CAPITULO I

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

1-1 HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Los conceptos de incertidumbre y casualidad son tan antiguos como la civilización misma. La humanidad siempre ha debido enfrentarse a la incertidumbre en muchos temas, tales como la incertidumbre sobre el clima, sobre la producción agrícola y respecto a diferentes aspectos del medio ambiente, ha tenido que trabajar para disminuir esta incertidumbre y sus efectos. Incluso la idea de los juegos de azar tienen una larga historia.

La presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo en las excavaciones arqueológicas más antiguas, parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40.000 años, y la utilización del astrágalo en culturas más recientes, ha sido ampliamente documentada.

El juego de los dados, también llega a Egipto en el período griego conocido como dinastía Ptolemaica. Este juego que aparece en Roma más tarde recibe el nombre de Datum (que significa algo jugado).

Se considera que la Teoría de la Probabilidad nació en Francia, en el siglo XVIII, como un modelo para los juegos de azar, al complicarse sumamente éstos y adquirir una cierta importancia social.

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII, cuando los matemáticos Pascal y Fermat contribuyeron con sus aportes a la Teoría de la Probabilidad, lograron obtener probabilidades exactas para ciertos problemas relacionados con los juegos de dados. Algunos problemas que resolvieron habían permanecido sin solución por más de 300 años. Sin embargo, probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de dados ya habían sido calculadas por Girolamo Cardano (1501–1576) y por Galileo Galilei (1564–1642). Fue Cardano quien escribió la primera obra relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba “Libro de los juegos de azar”.

Los matemáticos Blaise Pascal (1623–1662), Pierre Fermat (1601–1665), Huygens (1629-1695) y Jacob Bernoulli (1654-1705), pioneros en el estudio de la probabilidad, Huygens publicó el libro “De ratiociniis in ludo aleae” (Un tratado sobre los Cálculos en los Juegos de Azar), en el año 1656. En él introdujo algunos conceptos importantes en este campo, como la esperanza matemática y resolvía algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Meré

La ley empírica del azar, fue formalizada en parte por J. Bernoulli, (1712) en la ley débil de los grandes números y posteriormente por E. Borel, (1900) en la ley fuerte de los grandes números, trabajando con instrumentos matemáticos muchos más sofisticados, como convergencia en probabilidad y convergencia casi segura.

Durante los siglos XVIII y XIX se utilizaron en forma sistemática las técnicas de recuento, ordenación, cálculo de índices, etc., por parte de economistas, demógrafos, compañías de seguro, entre otros. Estas técnicas actualmente forman parte de lo que se denomina Estadística Descriptiva.

En el siglo XX el matemático Ronald Fisher (1890-1962), establece los fundamentos teóricos de la inferencia estadística como método de razonamiento inductivo que da un nuevo sentido al procesamiento de datos e intenta medir su grado de incertidumbre. Sus resultados le dieron a la estadística el estatus de disciplina científica, reafirmado por los innumerables campos de aplicación de sus metodologías. A Karl Pearson, (1857- 1936), se lo considera el padre de esta ciencia del siglo XX. Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en biología y fue el fundador de la bioestadística.

Abraham Wald (1950) coloca a la estadística dentro del campo de la teoría de decisiones. Ese afán de lo óptimo lleva al frecuentismo a una teoría rigurosa con un enorme atractivo matemático, muy lejos de la lógica inferencial de Fisher que pretendía aprender de los datos. Al respecto Fisher (1956), decía "… todavía es cierto que las Ciencias Naturales puedan ser conducidas exitosamente solo por pensadores responsables e independientes, que concentran sus mentes e imaginación a la interpretación detallada de observaciones verificables. La idea de que esa responsabilidad puede ser delegada a un gran computador programado con funciones de decisión, pertenece a la fantasía, muy lejana de la investigación científica¨

El punto de vista frecuentista de Neyman-Wald, con pretensiones estructuralistas y universales en la búsqueda del óptimo genera su propia contrarreforma, el Bayesianismo. Estos nuevos Bayesianos enfatizan las probabilidades subjetivas y las decisiones de tipo personal (existen también los objetivistas y los empíricos que tienen todos en común la de utilizar la probabilidad a priori). Así llegamos al comienzo del siglo XXI, con esta nueva rama de los Bayesianos.

1-2 INTRODUCCIÓN

La teoría de probabilidad es una rama de la Matemática que proporciona modelos adecuados para una categoría de fenómenos o experiencias a los que se denominan aleatorios o estocásticos.

La probabilidad tiene un rol decisivo en la aplicación de la inferencia estadística porque una decisión, cuyo fundamento se encuentra en la información contenida en una muestra aleatoria, puede estar equivocada. Sin una apropiada comprensión de las reglas fundamentales de la probabilidad, es difícil utilizar la metodología estadística de forma efectiva.

Ahora bien, cuando se toman muestras y se representan estos valores en tablas de frecuencias, estos datos muestrales sirven para generalizar acerca de parámetros desconocidos de la población.

Los datos de la muestra pueden ayudarnos para reducir nuestra incertidumbre, pero difícilmente pueden eliminar la incertidumbre en una situación de toma de decisiones.

Para medir el grado de error que cometemos cuando a partir de los datos de una muestra obtenemos las estimaciones de los parámetros desconocidos poblacionales, utilizaremos la teoría de probabilidades.

Para entender el concepto de probabilidad se necesita precisar algunos conceptos, como experimento, espacio muestral, suceso y suceso elemental.

1-3 CONCEPTOS PREVIOS

1-3-1 EXPERIMENTOS

Los **experimentos**, se pueden clasificar en *determinísticos* y *aleatorios*.

- Los experimentos determinísticos: son aquellos en los que "*a priori*" de realizar el experimento se conoce con certeza el resultado. Son ejemplos todos los ensayos físicos y químicos.
- Los experimentos aleatorios o estocásticos: son aquellos en los que "*a posteriori*" de realizarse el experimento se conoce el resultado. Estos dependen del azar. Se denota con la letra griega **ε.** Son ejemplos los juegos de azar.

Se verá algunos ejemplos y se podrá comparar:

Nadie puede predecir con certidumbre el resultado de un experimento tan simple como el lanzamiento de una moneda y observar cuál será la cara que caiga hacia arriba.

Se sabe que el resultado será cara o sello pero no se puede predecir cuál será el resultado exactamente antes que la moneda toque el suelo. Este es un experimento aleatorio.

Sin embargo cualquier estudiante de primer año de la licenciatura de Física debe ser capaz de calcular el tiempo que transcurrirá para que un objeto, que se deja caer desde una altura conocida, llegue al suelo. Este es un experimento determinístico.

La teoría de la Probabilidad sólo trabaja con experimentos aleatorios, los cuales presentan las siguientes propiedades:

- Son de naturaleza tal que se puede concebir la repetición, en las mismas condiciones de experimentación.
- El resultado de cada experimento aleatorio depende de la casualidad (esto es de influencias que no pueden ser controladas) y por lo tanto no se puede predecir un resultado único.

Ejemplo 1-1:
Los siguientes experimentos son ejemplos de experimentos aleatorios:

ε_1 : "Lanzar un dado legal y observar la cara superior"
ε_2 : "Lanzar una moneda insesgada y observar la cara superior"
ε_3 : "Extraer dos cartas de un juego de naipes"
ε_4 **:** "Tomar un producto determinado de la línea de producción y observar si es defectuoso"
ε_5 **: "**Medir el tiempo de duración de una lámpara eléctrica"
ε_6 **: "**Medir la altura de una persona"

En general se puede citar como ejemplo los juegos de azar.

1-3-2 ESPACIO MUESTRAL

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se lo llama ***espacio muestral*** y se denota por la letra griega **Ω.**

En símbolos: $\mathbf{\Omega = \{ \omega / \omega \text{ es un resultado posible del } \varepsilon \}}$

Al resultado de una sola ejecución del experimento se le llama el *resultado* del ensayo o *suceso elemental*.

Ejemplo 1-2:
Considere el experimento: ε_2: "Lanzar una moneda insesgada y observar el resultado de la cara superior"

El espacio muestral es: Ω= {cara, ceca}

Ejemplo 1-3:
Considere el experimento: ε_1: *"Lanzar un dado legal y observar el resultado de la cara superior"*

El espacio muestral es: Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Ejemplo 1-4:
Se está interesado en la distribución de las edades de los habitantes de una ciudad y se considera el experimento: ε_7: "Observar la edad de un habitante de la ciudad"

Su espacio muestral Ω, es el conjunto de todos los números reales no negativos, o bien Ω= [0, a], donde a es un número real tal que en este intervalo queden comprendidas las edades de todos los habitantes de la ciudad.

Ejemplo 1-5:
Se está interesado en conocer el tiempo de duración de las baterías de una determinada fábrica. Considere el experimento:

ε_8: "Hacer funcionar una batería hasta que se agote y medir el tiempo que dura".

Su espacio muestral es $\Omega = \{t \in R / t \geq 0\} = [0, a]$, donde a representa un número real, de forma tal que dicho intervalo quede comprendido el tiempo de duración de todas las baterías de esa fábrica.

1-3-3 SUCESO O EVENTO -SUCESO ELEMENTAL

SUCESO ELEMENTAL

Se denomina ***suceso elemental*** al conjunto formado por un solo resultado del experimento, es decir al conjunto formado por un solo elemento del espacio muestral. En el ejemplo 1-3, del experimento **ε:** *"Lanzar un dado legal y observar el resultado de la cara superior"*

Cuyo espacio muestral es: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Son sucesos elementales A= {1}, B= {2}, C= {3}, D= {4}, E= {5} y F= {6}

SUCESO O EVENTO

Un **suceso** o **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Un suceso es tal que se puede saber con precisión, en cada realización del experimento si ha ocurrido o no.

Los sucesos o eventos los designamos con una letra mayúscula imprenta.
Consideremos nuevamente el ejemplo 1-3:

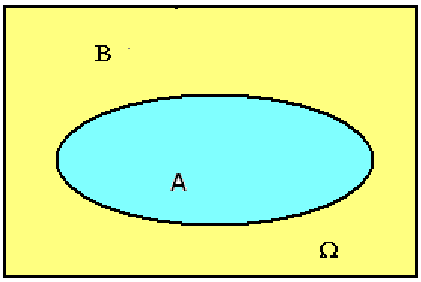
El experimento **ε_1:** *"Lanzar un dado legal y observar el resultado de la cara superior"*
Cuyo espacio muestral es: **$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$**
Un ejemplo de evento o suceso es, A: "Obtener un número par",
que se indica **A = {2, 4, 6},**
otro evento sería, B: "Obtener un número impar",
que se indica **B= {1, 3, 5}.**

Se puede definir el suceso, C: "Obtener el número 7**",** como este nunca va ocurrir, se le denomina ***suceso imposible***. A este suceso se lo representa simbólicamente:

$C = \emptyset$, ó también C= {}

Otro suceso que podemos definir es, D: "Obtener un número menor que 7", en este caso el suceso está formado por todos los elementos del espacio muestral, o sea es el mismo espacio muestral **Ω.** A este suceso se lo denomina ***suceso seguro.***

Gráficamente:



Ejemplo 1-6:
Considere nuevamente el experimento dado en el ejemplo 1-2:

ε_2 : *"Lanzar una moneda legal y observar el resultado de la cara superior"*

Su espacio muestral es:

Ω = {cara, sello},

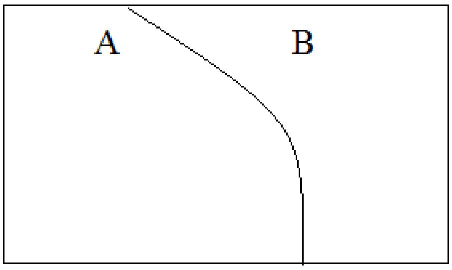
La obtención de una cara es un evento elemental, los sucesos elementales también se le suele llamar sucesos y los indicamos*:*

A: "Obtener una cara", el suceso A se define por extensión:

A= {cara}

Otro suceso de este conjunto puede ser, B: "Obtener un sello", se expresa por extensión**:** **B= {sello}**

Gráficamente:



AUB **= Ω**

Ejemplo 1-7:

Considere el experimento aleatorio ε_1 : *"Lanzar un dado legal hasta obtener un 6 y observar el número de veces que se lanza el dado"*

Su espacio muestral es: **Ω = {1, 2, 3, 4,….}**

¿Cómo se interpreta los sucesos elementales del espacio muestral **Ω,** en este experimento, ε_1**?**

El suceso elemental {1}, significa que se lanzó una vez el dado y se obtuvo el número 6.

El suceso elemental {2}, significa que se lanzó el dado una vez y se obtuvo un número distinto de 6, se lanza nuevamente y se obtiene un 6, por lo tanto la cantidad de lanzamientos del dado fue dos.

Así sucesivamente con {3}, {4}, etc.

Observación:

En la práctica se establece una correspondencia en la que a cada suceso se le hace corresponder el conjunto de resultados posibles de la experiencia en los que se cumple el suceso. A partir de lo cual en teoría de probabilidad vamos aplicar la teoría de conjuntos para operar o graficar.

Esta correspondencia es un isomorfismo, al suceso seguro le corresponde el conjunto de todos los resultados posibles **Ω,** puesto que todos los resultados cumplen con la experiencia, al suceso imposible le corresponde el conjunto vacío $\emptyset$, ningún resultado es posible, puesto que ningún resultado cumple con la experiencia. Al suceso A ó B le corresponde el conjunto AUB, que significa que lo cumple A o lo cumple B o lo cumplen ambos, y al suceso A y B le corresponde A∩B que significa que ambos deben cumplir con la experiencia.

Suceso	Conjunto
A	A={ ω ε Ω/ ω cumple A}
S (suceso seguro)	Ω
I (suceso imposible)	∅
No A	$\bar{A}$
A v B	AUB
A ^ B	A∩B

1-3-4 CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS MUESTRALES:

Un espacio muestral se puede clasificar en discreto o continuo.

