CAPITULO II

VARIABLE ALEATORIA

2-1 INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

En la primera unidad se presentaron los conceptos básicos de probabilidad con respecto a eventos de un espacio muestral. Recordemos que el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio nos determinaba un espacio muestral. Cada uno de los elementos que conforman el espacio muestral se denomina evento o suceso. Estos pueden ser cualitativos o cuantitativos.

Algunos ejemplos de sucesos cualitativos son aquellos que conforman el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:

- "Preguntar a un automovilista que marca de vehículo prefiere entre U, V y W";
- "Tomar una lámpara eléctrica al azar en un supermercados y ver si está en condiciones de utilizarse", entonces el espacio muestral, Ω, consta de dos sucesos: "defectuoso" y "no defectuoso";
- "Elegir una persona al azar en comercio electrónico y anotar su sexo"

Ejemplos de sucesos cuantitativos son los resultados de los experimentos aleatorios:

- "Medir la resistencia de un filamento eléctrico",
- "El tiempo de vida de una lámpara",
- "La estatura de las personas",
- "El peso de los animales", entre otros.

Sabemos que cuando se calcula probabilidad, precisamente a lo que se le calcula es a los sucesos, es decir a cada elemento del espacio muestral, de modo que puede ser útil la cuantificación de los resultados cualitativos, y mediante el empleo de medidas numéricas, estudiar su comportamiento aleatorio.

Entonces vamos asociar o relacionar a cada uno de los resultados de los experimentos aleatorios con un número real. De esta forma encontramos la necesidad de definir una variable aleatoria, que es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.
Por ejemplo en el experimento aleatorio anterior, "Tomar una lámpara eléctrica al azar y ver si cumple con las condiciones de uso", se puede asignar el valor 0 al suceso "defectuoso" y asignar 1 al "no defectuoso"

Teniendo esto presente, enunciemos la siguiente definición formal:

2-2 DEFINICIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, ε. Una función X que asigna a cada elemento del espacio muestral un número del conjunto de los números reales R, se denomina **variable aleatoria**.
En símbolos: $Sea\ X: \Omega \rightarrow R,$
tal que $X(\omega) = x\,,\quad \forall \omega \in \Omega,$ x es un número real

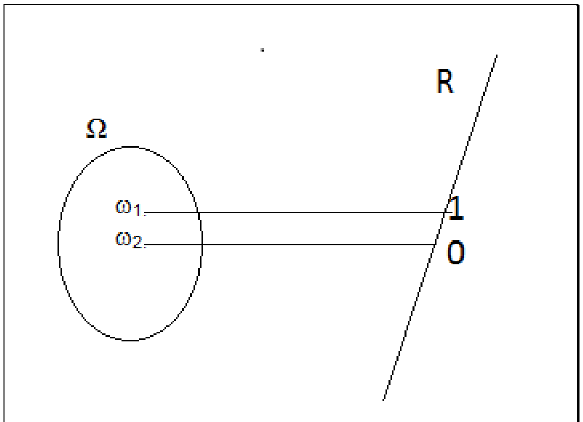


Fig.2-1: Variable aleatoria X

Siendo:

$$X(\Omega) = \{0,1\}$$

$X(\Omega)$ es el conjunto de todos los valores posibles de X. Se denomina Recorrido o Imagen de la variable aleatoria X.

Estas funciones se llaman variables aleatorias, variable indica que la función puede tomar diversos valores, en el ejemplo anterior, 0; 1, y la palabra aleatoria indica que estos valores provienen de un experimento aleatorio.

Las variables aleatorias se representan con letras imprentas mayúsculas por ejemplo X, Y, Z, y a los valores que toman dichas variables con letra imprenta minúscula por ejemplo x, y, z.

- Ejemplo 2-1:

En el experimento aleatorio, que consiste en: "*Tomar una lámpara eléctrica al azar de una caja y ver si está en condiciones de utilizarse",* el espacio muestral está compuesto por dos posibles resultados, defectuoso y no defectuoso, $\Omega = \{d,\ \bar{d}\}$

Siendo el suceso D: El componente es defectuoso

$\bar{D}$: El componente no es defectuoso

Como nos interesa estudiar si la lámpara es defectuosa, es natural que una función X, asigne valores numéricos $X(\{\bar{d}\}) = 0$; $X(\{d\}) = 1$. Entonces podemos definimos la variable aleatoria como: X: "La lámpara es defectuosa"

Por lo tanto el recorrido de la variable aleatoria es: $X(\Omega) = \{0, 1\}$

Variable aleatoria X: "La lámpara es defectuosa"

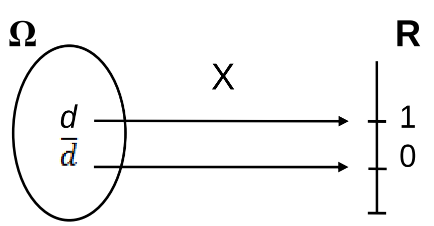


Fig. 2-2: X: La lámpara es defectuosa

Ejemplo 2-2:

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en seleccionar dos componentes electrónicos de un paquete, sin reemplazo, probarlos y observar si cada uno de ellos es defectuoso o no. El paquete contiene 6 componentes, de los cuales hay 2 defectuosos.
El espacio muestral correspondiente es:

$$\Omega = \{(\bar{d},\bar{d}),(d,\bar{d}),(\bar{d},d),(d,d)\}$$

Se puede asociar a este experimento la variable aleatoria definida como:
X: Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones.

X: Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones

Se observa que esta función X, le hace corresponder a los posibles resultados del espacio muestral 0,1 y 2.
Es decir, a los pares de componentes electrónico sin defecto se le asignará el cero, a los pares que tengan exactamente un defecto se le asignará el uno, y a los pares que tengan exactamente dos defectos el dos.

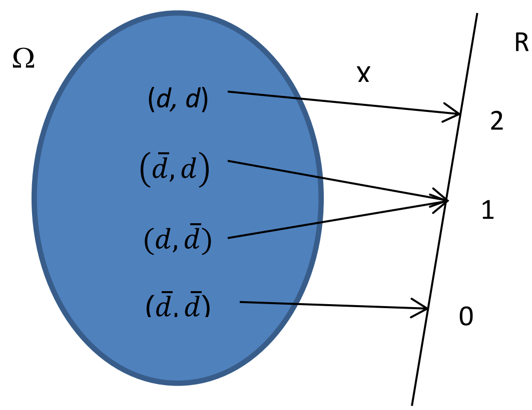


Fig.2-3: X: "Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones"

En símbolos:

$X(\{(\bar{d},\bar{d})\}) = 0$
$X(\{(d,\bar{d})\}) = X(\{(\bar{d},d)\}) = 1$
$X(\{(d,d)\}) = 2$

Luego, la función denominada variable aleatoria X, le corresponde el siguiente conjunto imagen $X(\Omega) = \{0, 1,2\}$.

De esta forma, por medio de la ***función variable aleatoria*** se ha asignado a cada suceso cualitativo de un determinado espacio muestral un número real, de esta manera al preguntarnos por una determinada probabilidad, se trabajará siempre con medidas cuantitativas.

De igual modo se puede aplicar la variable aleatoria a sucesos cuantitativos. Observe el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2-3:

Consideremos el experimento de seleccionar seis cheques al azar de un total de 20, sin reemplazo, y comprobar si el cheque tiene fondo en su cuenta. Además tenga en cuenta que hay 6 cuentas del total que no tienen fondo. Se define una variable aleatoria X: "Número de cheques que tienen fondo en su cuenta”.

El espacio muestral es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la función variable aleatoria, X le hace corresponder:

$X(\{0\}) = 0, X(\{1\}) = 1, X(\{2\}) = 2,\ X(\{3\}) = 3, X(\{4\}) = 4, X(\{5\}) = 5, X(\{6\}) = 6$

Por lo tanto, el conjunto imagen o recorrido de la variable aleatoria X es $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Se observa que en este caso, la variable aleatoria es la función identidad.

- Ejemplo 2-4:

En el experimento de lanzar una moneda legal y observar la cara hacia arriba, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{cara, sello\},$$

La variable aleatoria de interés puede ser definida como:

X: “La moneda mostró en su cara superior sello”

Entonces, X le hace corresponder:

X({cara})=0; X({sello})=1.

Luego, el recorrido o imagen de la variable aleatoria es

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

- Ejemplo 2-5:

En el experimento de seleccionar un alumno que cursa en la Facultad de Ingeniería, y medir su estatura en m, el espacio muestral asociado es el intervalo real [1; 2.20], es decir $\Omega = [1; 2.20]$

La variable aleatoria es: X: “Estatura de un alumno de Ingeniería (en m)”

En este caso el espacio muestral es cuantitativo

$$X(\Omega) = [1; 2.20]$$

En este caso observamos que el resultado del experimento es cualitativo, la variable aleatoria aplicada al espacio muestral le hace corresponder el mismo conjunto.

Nota: En el caso que el resultado del experimento sea cualitativo y no induce a ningún ordenamiento específico, entonces podemos hacer corresponder a cada resultado posible un número arbitrariamente.

