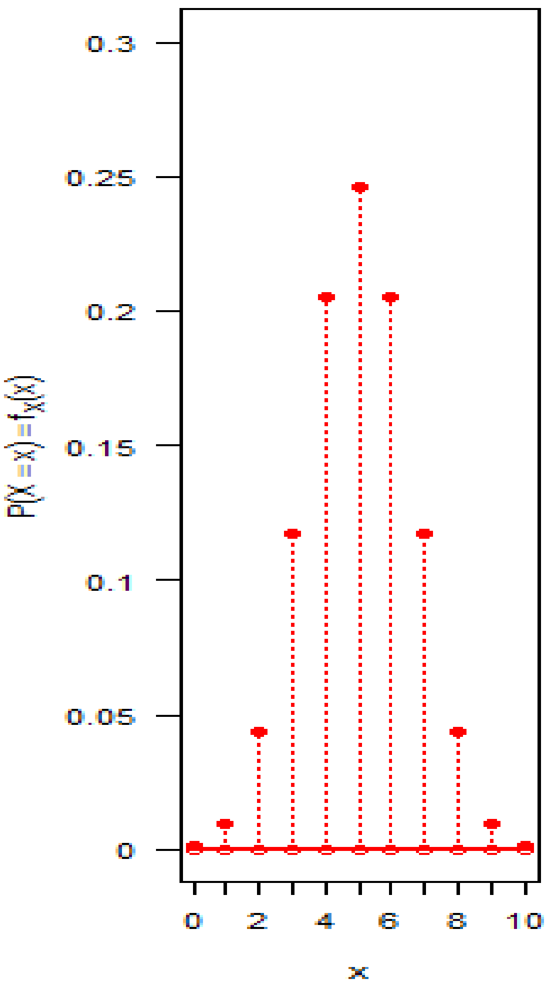


LA FAMILIA BINOMIAL

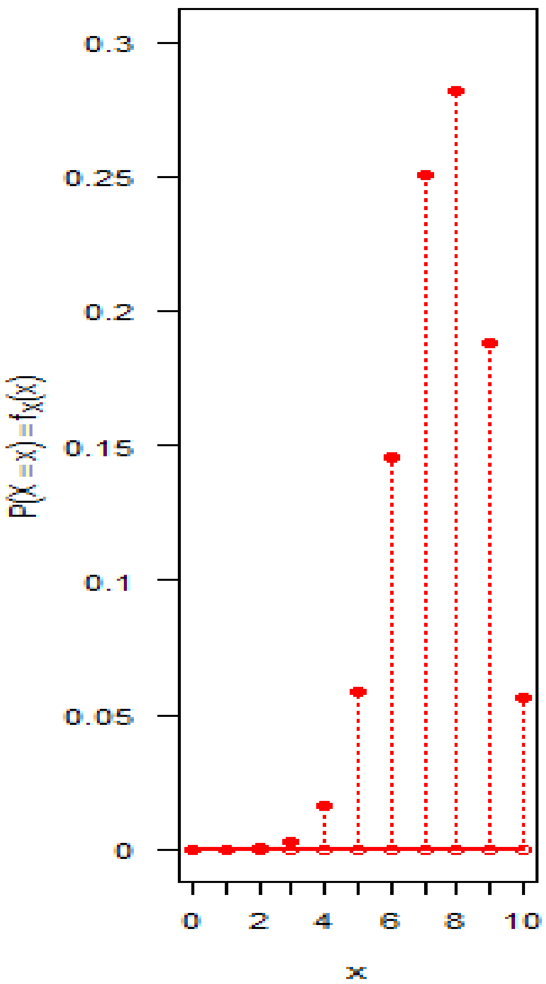
p=0,25



P=0,5



P=0,75



ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE BINOMIAL

$$\boxed{E(X) = np}$$

$$\boxed{Var(X) = np(1-p)}$$

$$\boxed{DE(X)=\sqrt{npq}}$$

MODELO BINOMIAL: función de distribución de probabilidad

X: número de éxitos en los 5 ensayos

$f(x)=P(X=x)$

$f(0)=P(X=0)=P(F,F,F,F,F)=q\ q\ q\ q\ q=q^5$

$f(1)=P(X=1)=p\ q^4+q\ p\ q^3+q^2\ p\ q^2+q^3\ p\ q+q^4\ p=$

$$= \frac{5!}{1!\,4!}p^1q^4 \qquad = \binom{5}{1}p^1q^4$$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	q^5	$\binom{5}{1}p^1q^4$	$\binom{5}{2}p^2q^3$	$\binom{5}{3}p^3q^2$	$\binom{5}{4}p^4q^1$	$\binom{5}{5}p^5q^0$

EJEMPLO 2: MODELO BINOMIAL

- Suponga que disparo a un blanco cinco flechas

Y QUE NO APRENDO (independencia)

- ¿cuántos éxitos podría tener?
- 0,1,…,5
- Supongamos que la probabilidad de acertar es p
- Definamos la v.a. binomial:
- X: Número de disparos acertados de cinco flechas

EJEMPLO 2: MODELO BINOMIAL

$$f_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0,1,\ldots,n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Volvamos al ejemplo:

- Tiro 5 veces al blanco, con probabilidad de acertar p = 0.2