Definición de espacio muestral discreto:
Un espacio muestral es discreto si contiene un número finito de elementos o un número infinito numerable de elementos.

Definición de espacio muestral continuo:
Un espacio muestral es continuo si se asocia a un intervalo real.
Los ejemplos planteados anteriormente se clasifican:

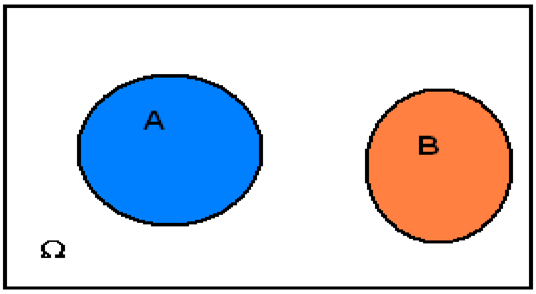
- Los espacios muestrales del ejemplo 1-1 y del ejemplo 1-2, son discretos finitos.
- El espacio muestral del ejemplo 1-5, es discreto infinito numerable.
- El espacio muestral del ejemplo 1-3 y 1-4 se clasifica como continuo.

1-3-5 SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES O SUCESOS INCOMPATIBLES

Eventos o sucesos **incompatibles** o **mutuamente excluyentes** son aquellos que no pueden presentarse conjuntamente. A partir de la teoría conjuntista se dice, que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos, si su intersección es el conjunto vacío.

En símbolos: **A ∩B = ∅**

Gráficamente:



A ∩B = ∅

Consideremos el ejemplo 1-4, que es muy sencillo para comprender este concepto.
Sea el experimento ε_2: *"Lanzar una moneda legal y observar el resultado de la cara superior"*

Los resultados posibles de este experimento aleatorio pueden ser cara o sello, estos eventos son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes en el sentido de que si sale cara, no puede salir sello y recíprocamente.

En símbolos: **Ω = {cara, sello},**

Sean los sucesos ***A y B*** definidos:

A= {cara}, B= {sello}

Como **A∩B =∅, entonces** estos sucesos son incompatibles o mutuamente excluyentes.

Ejemplo 1-8:

Considere el experimento ε_9: "Parto de una vaca y observar el sexo del ternero". Si consideramos los sucesos: "Nacimiento de un macho" y "Nacimiento de una hembra", decimos que son sucesos incompatibles, si un ternero es macho no puede ser hembra simultáneamente.

Ejemplo 1-9:

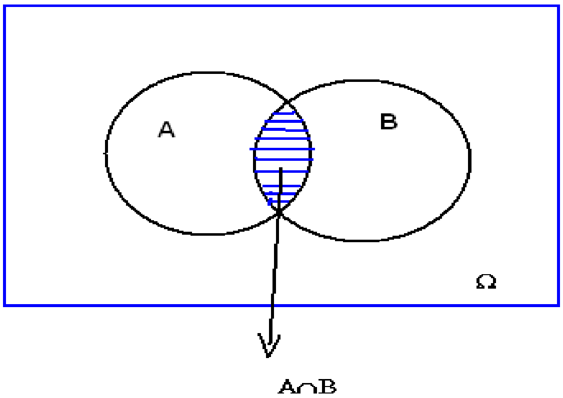
Considere el experimento ε_{10}: "Tomar un producto terminado de la línea de producción y observar si está conforme a especificaciones". Si A es el evento: "El producto está conforme a especificaciones" y B el evento: "El producto no está conforme a especificaciones" Los eventos A y B son mutuamente excluyentes o incompatibles, dado que, si un producto está realizado conforme a especificaciones, no puede no estarlo simultáneamente.

1-3-6 SUCESOS NO MUTUAMENTE EXCLUYENTES O SUCESOS COMPATIBLES

Eventos o sucesos ***compatibles o no mutuamente excluyentes*** son aquellos que pueden ocurrir simultáneamente, es decir, tienen resultados en común.

En símbolos **A ∩ B ≠ ∅**

Gráficamente:



Si se observa el diagrama de Venn, la parte sombreada representa los resultados de un experimento en el que se presentan conjuntamente los eventos A y B.

La presentación conjunta de estos eventos se simboliza con A ∩ B.

Ejemplo 1-10:

Un ejemplo claro de compatibilidad de sucesos es considerar en una fábrica de conservas de tomate, un producto que está realizado conforme a especificaciones y ser realizado por una determinada máquina b de la empresa, se observa que existen productos que satisfacen las dos condiciones simultáneamente, es decir son productos realizados por la máquina b conforme a especificaciones.

Sucesos:

A: "Producto realizado conforme a especificaciones"

B: "Producto realizado por la máquina b"

$A \cap B$: "Producto realizado por la máquina b, conforme a especificaciones"

Luego Los sucesos A y B son sucesos compatibles o no mutuamente excluyentes.

1-4 TÉCNICAS DE CONTEO

Se revisarán las técnicas básicas de conteo de elementos de un conjunto y algunas herramientas que sirven de soporte en este conteo.

1-4-1 Principio básico de conteo:

Definición: Si un conjunto tiene n elementos y otro conjunto tiene m elementos, entonces existen n*m formas diferentes de tomar un elemento del primer conjunto y uno del segundo.

Este método tiene dos características:

1. El experimento se realiza en dos partes
2. La primera parte tiene m resultados posibles $x_1, \ldots, x_m$, e independiente del resultado x_i obtenido, la segunda parte del experimento tiene n resultados posibles $y_1, \ldots, y_n$

   Cada resultado del espacio muestral Ω del experimento será, por lo tanto, un par ordenado de la forma (x_i, y_j) y constará de los pares siguientes:

$$
\begin{array}{c}
(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_n), \\
(x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x_m, y_1), (x_m, y_2), \ldots, (x_m, y_n)
\end{array}
$$

   Puesto que cada una de las m filas de esta matriz contiene n pares, se deduce que el espacio muestral Ω contiene exactamente m.n resultados.

Ejemplo 1-11:

Considere el experimento: ε_{11}: "Lanzar dos monedas legales y observar su cara superior"

Suceso A: "Lanzar una moneda legal" A= {cara, sello} #A=2

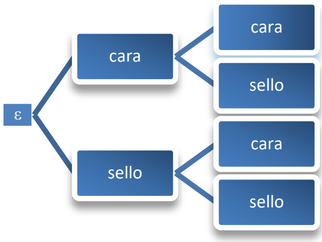
Suceso B: "Lanzar una moneda legal" B= {cara, sello} #B=2

¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral y cuáles son?

Se utilizará una herramienta denominada diagrama de árbol, donde se combinan todos los resultados de lanzar una primera moneda y a continuación la segunda moneda.

Al terminar cada rama se obtienen los distintos puntos muestrales o elementos del espacio muestral, que serán pares ordenados.

Diagrama de árbol



Los distintos pares ordenados que conforman el conjunto espacio muestral son:

-> (cara, cara)
-> (cara, sello)
-> (sello. cara)
-> (sello, sello)

Entonces si el primer evento tiene dos resultados posibles y el segundo evento tiene dos resultados posibles, la combinación de los dos conjuntos tendrá, #A . #B=2.2=4 posibles resultados.

Entonces el espacio muestral formado por los resultados posibles del experimento lanzar dos monedas legales tendrá 4 sucesos elementales, cada suceso elemental es un par ordenado.

$$\Omega = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, sello}), (\text{sello, cara}), (\text{sello, sello})\}$$

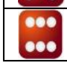
Ejemplo 1-12:

Considere ahora el experimento ε_{12}: “Lanzar dos dados legales y observar el resultado de su cara superior”

¿Cuántos sucesos elementales tiene el espacio muestral de este experimento y cuáles son?

Suceso A: “Lanzar un dado insesgado” A= {1; 2; 3; 4; 5; 6} #A=6
Suceso B: “Lanzar un dado insesgado” B= {1; 2; 3; 4; 5; 6} #B=6

Dado que hay 6 resultados posibles para cada dado, el número de resultados posibles para el experimento ε_2, es #A . #B=6.6=36, es decir el espacio muestral, Ω, tendrá 36 sucesos elementales, los cuales son pares ordenados. Para encontrar cuales son, se utilizará como herramienta de apoyo una tabla de doble entrada, de esta forma se encontrará los 36 pares ordenados.

						
	*(1,1)*	*(1,2)*	*(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	*(1,6)*
	*(2,1)*	*(2,2)*	*(2,3)*	*(2,4)*	*(2,5)*	*(2,6)*
	*(3,1)*	*(3,2)*	*(3,3)*	*(3,4)*	*(3,5)*	*(3,6)*
	*(4,1)*	*(4,2)*	*(4,3)*	*(4,4)*	*(4,5)*	*(4,6)*
	*(5,1)*	*(5,2)*	*(5,3)*	*(5,4)*	*(5,5)*	*(5,6)*
	*(6,1)*	*(6,2)*	*(6,3)*	*(6,4)*	*(6,5)*	*(6,6)*

Ω={(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6)
(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),
(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)}

Ejemplo 1-13
Suponga que hay tres rutas distintas de la ciudad de Mendoza, a la ciudad de Córdoba, y cinco rutas distintas de la ciudad de Córdoba a la ciudad de Santa Fe.
¿Cuántas rutas distintas hay de la ciudad de Mendoza a la ciudad de Santa Fe, pasando por la ciudad de Córdoba?
El número de rutas distintas es 3.5=15.

Generalización:
Esta regla de conteo se puede extender a experimentos en el que intervienen más de dos partes. Supónga que un experimento tiene k partes ($k \geq 2$), que la parte i-ésima del experimento puede tener n_i resultados posibles (i=1,…, k) y que cada uno de los resultados en una cualquiera de las partes puede ocurrir independientemente de los resultados concretos que se hayan obtenido en las otras.

Entonces el espacio muestral Ω del experimento contendrá todos los vectores de la forma $(u_1, \dots, u_k)$, donde u_i es uno de los n_i resultados posibles de la parte i, (i=1,…, k). El número de tales vectores contenidos en Ω será igual al producto $n_1 . n_2 . \dots n_k$.

Ejemplo 1-14:
Considere el experimento $\boldsymbol{\varepsilon_{14}}$: "Lanzar seis monedas insesgadas", cada suceso elemental de Ω contará de una sucesión de seis caras y cruces, como (c, s, s, c, c, s). Dado que hay dos resultados posibles para cada una de las seis monedas, el número total de resultados del espacio muestral será $2.2.2.2.2.2=2^6=64$

1-5 DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

En los experimentos aleatorios, y sólo en ellos, es posible hablar de probabilidad.
El problema se presenta cuando debemos cuantificar, medir o calcular estas probabilidades. Existen cuatro teorías bien conocidas para medir probabilidades. La teoría clásica, la teoría frecuencial, la teoría subjetiva y la teoría axiomática.

1-5-1 TEORÍA CLÁSICA DE PROBABILIDAD O REGLA DE LAPLACE

Si se lanza un dado legal, existen seis resultados posibles, 1, 2, 3, 4, 5, 6, estos eventos son mutuamente excluyentes. Se puede suponer que la ocurrencia de los sucesos es igualmente plausible.

Si el dado es legal, es decir no está cargado, entonces por razones de simetría cada uno de los seis eventos anteriores es igualmente posible. Diremos que en este caso hay seis casos igualmente posibles o igualmente probables.

En estos experimentos se puede distinguir entre un cierto número de casos igualmente posibles y mutuamente excluyentes, que agotan todas las posibilidades.

Si en un juego dado hay n casos igualmente posibles, entonces un jugador T puede subdividir estos casos en dos clases a saber, los casos que él gana el juego, y los casos en que no gana. Si hay m casos en los cuales él gana, entonces es obvio que la razón $\frac{m}{n}$, es una medida de la posibilidad que tiene el jugador de ganar el juego.

1-5-1-1 Definición de Probabilidad clásica o probabilidad a priori:

La probabilidad de un suceso A en un experimento aleatorio es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles del experimento, siempre que todos los resultados sean igualmente plausibles y mutuamente excluyentes.

En símbolos:

Sea A, el evento al cual se le quiere calcular la probabilidad de ocurrencia:

$$P(A) = \frac{cantidad\ de\ casos\ favorables}{cantidad\ de\ casos\ posibles} = \frac{\#\mathrm{A}}{\#\mathrm{B}}$$

Al tratar de definir formalmente probabilidad a partir de la regla de Laplace, aparecen dos dificultades básicas. En primer lugar el concepto de resultados igualmente plausible se basa en esencia en el concepto de probabilidad que estamos tratando de definir. Afirmar que dos resultados son igualmente plausibles, es lo mismo que afirmar que los resultados tienen la misma probabilidad. Con lo que la definición se encierra en un círculo vicioso, al no basarse en un criterio independiente. De ahí que esta definición, aun siendo útil para calcular valores concretos de probabilidad, puede dar lugar a paradojas.

En segundo lugar, debemos observar que una característica del experimento lanzar un dado y observar su cara superior es que los distintos resultados posibles son mutuamente excluyentes, debido que no puede aparecer más que un número simultáneamente. Por lo que esta definición sólo puede ser aplicada en el caso que los sucesos sean mutuamente excluyentes.

Finalmente debemos decir que no se proporciona un método sistemático para asignar probabilidades a resultados que no son igualmente probables o equiprobables. Cuando se lanza un dado equilibrado o se escoge una carta de una baraja bien mezclada, los diferentes resultados posibles pueden en general ser considerados igualmente probables debido a la naturaleza del experimento. Sin embargo cuando se trata de predecir si el resultado de un experimento tendrá éxito o al elegir un producto esté realizado conforme a especificaciones, los resultados posibles no pueden considerarse igualmente plausibles y es necesario un método diferente para asignar probabilidades a estos resultados.