2-3 CLASIFICACIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas.

Definición: ***Una variable aleatoria es discreta***, cuando su conjunto imagen o su espacio muestral es finito o infinito numerable.

Definición: ***Una variable aleatoria es continua*** cuando su conjunto imagen o espacio muestral es un conjunto infinito no numerable, es decir si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta real.

Variables aleatorias discretas:

a) Variables aleatorias discretas con $X(\Omega)$ finito:

Los ejemplos planteados 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, corresponden a variables aleatorias discretas, observamos que el conjunto imagen de la variable aleatoria en cada uno de ellos es finito.

Los conjuntos imágenes son respectivamente:

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \quad X(\Omega) = \{0,1,2\}; \; X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; \mathrm{X}(\Omega) = \{0;\ 1\}$$

b) Variables aleatorias discretas con $X(\Omega)$ infinito numerable:

- **Ejemplo 2-6**

Veamos un ejemplo de variable aleatoria discreta cuyo conjunto imagen es infinito numerable:

X: "Número de tornillos que fabrica una máquina anualmente", su recorrido es $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

Estas variables aleatorias discretas, competen a experimentos en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un suceso.

Variables aleatorias continuas:

El ejemplo planteado 2-5 es una variable aleatoria continua. El conjunto Imagen ó Recorrido de la variable aleatoria es infinito.

$$\mathrm{X}(\Omega) = [1; 2.20]$$

Se observa que cumple con la definición de variable aleatoria continua, el conjunto $\mathrm{X}(\Omega)$, recorrido de la variable aleatoria, es un intervalo de la recta numérica.

- **Ejemplo 2-7**: Otro ejemplo es considerar el experimento de medir el tiempo de duración de las llamadas telefónicas realizadas por los empleados de una empresa en minutos, entonces su espacio muestral es:

$\Omega = (0; \infty)$

Si definimos la variable X: "Tiempo de duración de las llamadas telefónicas realizadas por los empleados de una empresa. (en min)"

El recorrido de la variable es infinito.

$$\mathrm{X}(\Omega) = (0; \infty)$$

Se observa que el recorrido es un intervalo de la recta numérica, por lo que es un conjunto infinito no numerable.

Así como los posibles resultados del espacio muestral tienen asociada una cierta probabilidad, como hemos visto en el capítulo 1, también hay formas de asociar probabilidades a los valores que toma la variable aleatoria.

2-4 OPERACIONES SOBRE EL CONJUNTO DE VARIABLES ALEATORIAS

Dado un espacio de probabilidad ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P), y sea F el conjunto de las variables aleatorias definidas sobre ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P). En F se puede definir las siguientes operaciones:

2-4-1 Suma de variables aleatorias

Sean $X_1, X_2 \epsilon F$ dos variables aleatorias, la función

$$X_1 + X_2 : \Omega \rightarrow R$$
$$\omega \rightarrow (X_1 + X_2)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

$X_1 + X_2 = X$ es una variable aleatoria.

El conjunto F con la regla de composición interna suma tiene estructura de grupo abeliano.

2-4-2 Producto por un escalar

Sea X una variable aleatoria, $X\epsilon\ F\ y\ \lambda$ un escalar, se cumple que la función:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda.X : \Omega \rightarrow R \\ \quad \omega \rightarrow (\lambda.X)(\omega) = \lambda.X(\omega)\end{array}}$$

$\lambda.X$ es una variable aleatoria.

El conjunto F de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P), con las operaciones definidas suma y producto por un escalar, tienen estructura de espacio vectorial.

2-4-3 Producto de variables aleatorias

Sean $X_1\ y\ X_2\ \epsilon\ F$, variables aleatorias, la función

$$\boxed{\begin{array}{l}X_1.X_2 : \Omega \rightarrow R \\ \quad \omega \rightarrow (X_1.X_2)(\omega) = X_1(\omega).X_2(\omega)\end{array}}$$

$X_1.X_2$es una variable aleatoria.

El conjunto F con las operaciones suma y producto tiene estructura de anillo con elemento unidad. Además este anillo cumple la condición de compatibilidad con el espacio vectorial.

2-4-4 Cociente de variables aleatorias

Sean $X_1 \ y \ X_2 \epsilon F$, siendo $X_2(\omega) \neq 0, \ \forall \omega \ \epsilon \ \Omega$, la función cociente queda definida

$$X_1/X_2 \colon \Omega \to R$$
$$\omega \to (X_1/X_2)(\omega) = X_1(\omega)/X_2(\omega)$$

X_1/X_2 es una variable aleatoria.

Por otra parte, así como los posibles resultados del espacio muestral tienen una cierta probabilidad, también se le puede asociar probabilidades a los valores de la variable aleatoria.

2-5 FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Dado un experimento aleatorio, el recorrido de una variable aleatoria representa los posibles resultados del experimento aleatorio que conforman el espacio muestral. Teniendo en cuenta esto es posible desarrollar una función matemática que asigne a cada realización de la variable aleatoria una probabilidad.

Esta función se denomina *función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.* Se comenzará estableciendo la definición de función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

2-5-1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria discreta, se llamará función de probabilidad de la variable aleatoria X a la función:

$$f_X \colon R \to [0; \ 1]$$

$$x \to f_X(x) = P(\{\omega/\omega \ \epsilon \ \Omega \wedge \mathrm{X}(\omega) = \mathrm{x}\}) = P(X = x)$$

Gráfico de la función variable aleatoria y a continuación función de probabilidad f_X

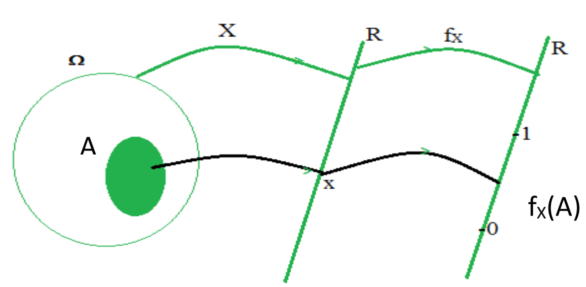


Figura 2-4: Variable aleatoria y función de probabilidad

Se anotará abreviadamente $f_X(x) = P(X = x)$, significa $f_X(x)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x.

2-5-2 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

1) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in R$

2) $\sum_{x_j \in X(s)} f_X(x_j) = 1$

Se denominan propiedades fundamentales porque cualquier función con dominio en R y codominio en [0; 1] que cumpla con estas dos propiedades es una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, además toda función de probabilidad de una variable aleatoria discreta cumple siempre con estas dos propiedades.

- **Ejemplo 2-8**:

Consideremos el experimento aleatorio dado en el ejemplo 2-2, que consiste en seleccionar dos componentes electrónicos de un paquete, sin reemplazo, probarlos y observar si cada uno de ellos es defectuoso o no. El paquete contiene 6 componentes, de los cuales hay 2 defectuosos. Se calculará la función de probabilidad de la variable aleatoria X, número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones sin reposición.

Resolución:

El espacio muestral correspondiente es: Ω={$(\bar{d},\bar{d})$;$(d,\bar{d})(\bar{d},d)$ (d,d)}

Se le asocia la variable aleatoria:

X: "Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones".

Consideraremos los siguientes sucesos:

D_i: Componente electrónico de la extracción i es defectuoso; con i=1, 2

$\bar{D}_i$: Componente electrónico de la extracción i no defectuoso; con i=1, 2

$X(\{(\bar{d},\bar{d})\}) = 0$

$X(\{(d,\bar{d})\}) = X(\{(\bar{d},d)\}) = 1$

$X(\{(d,d)\}) = 2$

Donde el conjunto imagen es: $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

Se calculará las probabilidades a estos sucesos y se obtendrá seguidamente su función de probabilidad

$$P(\{(\bar{d},\bar{d})\}) = P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = P(\bar{D}_1).P(\bar{D}_2/\bar{D}_1) = \frac{4}{6}.\frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

$$P(\{(d,\bar{d})\}) = P(D_1 \cap \bar{D}_2) = P(D_1).P(\bar{D}_2/D_1) = \frac{2}{6}.\frac{4}{5} = \frac{8}{30} = 0{,}267$$

$$P(\{(\bar{d},d)\}) = P(\bar{D}_1 \cap D_2) = P(\bar{D}_1).P(D_2/\bar{D}_1) = \frac{4}{6}.\frac{2}{5} = \frac{8}{30} = 0{,}267$$

$$P(\{(d,d)\}) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1).P(D_2/D_1) = \frac{2}{6}.\frac{1}{5} = \frac{2}{30} = 0{,}066$$

Siendo $X(\Omega) = \{0, 1,2\}$

Su función de probabilidad $f_X(x)$:

$f_X(x) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge \mathrm{X}(\omega) = \mathrm{x}\}) = P(X = x)$

$f_X(0) = P(X = 0) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge \mathrm{X}(\omega) = 0\}) = P\left(\left\{\left(\bar{d}, \bar{d}\right)\right\}\right) = \frac{12}{30} = 0{,}4$

$f_X(1) = P(X = 1) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge \mathrm{X}(\omega) = 1\}) = P\left(\left\{\left(d, \bar{d}\right)\right\}, \left\{\left(\bar{d}, d\right)\right\}\right) = \frac{16}{30} = 0{,}533$

$f_X(2) = P(X = 2) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge \mathrm{X}(\omega) = 2\}) = P(\{(d, d)\}) = \frac{2}{30} = 0{,}067$

Esta función puede escribirse de la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{30} & si\ x = 0 \\ \frac{16}{30} & si\ x = 1 \\ \frac{2}{30} & si\ x = 2 \\ 0\ \ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Representación gráfica de la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta:
X: Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones.