- P(X=2) = b(2,5,0.2)= **dbinom(2,5,0.2)=** 0.2048

USAR EL PROGRAMA R!!!

EJEMPLO 2: MODELO BINOMIAL

$$b(x;n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}, & x=0,1,\ldots,n;\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Volvamos al ejemplo: X ~ B(n=5; p=0.2)

- Tiro 5 veces al blanco, con probabilidad de acertar p=0.2

USAR EL R!!!

- P(X>3)= f(4)+f(5) = 1-F(3) = 1-0.9933 = 0.0067

  pbinom(3,5,0.2)

- O en el R colocar directamente **1-pbinom(3,5,0.2)**

EJEMPLO 2: MODELO BINOMIAL

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0,1,\ldots,n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Volvamos al ejemplo:

- Tiro 5 veces al blanco, con probabilidad de acertar p=0.2
- P(X≤4)= F(4) = 0.9997

pbinom(4,5,0.2)

MODELO POISSON

Una variable aleatoria X tiene distribución de Poisson si representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante por unidad de tiempo (o área o volumen)

Sus características principales son:

a) El número de ocurrencia es independiente de una unidad de tiempo , espacio o volumen a otra.

b) El numero medio de ocurrencias en cada unidad de tiempo (espacio, volumen) es constante.

c) La ocurrencia de dos eventos simultaneamente es muy pequeña tiende a cero.

MODELO POISSON

$$X \sim P(\lambda)$$

Ejemplos:

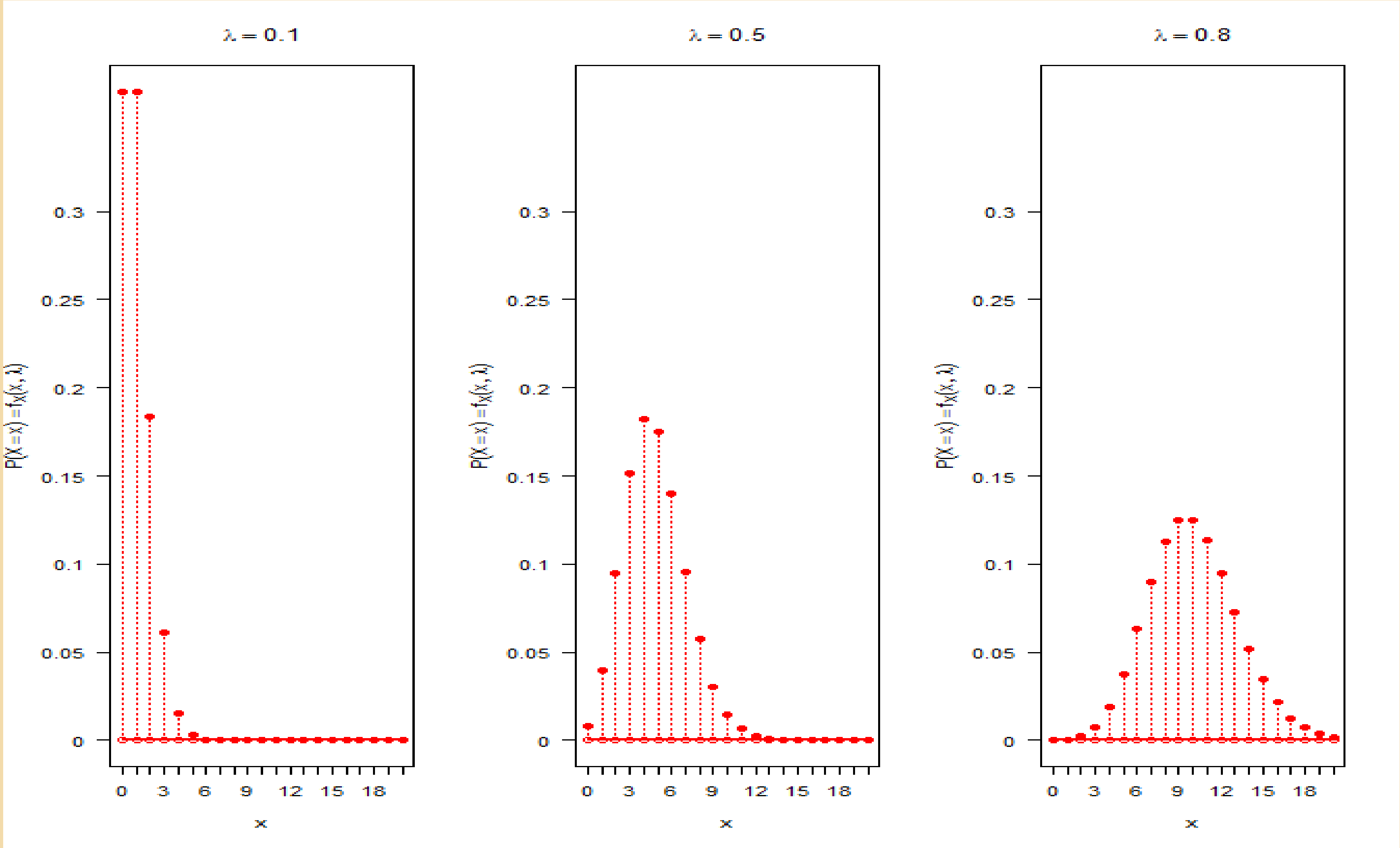
"Número de personas que abren una cuenta bancaria por mes",

"Cantidad diaria de solicitudes de crédito rechazadas",

"Número de defectos en un metro de tela",

"Número de llamadas telefónicas por hora que recibe una oficina"

MODELO POISSON



MODELO POISSON: FUNCION DE PROBABILIDAD

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}; \quad x = 0,1,2,3\ldots$$

- $\lambda > 0$, es el parámetro de la distribución y representa el número promedio de ocurrencias por unidades de tiempo o espacio.

ESPERANZA Y VARIANZA DEL MODELO POISSON

Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson tienen el valor λ .

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

$$\boxed{Var(X) = \lambda}$$

EJEMPLO 3: MODELO POISSON

Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radioactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que 6 partículas entren al contador en un milisegundo dado?

X: Número de partículas radioactivas que pasan por un contador en un milisegundo

λ=4(part/mseg) X~P(λ=4)

P(X=6)= $f_X(6) = \dfrac{e^{-4}\,4^6}{6!} = 0.1042$

dpois(6,4)= 0.1042

<u>EJEMPLO 4</u>: MODELO POISSON

Para determinada industria, el número de accidentes de trabajo es, en promedio, de 3 por semana.

Calcule la probabilidad de que en una semana:

a) No ocurran accidentes.

b) Ocurra más de un accidente.

c) Ocurran menos de cuatro accidentes.

d) Ocurran tres accidentes.