1-5-1-2 Limitaciones de la definición

Para poder aplicar la definición clásica de Laplace se debe cumplir:

- Los resultados deben ser equiprobables.
- Los resultados deben ser mutuamente excluyentes.
- El espacio muestral debe ser finito.

Ejemplo 1-15:

Considere el experimento aleatorio de lanzar un dado legal y observar el resultado obtenido en la cara superior, ejemplo 1-3, se desea conocer:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado par?

ε_1 : "Lanzar un dado legal y observar el resultado de la cara superior"

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\# \Omega = 6$

A: "Obtener un número par" $A = \{2, 4, 6\}$ $\# A = 3$

Hay seis casos igualmente probables. En tres de los casos sucederá el evento, A. Entonces aplicando la definición de Laplace tenemos:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{\#\,\mathrm{A}}{\#\,\Omega} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Este resultado se interpreta: la probabilidad de que salga un resultado par al lanzar un dado legal es de 0,5.

Si se analiza la definición vemos que pide que todos los resultados sean igualmente plausibles, esto significa que todos los resultados tengan la misma probabilidad de salir.

En nuestro ejemplo todas las caras del dado tienen que tener igual posibilidad de salir, las probabilidades de cada cara del dado son:

P({1})=1/6 P({2})=1/6 P({3})=1/6 P({4})=1/6 P({5})=1/6 P({6})=1/6

Vemos que si el dado es legal, todos los resultados tienen igual probabilidad de salir, por lo que decimos que cumple la condición de ***equiprobabilidad***.

Otra exigencia de la definición es que los resultados sean mutuamente excluyentes, es decir, si sale un evento no puede salir otro.

Si se arroja un dado aparece en la cara superior uno de los seis números, siendo estos eventos mutuamente excluyentes.

En estos experimentos se distinguen un cierto número de casos equiprobables que agotan todas las posibilidades, es decir, el espacio muestral es finito.

Por lo que se concluye que en el experimento aleatorio, de lanzar de un dado legal y observar el número de la cara superior, es un ejemplo donde podemos aplicar la definición clásica o definición de Laplace.

1-5 -1-3 ESPACIO MUESTRAL NO EQUIPROBABLE

Cuando todos los sucesos elementales no tienen la misma probabilidad de salir, es un espacio muestral no equiprobable.

Ejemplo 1-16:
Considere el experimento de lanzar un dado. ¿Qué pasa si nuestro jugador hace trampas y tira un dado trucado?
Por ejemplo suponga que el uno sale un 25% de las veces, a largo plazo.
Entonces el experimento sería:

ε_{13}: "Lanzar un dado no legal y observar el número obtenido en la cara superior"

EL espacio muestral es el mismo que el de un dado sin trucar Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Las probabilidades son diferentes ahora
P({1})=0,25 , por lo tanto las probabilidades de los otros cinco números suman 0,75.
Es decir:
P({2})+P({3})+P({4})+P({5})+P({6})=0,75 (1.16)

Hay que averiguar cuánto vale estas probabilidades.

Si {2}, {3}, {4}, {5}, y {6} tienen la misma probabilidad de salir, llamaremos p a la probabilidad de que salga algún valor distinto de {1}, es decir:

P({2})=p   P({3})=p   P({4})=p   P({5})=p   P({6})=p

Reemplazando en (1.16) tenemos:

$$p + p + p + p + p = 0{,}75$$

$$5.p = 0{,}75$$

$$p = \frac{0{,}75}{5} = 0{,}15$$

Cada cara del dado desde el dos al seis tiene una probabilidad de salir de 0,15 y la cara con el número 1 tiene una probabilidad de salir de 0,25. Se observa que los sucesos no son equiprobables, por lo tanto este espacio muestral no es equiprobable. Luego no se puede aplicar la definición clásica de Laplace.

Ejemplo 1-17:
Considere una fábrica que elabora conservas de tomate en lata. Considere el experimento: ε_{15}: "Extraer una lata de conservas de tomate y observar si está realizada conforme a especificaciones".

El espacio muestral está formado por todas las conservas de tomate en lata elaboradas por la empresa, que tiene dos posibles resultados: conforme a especificaciones o no conforme a especificaciones.

Siendo los eventos:

C: Conservas de tomate elaborada conforme a especificaciones

$\bar{C}$: Conservas de tomate elaborada no conforme a especificaciones.

$$\Omega = \{ C, \bar{C} \}$$

Luego el espacio muestral tiene dos posibles resultados.

Ahora interesa calcular la probabilidad de elaborar una conserva de tomate en lata conforme a especificaciones. Si se quiere aplicar la definición de Laplace se debe pensar que el espacio muestral es equiprobable, es decir la probabilidad de elaborar una conserva de tomate en lata conforme a especificaciones, debería ser igual a elaborar una conserva de tomate en lata no conforme a especificaciones. Se observa que esto no es posible, una empresa no puede producir la mitad de sus productos no conforme a especificaciones, o defectuosos, la empresa no sería competitiva y no duraría mucho tiempo en el mercado. Esta complicación surge al considerar que el espacio muestral es equiprobable. Por lo que no se puede aplicar en este caso la definición clásica de Laplace, dado que no cumple la condición de equiprobabilidad.

Se considerará una nueva definición de Probabilidad que se emplea cuando no se puede aplicar la definición de probabilidad clásica.

1-5-2 TEORÍA FRECUENCIAL

En muchas situaciones prácticas, los posibles resultados de un experimento no son igualmente probables. Por ejemplo en una fábrica las oportunidades de observar un producto no conforme a especificaciones será mucho más raro que observar un producto conforme a especificaciones. En este caso no se puede estimar la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso mediante el empleo de la definición clásica.

Con la idea de mejorar el concepto clásico de probabilidad se llega, posteriormente a postular un concepto empírico o frecuencial de probabilidad. Este concepto fue enunciado por Richard Von Mises, se basa en la experimentación y en el principio de estabilidad de la frecuencia relativa de un suceso cuando el experimento se repite un gran número de veces de manera tal que el resultado de una repetición no influya en el resultado de otro ensayo, (es decir ensayos independientes)

1-5-2-1 CONCEPTO FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD O PROBABILIDAD A POSTERIORI:

En una serie larga de realizaciones independientes de un experimento en condiciones similares, la frecuencia relativa observada de un suceso puede ser interpretada como la probabilidad aproximada del suceso.

$$\boldsymbol{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\textit{número de ocurrencias del suceso A en n ensayos independientes del } \varepsilon}{n}}$$

Es importante observar que con esta idea de probabilidad se pueden calcular probabilidades en experimentos aleatorios donde no todos los resultados individuales son igualmente plausibles.

Sin embargo este concepto tiene las limitaciones de cualquier concepto empírico, en algunos casos es muy difícil o humanamente imposible repetir un experimento un gran número de repeticiones similares de cierto proceso. Esta definición es muy usada, pero presenta la dificultad de que en general es muy difícil tener tamaño de muestras grandes.

Ejemplo 1-18:
Antes de incluir la cobertura para ciertos tipos de problemas dentales en pólizas de seguros médicos para adultos con empleo, una compañía de seguros desea determinar la probabilidad de ocurrencia de esa clase de problemas, para que pueda fijarse la prima de seguros de acuerdo con esas cifras. Por ello, un especialista en estadística recopila datos para 10.000 adultos que se encuentran en las categorías de edad apropiadas y encuentra que 100 de ellos han experimentado el problema dental específico durante el año anterior.

Evento A: *"Adulto con problemas dentales"*
En este caso se trata de un experimento realizado, y como la muestra es grande podemos aplicar el concepto de probabilidad frecuencial

$$P(A) = f_r = \frac{número\ de\ adultos\ con\ problemas\ dentales}{número\ de\ adultos\ estudiados}$$

$$\text{P(A)} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{10000}} = 0{,}01$$

Interpretación: La probabilidad de que un adulto tenga un cierto tipo de problema dental es de 0,01.

La definición de probabilidad que se aplicó en nuestro ejemplo es el de frecuencia relativa con que ocurre determinado hecho, si el experimento se repite un número grande de veces, n, la frecuencia relativa va paulatinamente acercándose a la probabilidad teórica, hasta llegar a diferir de ésta, tan poco como se desee ampliando el número de repeticiones.

Ejemplo 1-19:
Una compañía de transporte de caudales cuenta con 205 vehículos blindados equipados con motores de gasolina o motores diésel. La compañía lleva registros anuales de las reparaciones generales de los motores y de los kilómetros recorridos antes de necesitar una revisión mecánica. En la tabla siguiente se representan los kilómetros recorridos por los vehículos blindados antes de tener que ser sometido a la revisión mecánica para cada tipo de motor.

	Tipo de motor de los vehículos blindados		
Km recorridos	Gasolina	Diésel	Totales
Menos de 20000	25	32	57
20000-40000	58	55	113
Más de 40000	12	23	35
Totales	95	110	205

Si se elige un vehículo blindados al azar:

a) ¿cuál es la probabilidad de que sea un vehículo blindado con motor diésel?
b) ¿cuál es la probabilidad de que sea un vehículo blindado con motor a gasolina?

Eventos:
D: "Vehículo blindado con motor diésel" #D = 110,
G: "Vehículo blindado con motor a gasolina" #G=95

a) $P(D) = fr_D = \frac{frecuencia\,absoluta}{\text{tamaña de la muestra}} = \frac{cantidad\ de\ véhículos\ blindados\ con\ motor\ diésel}{cantidad\ de\ vehículos\ blindados\ considerados} = =$

$\frac{110}{205} = 0{,}537$

Interpretación: La probabilidad de elegir un vehículo blindado equipado con motor diésel entre los 205 vehículos de la compañía es de 0,537

b) $P(G)=fr_G = \frac{\text{frecuencia absoluta}}{\text{tamaño de la muestra}} = \frac{cantidad\text{ de camiones con motor a gasoil}}{\text{cantidad de camiones blindados}} = \frac{95}{205} =$ $=0{,}463$

Interpretación: La probabilidad de elegir un camión blindado equipado con motor a gasoil entre los 205 camiones de la compañía es de 0,463

La definición de probabilidad que se aplicó en este ejemplo es la de frecuencia relativa de un determinado hecho, si el experimento se repite un número grande de veces.

Esta definición está apoyada en la propiedad de "regularidad estadística", que consiste en estudiar un número grande de veces un fenómeno en condiciones casi constantes, las proporciones en las que ocurren los posibles resultados son muy estables. El valor en el que se estabiliza las proporciones se lo conceptualiza como la probabilidad.

1-5-3 PROBABILIDAD SUBJETIVA

La repetición de un experimento bajo las mismas condiciones es la base para las definiciones de probabilidad clásica y probabilidad frecuencial sin embargo muchos fenómenos no se pueden repetir, a pesar de esto requieren de una interpretación de probabilidad.

Depende de la interpretación subjetiva o personal de la probabilidad, la probabilidad de que una persona asigna a uno de los posibles resultados de un proceso representa su propio juicio sobre la verosimilitud de que se obtenga el resultado. Este juicio estará basado en las opiniones e información de la persona acerca del proceso. Otra persona que puede tener diferentes opiniones o información distinta, puede asignar una probabilidad diferente al mismo resultado. Por esta razón se denomina probabilidad subjetiva que asigna cierta persona a un resultado.

La probabilidad subjetiva se interpreta como el grado de creencia o de convicción con respecto a la ocurrencia de un determinado fenómeno.

Probabilidad subjetiva es aquella en que un individuo asigna probabilidad en base a su experiencia.

Hay que señalar que la probabilidad subjetiva también puede aplicarse a experimentos repetitivos. Por ejemplo un jugador de cartas puede en un momento dado, decidir tomar otra carta y hacer caso omiso de su experiencia previa, debido a que cree que esto aumentará sus oportunidades de ganar la mano.

Para ejemplificar la interpretación de probabilidad como un grado de creencia considere la siguiente situación, se le pregunta a dos ingenieros petroleros, su opinión acerca de la posibilidad de encontrar petróleo en la Cuenca Neuquina. La respuesta de uno de ellos, es que hay un 80% de posibilidades de hallar petróleo, el segundo ingeniero plantea que hay una 70% de posibilidad de encontrar petróleo en esa cuenca. El porcentaje dado por los ingenieros es una medida de la creencia de éstos, con respecto a la posibilidad de encontrar petróleo. Observe que se le puede asignar a un mismo suceso distintas medidas de creencia.

1-5-4 TEORÍA AXIOMÁTICA

Con el apoyo del desarrollo de la matemática y muy especialmente por la formulación de la teoría de la medida aparece la teoría axiomática de Kolmogorov en 1933. El trabajo de Kolmogorov fue posible gracias a los trabajos de Lebesgue sobre la integral y la medida, de hecho, la probabilidad queda como un tipo de medida, y los principales conceptos de la teoría de la probabilidad como casos particulares de conceptos en teoría de la medida. Este célebre matemático ruso desarrolla la teoría axiomática de la probabilidad, esta teoría permite resolver en la práctica todos los problemas planteados y resueltos por los diferentes enfoques anteriores y además otros que las teorías anteriores no pudieron resolver satisfactoriamente.

La teoría probabilística de Kolmogorov y sus sucesores construyeron el cimiento científico de lo que en este siglo ha dado en llamarse la Estadística.

1-5-4-1 FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Definición: Sea Ω cualquier espacio muestral, no vacío y $\mathscr{P}(\Omega)$ el conjunto de partes de Ω. Se llamará función probabilidad a cualquier función,

$$P: \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1],$$
$$A \to P(A)$$

que cumple con los siguientes axiomas:

1. La probabilidad del espacio muestral es uno.
$$P(\Omega)=1$$
2. Sea cualquier sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de conjuntos de $\mathscr{P}(\Omega)$ disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, se verifica

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Observaciones de la definición:

- A cada elemento del conjunto de partes, la función de probabilidad le asigna un número real entre 0 y 1, si el evento **A ε** $\mathscr{P}(\Omega)$, entonces:
$0 \leq P(A) \leq 1$.