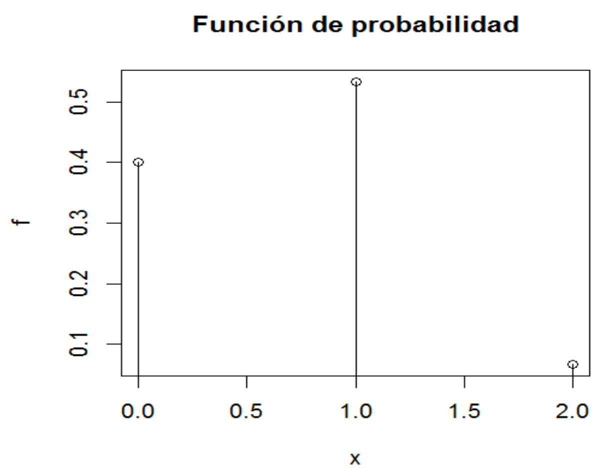


Figura 2-5: Función de probabilidad de la variable aleatoria X

2-6 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Supongamos que los valores de X están ordenados $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Existen muchos problemas donde nos interesa calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X tome un valor igual o menor que algún número real x_i, su valor será:

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{h=1}^{i} f_X(x_h)$$

La función F se llama función de distribución de la variable aleatoria discreta X. Lo cual da lugar a la siguiente definición.

2-6-1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

Sea $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, un espacio de probabilidad y $X: \Omega \to R$, una variable aleatoria en Ω, se define a la función de distribución acumulada o acumulativa de la variable aleatoria X, como:

$F_X: R \to [0; 1]$, de forma que

$$F_X(x) = P(\{\omega/\omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$$

Una variable aleatoria discreta X, está caracterizada por la función de probabilidad puntual $f_X(x)$, la cual representa la probabilidad en el punto y por la función de distribución acumulativa $F_X(x)$, la cual representa la suma de las probabilidades puntuales hasta el valor x de X inclusive.

Observe que esta definición de distribución de probabilidad acumulada está definida para una variable aleatoria cualquiera discreta, continua o mixta.

- Ejemplo 2-9:

Consideremos nuevamente el ejemplo 2-8, el experimento aleatorio que consiste en seleccionar dos componentes electrónicos de un paquete, sin reemplazo, probarlos y observar si cada uno de ellos es defectuoso o no. El paquete contiene 6 componentes, de los cuales hay 2 defectuosos. Obtener la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria en estudio.

Resolución:

La variable en estudio es:

X: ¨Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones¨

En el ejemplo 2-8 se obtuvo su función de probabilidad, ahora obtendremos su función de distribución acumulada

Siendo su función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{30} & si\ x = 0 \\ \dfrac{16}{30} & si\ x = 1 \\ \dfrac{2}{30} & si\ x = 2 \\ 0 \ \ cualquier\ otro\ caso & \end{cases}$$

Su función de distribución acumulativa es:

$F_X(0) = P(\{\omega/\omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq 0\}) = P(X \leq 0) = P(\{(\bar{d}, \bar{d})\}) = \frac{12}{30} = 0{,}4$

$F_X(1) = P(\{\omega/\omega\epsilon\ \Omega \wedge X(\omega) \leq 1\}) = P(X \leq 1) = P(\{(\bar{d}, \bar{d}), (d, \bar{d}), (\bar{d}, d)\}) = \frac{12}{30} + \frac{16}{30} =$
$= \frac{28}{30} \cong 0{,}933$ $F_X(2) = P(\{\omega/\omega \in \Omega\ \wedge\ X(\omega) \leq 2\}) = P(X \leq 2) =$
$P\big(\{(\bar{d}, \bar{d}), (d, \bar{d}), (\bar{d}, d), (d, d)\}\big) == \frac{12}{30} + \frac{16}{30} + \frac{2}{30} = 1$

Los resultados obtenidos se pueden presentar:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{12}{30} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{28}{30} & si\ 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La representación es el gráfico de escalera.

Función de distribución acumulativa de X

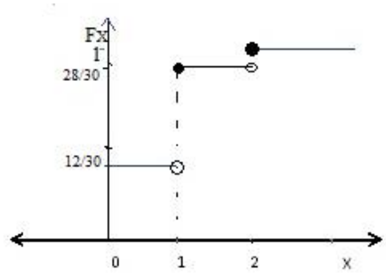


Figura 2-6: Función de distribución acumulada de X

2-6-2 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

- Se define para todo número real x:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

- F_X es no decreciente o creciente en sentido amplio:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

  Demostración:
  Sea $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

  Como $P(x_1 < X \leq x_2) \geq 0$
  Resulta $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

- La función de distribución acumulativa F_X, es una función continua por la derecha en cada punto. Es decir que la función es continua por intervalos. Presenta discontinuidades o saltos en los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iguales a la probabilidad de dicho punto, siendo constante en los intervalos entre los puntos de salto. En dichos puntos de salto, el valor de la función es igual al límite por la derecha

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x); \quad \forall x \epsilon R$$

Estas propiedades se denominan fundamentales porque cualquier función de distribución acumulativa tiene que cumplir estas tres propiedades, si una función de distribución no cumple con alguna de ellas, no es una función de distribución acumulativa. Y toda función con dominio en el conjunto de los reales, R, y codominio en el intervalo [0; 1] que cumpla con estas tres propiedades es una función de distribución acumulativa de una variable aleatoria.

2-6-3 RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIÓNES f_X y F_X

Se verá cómo se relacionan la función de distribución acumulada y la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

- ¿Cómo obtenemos F_X si conocemos a f_X?

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} f_X(x_j) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j)$$

- ¿Cómo obtenemos f_X si conocemos F_X?

$$f_X(x) = \lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) - \lim_{h\to 0^-} F_X(x-h) = F_X(x) - \lim_{h\to 0^-} F_X(x-h)$$

- Ejemplo 2-10:

Retomemos el experimento aleatorio que consiste en seleccionar dos componentes electrónicos de un paquete, sin reemplazo, probarlos y observar si cada uno de ellos es defectuoso o no. El paquete contiene 6 componentes, de los cuales hay 2 defectuosos. En el ejemplo 2-8 y 2-9, se calcularon sus funciones de probabilidad, f_X, y de distribución acumulada, F_X, respectivamente.

La variable en estudio es:

X: "Número de componentes electrónicos defectuosos obtenidos en las dos extracciones"

Queremos calcular la probabilidad de:

a) Seleccionar exactamente un componente electrónico defectuoso a partir de la función de distribución acumulativa.

$$f_X(1) = \lim_{h\to 0^+} F(1-h) - \lim_{h\to 0^-} F(1-h) = F_X(1) - F_X(0) = \frac{28}{30} - \frac{12}{30} = \frac{16}{30} = 0{,}534$$

$$f_X(1) = 0{,}534$$

La longitud del "salto" que da la función F_X desde el valor $F_X(0)$ hasta $F_X(1)$representa el valor de la función de probabilidad en el valor 1, es decir $f_X(1)$.

Interpretación: La probabilidad de seleccionar exactamente un componente defectuoso es de 0,534.

b) Obtener a lo sumo un componente electrónico defectuoso a partir de la función de probabilidad.

$$P(X \le 1) = F_X(1) = \sum_{t\le 1} f_X(t) = \sum_{t\le 1} P(X=t) = \sum_{t=0}^{1} P(X=t)$$

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{12}{30} + \frac{16}{30} = \frac{28}{30} \cong 0{,}93$$

Interpretación: La probabilidad de obtener uno o menos de un componente electrónico defectuoso de un paquete con 6 componentes con dos de ellos defectuosos, es de 0,93

El término ***distribución de probabilidad***, se refiere a la colección de valores de la variable aleatoria y a la distribución de probabilidades entre estos. Sin embargo, hacer referencia a la distribución de probabilidad de X no sólo implica la existencia de la función de probabilidad, sino también a la existencia de la función de distribución acumulativa de X.

2-7 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Hasta ahora hemos considerado variables aleatorias que pueden tomar un número finito de valores o bien variables aleatorias que pueden tomar un número infinito de valores numerables, llamadas variables aleatorias discretas. Cuando la variable aleatoria en estudio, X, se mide en una escala continua nos conduce a estudiar variables aleatorias continuas.