Calcular la probabilidad de que en las próximas dos semanas:

e) Ocurran tres accidentes

f) Ocurra más de dos accidentes

Ejemplo 4

- *X : "Cantidad de accidentes por semana "*
- *X* $\sim$ *Poisson* (λ *= 3)*

a) P(X = 0) = $f_X(0) = \dfrac{e^{-3}\,3^0}{0!} = 0.0498$

USAR EL R!!

>dpois(0,3) =0.0498

- *La probabilidad de que en una semana no ocurran accidentes es de 0,0498.*

EJEMPLO 4: MODELO POISSON

b) Ocurra más de un accidente. **USAR EL R!!**

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) =$ **0,8009**

1-ppois(1,3)

La probabilidad de que en una semana ocurran más de un accidente es de 0,8009.

c) Ocurran menos de 4 accidentes.

$P(X < 4) = P(X \leq 3) = F(3) =$ **0,6472**

ppois(3,3)

La probabilidad de que en una semana ocurran menos de cuatro accidentes es de 0,6472.

c) Ocurran 3 accidentes.

$P(X = 3) = f(3) =$ **0,2240**

dpois(3,3)

La probabilidad de que en una semana ocurran tres accidentes es de 0,2240.

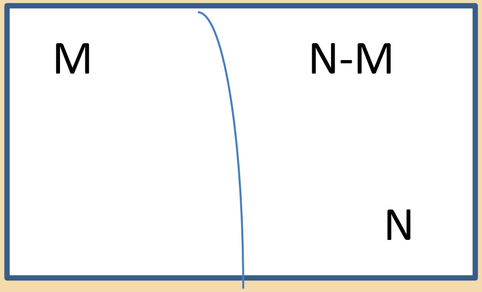
Ejemplo 4

- Calcular la probabilidad de que en las próximas dos semanas:
- e) Ocurran tres accidentes
- *X_1 : "Cantidad de accidentes en las próximas dos semana "*
- $X_1 \sim$ *Poisson* $(\lambda_1 = 6)$ **USAR EL R!!**

MODELO HIPERGEOMETRICO

Características del Modelo:

La población donde debe hacerse el muestreo consta de N individuos (finito)

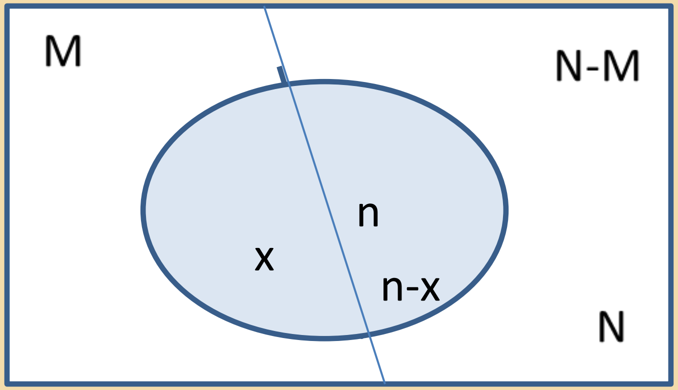


En esta población analizamos una característica en los individuos que pueden cumplirla o no.

$M<N$

MODELO HIPERGEOMETRICO

- Cada realización es una variable Bernoulli (E,F)
- La población consta de M éxitos
- Se elige una muestra sin reemplazo de n individuos DEPENDENCIA ,n≤N



- X: es el Nº de éxitos en la muestra
- X ˜ H (x,n,M,N)

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

¿Qué valores puede tomar la variable X?