Considere las dos situaciones extremas, ∅ (suceso imposible) y Ω (suceso seguro), si le aplicamos probabilidad a estos sucesos tenemos: P(∅) = 0 (por propiedad 1 de probabilidad) y P(Ω) = 1 (por axioma 1).

- La función de probabilidad tiene como dominio el conjunto de las partes de Ω, que es un conjunto cuyo elementos son conjuntos, $\mathscr{P}(\Omega)$.
- En el axioma 2) $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ es una suma de números no negativos en [0; 1] que debe ser convergente

1-5-4-2 ESPACIO DE PROBABILIDAD

Definición: Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y P una función de probabilidad definida en $\mathscr{P}(\Omega)$. Se llama espacio de probabilidad a la terna
$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.

Ejemplo 1-20:
Considere el experimento $\boldsymbol{\varepsilon_1}$: “Lanzar un dado legal y observar la cara hacia arriba”
Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $\mathscr{P}(\Omega)$ = conjunto de las partes de Ω, P: $\mathscr{P}(\Omega) \rightarrow$ [0, 1],
P({1}) = P({2}) = P({3}) = P({4}) = P({5}) = P({6}) = 1/6.

Entonces (Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$, P) es un espacio de probabilidad y cualquier subconjunto de Ω es un suceso, sea, por ejemplo, A = {1, 2,3}, se calculará su probabilidad.
P(A) = P ({1, 3, 5}) = P({1}) + P({3}) + P({5}) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$

1-5-4-3 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD AXIOMÁTICA

Se verán algunas propiedades de la probabilidad que son consecuencia de la definición axiomática. Sea (Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$, P) un espacio de probabilidad entonces:

1. La probabilidad del suceso imposible es cero

$$P(\varnothing) = 0$$

Demostración:
Se puede plantear:

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\dots$$

Así, el conjunto vacío puede escribirse como una unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos. Luego, por el axioma 2 de probabilidad, resulta:

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

O lo que es lo mismo,

$$P(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} n. P(\emptyset) \quad (1.5.4.1)$$

Se tiene dos opciones para resolver (1.5.4.1), $P(\emptyset)$ puede ser cero o un número positivo menor que uno.
Suponga que $P(\emptyset) = a > 0$
Entonces la expresión (1.5.4.1) resulta:

$$P(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} an = a \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Lo cual es un absurdo, por lo tanto

$$P(\emptyset) = 0$$

2. Si $A_1, A_2, \dots, A_n \epsilon$ $\mathscr{P}(\Omega)$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ entonces:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Demostración:
El axioma dos está planteado para infinitos sucesos, por lo que no se puede decir que se cumple para n.

Se utilizan los sucesos disjuntos dos a dos dados: $A_1, A_2, \dots, A_n$ y el conjunto vacío, definimos una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos de la siguiente manera:

$$B_k = \begin{cases} A_k, & \text{si } k \le n \\ \emptyset, & \text{si } k > n \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \underbrace{\cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset}_{\infty \; veces}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset)$$

$$P(A_1) + P(A_{2)} + \dots + P(A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \dots + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0}$$

Como

$$P(\emptyset) = 0 \text{ Por propiedad 1}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \; por\ el\ axioma\ 2\ de\ la\ definición\ de\ probabilidad$$

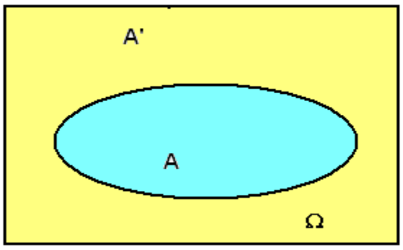
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. Si A ε $\mathscr{A}(\Omega)$, *entonces* $P(\bar{A}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$

Gráficamente:



Demostración:

Para cualquier suceso A, la unión de A y su complemento $\bar{A}$ nos da el espacio muestral Ω :

$$\bar{A} \cup A = \Omega$$

Aplicando probabilidad a ambos miembros tenemos:

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\Omega)$$

Como A y su complemento son siempre disjuntos, por la propiedad 2*:*

$$P(\bar{A}) + P(A) = P(\Omega)$$

Por axioma 1*:*

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

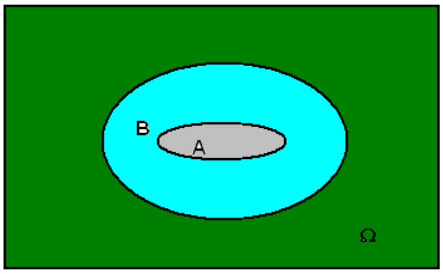
De donde:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Nota: Dado un suceso A, el suceso *complemento de A*, lo simbolizaremos con $\bar{A}$, A' o A^C es aquel suceso que consta de todos los resultados que no contiene el suceso A.

4. Si A, B $\in$ *$\mathscr{P}(\Omega)$, entonces:*
   Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Gráficamente:



A⊂B

Demostración:
Sean A y B dos sucesos tales que $A \subset B$, B puede expresarse como la unión disjunta:

B=(B-A)UA.

En consecuencia por la propiedad 2:

$$P(B) = P(B - A) + P(A),$$

Como $P(B - A) \geq 0$ resulta:

$$P(B) \geq P(A)$$

5. Si A, B $\in$ $\mathscr{P}(\Omega)$, y $A \subseteq B$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$

Demostración:
Sean A y B dos sucesos tales que: $A \subset B$, B puede expresarse como la unión disjunta:

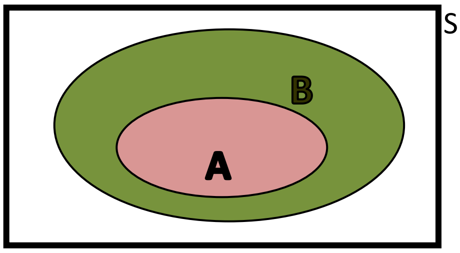
$$B = (B - A) \cup A.$$

En consecuencia por la propiedad 2:

$$P(B) = P(B-A) + P(A)$$

de donde:

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$



A ∪ B = A ∪ (B-A)

6. ¿Qué pasa con los sucesos que no son mutuamente excluyentes o incompatibles?, ¿cómo podemos calcular la probabilidad de su unión?
Si A, B $\in \mathscr{P}(\Omega)$ entonces:

$$P(A\acute{o}B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ } \textit{cuando} \text{ } A \cap B = \emptyset$$

Demostración*:*
Sean A y B dos sucesos cualesquiera (no necesariamente disjuntos).
La unión A ∪ B puede expresarse como la unión disjunta:

$$A \cup B = B \cup (A - B)$$

y, en consecuencia, por propiedad 2:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B) \qquad (1.5.4.2)$$

También A puede expresarse como la unión disjunta:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

Por propiedad 2:

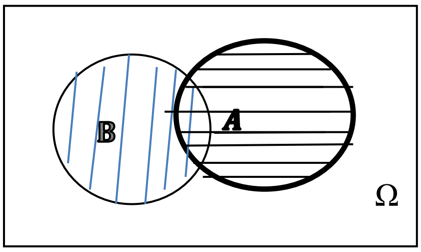
$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B),$$

Despejando:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (1.5.4.3)$$

Luego, reemplazando (1.5.4.3) en (1.5.4.2):

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$$



A ∪ B = B ∪ (A-B)

Recuerde que P(A ∪ B) es la probabilidad de la aparición del evento A, o del evento B o de ambos a la vez, que en lenguaje coloquial decimos A ó B.

7. ¿Qué pasa si tenemos más de dos eventos, por ejemplo tres que no son necesariamente mutuamente excluyentes y queremos calcular la probabilidad de que suceda A o B o C?
Si A, B, C **ε** $\mathscr{P}(\Omega)$, entonces la probabilidad de la unión de estos sucesos es*:*

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Generalización de la propiedad 6. Teorema de la Aditividad.

$Si\ A_{1,}\ A_{2,}....A_n \varepsilon\ \mathscr{P}\ (\Omega.)$ entonces:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)+(-1)\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j)+(-1)^2\sum_{1\le i<j<r\le n} P(A_i\cap A_j\cap A_r)+$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

Nota: Si n es par el último término se resta.
Si n es impar el último término se suma.

Ejemplo 1-21:
Una empresa cuenta con dos generadores de emergencia, A y B, cada uno de los cuales puede proporcionar suficiente energía eléctrica para las operaciones básicas. Ambos generadores están expuestos a fallas. Suponga que la probabilidad de que el generador A funcione correctamente es de 0.96, y el generador B es de 0.94 y la probabilidad que funcionen correctamente ambos generadores es de 0.93.

a) Encuentre la probabilidad de que funcione correctamente el generador A o B
b) Encuentre la probabilidad de que el generador A no funcione correctamente

Los eventos son:
A: “El generador A funciona correctamente”
B: “El generador B funciona correctamente”
$\bar{A}$: “El generador A no funciona correctamente”

a) Se quiere calcular la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los generadores A o B, o ambos, se debe aplicar la propiedad 4:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)=0{,}96+0{,}94-0{,}93=0{,}97$$

Interpretación: La probabilidad de que funcione correctamente por lo menos un generador es de 0.97

b) Se quiere calcular la probabilidad del complemento del suceso A, entonces se debe aplicar la propiedad 2:

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$
$$P(\bar{A})=1-0.96=0{,}04$$

Interpretación: La probabilidad de que el generador A no funcione correctamente es de 0,04

Ejemplo 1-22:
Se tienen 10 motherboard de una computadora de la marca *A,* 8 motherboard de la marca B y 4 motherboard de la marca *C.* ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja una motherboard de la marca *A* o una de la marca *B*?
Sean los eventos*:*
A: “Seleccionar una motherboard de la marca A.
B: “Seleccionar una motherboard de la marca B.
C: “Seleccionar una motherboard de la marca C.

La probabilidad de seleccionar una motherboard de la marca A es: $P(A) = \frac{10}{22} = 0{,}45$

La probabilidad de seleccionar una motherboard de la marca B es $P(B) = \frac{8}{22} = 0{,}36$

Como ambos eventos son mutuamente excluyentes o incompatibles, dado que si se elige una motherboard de una marca se elimina inmediatamente la posibilidad de escoger una de la otra marca.

Entonces la probabilidad está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}45 + 0{,}36 = 0{,}81$$

Interpretación: La probabilidad de elegir una motherboard de la marca A o de la marca B es de 0,81

Ejemplo 1-23:
Las probabilidades de que en una estación de servicio provea gasolina a 0, 1, 2, ó 3 automóviles durante un periodo de 30 minutos, son de: 0,03; 0,18; 0,24; 0,28 respectivamente. Encuentre la probabilidad de que, en un período de 30 minutos, 4 o más automóviles reciban gasolina.
Solución:
Sean los eventos
A: Menos de cuatro automóviles reciben gasolina en un periodo de 30 minutos.
$\bar{A}$: 4 ó más automóviles reciben gasolina en un periodo de 30 minutos.

$$P(A) = P(\{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = 0{,}03 + 0{,}18 + 0{,}24 + 0{,}28 = 0{,}73$$

Se aplica la propiedad 3 de la definición de probabilidad axiomática:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$$

Interpretación: la probabilidad de que una estación de servicio provea a 4 o más de cuatro automóviles de gasolina es de 0,27.

1-6 PROBABILIDAD CONJUNTA - PROBABILIDAD MARGINAL

Se entenderá por probabilidad conjunta, la probabilidad de que dos o más eventos ocurran simultáneamente. Sea (Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$, P) un espacio de probabilidad y **A, B ε** $\mathscr{P}(\Omega)$ entonces la probabilidad conjunta la indicamos en símbolos:

$$\mathbf{P(A \cap B)}$$

Suponga que interesa conocer la calidad con que se fabrica en una empresa. Por lo que se considerará un experimento en el que se elige aleatoriamente un producto de una fábrica que produce n productos semanalmente, y se anotan sus características con respecto a la máquina que lo produjo y si está realizada conforme a especificaciones.

Sea el espacio muestral formado por la población de productos de la fábrica, que se clasifican en los siguientes eventos disjuntos: A_1: "Producto producido por la máquina 1", y A_2: "Producto producido por la máquina 2", y en los siguiente eventos también disjuntos, B_1: "Producto realizado conforme a especificaciones", y B_2: "Producto no realizado conforme a especificaciones". Los eventos del espacio muestral Ω, se representan en la tabla 1-2.

Tabla1-2

	B_1	B_2	*total*
A_1	$\boldsymbol{n_{11}}$	$\boldsymbol{n_{12}}$	$\boldsymbol{n_{A_1}}$
A_2	$\boldsymbol{n_{21}}$	$\boldsymbol{n_{22}}$	$\boldsymbol{n_{A_2}}$
total	$\boldsymbol{n_{B_1}}$	$\boldsymbol{n_{B_2}}$	***N***

Suponga que ahora el interés recae en determinar la probabilidad de una determinada característica, por ejemplo A_i, sin considerar cualquier otro evento B_j, del espacio muestral Ω. Por ejemplo, se quiere conocer la probabilidad de elegir un producto al azar que cumpla con la característica A_1, “Producto producido por la máquina 1”. Se aplica la definición de probabilidad a partir de la frecuencia relativa, se tiene que el número total de productos fabricados por la máquina A_1, es $\boldsymbol{n_{11}+n_{12}}$ de esta forma se tiene:

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{n}_{11}+n_{12}}{n} \qquad (1.6.1)$$

Dado que $\boldsymbol{n_{11}+n_{12}=n_{A_1}}$, se reemplaza en la fórmula anterior (1.6.1), nos queda:

$$P(A_1)=\frac{n_{A_1}}{n}$$

Este tipo de probabilidad se denomina probabilidad marginal, porque para calcularla se ignoran una o más características del espacio muestral.