Por ejemplo: cuando medimos la resistencia a los sismos, de un determinado hormigón elaborado, el tiempo de producción de un determinado producto, el tiempo de vida útil de cierta herramienta, la intensidad lumínica de una determinada lámpara, el peso de un determinado artículo, entre otros.

En estos casos la variable aleatoria puede tomar infinitos valores en un intervalo, en la práctica utilizaremos probabilidades asociadas a intervalos o regiones. (Véase 2-3: definición de variable aleatoria continua)

2-8 FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Sea X una variable aleatoria continua definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, y F(x) la función de distribución acumulativa de X. Se define función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X a cualquier función no negativa,

$$f_X: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_0^+, \quad \text{tal que} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$$

f_X es la función densidad.

Nota: Por simplicidad supondremos que $f_X(x)$, es continua o continua por intervalos o sea compuesta por un número finito o de una infinidad numerable de intervalos continuos.

2-8-1 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA FUNCIÓN DENSIDAD

f_X cumple con las siguientes propiedades fundamentales:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

2.1 $f_X(x) \geq 0$

Esto se cumple debido a que f_X es la derivada de F_X, función de distribución acumulativa, y ésta es una función no decreciente, por lo que sus derivadas son no negativas.

2.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Demostración:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ (por propiedad 1 de la función de distribución acumulativa)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Esto significa que toda el área debajo de la curva de la función densidad es siempre igual a 1

El conocimiento de la función densidad nos permite calcular probabilidades por integración.

Por ejemplo, la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor que x_0, se obtiene calculando el área bajo la curva de la función densidad hasta el punto x_0 mediante: $P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)dx$ (2.8.1)

Supondremos que f_X es continua o por lo menos continua por intervalos.

Esta situación nos conduce a definir la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua.

A continuación se grafica un ejemplo de función de densidad de una variable aleatoria continua.

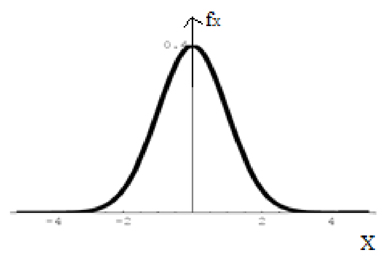


Figura 2-7: Función densidad de una variable aleatoria continua

2-9 *FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA O ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA*

Sea $X: \Omega \to \mathrm{R}$, una variable aleatoria continua definida en un espacio de probabilidad ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P) su función de distribución acumulada es una función definida como:

$F_X: R \to [0,1]$ tal que

$F_X(x) = P(\{\omega/\omega\epsilon\ \Omega \wedge X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$ (2.9.1)

Esta última expresión nos dice que el conjunto de elementos $\omega \epsilon \Omega$, para los cuales $X(\omega) \leq x$, tiene asignada una probabilidad, que se representará abreviadamente $F_X(x) = P(X \leq x)$, se llama función de distribución de la variable aleatoria X; se interpreta que $F_X(x)$ es igual a la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x.

A partir de las igualdades (2.9.1) y (2.8.1), podemos relacionar la función de distribución acumulada y la función de densidad de la siguiente manera:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

(u: variable auxiliar de integración)

Veamos la interpretación geométrica de estas funciones:

Sea f_X, una función densidad. Su gráfica será una curva como la de la figura 2-8. El área limitada entre la curva y el eje x vale 1. La función de distribución acumulativa $F_X(x)$ nos da para cada valor de x, el área comprendida entre el eje x y la curva, desde $-\infty$ hasta la ordenada correspondiente al punto x, área sombreada en la figura 2-8. Esta área representa la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x.

En consecuencia, la representación gráfica de la función distribución $F_X(x)$ es el área limitada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta X=x

Función densidad y Función de distribución acumulada de X

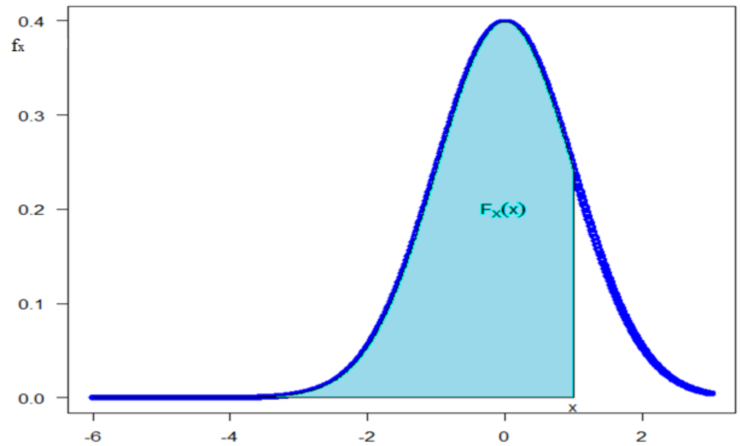


Figura 2-8 Función de distribución acumulada ilustrada como un área bajo la curva de la función de densidad

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua es una función no decreciente continua, su representación gráfica es del tipo:

Función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua

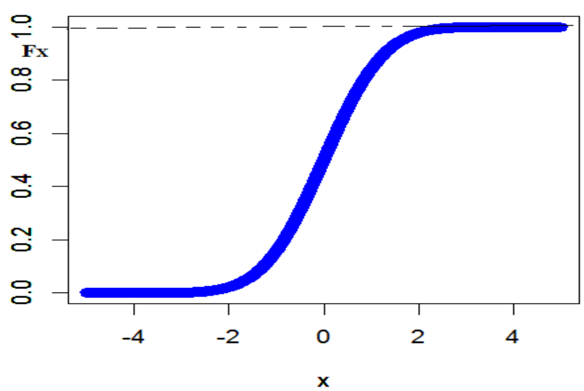


Figura 2-9 Función de distribución no decreciente

2-9-1 PROPIEDADES FUNDAMENTALES

1. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
2. Es una función no decreciente o creciente en sentido amplio:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$
3. Es una función continua para todo $x \epsilon R$
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(x-h) = F_X(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(x+h)$$

2-10 PROBABILIDAD EN UN PUNTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Si se recuerda la definición de Laplace, que supone que el número de casos favorables y por lo tanto también el número de casos posibles, es finito. En este caso la probabilidad de un suceso es siempre un número real comprendido entre 0 y 1. La probabilidad 0 (cero), significa que no hay ningún caso favorable, o sea que el suceso es imposible. La probabilidad 1(uno) significa que el número de casos favorables es igual al número de casos posibles, o sea, que el suceso es seguro.

Si hay infinitos casos posibles la definición anterior debe modificarse, pero ello se hace fácilmente sustituyendo el número de casos favorables o posibles, por la medida de los mismos. La teoría de probabilidades aparece así íntimamente ligada con la teoría de la medida de conjuntos.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Se elige al azar un punto dentro de un segmento A de longitud a ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a otro segmento B de longitud b contenido en el primero?

Naturalmente, el número de casos posibles, que es el número de puntos del segmento A, es infinito, de la misma forma el número de casos favorables, que es el número de puntos del segmento B es también infinito. Sin embargo, considerando los puntos como igualmente posible, basta tomar la longitud de cada segmento, o más general su medida, en lugar del número de puntos, para que la definición sea aplicable, y la probabilidad resultaría b/a.

Obsérvese en este ejemplo, que en vez del segmento B se considerase un conjunto finito de puntos del segmento A, la probabilidad resultaría ser igual a 0, sin que ello signifique imposibilidad. Análogamente, si en vez de un segmento contenido en A se tomase un conjunto de puntos B que sea el mismo A, excepto un número finito de puntos, como la medida de B es igual a la de A, resulta que la probabilidad es 1, sin que ello signifique certeza. O sea: el hecho de que la probabilidad 0 implique imposibilidad y la probabilidad 1, certeza, no es válido si se trata de la probabilidad de conjuntos infinitos[1].

Por lo tanto si X es una variable aleatoria continua entonces:

[1] Santaló, Luis A. (1970) "Probabilidad e Inferencia Estadística". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires.

$$P(X = x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \int_{x_0 - h}^{x_0} f(x)dx = F_X(x_0) - \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X(x_0 - h) = F_X(x_0) - F_X(x_0) = 0$$

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome exactamente un valor x_0 matemáticamente es siempre nula. Pero como ya observamos esto no significa imposibilidad.

Consideremos una variable aleatoria X, definida como las alturas de todas las personas mayores de 21 años de edad de una determinada ciudad. Considere que los valores de la variable son cualquiera entre (152,9; 198,9) en cm, hay infinitos valores de alturas. La probabilidad de seleccionar una persona al azar que mida exactamente 164,9 cm de altura, entre los infinitos valores, tiende a cero, pero eso no significa imposibilidad de encontrar una persona con dicha altura.

2-11 OBSERVACIONES:

- La función densidad en un punto no es igual a la probabilidad en dicho punto, recuerde que puede tomar valores mayores a 1.
- La probabilidad de que la variable aleatoria X tome algún valore entre a y b, está representada por el área bajo la curva de la función densidad, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo $a < b$.