- X puede tomar valores entre:

  $\max \{0, n-(N-M)\} \leq x \leq \min \{n, M\}$

- Los parámetros son N, M y n

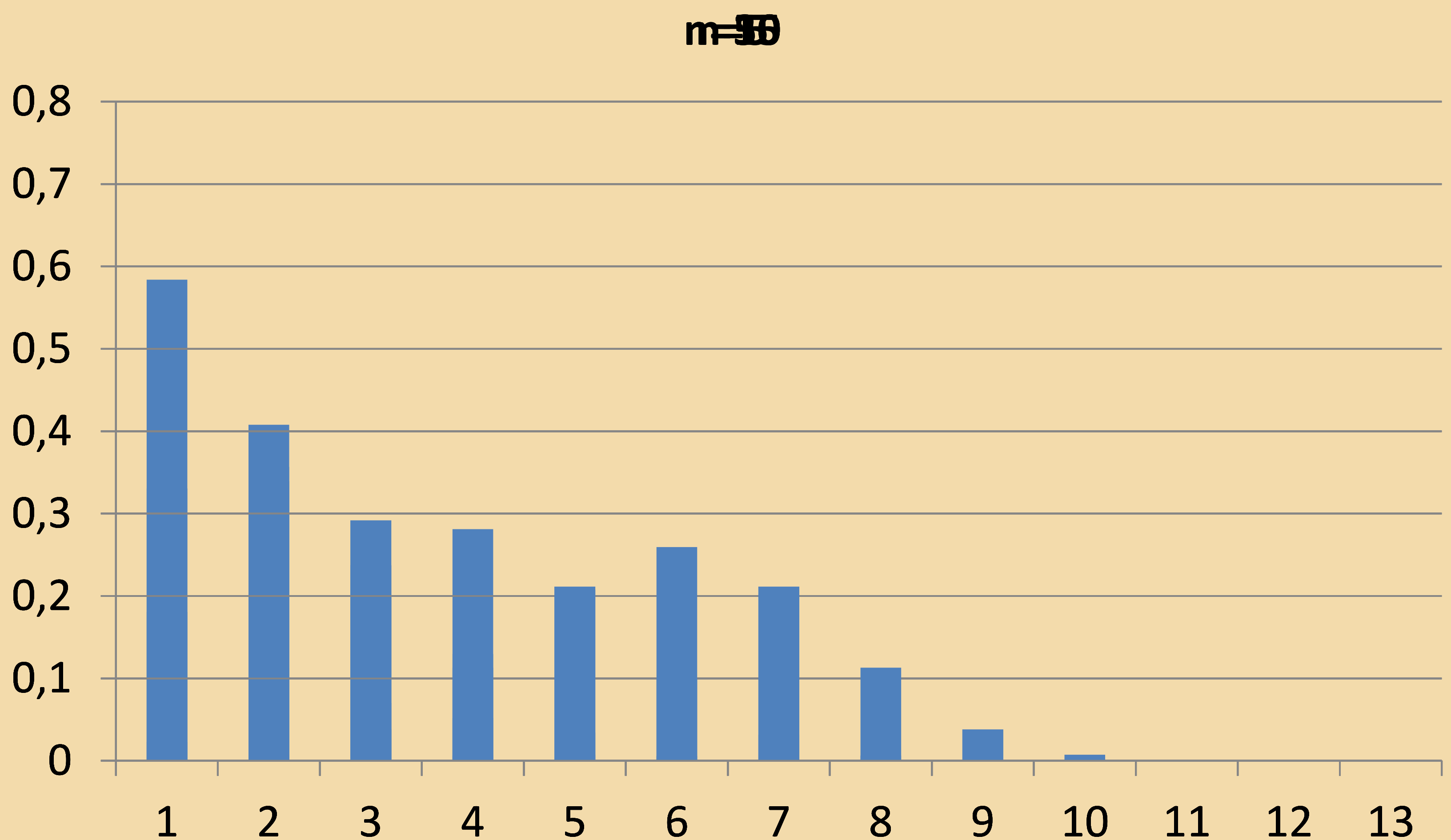
MODELO HIPERGEOMETRICO: función de probabilidad

- h(x;n,M,N)=P(X=x)= $\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$
- Nº de casos favorables= $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$
- Nº de casos posibles= $\binom{N}{n}$

$$h(x;n,M,N)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

si x es un valor de X; vale 0 en otro caso.