Encontraremos una fórmula para la probabilidad marginal de un suceso

$$P(A_i)=\sum_{j=1}^{2}\frac{n_{ij}}{n} \qquad (1.6.2)$$

Como la probabilidad de elegir un producto que cumpla con las dos características $A_i\ y\ B_j$ simultáneamente es:

$$P(A_i\cap B_j)=\frac{n_{ij}}{n} \qquad (1.6.3)$$

Se reemplaza (1.6.3), en la fórmula (1.6.2), nos queda:

$$P(A_i)=\sum_{j=1}^{2}P(A_i\cap B_j)$$

Por lo tanto la probabilidad marginal de un suceso A_i es igual a la suma de las probabilidades conjuntas A_i y B_j, donde la suma se efectúa sobre todos los eventos de B_j.

De igual forma la probabilidad marginal de B_j esta dada por:

$$P(B_j)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i\cap B_j)$$

La probabilidad marginal de un suceso B_j es igual a la suma de las probabilidades conjuntas A_i y B_j, donde la suma se efectúa sobre todos los eventos A_i.

Nota: Cuando en el lenguaje coloquial decimos A_i y B_j, que significa la ocurrencia de ambos eventos simultáneamente, en el lenguaje simbólico matemático se indica con la operación intersección $A_i\cap B_j$.

Generalización:
Se extenderá el concepto para más de dos eventos disjuntos.
Considérese, los suceso A_i con i=1, 2,…n, disjuntos dos a dos y los sucesos B_j con j=1, 2,…m, disjuntos dos a dos. Entonces

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap B_j)$$
$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B_j)$$

1-7 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Si en una experiencia se sabe que se ha presentado un determinado suceso, esta información puede modificar la probabilidad de ocurrencia de otro suceso.

Suponga que el interés recae en determinar la probabilidad de un evento A dado que se ha presentado un evento B.

En símbolos **P(A / B)**

Considere nuevamente el experimento en el que se elige aleatoriamente un producto de una fábrica que produce n productos semanalmente, representado la tabla 1-2. Suponga que se ha elegido un producto que está realizado conforme a especificaciones B_1, nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que este producto este realizado por la máquina 1, A_1?

Tabla 1-2

	B_1	B_2	*Total*
A_1	$\boldsymbol{n_{11}}$	$\boldsymbol{n_{12}}$	$\boldsymbol{n_{A_1}}$
A_2	$\boldsymbol{n_{21}}$	$\boldsymbol{n_{22}}$	$\boldsymbol{n_{A_2}}$
total	$\boldsymbol{n_{B_1}}$	$\boldsymbol{n_{B_2}}$	***n***

Sabiendo que el producto está fabricado conforme a especificaciones, este suceso reemplaza a Ω. Por lo tanto la probabilidad de que sea un producto realizado por la máquina 1, A_1, es el número de productos realizados conforme a especificaciones y producidos por la máquina 1, entre el número total de productos realizados conforme a especificaciones.

$$P(A_1/B_1) = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}}$$

Donde la barra vertical se lee como "dado que", "sabiendo que", "si", y separa al evento A_1, cuya probabilidad está condicionada a la previa ocurrencia del evento B_1. Esta probabilidad recibe el nombre de condicional de A_1, dada la ocurrencia de B_1.

En general

$$P(A_i/B_j) = \frac{n_{ij}}{\sum_{i=1}^{2} n_{ij}}$$

Para encontrar una fórmula para la probabilidad condicionada, se divide numerador y denominador del segundo miembro, por n, se obtiene:

$$P(A_i/B_j) = \frac{\frac{n_{ij}}{n}}{\sum_{i=1}^{2} \frac{n_{ij}}{n}} \qquad (1.7.1)$$

Como

$$P(A_i \cap B_j) = \frac{n_{ij}}{n} \quad \text{y} \quad P(B_j) = \sum_{i=1}^{2} n_{ij} / n \quad (1.7.2)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.7.2) en (1.7.1) nos queda:

$$P(A_i/B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}, \quad \text{con } P(B_j) > 0$$

De manera equivalente

$$P(B_j/A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}, \quad \text{con } P(A_i) > 0$$

Los conceptos descriptos anteriormente se pueden formalizar en la siguiente definición.

1-7-1 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Dada una prueba o experiencia y el espacio de probabilidad asociado (Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$, P), donde A, B ε $\mathscr{P}(\Omega)$, tal que P(B) ≠0, la probabilidad condicional de A dado B denotado P(A/B), o $P_B(A)$ es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad con \quad P(B) \neq 0$$

Puede interesar hallar la probabilidad de B condicionada a que se ha presentado el evento A, denotado P(B/A), o $P_A(B)$ entonces se tiene:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad con \quad P(A) \neq 0$$

La probabilidad condicional se puede definir como otra función de probabilidad definida en el mismo espacio. En efecto, sea (Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$, P), un espacio de probabilidad y B $\subset \Omega$ un suceso, tal que P(B) ≠ 0, (debe quedar claro que B es un evento fijo).

Sea P_B: $\mathscr{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$,
A $\rightarrow P_B(A)$

Donde $P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Esta nueva función P_B, es también una probabilidad. A continuación se demuestra que cumple con los axiomas de la función de probabilidad:

1. $$P_B(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = 1$$
2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos de Ω, disjuntos dos a dos $A_i \cap A_j = \emptyset$ para i ≠ j, entonces:

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) /B\right] = \frac{P[(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B]}{P(B)} =$$

Si se aplica la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$= \frac{P[(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B))]}{P(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n/\mathrm{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(\,A_n)$$

De esta forma se demuestra que cumple con los dos axiomas de la probabilidad, por lo tanto para cada suceso B con probabilidad no nula, $P_B$es también una probabilidad.

Ejemplo 1- 24:
Considere nuevamente el experimento en el que se elige aleatoriamente un producto de una fábrica que produce 250 productos semanalmente y se anotan sus características con respecto a la máquina que lo fabrico y si está realizada conforme a especificaciones.

Sea el espacio muestral formado por la población de productos de la fábrica, que se clasifican en los siguientes eventos disjuntos: A_1: “Producto producido por la máquina 1”, y A_2: “Producto producido por la máquina 2”, y en los siguiente eventos también disjuntos, B_1: “Producto realizado conforme a especificaciones”, y B_2: “Producto no realizado conforme a especificaciones”. Los datos obtenidos en una semana, en dicha fábrica son representados en la tabla 1-3:

Tabla1-3

	B_1	B_2	*Total*
A_1	95	35	*130*
A_2	115	5	*120*
Total	*210*	*40*	*250*

Si se elige un producto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este realizado conforme a especificaciones?

$$P(B_1) = \frac{n_{B_1}}{n}$$

$$P(B_1) = \frac{210}{250} = 0{,}84$$

Interpretación: La probabilidad de elegir un producto que este realizado conforme a especificaciones es de 0,84

b) ¿Cuál es la probabilidad de que este producido por la máquina 1 y este realizado conforme a especificaciones?

$$P(A_1 \cap B_1) = \frac{n_{11}}{n}$$

$$P(A_1 \cap B_1) = \frac{95}{250} = 0{,}38$$

Interpretación: La probabilidad de elegir un producto producido por la máquina1, conforme a especificaciones es de 0,38.

c) Se comprueba que está realizado conforme a especificaciones, ¿Qué probabilidad de que este producido por la máquina1?

$$P(A_1/B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(A_1/B_1) = \frac{95/_{250}}{210/_{250}} = 0{,}45$$

Interpretación: La probabilidad de elegir un producto que este producido por la máquina 1, dado que está realizado conforme a especificaciones es de 0,45.

d) Que está producido por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que este realizado conforme a especificaciones?

$$P(B_1/A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)}$$

$$P(B_1/A_2) = \frac{115/_{250}}{120/_{250}} = 0{,}958 \cong 0{,}96$$

Interpretación: La probabilidad de elegir un producto que está realizado conforme a especificaciones, si está producido por la máquina A_2 es de 0,96

Generalización de la probabilidad condicional:
Puede demostrarse que la probabilidad conjunta de dos eventos A, B condicionado a un tercer evento C, nos queda:

$$P(A \cap B/C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \qquad con\ \ P(C) > 0$$

1-7-2 ESPACIO DE PROBABILIDAD CONDICIONADO

Dada una prueba o experiencia y el espacio de probabilidad asociado (Ω, *𝒫(Ω),* P), un suceso **B ε** *𝒫(Ω),* tal que P(B) ≠0, define un Espacio de probabilidad condicionado (Ω, *𝒫(Ω),*P_B), donde Ω y *𝒫(Ω),* son los iniciales y P_B es la probabilidad condicionada tal como se ha definido anteriormente.

1-7-2 COMPLEMENTO DE UN SUCESO CONDICIONADO

Nos preguntamos ahora cuál es el complemento del suceso A condicionado a B, sabemos por definición de complemento de sucesos, que se debe cumplir dos condiciones para que dos sucesos sean complementarios:

1. $A \cup \bar{A} = \Omega$
2. $y\ A \cap \bar{A} = \emptyset$

Si nos interesa encontrar el complemento del suceso A condicionado a B, debe cumplirse las dos propiedades anteriores y debemos agregar que A y su complemento denotado por $\bar{A}$, deben pertenecer al mismo espacio de probabilidad condicionado.

Entonces $A\ y\ \bar{A}$ cumplen:

1. $P_B(\ A \cup \overline{A}) = P_B(\Omega) = 1$
   $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = P_B(\Omega) = 1$
   $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$

2. $P_B(A \cap \bar{A}) = P_B(\emptyset) = 0$

Por lo tanto $A\ y\ \bar{A}$ son sucesos complementarios ambos condicionados por el mismo suceso B.
Por lo tanto dado un suceso A que pertenece al espacio de probabilidad condicionado $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P_B)$, su complemento $\bar{A}$ debe pertenecer al mismo espacio de probabilidad condicionado.
En símbolos:

$P_B(A)$ su complemento es $P_B(\bar{A})$

1-8 PROBABILIDAD CONJUNTA- REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

A partir de la definición de probabilidad condicional se puede obtener la probabilidad conjunta de dos sucesos A y B

Recuerde la ecuación de probabilidad condicional del suceso A dado la ocurrencia del suceso B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad con \ P(B) \neq 0$$

Despejando de la relación anterior $P(A \cap B)$ tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \quad (1.8.1)$$

Por lo tanto la probabilidad conjunta de dos sucesos puede expresarse como un producto, lo que da resultado la regla de la multiplicación de probabilidades.

De la misma forma tenemos la probabilidad condicional del suceso B dado la ocurrencia del suceso A:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad con \ P(A) \neq 0$$

Despejando de la relación anterior $P(A \cap B)$ tenemos:

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) \quad (1.8.2)$$

Que es otra forma de poder calcular la probabilidad conjunta.

De la relación (1.8.1) Y (1.8.2) podemos escribir:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$$

con la exigencia de P(B)≠0, si el suceso condicionante es B y con P(A)≠0 si el suceso condicionante es A.

Generalización:
Si A, B y C son tres sucesos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, tal que P(A) ≠ 0, entonces la probabilidad conjunta es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$$

Sea $A_1, A_2 \ldots . A_n$, n sucesos en el espacio de probabilidad (Ω, $\mathscr{A}(\Omega)$, P), tal que P$(A_1) \neq 0, P(A_1 \cap A_2) \neq 0, \ldots \ldots P(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) \neq 0$ entonces la probabilidad conjunta es

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots . \cap A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots A_{n-1})$$

Ejemplo 1-25:

Las barajas españolas tienen 4 palos y 10 numeraciones; en el juego de truco se reparten 3 naipes a cada jugador. Calcular la probabilidad de que un jugador reciba:

a) una flor de espadas (flor: 3 naipes del mismo palo)
b) un as de espadas, un as de bastos y un siete de espadas?

a) Sea el evento: E_i: "$Recibir\ un\ carta\ de\ espadas\ en\ el\ \ i - ésima\ naipe$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1).P(E_2/E_1).P(E_3/E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{10}{40}.\frac{9}{39}.\frac{8}{38} = 0{,}012$$

La probabilidad de recibir una flor de espadas es de 0,012

b) Sea los eventos:
A: “Obtener un as de espadas”
B: “Obtener un as de bastos”
C: “Obtener un siete de espadas”

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{40}.\frac{1}{39}.\frac{1}{38} = 1{,}6869.10^{-5}$$

Pero esta es un arreglo de las distintas formas que puede obtenerse un as de espadas, un as de bastos y un siete de espadas, por lo que debemos considerar todas las distintas formas que pueden presentarse estas 3 cartas, que son las permutaciones de 3 elementos distintos.

P_3=3!= 6

Por lo tanto

$$P\big((A \cap B \cap C)U(A \cap C \cap B)U(B \cap A \cap C)U(B \cap C \cap A)U(C \cap A \cap B)U(C \cap B \cap A)\big)$$
$$= 6.\frac{1}{40}.\frac{1}{39}.\frac{1}{38} = \ 6.1{,}6869.10^{-5} = 1{,}012\,.10^{-4}$$

La probabilidad de obtener un as de espadas y un as de bastos y un siete de espadas es de $1{,}012\,.10^{-4}$

1-9 SUCESOS ESTOCÁSTICAMENTE INDEPENDIENTES

Al considerar la probabilidad condicional de algún evento A, dada la ocurrencia de otro evento B, se especula que las probabilidades de A y B son de alguna manera dependientes entre sí. La información con respecto a la ocurrencia de B afectará la probabilidad de A. Suponga que la ocurrencia de B no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de A, en el sentido de que la probabilidad condicional P(A/B) es igual a la probabilidad marginal P(A), aún a pesar de que haya ocurrido el evento B, en este contexto se origina el concepto de independencia estadística. En otras palabras dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada la probabilidad de la ocurrencia del otro suceso.