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

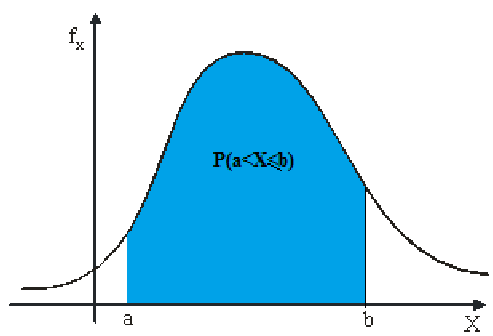


Figura 2.10 Representación gráfica de la Probabilidad entre los puntos a y b

- Otra forma de calcular la probabilidad entre a y b:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X dx - \int_{-\infty}^{a} f_X dx$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X dx$$

- Como $P(X = x) = 0$, para todo valor de $x \epsilon R$, siendo X una variable aleatoria continua, es fácil observar que:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

- Conociendo la función de distribución se obtiene la función de densidad derivándola. Es decir, que en cada punto donde f_X es derivable se cumple:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = F'_X(x)$$

- Ejemplo 2-11:

Si se calcula aproximadamente la distribución del coeficiente intelectual de las personas con una curva suave como muestra la figura, se puede determinar qué proporción de los coeficientes intelectuales quedan contenidos en un intervalo dado (o la probabilidad de que el coeficiente intelectual de una persona esté en ese intervalo), observando el área correspondiente situada debajo de la curva.

X: " Coeficiente intelectual de las personas"

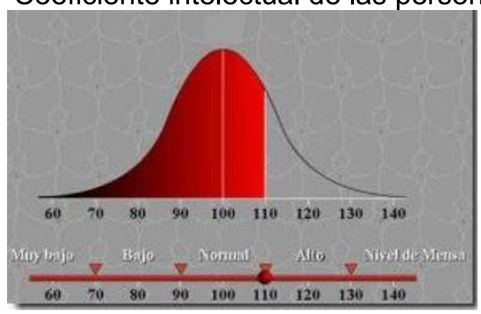


Figura 2-11 La región sombreada representa las personas con coeficiente intelectual de 110 o menor.

Al comparar el área de la región sombreada con el área total situada debajo de la curva que representa el 100%, podemos decir a simple vista que aproximadamente entre el 80% y el 85% de las personas tienen un coeficientes intelectuales de 110 ó menos. Así mismo podemos decir que aproximadamente un 15% o 20% de las personas tienen un coeficiente intelectual de 110 ó más

- Ejemplo 2-12:

Suponga que el tiempo de reacción, en segundos, para un ensayo controlado de laboratorio es una variable aleatoria continua X que tiene la función de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2) & si \;\; 0 < x \leq 1 \\ 0 \;\; para\ cualquier\ otro\ valor \end{cases}$$

a) Verifique que dicha función es una función de densidad.
b) Encuentre su función de distribución acumulada.
c) Encuentre la probabilidad de que el tiempo de reacción sea mayor a 0,25 pero menor de 0,50 seg.
d) Encuentre la probabilidad de que el tiempo de reacción sea por lo menos 0,75 seg.

Resolución:

X: "El tiempo de reacción para un ensayo controlado de laboratorio (en seg.)"

a) Si queremos ver si cumple f_X, con ser una función de densidad, se debe analizar si cumple con las dos propiedades fundamentales:

1- $\int_0^1 f_X\, dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(x+2)\, dx = \frac{2}{5}\int_0^1 (x+2)\, dx = \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{2}{5}.\frac{5}{2} = 1$

2- Observando el dominio de la función dada, los valores de $f_X(x) > 0$, fuera de el $f_X(x) = 0$, por lo tanto para todo x real se cumple $f_X(x) \geq 0$.

Concluimos entonces que f_X cumple con las dos propiedades fundamentales que definen a una función densidad, por lo tanto f_X es una función densidad.

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_0^x \frac{2}{5}(u+2)du = \frac{2}{5}\int_0^x (u+2)du = \frac{2}{5}\left[\frac{u^2}{2} + 2u\right]_0^x = \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]$

Entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right] & si \;\; 0 < x < 1 \\ \\ 1 & si \qquad x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P(0{,}25 < X < 0{,}50) = \int_{0,25}^{0,50} f_X(x)dx = \int_{0,25}^{0,50} \frac{2}{5}(x+2)dx = \frac{2}{5}\int_{0,25}^{0,50}(x+2)dx$

$$P(0{,}25 < X < 0{,}50) = \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0,25}^{0,50} = \frac{2}{5}\left[\frac{0{,}50^2}{2} + 2.0{,}50 - \left(\frac{0{,}25^2}{2} + 2.0{,}25\right)\right] = 0{,}2375$$

La probabilidad de que el tiempo de reacción del ensayo este entre 0,25 y 0,50 segundos es de 0,2375.

d) $P(X \geq 0{,}75) = 1 - P(X < 0{,}75) = 1 - F_X(0.75)$

Como se conocemos la función de distribución acumulativa, se aplica para el valor 0,75

$$P(X \geq 0{,}75) = 1 - P(X < 0{,}75) = 1 - F_X(0.75) = 1 - \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right] =$$

$$P(X \geq 0{,}75) = 1 - \frac{2}{5}\left[\frac{0{,}75^2}{2} + 2.0{,}75\right] = 0{,}2875$$

$$P(X \geq 0{,}75) = 0{,}2875$$

La probabilidad de que el tiempo de reacción del ensayo sea mayor a 0,75 es de 0,2875

- Ejemplo 2-13:

Una compañía de procesamiento de datos, modela el tiempo de espera entre dos conductores de automóviles, que pasan un semáforo en rojo (en horas) de manera sucesiva con una variable aleatoria continua, cuya función de distribución acumulada F_X viene dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \; x < 0 \\ \\ 1 - e^{-3x} & si \; x \geq 0 \end{cases}$$

a) Enuncie la variable aleatoria en estudio.

b) Encuentre su función de densidad.

c) Encuentre la probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos infractores de tránsito sucesivos.

d) Calcule la probabilidad de esperar entre 15 y 30 minutos entre dos infractores sucesivos.

Resolución:

a) X: “Tiempo de espera entre dos conductores de automóviles que pasan un semáforo en rojo, en horas”.

b) Dado que $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = F'_X(x)$

$$f_X(x) = \frac{d\ (1 - e^{-3x})}{dx} = -e^{-3x}.(-3) = 3.e^{-3x}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 3.e^{-3x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

c) $P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = 1 - e^{-3.0{,}2} = 1 - e^{-0{,}6} \cong 0{,}4512$

La probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos conductores de automóviles que pasan un semáforo en rojo es aproximadamente 0,4512

d) Observe que la variable está definida en horas y ahora la pregunta está en minutos, entonces:

$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 1 - e^{-3.0{,}5} - (1 - e^{-3.0{,}25})$

$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = 1 - e^{-3.0{,}5} - 1 + e^{-3.0{,}25} = -e^{-1{,}5} + e^{-0{,}75} \cong 0{,}2492$

La probabilidad de esperar entre 15 y 30 minutos entre dos conductores de automóviles que pasan un semáforo en rojo es aproximadamente 0,2492

2-12 PROBLEMAS PROPUESTOS DE VARIABLES ALEATORIAS

2.1 Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas (finito o infinito numerable) o continuas:

X_1: "*Número de accidentes viales en la Provincia de Mendoza, en forma anual*"

X_2: "*Tiempo necesario para realizar una transacion bancaria por internet, en min.*"

X_3: "*Número de artículos que produce una máquina industrial, por mes*"

X_4: "*Número de artículos que se inspeccionan hasta obtener uno no conforme con las especificaciones*"

X_5: "*Peso de la soja que produce un campo, por hectárea*"

X_6: "*Resistencia a la compresión de las barras de acero, en* kg/cm^2"

X_7: "*Cantidad de registros de marcas realizadas ante INPI, anualmente*"

X_8: "*Volumen anual de vinos exportados desde Mendoza, a Estados Unidos, en litros*"

X_9: "*Cantidad de lanzamientos de un dado hasta obtener dos seis*"

X_{10}: "*Tiempo de espera hasta ser atendido en la cola de un banco, en minutos*"

X_{10}: "*Tiempo de duración de la bateria de una notebook, en horas* "

X_{11}: "*Caudal anual de agua del río Mendoza, en* ${m^3}/{seg}$ "

X_{12}: "*Latitud de una determinada ciudad, en radianes*"

X_{13}: "*Superficie cultivada con vid, en la provincia de Mendoza, en ha.*"

X_{14}: "*Monto de la orden de compra de un cliente, en cientos de pesos*"

X_{15}: "*Precio de los bonos argentinos a largo plazo, en miles de pesos*"

X_{16}: "*Salario por hora de un trabajador, en miles de pesos*"
X_{17}: "$Cantidad\ de\ denuncias\ sobre\ inseguridad\ realizadas\ en\ una\ oficina\ estatal,\ por\ semana$"
X_{18}: "$Cantidad\ de\ lluvia\ caída\ en\ cierto\ lugar\ y\ día$"

2.2 Una caja de madera contiene 3 tornillos defectuosos y 6 no defectuosos. Se extrae una muestra de dos tornillos, con reemplazo y se anota si el tornillo extraído es defectuoso o no.

a) Describa el espacio muestral del experimento. Analice si este espacio muestral es equiprobable.
b) ¿Qué valores asigna la variable aleatoria a cada elemento del espacio muestral?, defina el conjunto imagen o recorrido de la variable aleatoria.
c) Encuentre y grafique la función de probabilidad para la variable aleatoria X: "Número de tornillos no defectuosos que se obtiene".
d) Encuentre y grafique la función de distribución acumulada para la variable X.
e) Calcular la probabilidad de no seleccionar tornillos defectuosos en la muestra.
f) Calcular la probabilidad de que en la muestra se obtenga hasta dos tornillos no defectuosos.