Análisis de algunos gráficos con N=100, M=10 y distintos valores de n



ESPERANZA Y VARIANZA DEL MODELO HIPERGEOMETRICO

$$\boxed{E(X) = n\frac{M}{N}}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{N-n}{N-1}n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)}$$

FACTOR DE CORRECCIÓN
PARA POBLACIÓN FINITA

$$\frac{N-n}{N-1}$$

EJEMPLO 5: MODELO HIPERGEOMETRICO

Lotes de 40 componentes cada uno se denominan aceptables si no contienen más de 3 defectuosos. El procedimiento para muestrear el lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre exactamente 1 defectuoso en la muestra, si hay 3 defectuosos en todo el lote?

$n=5$

$N=40$

$M=3$

$x=1$

EJEMPLO 5: MODELO HIPERGEOMETRICO

n=5
N=40
M=3
x=1

$$h(x;M,N,n)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

h (1,3,40,5) = $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}}=0{,}3011$

dhyper(x,M,N-M,n)=dhyper(1,3,37,5)

MODELO GEOMETRICO

Propiedades de la variable aleatoria que tiene distribución geométrica:

- Se refiere a pruebas idénticas e independientes, y cada una puede tener dos resultados, éxito o fracaso. La probabilidad de tener éxito es igual a p y es constante para cada prueba.
- X : "es el número de la prueba en la cual ocurre el primer éxito"
- Entonces el experimento consiste en una serie de pruebas que termina al obtener el primer éxito.
- El experimento podría terminar en la primera prueba al obtener un éxito o podría seguir indefinidamente.

MODELO GEOMETRICO

Una variable aleatoria X tiene distribución geométrica si (y solo si) representa el número de pruebas independientes de Bernoulli hasta obtener el primer éxito.

$f_x(x) = pq^{x-1}$, $x = 1,2,3$

MODELO GEOMETRICO: función de la probabilidad

- $E_1 : E$ (éxito en la primer prueba)
- $E_2 : FE$ (fracaso en la primer prueba y éxito en la segunda)
- $E_3 : FFE$ (fracasos en la primera y segunda, éxito en la tercera)
- $E_4 : FFFE$ ………………………………
- ………………………………………………………