Ejemplo 1-26:
Sea el experimento de seleccionar aleatoriamente un productos de la fábrica A, y uno de la fábrica B para determinar si presentan defectos.
Sean los sucesos: A: "Calidad del producto seleccionado de la fábrica A" y B: "Calidad del producto seleccionado de la fábrica B". ¿Son A y B sucesos independientes?
Los sucesos A y B son independientes.

Ejemplo 1-27:
Sea el experimento de seleccionar aleatoriamente dos productos de la línea de producción 1 de una fábrica A, para determinar si presentan defectos
Sea el suceso: A: "Calidad del primer producto seleccionado de la línea de producción 1 de la fábrica A" y B: "Calidad del segundo producto seleccionado de la línea de producción 1 de la fábrica A". ¿Son A y B sucesos independientes?
Los sucesos A y B son dependientes.

1-9 -1 DEFINICIÓN DE SUCESOS INDEPENDIENTES

Dado una experiencia y el espacio de probabilidad asociado ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P), sea **A, B ε** $\mathscr{P}(\Omega)$, se dice que los sucesos A y B son estocásticamente independientes si y sólo si se cumple una de las siguientes afirmaciones:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \quad (1.9.1)$$
$$P(A/B) = P(A) \quad con\ P(B) \neq 0 \quad (1.9.2)$$
$$P(B/A) = P(B) \quad con\ P(A) \neq 0 \quad (1.9.3)$$

Es decir dos sucesos son estocásticamente independientes cuando la probabilidad de que aparezcan ambos sucesos a la vez es igual al producto de sus probabilidades, relación (1.9.1), o cuando la información que aporta el conocimiento de la presencia de uno de ellos no afecta a la certidumbre o expectación del otro, relaciones (1.9.2) o (1.9.3).

En caso contrario se dice A y B son sucesos estocásticamente dependientes.

$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ entonces A es estocásticamente dependiente de B
$P(A/B) \neq P(A)$ entonces A es estocásticamente dependiente de B
$P(B/A) \neq P(B)$ entonces B es estocásticamente dependiente de A

El tipo de dependencia viene expresada por la dirección de la desigualdad
Si A es dependiente de B tenemos:
$P(A/B) > P(A)$ Indica que la presencia o realización del suceso B favorece la posibilidad de la realización del evento A

$P(A/B) < P(A)$ Indica que la presencia o realización del suceso B, disminuye la posibilidad de la realización del evento A

Nota:
- Si los sucesos A y B tienen probabilidad positiva (no nula), las tres relaciones (1.9.1), (1.9.2), (1.9.3) son equivalentes. Es decir cualquiera puede ser utilizada para analizar la independencia o dependencia de dos sucesos.
- La relación (1.9.1) es más general que las otras dos en el sentido que se puede utilizar siempre sin restricción. Puede aplicarse cuando los dos sucesos o uno de ellos tiene probabilidad nula.
- La relación (1.9.2) sólo se puede utilizar cuando la $P(B) \neq 0$. La relación (1.9.3), sólo se puede aplicar cuando $P(A) \neq 0$

- El concepto de independencia de dos sucesos es un concepto diferente de eventos mutuamente excluyentes o incompatibles. En general ninguno de ellos implica el otro.
- Dos sucesos son mutuamente excluyentes e independientes si y sólo si al menos uno de ellos es el conjunto vacío.

El concepto de independencia de dos sucesos puede extenderse a cualquier número finito de sucesos.

Ejemplo 1-28:
Sean los sucesos: A: "El día martes lloverá" y B: "Tener un accidente el día martes" ¿Son los sucesos A y B independientes?
Con probabilidades:
P(A)=0,4
P(B)=0,1
P(A$\cap B$)=0,08
A y B son independientes si y sólo si se cumple que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ o sus relaciones equivalentes

$$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A).P(B)$$
$$0{,}08 \stackrel{?}{=} 0{,}4 * 0{,}1$$
$$0{,}08 \neq 0{,}04$$

Por lo tanto los sucesos A y B no son independientes.

1-9 -2 GENERALIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE SUCESOS INDEPENDIENTES PARA CUALQUIER NÚMERO FINITO DE SUCESOS

Sean $A_1, A_2, \dots A_n$ sucesos en el espacio de probabilidad (Ω, $\mathscr{A}(\Omega)$, P), estos sucesos son independientes si y sólo si la probabilidad de la intersección de cualquier subconjunto de ellos es igual al producto de las probabilidades de cada uno de los miembros de la intersección.
En símbolos:

$$P\left(A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_k}\right) = P\left(A_{t_1}\right).P\left(A_{t_2}\right)\dots P\left(A_{t_k}\right)$$

Para k=2,3,…,n, donde $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ es una combinación cualquiera de los n números 1,2,…,n.
Por ejemplo, considere tres sucesos $A_1, A_2 \text{ y } A_3$, son independientes si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones:

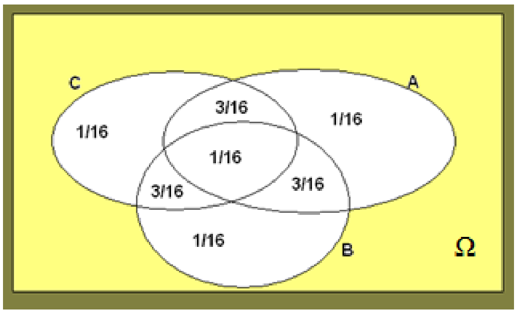
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) \quad (1.9.2.1)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3) \quad (1.9.2.2)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3) \quad (1.9.2.3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) \quad (1.9.2.4)$$

Observación: La última relación no puede deducirse de las tres primeras, es decir las cuatro condiciones son necesarias.

Ejemplo 1-29:
Sea los sucesos A, B, C, analice si son independientes.
Las probabilidades de cada suceso son:

$$P(A) = \frac{8}{16}, \quad P(B) = \frac{8}{16}, \quad P(C) = \frac{8}{16},$$

Las probabilidades conjuntas se dan en el siguiente diagrama de Venn



$P(A)=\frac{8}{16}$, $P(B)=\frac{8}{16}$, $P(C)=\frac{8}{16}$

Se analiza si se cumple las relaciones de independencia de los sucesos dos a dos:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B) \qquad P(A\cap C)=P(A).P(C) \qquad P(B\cap C)=P(B).P(C)$$

$$\frac{4}{16}=\frac{8}{16}.\frac{8}{16} \quad , \quad \frac{4}{16}=\frac{8}{16}.\frac{8}{16} \quad , \quad \frac{4}{16}=\frac{8}{16}.\frac{8}{16}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Se observa que se cumple la propiedad la independencia de los sucesos dos a dos.
Ahora se analiza si se cumple la relación de independencia tomando los tres sucesos a la vez (1.9.2.4)

$$P(A\cap B\cap C)\overset{?}{\triangleq}P(A).P(B).P(C)$$

$$\frac{1}{16}\neq\frac{8}{16}.\frac{8}{16}.\frac{8}{16}$$

$$\frac{1}{16}\neq\frac{1}{8}$$

No se cumple la relación, entonces A, B y C no son independientes

1-9-3 MUESTREO CON REEMPLAZO – MUESTREO SIN REEMPLAZO

Hay dos maneras de extraer objetos para obtener una muestra de un conjunto dado de objetos, conocido como muestreo de una población con reemplazo o sin reemplazo.

1. ***Muestreo con reemplazo*** significa que el objeto que se extrae al azar se coloca de nuevo en el conjunto dado, se mezcla y se procede a extraer al azar el siguiente objeto.
2. ***Muestreo sin reemplazo*** significa que el objeto que se extrajo al azar se deja aparte y se procede a extraer al azar el siguiente objeto, en este caso la población consta de un elemento menos.

Ejemplo 1-30:
Una caja contiene 10 clavos de acero, de los cuales 3 están defectuosos. Dos clavos se extraen al azar. Encontrar la probabilidad del evento tal que ninguno de los 2 clavos sea defectuoso.

a) Realizar un muestreo sin reemplazo.
b) Realizar un muestreo con reemplazo

a) Muestreo sin reemplazo:
Sean los eventos:
D_i: “El i –ésimo clavo extraído no es defectuoso” con i=1,2

En la primera extracción aleatoria tenemos 10 clavos de acero igualmente probables y 7 de ellos son no defectuosos. Por lo tanto la probabilidad de extraer un clavo no defectuoso es de 7/10
Si i=1, tenemos P(D_1)=$\frac{7}{10}$
Si se extrajo un clavo de la caja, en la segunda extracción quedan 9 resultados igualmente probables, y si D_1 ocurre, nos quedan 6 clavos no defectuosos. Por lo tanto la probabilidad de extraer un segundo clavo no defectuoso es de 6/9, cuando se realiza un muestreo sin reposición. En este tipo de muestreo en general los sucesos están condicionados.
Entonces la probabilidad de extraer dos clavos de aceros no defectuosos es:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)(D_2/D_1) = \frac{7}{10}.\frac{6}{9} = 0{,}466 \cong 0{,}47$$

Interpretación: La probabilidad de extraer dos clavos de acero sin reposición, no defectuosos es de 0,47

b) Muestreo con reemplazo:
Sean los eventos:
D_i=“El i –ésimo clavo extraído no está defectuoso” con i=1,2

En la primera extracción aleatoria tenemos 10 clavos de acero igualmente probables y 7 de ellos son no defectuosos. Por lo tanto la probabilidad de extraer un clavo no defectuoso es de 7/10
Si i=1, tenemos P(D_1)=$\frac{7}{10}$
Se extrae un clavo de la caja pero como estamos realizando un muestreo con reposición, se vuelve a colocar en la caja, por lo tanto nos queda en la caja nuevamente 10 clavos, de los cuales 7 son no defectuosos. Por lo tanto la probabilidad de extraer un segundo clavo no defectuoso sigue siendo 7/10, cuando se realiza un muestreo con reposición. En este tipo de muestreo los sucesos son independientes.
Entonces la probabilidad de extraer dos clavos de aceros no defectuosos es:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1).(D_2) = \frac{7}{10}.\frac{7}{10} = 0{,}49$$

Interpretación: La probabilidad de extraer dos clavos de acero con reposición, no defectuosos es de 0,47

1-10 TEOREMA DE PROBABILIDADES TOTALES. TEOREMA DE BAYES

1-10-1 TEOREMA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES

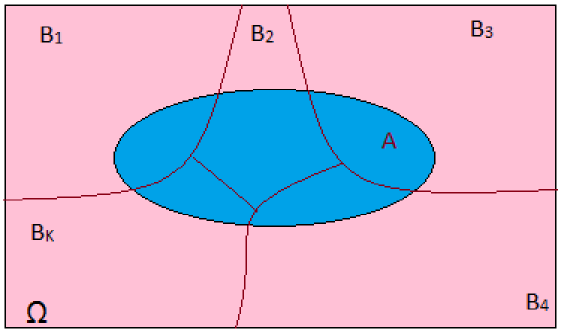
Existe situaciones en las cuales varios eventos (denominados causas) intervienen en la realización de otro evento del mismo espacio muestral.

Este teorema se utiliza para calcular la probabilidad de un suceso a partir de una colección de k sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el suceso seguro.

1-10-2 ENUNCIADO DEL TEOREMA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES:

Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ y los sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathscr{P}(\Omega)$, sucesos con probabilidad positiva en Ω, es decir $P(B_i) \neq 0$, para todo i=1,….,k, tales que forma una partición en Ω, es decir $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ en donde $B_i \cap B_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, (sucesos mutuamente excluyentes o disjuntos dos a dos). Sea A un suceso cualquiera en Ω con probabilidad positiva, tal que $A \cap B_j \neq \varnothing$, se verifica:

$$\boldsymbol{P(A) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + \cdots + P(A/B_K).P(B_K)}$$



Demostración:
EL suceso A puede expresarse como la unión de k eventos mutuamente excluyentes: $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, $A \cap B_3$,…., $A \cap B_k$, en símbolos:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

Como los sucesos son mutuamente excluyentes se puede aplicar el segundo axioma de la definición de probabilidad axiomática, tenemos:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots\ldots + P(A \cap B_k)$$

Aplicando la definición de probabilidad conjunta a cada término del segundo miembro tenemos:

$$\boldsymbol{P(A) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + \cdots + P(A/B_K).P(B_K).}$$

Escriba aquí la ecuación.

Este es el teorema de las Probabilidades totales.

Escrito en forma abreviada:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A/B_j).P(B_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, k}}$$

Ejercicio 1-31:
Una empresa alquila vehículos para su personal jerárquico y labores de campo a tres agencias de nivel internacional. Actualmente el 20% de los vehículos provienen de la agencia A, el 50% de la agencia B y el resto de la agencia C. Si el 10 % de los vehículos de la agencia A, el 12 % de los vehículos de la agencia B y el 5% de los vehículos de la agencia C tienen algún problema de funcionamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa contrate un vehículo con algún problema de funcionamiento?