2.3 Considere el planteo del ejercicio anterior. Una caja de madera contiene 9 tornillos de los cuales 3 son defectuosos. Se necesita una muestra de dos tornillos, en este caso la muestra se toma sin reposición y se anota si el tornillo extraído es defectuoso o no.

a) Describa el espacio muestral del experimento. Analice si este espacio muestral es equiprobable.
b) Encuentre y grafique la función de probabilidad para la variable aleatoria X: "Número de tornillos no defectuosos que se obtiene".
c) Encuentre y grafique la función de distribución acumulada para la variable X.
d) Calcular la probabilidad de no seleccionar tornillos defectuosos en la muestra.
e) Calcular la probabilidad de que en la muestra se obtenga hasta dos tornillos no defectuosos.

2.4 En cada una de las siguientes variables aleatorias discretas:

X_1: "$Cantidad\ de\ extracciones\ realizadas\ de\ un\ contenedor\ de\ baterias\ hasta\ obtener\ una\ defectuosa$"
X_2: "$Cantidad\ de\ espadas\ obtenidas\ cuando\ se\ extraen\ 5\ cartas\ de\ un\ mazo\ de\ barajas\ españolas\ sin\ reposición$"

a) Indique el experimento aleatorio
b) Indique el espacio muestral del experimento.
c) Indique el recorrido de la variable aleatoria $X(\Omega)$. Clasifique la variable aleatoria.
d) Defina la función de probabilidad y grafique
e) Defina la función de distribución acumulativa y grafique

2.5 Se lanza un dado legal todas las veces necesarias hasta obtener dos seis no necesariamente consecutivos. Sea la variable X que mide el número de lanzamientos hasta que dicho suceso ocurre.

a) Describa el espacio muestral del experimento. Analice si este espacio muestral es equiprobable.
b) Plantee el Recorrido de la variable aleatoria.
c) Encuentre y grafique la función de probabilidad de la variable aleatoria X.
d) Encuentre la probabilidad de P(X=3); P(X≥5); $P(X \leq 3/X > 2)$

2.6 Una variable aleatoria X puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

a) Indique justificando la respuesta, cuáles de las siguientes funciones puede ser función de probabilidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & si\ x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ó } 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{60}, & si\ x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ó } 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{9}, & si\ x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ó } 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{67}, & si\ x = 0,\ 1, 2, 3, 4 \text{ ó } 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) Para aquellas funciones que cumplen con ser funciones de probabilidad represéntelas gráficamente
c) Para las funciones de probabilidad del ítem a) determine y grafique su función de distribución acumulada.
d) Calcule las siguientes probabilidades: $P(X = 3)$; $P(1 \leq X \leq 3)$; $F(4)$; $P(X \geq 3)$ en las funciones de probabilidad.

2.7 Dadas las siguientes funciones, determine el valor de k para que f_X sea una función de densidad:

a)

$$f_X(x) = \begin{cases} k.(x^2 - 1) & si \quad x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} k.(x - 1) & si \quad 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

c)

$$f_X(x) = \begin{cases} k.x.(x - 1) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

d)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1000 \\ \dfrac{k}{x^2} & si \quad x \geq 1000 \end{cases}$$

Determine su función de distribución acumulativa y grafíquela.

2.6 Demuestre que no existe un número k de forma que la siguiente función sea una función de probabilidad: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & para\ x = 1, 2, \ldots, \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

2.7 Considere las siguientes funciones:

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & para\ 0 < x < 2{,}5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} c(2x - x^2), & para\ 0 < x < 2{,}5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para cada función analice si pueden ser una función de densidad. En el caso que pueda ser una función de densidad determine el valor de la constante c.

2.8 Una empresa automotriz que implementó la Especificación Técnica ISO/TS 16949, y desarrollo por lo tanto, un sistema de Gestión de calidad, que satisface las expectativas y requerimientos de sus clientes, en este contexto realiza auditorías internas permanentes para verificar la conformidad de los requisitos especificados del producto. Los productos presentan disconformidades en el 5% de ellos. Supondremos independencia en los controles que realiza el auditor. Si un auditor verifica tres automóviles al azar.

a) Defina la variable de interés por el auditor.
b) Encuentre la función de probabilidad para dicha variable. ¿Qué suposiciones debe tenerse en cuenta para realizar los cálculos?
c) Calcule la probabilidad de que el auditor encuentre
   ca) al menos una disconformidad.
   cb) a lo sumo tres disconformidades.

Nota: en un automóvil se pueden encontrar varias disconformidades, en motor, pintura, electricidad, etc. Vamos a considerar que el automóvil presenta fallas es decir que no se encuentra conforme a especificaciones (o presenta disconformidades) o que se encuentra conforme a especificaciones. En este caso se registran tres automóviles por lo tanto la variable puede tomar los valores, 0, 1, 2 ó 3.

2.9 Una empresa que comercializa artículos electrónicos de última generación propone la siguiente función para la cantidad de artículos electrónicos que vende en un cierto día:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_X(x)$	0,06	0,14	0,16	0,14	0,12	0,10	K	0,07	0,06	0,04	0,03

a) Encuentre el valor de k, para que la función $f_X(x)$, sea una función de probabilidad.
b) Verifique que $f_X(x)$ cumpla con todas las propiedades de una función de probabilidad.
c) Grafique la función de probabilidad
d) Encuentre la probabilidad de que un cierto día la empresa venda:
   c-1) menos de 3 artículos electrónicos.
   c-2) Siete o más de siete artículos electrónicos.
   c-3) Entre 1 y 6 artículos electrónicos.
   c-4) Exactamente dos artículos electrónicos.
e) Encuentre la función de distribución acumulada y grafíquela.
f) Utilice la función de distribución acumulada para encontrar las probabilidades del ítem c)

g) Se selecciona un determinado día y se tiene información que vendió más de 7 artículos electrónicos, ¿cuál es la probabilidad de que se vendiera 9 o 10 artículos electrónicos?

2.10 En una empresa de hormigón elaborado ha pedido al laboratorio de nuevos productos que elabore un hormigón más resistente a grietas por sismos. El director del laboratorio estima la siguiente función de probabilidades para el tiempo que requiere la investigación en meses.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	0,20	0,30	0,15	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01

a) Enuncie la variable aleatoria.
b) Grafique la función de probabilidad.
c) Encuentre la función de distribución acumulada. Y Grafíquela.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que requiera la investigación del nuevo producto sea a lo sumo seis meses?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que requiera la investigación sea por lo menos un año?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que requiera la investigación sea exactamente un trimestre?

2.11 Una empresa de servicio técnico de grupos electrógenos a gas, en cierta ciudad plantea que dependiendo del desperfecto, el servicio técnico puede durar 1, 2, 3 ó 4 horas. Los distintos desperfectos se presentan más o menos con la misma frecuencia.
a) Enuncie la variable en estudio.
b) Defina la función de probabilidad de la variable aleatoria.
c) Trace una gráfica de la distribución de probabilidad.
d) Demuestre que la función de probabilidad cumple con las condiciones que requiere toda función de probabilidad discreta
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un servicio dure 3 horas?
f) Determine la función de distribución acumulativa de la variable enunciada en el punto a).
g) Se acaba de recibir una solicitud de servicios, pero no se conoce el tipo de desperfecto. Son las 3 pm. Por lo general los técnicos de servicios salen a las 5 pm. ¿Cuál es la probabilidad del que el técnico de servicio deba trabajar horas extras para arreglar la máquina hoy?

2.12 Las probabilidades que una auditor externo de una empresa de servicios, examines sus registros financieros 0, 1, 2, 3, 4 ó más veces al año son 0,12; 0,25; 0,30; 0,25; 0,08
a) Enuncie la variable aleatoria de interés
b) Determina la función de distribución acumulada de probabilidades de la variable en estudio.
c) Grafique la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria en estudio.

d) Calcule la probabilidad de que un auditor no examine los registros financieros en el año.
e) Calcule la probabilidad de que un auditor examine los registros financieros:
   ea) por lo menos una vez al año.
   eb) menos de tres veces al año.
   ec) Entre una y tres veces al año, (inclusive).
   ed) Cuatro o más veces al año.