$$E_k : \underbrace{FFF\ldots F}_{k-1} E$$

MODELO GEOMETRICO: función de probabilidad

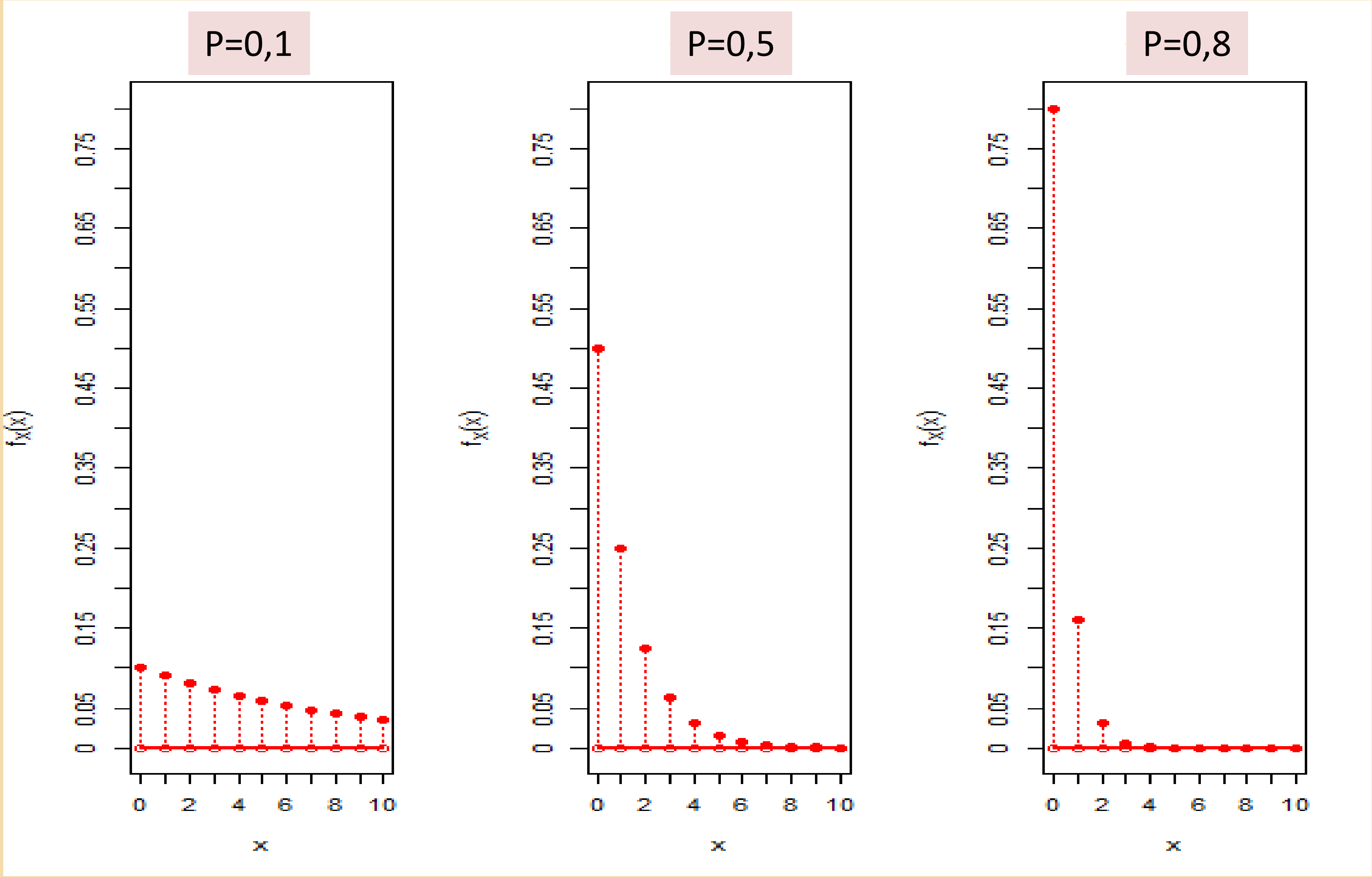
- X es el número de pruebas hasta obtener el primer éxito, inclusive, X=1, X=2, X=3 contendrán E_1, E_2, E_3 respectivamente, y en general el suceso X=x contendrá x pruebas, el éxito aparece en la prueba x, E_x, esto es:

$$P(X = x) = P(E_x) = P(\underbrace{FF\ldots F}_{x-1}E)$$

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad si\ x = 1,2,3,\ldots \quad 0 < p < 1$$

- X ~ G(p)

MODELO GEOMETRICO: Función de probabilidad



ESPERANZA Y VARIANZA DEL MODELO GEOMETRICA

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

$$\boxed{DE(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}}$$

<u>EJEMPLO 6:</u> MODELO GEOMETRICO

Se sabe que en cierto proceso de fabricación , en promedio, 1 de cada 100 artículos está defectuoso. ¿cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspeccionada sea el primer defectuoso que se encuentra?

$g(x,p) = g(5,0.01) = pq^{x-1} = p\ (1-p)^{x-1}$ **= 0,0096**

Usar el R!!!!!

dgeom(5-1,0.01)

MODELO BINOMIAL NEGATIVO

Características:

- El experimento consta de una secuencia de ensayos independientes
- Cada ensayo puede resultar en un E, F
- La probabilidad de E es constante P(F)=p
- El experimento continua hasta que un total de r éxitos se hayan observado
- El número de éxitos es fijo y el nº de ensayos es aleatorio
- X: Nº de ensayos hasta obtener r éxitos
- X ~ bn(x,r,p)

MODELO BINOMIAL NEGATIVA: función de probabilidad

P(r-1 éxitos en los primeros x-1 ensayos) =

P(éxito)