Considere los siguientes eventos:

A: “Vehículos alquilado a la agencia A”
B: “Vehículos alquilado a la agencia B”
C: “Vehículos alquilado a la agencia C”
F: “Vehículo con problemas de funcionamiento”

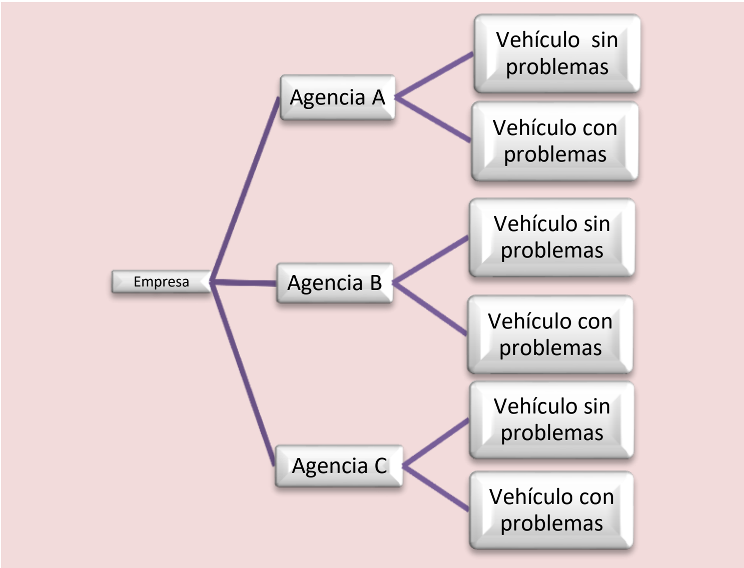
Datos:

P(A)=0,20; P(B)=0,50; P(C)=0,30

P(F/A)=0,10; P(F/B)=0,12; P(F/C)=0,05

Se puede esquematizar el problema mediante un diagrama de árbol.

Diagrama de árbol del ejercicio 1-31:



$$\boldsymbol{P(F) = P(F/A).P(A) + P(F/B)P(B) + P(F/C).P(C)}$$

$$P(F) = 0{,}10.0{,}20 + 0{,}12.0{,}50 + 0{,}05.0{,}30$$
$$P(F) = 0{,}095$$

Interpretación: La probabilidad de que la empresa alquile un vehículo con algún problema de funcionamiento es de 0,095

1-10-3 TEOREMA DE BAYES

El Teorema de Bayes se utiliza para calcular probabilidades condicionadas, llamadas probabilidades a posteriori, porque se determinan a partir de probabilidades conocidas de ciertos sucesos y de información suministrada por otras probabilidades llamadas probabilidades a priori.

Este teorema fue desarrollado por el reverendo Thomas Bayes (1702, 1761). Es una extensión del concepto de probabilidad condicional. Bayes estudió el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. El teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso.

A menudo nos interesa determinar la probabilidad de que un evento ocurra cuando conocemos el resultado de otro evento. Considere el ejemplo anterior 1-31 de los vehículos con problemas de funcionamiento ¿eventualmente el acontecimiento de alquilar un vehículo con algún problema de funcionamiento hará que cambie la probabilidad posterior de alquilar un vehículo en la agencia A? Por ejemplo, nos interesa calcular la probabilidad de que el vehículo alquilado sea de la agencia A, dado que el vehículo tiene algún problema de funcionamiento. En este caso estamos analizando una probabilidad condicional, con un condicionante que hemos tenido que calcular previamente con el teorema de probabilidades totales.

Generalizando el problema, tenemos que el teorema de Bayes permite calcular la probabilidad de que se haya dado alguna de las condiciones iniciales, causas o factores que influyen en la ocurrencia de un suceso.(En este caso evento F).

1-10-4 ENUNCIADO DEL TEOREMA DE BAYES

Sea el espacio de probabilidad ($\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$, P) y los sucesos B_1, B_2, ... , B_k ε $\mathscr{P}(\Omega)$, sucesos con probabilidad positiva en Ω, es decir $P(B_j) \neq 0$, con j=1,….,k, tales que forma una partición en Ω, es decir $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$ y $B_i \cap B_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ (sucesos mutuamente excluyentes o disjuntos dos a dos). Si se sabe que se ha presentado un suceso A, tal que $A \cap B_j \neq \varnothing$, la probabilidad de que proceda del suceso B_j es:

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j).P(B_j)}{P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + \cdots + PP(A/B_k).P(B_k)}; \quad \text{Siendo } P(A) > 0$$

La relación anterior se puede escribir:

$$\boldsymbol{P\left(B_j/A\right) = \frac{P(A/B_j).P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i).P(B_i)}}; \quad j = 1,2,\dots,k$$

Demostración:
Se aplica la definición de probabilidad condicional

$$P(B_j/A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

Se reemplaza en el numerador del segundo miembro por la definición de probabilidad conjunta condicionada y en el denominador por la probabilidad total del suceso A, de esta forma obtenemos lo que se denomina Teorema de Bayes.

$$\boxed{P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j).P(B_j)}{P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + \cdots + PP(A/B_k).P(B_k)}; \quad \text{Siendo } P(A) > 0}$$

Nota: obsérvese que el denominador del teorema de Bayes es el teorema de las probabilidades totales.

Ejemplo 1-32:
Continuando con el ejemplo anterior 1-31, que decía que una empresa alquila vehículos para su personal jerárquico y labores de campo a tres agencias de nivel internacional. Actualmente el 20% de los vehículos provienen de la agencia A, el 50% de la agencia B y el resto de la agencia C. Si el 10 % de los vehículos de la agencia A, el 12 % de los vehículos de la agencia B y el 5% de los vehículos de la agencia C tienen algún problema de funcionamiento. Sabiendo que el vehículo alquilado tiene algún problema de funcionamiento ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo alquilado sea de la agencia A?

Sean los sucesos:
A: "Vehículos alquilado a la agencia A"
B: "Vehículos alquilado a la agencia B"
C: "Vehículos alquilado a la agencia C"
F: "Vehículo con problemas de funcionamiento"

Datos:
P(A)=0,20; P(B)=0,50; P(C)=0,30
P(F/A)=0,10; P(F/B)=0,12; P(F/C)=0,05
Como en el ejercicio anterior 1-31, se calculó la probabilidad de que un vehículo alquilado tuviera problemas de funcionamiento tenemos:

$$P(F) = 0{,}095$$

Queremos calcular P(A/F)
Aplicando el Teorema de Bayes tenemos

$$P(A/F) = \frac{P(F/A).P(A)}{P(F)}$$

Reemplazando por los datos tenemos

$$P((A/F) = \frac{0{,}10.0{,}20}{0{,}095} = 0{,}21$$

Interpretación:
La probabilidad de que el vehículo alquilado sea de la agencia A, dado que tuvo algún problema de funcionamiento es de 0,21

Ejemplo 1-33:
Se analizan 100 láminas sólidas de policarbonato, para determinar su resistencia a las ralladuras y a los golpes. Se presentan los datos obtenidos en la siguiente tabla:

Tabla 1-3:

		Resistencia a los golpes		
		Alta G	**Baja $\overline{G}$**	*total*
Resistencia al calor	**Alta** C_1	72	12	*84*
	Med C_2	12	58	*70*
	Baja C_3	8	38	*46*
	Total	*92*	*108*	***200***

Sean los eventos:
G: “La lámina sólida de policarbonato tiene alta resistencia a los golpes”
$\bar{G}$: “La lámina sólida de policarbonato tiene baja resistencia a los golpes”
C_1: “La lámina sólida de policarbonato tiene alta resistencia al calor”
C_2: “La lámina sólida de policarbonato tiene mediana resistencia al calor”
C_3: “La lámina sólida de policarbonato tiene baja resistencia al calor”

Se elige una lámina sólida de policarbonato al azar calcular la probabilidad de que:

a) Tenga alta resistencia a los golpes o alta resistencia al calor
b) Tenga alta resistencia al calor.
c) No tenga alta resistencia al calor.
d) Tenga alta resistencia a los golpes.
e) Tenga alta resistencia al calor sabiendo que tiene alta resistencia a los golpes.
f) tenga alta resistencia a los golpes sabiendo que tiene alta resistencia al calor.
g) Tenga alta resistencia a los golpes y baja resistencia al calor.

Solución:

a) Si queremos calcular la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los eventos G o C_1 es la suma de las probabilidades simples de ocurrencia de cada uno de ellos, menos la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente.

$$P(G \cup C_1) = P(G) + P(C_1) - P(G \cap C_1)$$

$$P(G \cup C_1) = \frac{92}{200} + \frac{84}{200} - \frac{72}{200} = 0{,}52$$

Interpretación: la probabilidad de que una lámina sólida de policarbonato tenga alta resistencia a los golpes o alta resistencia al calor es de 0,52. En términos porcentuales significa que el 52% de las láminas sólidas de policarbonato tienen alta resistencia a los golpes o alta resistencia al calor.

b) Calcular la probabilidad de que tenga alta resistencia al calor

$$P(C_1) = P(C_1 \cap G) + P(C_1 \cap \bar{G})$$

$$P(C_1) = \frac{72}{200} + \frac{12}{200} = \frac{84}{200} = 0{,}42$$

Interpretación: La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato tenga alta resistencia al calor es de 0,42.

c) Calcular la probabilidad de que no tenga alta resistencia al calor

$$P(\overline{C_1}) = 1 - P(C_1)$$

$$P(\overline{C_1}) = 1 - \frac{84}{200} = \frac{116}{200} = 0{,}58$$

Se puede calcular de otra forma, si no tiene alta resistencia al calor tiene mediana o baja resistencia al calor entonces:

$$P(\overline{C_1}) = P(C_2) + P(C_3)$$

$$P(\overline{C_1}) = \frac{70}{200} + \frac{46}{200} = \frac{116}{200} = 0{,}58$$

Interpretación: La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato no tenga alta resistencia al calor es de 0,58

d) Calcular la probabilidad de que tenga alta resistencia a los golpes

$$P(G) = P(G \cap C_1) + P(G \cap C_2) + P(G \cap C_3)$$

$$P(G) = \frac{72}{200} + \frac{12}{200} + \frac{8}{200} = \frac{92}{200} = 0{,}46$$

Interpretación: La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato tenga alta resistencia a los golpes es de 0,46.

e) Sabiendo que tiene alta resistencia a los golpes calcular la probabilidad de que tenga alta resistencia al calor.

$$P(C_1/G) = \frac{P(C_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{72/200}{92/200} = \frac{72}{92} = 0{,}78$$

Interpretación: La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato tenga alta resistencia al calor dado que tiene alta resistencia a los golpes es de 0,78

f) Sabiendo que tiene alta resistencia al calor calcular la probabilidad de que no tenga alta resistencia a los golpes.

$$P(\bar{G}/C_1) = \frac{P(\bar{G} \cap C_1)}{P(C_1)} = \frac{12/200}{84/200} = \frac{12}{84} = 0{,}1428$$

Interpretación: La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato no tenga alta resistencia a los golpes dado que tiene alta resistencia al calor es de 0,1428.

g) Calcular la probabilidad de que tenga alta resistencia a los golpes y baja resistencia al calor.

$$P(G \cap C_3) = \frac{8}{200} = 0{,}04$$

La probabilidad de que la lámina sólida de policarbonato seleccionada tenga alta resistencia a los golpes y baja resistencia al calor es de 0,04.

1-11 PROBLEMAS PROPUESTOS DE PROBABILIDAD

1-1 Explique si los modelos representativos de las siguientes experiencias conviene considerarlos determinísticos o aleatorios:

a) Tiempo que tarda un objeto en caer y tocar el piso en caída libre, desde una altura prefijada
b) Resultado económico luego de 10 jugadas en la ruleta.
c) Diámetro de un biela.
d) Cantidad de alumnos que asistirán al próximo parcial
e) Tiempo empleado para ir de Mendoza a Córdoba.
f) Distancia recorrida desde Mendoza a Córdoba.

1-2 En cada uno de los siguientes experimentos, indique su espacio muestral y clasifíquelo en discreto (finito o infinito numerable) o continuo.

a) Se entrevista a un ingeniero civil que compra regularmente hormigón elaborado para determinar la empresa que prefiere.
b) Se selecciona a un alumno de ingeniería y se registra su altura.
c) Se registra el número de accidentes viales ocurridos en la ruta nacional 7 durante el último año.
d) Se selecciona a un alumno de ingeniería y se registra su color de ojos.
e) Se inspecciona una partida de productos y se anota la cantidad de productos defectuosos encontrados.
f) Se registra en una estación de servicios el número de automóviles que se le suministra gasolina de un cierto octanaje, en un cierto día.
g) Se registra la temperatura de la ciudad de Mendoza, en un cierto día.
h) Se registra el tiempo que espera un cliente de un banco antes que sea atendido.
i) Se registra la resistencia a la compresión de cierto tipo de hormigón.

1-3 ¿Cuál de los siguientes espacios muestrales es el correcto para el experimento de lanzar una moneda dos veces?

a) Ω={(cara, cara); (cara, ceca);(ceca, cara);(ceca, ceca)}
b) Ω={2 caras; 2 cecas; 1 cara y 1 ceca}
c) Ω={(cara, cara); (cara, ceca);(ceca, ceca)}

1-4 En los siguientes experimentos aleatorios, escriba su espacio muestral, (Para encontrar los elementos del espacio muestral utilice un diagrama de árbol), indique cuales son equiprobables y cuales no lo son:

a) Se lanza una moneda equilibrada tres veces.
b) El número de veces que se lanza un dado equilibrado hasta que salga un seis.
c) El número de goles de un partido de fútbol.
d) Se selecciona dos personas sin reposición para formar parte de un jurado, a partir de un grupo especializado en la temática formado por 10 hombres y 6 mujeres.
e) Extraer una carta al azar de un mazo de barajas españolas.
f) Dadas cinco baterías, dos con defectos, extraer sucesivamente dos baterías sin reposición y observar si son defectuosas.

1-5 Indique los errores en cada una de las siguientes proposiciones:

a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda 0; 1; 2 ó 3 automóviles en cualquier día de febrero son 0,19; 0,38; 0,29 y 0,15 respectivamente.
b) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,40 y la probabilidad de que no llueva es de 0,52
c) La probabilidad de que un editor cometa 0; 1; 2; 3; 4 ó más errores son de 0,19; 0,34; -0,25; 0,43 y 0,29.
d) En una sola extracción de un mazo de naipes, la probabilidad de elegir un corazón es de 1/4 , la probabilidad de elegir una carta negra es de 1/2 y la probabilidad de elegir un corazón y una carta negra es de 1/8.