2.13 En un lote de 12 piezas hay 3 no conforme a especificaciones. Se toma una muestra de 3 sin reemplazo y se observa el número de piezas no conforme:

a) Defina el espacio muestral del experimento, la variable aleatoria y el conjunto recorrido de la misma.
b) ¿Es el espacio muestral equiprobable?
c) Hallar la función de probabilidad o función de cuantía de la variable aleatoria X, siendo X: "Número de piezas no conformes extraídas"
d) Grafique la función de probabilidad.
e) Hallar la función de distribución acumulada y graficarla.
f) Calcule la probabilidad de obtener menos de 2 piezas no conforme a especificaciones
g) Calcule la probabilidad de obtener más de una pieza no conforme.
h) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos piezas conforme a especificaciones?

2.14 El silicio es un elemento químico muy utilizado en la fabricación de microchips para computadoras, tabletas y celulares. Una casa de comercio se abastece de silicio una vez por mes. El volumen de ventas mensual, en miles de kilogramos, es una variable aleatoria que se distribuye según la función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & para\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se desea conocer qué cantidad se debe adquirir por mes, de modo tal que la probabilidad de que se agote el silicio en un mes sea 0,01.

2.15 La función de densidad de una variable aleatoria continua, X, está dada por:

$$f_X\,(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ -x+1 & si\ 0 \le x < 1 \\ +x-1 & si\ 1 \le x \le 2 \\ 0 & si\ \ x > 2 \end{cases}$$

a) Encuentre la función de distribución acumulada.
b) Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada.
c) Encuentre las siguientes probabilidades:
   $P(0{,}55 < X < 1{,}55);\ P(X \le 1{,}25); P(0 \le X \le 0{,}90); P(X \ge 1{,}50)$.

2.16 Sea la variable aleatoria continua: X: "Tiempo de vida útil de una plaqueta de video, en cientos de horas", cuya función de densidad está dada por:

$$f_X\,(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2} & para\ x \ge 100 \\ 0 & para\ x < 100 \end{cases}$$

a) Pruebe que es una función de densidad para la variable X.
b) Determine la función de distribución acumulada.
c) Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua X.
d) Se elige una plaqueta de video al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que dure:
   da) entre 10.000 y 15.000 horas?
   db) menos de 15.000 horas?
   dc) por lo menos de 20.000 horas?

2.17 La temperatura (en grados centígrados) en la cual se produce cierta reacción química en un experimento controlado de laboratorio, manteniendo la presión constante, es una variable aleatoria con función de distribución acumulativa dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{3}{18}\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{4}{18} & si -1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Enuncie la variable aleatoria.
b) Compruebe que la función dada es una función de distribución acumulativa.
c) En caso que sea una función de distribución acumulativa, entonces encuentre la función de densidad y grafíquela.
d) Calcule la probabilidad de que la temperatura sea superior a 0°.
e) Calcule la probabilidad de que la temperatura de reacción este entre 1,5° y 1,8°.
f) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de reacción sea menor a 1,6°, si se sabe que a la temperatura 1,2° aún no había reaccionado?

2.18 En una embotelladora la adecuación del proceso por cambio de producto requiere 1, 2, 3 ó 4 hs. dependiendo de las características del producto específico que será producido. Sea la variable aleatoria discreta X: “El número de horas que se requiere para adecuar el proceso”.
La función de probabilidad puede ser utilizada para determinar la probabilidad de la cantidad de horas que se requiere para la adecuación del proceso al próximo producto. Sea la función de distribución acumulativa:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\; x < 1 \\ \dfrac{1}{10} & si\; 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{3}{10} & si\; 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{6}{10} & si\; 3 \leq x < 4 \\ 1 & si\; x \geq 4 \end{cases}$$

a) Determine la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.
b) Represente gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución acumulada.
c) Calcule la probabilidad de que la adecuación del proceso requiera:
ca) Exactamente 2 horas.
cb) Como máximo 3 horas.
cc) Por lo menos 2 horas.
cd) Más de dos horas pero menos de cuatro horas.

ce) Menos de 3 horas si se sabe que requiere más de 2 horas.

Nota: Observe que el tiempo es naturalmente una variable aleatoria continua, pero en este planteo está discretizada la variable en horas enteras.

2.19 El diámetro de un conductor eléctrico medido en cm, es una variable aleatoria continua X, se puede considerar que su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6.x.(1-x) & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

a) Enuncie la variable aleatoria en estudio
b) Encuentre la función de distribución acumulada de la variable x.
c) Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua X.
d) Halle la probabilidad de que el diámetro de un conductor eléctrico mida:
   - da) Exactamente 0,9 cm
   - db) Cómo máximo 0,5 cm
   - dc) Por lo menos 0,4 cm
   - dd) Entre 0,25 y 0,45 cm

2.20 El tiempo que una aeronave tiene que esperar para poder aterrizar en cierto aeropuerto internacional, en minutos, es una variable aleatoria X, cuya función densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Enuncie la variable en estudio. Clasifíquela.
b) Encuentre la función de distribución acumulada.
c) ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 10 minutos, pero menos de 15 minutos, para que una aeronave aterrice?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea menor a media hora?
e) ¿Cuál es la probabilidad de esperar menos de media hora, si se sabe que después de quince minutos de llegar aún no aterriza?

2.21 El tiempo que una persona hace funcionar su celular para escuchar música, en un periodo de un mes, es una variable aleatoria continua X, medida en unidades de 100 horas, cuya función densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & para\ cualquier\ otro\ valor \end{cases}$$

a) Enuncie la variable en estudio.
b) Verifique que se cumplen las propiedades de la función densidad.
c) Encuentre la función de distribución acumulada.
d) Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona utilice el celular para escuchar música menos de 100 horas al mes?
f) Utilizando la función de distribución acumulada calcule la probabilidad de que una persona utilice el celular para escuchar música por lo menos 150 horas al mes.

g) Calcule la probabilidad de que una persona utilice el celular para escuchar música menos de 150 horas, si se sabe que lo utiliza más de 100 horas.

2.22 La función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, definida como el número de defectos cada 10 m^2 de una membrana impermeabilizante para techos en rollos está dada por:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0,25	0,49	0,16	0,09	0,01

a) Compruebe que $f_X(x)$ es una función de probabilidad.
b) Grafique la función de probabilidad $f_X(x)$
c) Se selecciona una membrana al azar de 10 m^2. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   ca) Se encuentren menos de 2 defectos en la membrana?
   cb) Se encuentren por lo menos 3 defectos?
   cc) No se encuentren defectos?
   cd) Se encuentren más de un defecto pero menos de cuatro?
d) Encuentre la función de distribución acumulada.
e) A partir de la función de distribución acumulada encuentre la probabilidad de que al seleccionar una membrana de 10 m^2 al azar:
   ea) Presente dos o menos de dos defectos.
   eb) Presente más de un defecto.

2.23 Una estación de servicios se le suministra gasolina una vez por semana. Si su volumen semanal de ventas en miles de galones es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, para\ 0 < x < 1 \\ 0 \quad\quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se desea conocer la cantidad de gasolina a adquirir para que la probabilidad de que el suministro se agote en una semana sea de 0,01

2.24 La demanda diaria de copias de las guías de trabajos prácticos en una fotocopiadora en una Universidad estatal, tiene la siguiente distribución de probabilidades:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_X(x)$	0,06	0,14	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,04	0,03

a) Verificar si la función $f_X(x)$ cumple las condiciones para ser una función de probabilidad.
b) Represente gráficamente la función de probabilidad, $f_X(x)$.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado se pidan más de 3 copias de las guías de trabajos prácticos?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda en un día, sea por lo menos de dos pero no más de 6 copias?
e) La política de la fotocopiadora es tener 8 copias de las guías de trabajos prácticos al inicio de cada día, ¿cuál es la probabilidad que en un día particular, la demanda supere a la oferta?
f) Halle la función de distribución acumulada y aplíquela para encontrar las probabilidades de los incisos anteriores.

2.25 Considere la siguiente función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8} & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria X. Represéntela gráficamente.
b) Encuentre la $P(X \le 1), P(X > 1{,}5), P(-2 \le X \le 1{,}3)$
c) Sabiendo que la variable X es mayor que 1,5, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.
d) Encuentre el valor de la mediana y el valor de los cuartiles

2.26 La función de densidad del diámetro de contacto de roscas de un conducto de acero inoxidable está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Probar que $f_X(x)$ es una función de densidad de probabilidad.
b) Graficar $f_X(x)$
c) Hallar la función de distribución acumulada de probabilidad y graficarla.
d) Hallar $P(X \le 2)$, $P(2 \le X \le 4)$
e) Sabiendo que X es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.
f) A partir de la función de distribución acumulada encuentre el valor de la mediana e interprete.