$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r-1} q^{(x-1)-(r-1)} p$$

$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r} q^{x-r}$$

$$f_x(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r},$$

$$x = r, r+1, r+2, \ldots .$$

ESPERANZA Y VARIANZA DEL MODELO BINOMIAL NEGATIVO

$$\boxed{E(X) = \frac{r}{p}}$$

$$\boxed{Var(X) = r\frac{(1-p)}{p^2}}$$

$$\boxed{DE(X) = \sqrt{r\frac{(1-p)}{p^2}}}$$

<u>EJEMPLO 7:</u> MODELO BINOMIAL NEGATIVA

Un estudio geológico indica que un pozo de exploración perforado en determinada zona debe encontrar petróleo con una p=0,2. Calcular la probabilidad de que:

a) el primer hallazgo de petróleo se tenga al tercer pozo perforado.

b) el tercer hallazgo de petróleo se tenga con el quinto pozo perforado.

$X \sim bn(x,r,p=0,2)$

EJEMPLO 7: MODELO BINOMIAL NEGATIVA

a) el primer hallazgo de petróleo se tenga al tercer pozo perforado.

X: "cantidad de pozos perforados hasta que se encuentra petróleo en r de ellos"

X ~ bn(x,r,p=0,2)

r=1 → Geométrica

$P(X=3) = f_x(3) = (1-p)^{x-1}\, p$

$P(X=3) = f_x(3) = (1-0,2)^{3-1}\, 0,2$ **= 0,128**

dgeom(x-1,p)

La probabilidad de que el primer hallazgo de petróleo se tenga al perforar el tercer pozo es de 0,128.

EJEMPLO 7: MODELO BINOMIAL NEGATIVA

b) el tercer hallazgo de petróleo se tenga con el quinto pozo perforado.

X: "cantidad de pozos perforados hasta que se encuentra petróleo en 3 de ellos"

X ~ bn(x,r=3,p=0,2)

r=1 → Geométrica

$$f_x(5) = P\ (X=5, r=3) = \binom{x-1}{r-1} p^r\, q^{x-r}$$

$$f_x(5) = \binom{5-1}{3-1} 0{,}2^3\, 0{,}8^{5-3} \quad \mathbf{= 0{,}0307}$$

dnbinom(x-r, r, p)

La probabilidad de que el tercer hallazgo de petróleo se tenga al perforar el quinto pozo es de 0,0307.

1- EJERCICIOS DE REPASO

La posibilidad de que un operario muera durante la construcción de las obras componentes de un aprovechamiento hidroeléctrico es de 0,2%. Encontrar la probabilidad de que mueran menos de cinco operarios de las siguientes 2000 personas que estarán afectadas a la construcción de una nueva obra.

- X: número de muertos de los próximos 2000 operarios.
- $X \sim bin(n=2000, p=0.002)$

USAR EL R!!!!

$P(X<5) = F(4) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 0.6288$

pbinom(4,2000,0.002)

- Como $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$,

$bin(n=2000, p=0.002) \rightarrow Poisson(\lambda = np = 4)$

$P(X<5) = F(4) = 0.6288$

ppois(4,4)

2- EJERCICIOS DE REPASO

El Ministerio de Medio Ambiente sospecha que algunas industrias descargan sus efluentes al río violando los reglamentos contra la contaminación ambiental.

a) Suponga que hay 20 industrias que están bajo sospecha y sólo 3 de ellas realmente están contaminando el río. ¿Cuál es la probabilidad de que si se inspeccionan 5 de tales industrias no se detecte el problema?

X: número de infractores en la muestra

$X \sim$ hipergeométrica (n,N,M)

N=20, M=3, n=5

P(X=0)=f(0) =0.39912

dhyper(x,M,N-M,n) → dhyper(0,3,17,5)

2- EJERCICIOS DE REPASO

b) Suponga ahora que las industrias que están bajo sospecha son 300 pero sólo 3 de ellas realmente están contaminando el río. ¿Cuál es la probabilidad de que tampoco se detecten problemas en las 5 industrias inspeccionadas?

X:número de infractores en la muestra

X ~ hipergeométrica (n,N,M)

N=300, M=3, n=5

P(X=0)=f(0) =0.9507

dhyper(0,3,297,5)

c) ¿Está de acuerdo con el procedimiento de inspección? Justificar la respuesta.