2.27 Suponga que un investigador requiere realizar un sondeo de opinión sobre un acontecimiento coyuntural y contando con los recursos suficientes, decide utilizar en su trabajo de indagación, información primaria. La técnica que decide utilizar es la entrevista telefónica. La principal atracción de esta técnica es que permite recolectar información de lugares alejados en forma más económica y rápida que otras técnicas. La proporción de personas que responden a cierta encuesta telefónica es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(5.x - 2) & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Demuestre que $f_X(x)$ es una función de densidad de probabilidad.
b) Encuentre la función de distribución acumulada.
c) Encuentre la probabilidad de que más de ¼ pero menos de ¾ de las personas contactadas respondan a la encuesta telefónica.
d) Encuentre la probabilidad de que más de ½ de las personas respondan a la encuesta si se conoce que más de ¼ de las personas contactadas respondieron a la encuesta telefónica.

2.28 El contenido de ceniza en el carbón (en porcentaje) se puede considerar como una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4875}x^2 & si \quad 10 < x < 25 \\ 0 & para\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Enuncie la variable aleatoria bajo estudio. Clasifíquela.
b) Encuentre la función de distribución acumulada. Grafíquela.
c) Entre que valores se encuentra el 90% de los resultados?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido de cenizas en el carbón sea menor de 12?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido de cenizas en el carbón se encuentre entre 12 y 20?

2.29 La duración, en cientos de horas, de la batería de un celular recargable es una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 125x^{-2} & si \quad 100 < x < 500 \\ 0 & para\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución acumulada de probabilidades de la variable aleatoria X y grafique.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería de un celular
   ba) dure más de 30000 horas?
   bb) dure menos de 15000 horas?
   bc) dure menos de 30.000 horas si se sabe que funciona después de 20.000 horas.
   bd) dure más de 30.000 horas si se sabe que funciona después de 18.000 horas.
a) ¿Cuál es la duración mínima que debe tener la batería de un celular para pertenecer al 10% de las baterías que más duran?
b) ¿Cuál es la duración máxima que deberá tener la batería de un celular para pertenecer al 25% de las que menos durán?
c) Calcular el valor de k, tal que la probabilidad de que la duración de la batería de un celular exceda a k sea de 0,60.

2.30 El número de inasistencias no justificadas por mes de los estudiantes de nivel secundario de una institución estatal, tiene la siguiente función de probabilidad:

x_i	0	1	2	3	4	5
$f_X(x_i)$	0.30	0.25	0.17	0.13	0.10	0.05

a) Muestre que $f_X(x)$ es una función de probabilidad y represéntela.
b) Encuentre la función de distribución acumulada de la variable X y represéntela.
c) Calcule de dos formas diferentes la probabilidad de que un estudiante:
   1- Tenga más de 3 inasistencias.
   2- Tenga más de una inasistencia pero menos de 5.
   3- Tenga más de 2,5 inasistencias.
   4- Tenga 2 inasistencias.

2.31 Una vinería ofrece distintas clases de vinos, los cuales tienen distintos tiempos de añejamiento, sus clientes pueden elegir entre,1; 2; 3 o 4 años. En la siguiente tabla se muestra la distribución acumulada del número de años de añejamiento de los vinos seleccionados aleatoriamente.

x_i	$(-\infty, 1)$	[1,2)	[2,3)	[3,4)	$[4, \infty)$
$F_X(x_i)$	0	0,15	0,39	0,74	1

a) Enuncie la variable aleatoria en estudio.
b) Determine la función densidad de la variable aleatoria X.
c) Determine la probabilidad de que el tiempo de añejamiento de los vinos sea menor o igual a 2 o mayor que 3.
d) Se selecciona un vino aleatoriamente y se conoce que tiene un tiempo de añejamiento es de más de 3 años, ¿Cuál es la probabilidad de que su tiempo de añejamiento sea de 4 años?

2.32 El grado con el cual una compañía se involucra con el desarrollo de nuevos productos depende, en gran medida, de sus competidores. Un estudio fue realizado sobre las compañías que utilizan tecnología avanzada, para analizar el número de nuevos productos que se lanzan al mercado anualmente. Los cálculos, en función de años anteriores, están dados en la siguiente tabla:

X	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	0,08	0,14	0,22	0,30	0,14	0,08	0,04

Este ejercicio está guiada su resolución. Para resolverlo simplemente complete en cada ítem lo que se pide.

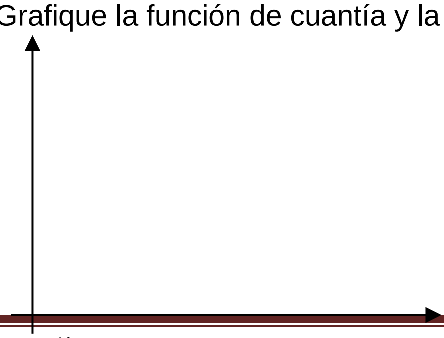
a) Enuncie la variable en estudio:
X: "…………………………………………………………………………………………"

b) Construya la distribución de probabilidad acumulada de X.

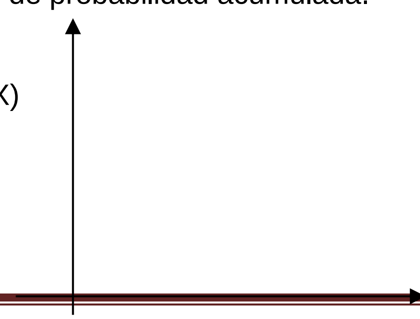
$$F(X) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X < 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 3 \leq X < 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 4 \leq X < 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 5 \leq X < 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 6 \leq X < 7 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 7 \leq X < 8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } 8 \leq X < 9 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

c) Grafique la función de cuantía y la función de probabilidad acumulada.

f(x)



F(X)



X X

d) Enuncie las propiedades que debe cumplir la función de cuantía o función de probabilidad y verifique dichas propiedades en el ejemplo.
Propiedad 1

…………………………………………………………………………………………
Propiedad 2

…………………………………………………………………………………………

e) Calcule la probabilidad de que lancen al mercado entre 4 y 5 productos. Marque con una X el planteo correcto:
e.1) $P(4<X<5)$
e.2) $P(4\leq X<5)$
e.3) $P(4<X\leq 5)$
e.4) $P(4\leq X\leq 5)$

f) La probabilidad de que lancen al mercado entre 4 y 5 productos es: …………………..

2.33 Una variable aleatoria con distribución continua X que puede asumir valores entre x=1 y x=3 tiene una función densidad dada por f(x)=1/2.

a) Grafique la función de densidad f(x)
b) Demuestre que el área bajo la curva es 1.

I- En los siguientes ítems, marque con un círculo la solución correcta. Recuerde que solo hay una respuesta correcta.

c) Encuentre $P(2<X<2{,}5)=$
b.1) 1
b.2) 0,5
b.3) 0,25
d) En símbolos la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales a 1,6; se anota:

c.1) $P(X<1{,}6)$
c.2) $F(1{,}6)$
c.3) $F(1{,}5)$
c.4) $f(1{,}6)$
c.5) $f(1{,}5)$
c.6) La/s opción/es correcta/s es/son ………………………….

e) La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales a 1,6 es:

e.7) 0,7
e.8) 0,8
e.9) 0,3
e.10) Ninguna de las anteriores. La probabilidad es………………………………
d) La $P(X=2)$ es:

d.1) P(X=2) = f(2) = 0,5
d.2) P(X=2) = F(2) = 0,5
d.3) P(X=2) = f(2) = 0
d.4) Ninguna de las anteriores. La respuesta correcta es………………………..

2.34 Los estudios realizados por los ingenieros de una empresa distribuidora de energía, han permitido estimar que el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh, se puede modelar, razonablemente, como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{9}\, x e^{-x/3} & para\ x \geq 0 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera?

a) Definir la variable en estudio:

X: "…………………………………………………………………………………….."

b) Graficar la función de densidad de probabilidad para el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh.

c) Marque con una X la opción que considere correcta. Para responder tenga en cuenta sólo la representación gráfica de la función de densidad de probabilidad, f(x). (NO debe realizar cálculos, sólo debe observar el gráfico).

c.1) La probabilidad de que el consumo diario de energía eléctrica en la región exceda los 25 GWH, es menor de 0,10.

c.2) La probabilidad de que el consumo diario de energía eléctrica en la región sea menor de10 GWH, es menor de 0,50.

c.3) Todas las anteriores.

c.4) Ninguna de las anteriores.

d) Seleccione la opción que responde al planteo de la solución del problema:

"Si la planta de energía eléctrica de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera?"

d.1) P(X = 12 GWh)

d.2) P(X > 12 GWh)

d.3) P(X < 12 GWh)

d.4) Ninguna de las anteriores

e) Observe la gráfica de la función de densidad de probabilidad para el consumo diario de energía eléctrica en la región y marque la opción que corresponda a la respuesta de la consigna del problema.

Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, la probabilidad de que el abastecimiento sea inadecuado en un día cualquiera es:

e.1) Mayor de 0,50

e.2) Entre 0,50 y 0,75

e.3) Entre 0,50 y 0,25

e.4) Menor de 0,15

f) Marque la opción que corresponda al valor numérico correcto de la respuesta de la consigna del problema:

f.1) 0,9080
f.2) 0,4020
f.3) 0,0920
f.4) 0,0001