1-6 En un pueblo de 1000 personas, se sabe que 420 son estudiantes, 680 son trabajadores y 540 son deportistas, 220 son estudiantes deportistas, 250 son estudiantes y trabajadores, 70 son deportistas y no estudian ni trabajan, 100 son estudiantes, trabajadores y deportistas y 80 personas no realizan ninguna de las actividades nombradas. Se selecciona una persona al azar, encontrar la probabilidad de que:

a) Sea deportista pero no estudie
b) Trabaje y estudie, dado que es deportista
c) Estudie únicamente
d) Trabaje y sea deportista
e) Realice por lo menos dos actividades
f) Realice a lo sumo una actividad.

Sugerencia: realice un diagrama de Venn

1-7 Se postulan para un empleo 50 personas. Se las clasifica por sexo: varones y mujeres, por estudios: ingenieros y no ingenieros, por estado civil: casados y solteros. Se sabe que 30 son varones, 13 son ingenieros, 22 son casados, 8 son ingenieros varones, 7 son ingenieros casados, 13 son varones casados, hay una ingeniera soltera mujer, 5 no ingenieras mujeres casadas, 12 varones solteros no ingenieros, 3 son ingenieros varones casados, y 10 mujeres no ingenieras solteras. Si todos los postulantes tienen la misma probabilidad de ser elegidos, hallar la probabilidad de que el seleccionado sea:

a) Un ingeniero varón casado
b) Un ingeniero varón
c) Una mujer ingeniera
d) Una persona soltera
e) Un ingeniero varón, sabiendo que es soltero
f) Casado, sabiendo que es ingeniero varón
g) Mujer, sabiendo que es ingeniero y casado

Sugerencia: realice un diagrama de Venn.

1-8 Una pequeña empresa cuenta con dos proveedores de servicios eléctricos. En caso de producirse un desperfecto eléctrico la probabilidad de que el proveedor A esté disponible es de 0,98 y la probabilidad de que el proveedor B esté disponible cuando se lo requiera es de 0,92. En el caso de que el desperfecto eléctrico sea muy grande, encuentre la probabilidad de que ambos proveedores estén disponibles en caso que se los requiera.

1-9 Una fábrica cuenta con dos generadores de emergencia cada uno de los cuales puede proporcionar suficiente energía eléctrica para alimentar la fábrica durante la emergencia. La probabilidad de que funcione correctamente el generador A es de 0,94 y el generador B es de 0,96, la probabilidad de que funcione ambos correctamente es de 0,93. Realice un diagrama de Venn y encuentre la probabilidad de que en una emergencia

a) Funcione alguno de los dos generadores
b) Ninguno funcione
c) Funcione sólo uno de ellos
d) Funcione el generador A y no funcione el generador B
e) Funcione el generador B y no funcione el generador A
f) Funcione el generador B sabiendo que no funciona el A
g) Funcione el generador A sabiendo que funciona el B
h) No funcione el generador A, dado que no funciona B
i) $Es\ P_B(A) + P_B(\bar{A}) = P_B(\Omega) = 1$? ¿Qué conclusión puede sacar?
j) ¿Son los sucesos A y B mutuamente excluyentes?
k) ¿Son los sucesos A y B independientes?

1-10 Defina el espacio muestral correspondiente a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y encuentre el evento complementario de los eventos planteados en cada ítem.

a) Sea el experimento aleatorio de arrojan dos dados legales y observar su cara superior. Considere en este experimento el evento:
A: "$La\ suma\ de\ los\ números\ obtenidos\ es\ un\ número\ mayor\ a\ 5$"
b) Sea el experimento aleatorio de arrojar tres dados legales y observar su cara superior. Considere en este experimento el evento:
B: "*Los números obtenidos son diferentes*"

1-11 Una empresa automotriz toma una muestra de 32 automóviles de la línea de ensamblaje para verificar que no tengan ningún defecto. Doce de los automóviles no tienen ningún defecto, nueve tienen defectos de acabado exterior, cinco tienen defectos de ensamblaje y seis tienen defectos en su tapizado interior. Hay tres automóviles que tienen defectos de ensamblaje y de acabado exterior. Dos tienen defectos de ensamblaje y en su tapizado interior. Y cuatro tienen defectos de acabado exterior y en su tapizado interior, y un automóvil tiene defecto de ensamblaje, acabado exterior y en su tapizado interior.

Sean los eventos: A: "El automóvil tiene defecto de ensamblaje", B: "El automóvil tiene defecto de acabado exterior" y C: "El automóvil tiene defecto en su tapizado interior"

a) Grafique los eventos en un diagrama de Venn.
b) Se selecciona un automóvil al azar, encuentre la probabilidad de que:
    a. No tenga defectos
    b. Tenga defectos únicamente de acabado exterior.
    c. Tenga defecto de acabado exterior o de ensamblaje
    d. No tenga defectos de ensamblaje
    e. Tenga algún defecto
    f. Tenga defecto de acabado exterior y en su tapizado interior.

1-12 Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ y los sucesos A y B ε $\mathscr{P}(\Omega)$. Si los sucesos A y B son independientes pruebe que $\bar{A}$ y B también lo son.

1-13 Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ y los sucesos A y B ε $\mathscr{P}(\Omega)$, con $P(A) > 0$ y $P(\bar{A}) > 0$. Demuestre que si A y B son sucesos independientes entonces $P(B/A) = P(B/\bar{A})$. (Sugerencia recuerde la relación del ítem 1-12, donde demostró que si A y B son independientes entonces $\bar{A}$ y B son independientes).

1-14 La probabilidad de que un vendedor de autos venda por lo menos 3 autos en un día es 0,20. ¿Cuál es la probabilidad de que venda 0, 1, ó 2 autos en ese día?

1-15 Cuatro electores elegidos al azar deben expresar su opinión favorable o contraria a un determinado proyecto. Designando los suceso F: "opinión del elector favorable" y C: "opinión del elector contraria".

a) Realice un diagrama de árbol que represente los distintos resultados posibles del experimento.
b) Ayudado por el diagrama de árbol escriba el espacio muestral.

1-16 Un experimento consiste en seleccionar tres piezas en un proceso manufacturero y observar su calidad final, se califican como "Muy Buena", "Buena", "Regular"

a) Enumere todos los elementos del espacio muestral Ω, puede ayudarse con un diagrama de árbol.
b) Enumere los elementos contenidos en el suceso de que no haya piezas regulares.

1-17 Se lanza un dado no cargado. Usted gana $5 si el resultado es par o divisible por 3. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

1-18 Un cliente entra en un centro de venta de electricidad. La probabilidad de que compre un capacitor es 0,60; una lámpara dicroica es de 0,5; y un capacitor y una lámpara dicroica es de 0,30. ¿Cuál es la probabilidad de que compre un capacitor, o una lámpara dicroica, o ambos?

1-19 Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ y los sucesos A y B ε $\mathscr{P}(\Omega)$. Suponga que A y B son dos sucesos, ambos con probabilidades mayores que cero tales que $A \cap B = \emptyset$. Pruebe que los sucesos A y B **no** son independientes.

1-20 De un naipe español de 48 cartas, se extrae sucesivamente cuatro cartas sin reposición. a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta de cada palo?, b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un as?

1-21 De un naipe español de 48 cartas, se extraen cuatro de ellas. ¿Cuál es la probabilidad:
a) de obtener cuatro ases, si las cartas se extraen con reposición?
b) ídem a) sin reposición.

1-22 En una fábrica el departamento de control de calidad somete a los motores de la producción a dos pruebas A y B. El 5% falla en la prueba A, el 2% en la prueba B y el 1% en ambas. Indicar la probabilidad de que:

a) Un motor que no ha fallado en la prueba A, no falle en la prueba B

b) Un motor que no ha fallado en la prueba A, falle en la prueba B

1-23 Un sistema eléctrico contiene dos resistencias conectadas en paralelo de forma que éste funciona si alguna de ellas funciona. Se sabe que la probabilidad de que funcione el componente C_1 es de 0,8; que funcione el componente C_2 es de 0,7 y la probabilidad de que funcionen ambos componentes es de 0,71. Calcular la probabilidad de que:

a) El sistema funcione.
b) El sistema no funcione

1-24 Un mazo de barajas francesas está formado por 4 palos de 13 números cada uno. En el juego de póquer se reciben 5 cartas de ese mazo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar póquer de ases? (4 ases)
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar 5 naipes del mismo palo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una escalera en un juego de póquer?

1-25 Se realizó un estudio en una fábrica de compresores centrífugos sobre el grado de satisfacción del cliente con respecto a los requerimientos del nivel de ruido máximo que puede presentar y el tiempo de vida útil mínimo requerido. Las proporciones del número total de casos que caen dentro de cada categoría se presentan en la siguiente tabla 1-4.

Tabla 1-4

Nivel de ruido máximo

Tiempo de vida mínimo		Si	no	total
	Si	0,93	0,02	0,95
	No	0,03	0,02	0,05
	total	0,96	0,04	1

Si se toma un compresor centrífugo al azar: Cuál es la probabilidad de que:

a) ¿Cumpla con los requerimientos de nivel de ruido máximo?
b) ¿Cumpla con los requerimientos de nivel de ruido máximo o con el de tiempo de vida mínimo?
c) ¿Cumpla sólo con los requerimientos de nivel de ruido máximo?
d) ¿Cumpla con los dos requerimientos de nivel de ruido máximo y tiempo de vida mínimo?
e) ¿No cumpla con ninguno de los dos requerimientos?
f) ¿Cumpla con el nivel de ruido máximo dado que no cumple con el tiempo de vida mínimo requerido?
g) ¿No cumpla con el tiempo de vida mínimo requerido dado que no cumple con el nivel de ruido máximo?
h) ¿Son los sucesos cumple con los requerimientos de nivel de ruido máximo y cumple con los requerimientos del tiempo de vida mínimo, independientes?

1-26 Sea $(\Omega, \mathscr{A}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad, si $\{A_n\}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{A}(\Omega)$, compruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

1-27 Sea $(\Omega, \mathscr{A}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad, si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathscr{A}(\Omega)$, compruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

1-28 Una carga que contiene 52 bulones, de los cuales hay 4 defectuosos. Se extrae cuatro bulones aleatoriamente. Calcular la probabilidad de que ninguno de los bulones extraídos sea defectuosos, a) con reemplazo b) sin reemplazo.

1-29 En una fábrica ensambladora de automóviles, hay cinco motores de los cuales tres son defectuosos. Calcule la probabilidad de que al elegir dos motores al azar sin reposición:
a) Ambos estén en buen estado
b) Sólo uno esté en buen estado
c) Al menos uno esté en buen estado

1-30 Al realizar el embalaje para despachar un paquete con tornillos de diferentes calidades, estos se mezclaron. En el paquete a enviar se dispusieron 28 tornillos de alta resistencia con 32 tornillos de resistencia normals, de igual aspecto, por lo que resulta imposible diferenciarlos a simple vista. Si se extraen dos tornillos al azar sin reposición, cuál es la probabilidad de que:
a) ¿Uno sea de alta resistencia y el otro sea un tornillo normal?
b) ¿De que ambos sean de alta resistencia?

1-31 Una fábrica cuenta con dos baterías para luces de emergencia, la probabilidad de que funcione la batería A cinco años más es de ¼ y la probabilidad de que la segunda batería B funcione cinco años más es de 1/3. Encuentre la probabilidad suponiendo independencia de los eventos, de que:
a) Ambas funcionen cinco años más.
b) Por lo menos una funcione cinco años más.
c) Ninguna funcione cinco años más.
d) Sólo la batería A funcione cinco años más.

1-32 La policía metropolitana planea hacer respetar los límites de velocidad utilizando tecnología láser y cámara de video integrada. Se coloca en tres distintas ubicaciones, A, B, C. Este nuevo instrumental detecta si un vehículo rebasa la velocidad en la ubicación A, el 40% de las veces, en la ubicación B el 35% y en la ubicación C el 25% de las veces. Una automovilista que rebasa la velocidad mínima permitida pasa el 12% de las veces por la ubicación A, el 5% por la ubicación B y 3% de las veces por la ubicación C.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que lo detecten?

b) Si lo detectaron, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado por la ubicación A?

1-33 Si el 60% de las personas manejan vehículos livianos, el 25% manejan vehículos medianos y 15% manejan vehículos pesados. De los que maneja vehículos livianos el 25% lo utilizan para trabajar, de los que manejan vehículos medianos el 52% lo utilizan para trabajar y de los que manejan vehículos pesados el 64% lo utilizan para trabajar. Si se selecciona al azar un conductor

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice su vehículo para trabajar?
b) Si lo utiliza para trabajar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un vehículo pesado?

1-34 Una fábrica de aviones someten los motores de la producción a dos pruebas A y B. El 5% de los motores fallan en la prueba A, el 2% en la prueba B y el 1% en ambas pruebas. Encontrar la probabilidad de que un motor, que no ha fallado en la prueba A falle en la prueba B. (Sugerencia: plantee una tabla con los sucesos A, B y sus complementos)

1-35 Una empresa de productos electrónicos tiene tres operarios, A, B, C, para una máquina ensambladora. El operario A tiene una tasa de defectos del 5%, el operario B, del 3% y el operario C, del 2%. Los tres operarios ensamblan el mismo número de productos electrónicos. Se selecciona al azar un producto electrónico.

a) Calcular la probabilidad de que resulte defectuoso.
b) Cuál es la probabilidad conjunta de que sea defectuoso y haya sido ensamblado por el operario B?
c) Calcular la probabilidad a posteriori de que el producto haya sido ensamblado por B dado que resultó defectuoso. Compare el resultado con la probabilidad a priori de 1/3.

1-36 La empresa ensambladora de notebook recibe sus baterías de tres diferentes distribuidores A, B, C: el 25% de las baterías provienen del distribuidor A, el 45% provienen del distribuidor B y el resto del distribuidor C. Si el 82% de las baterías del distribuidor A, el 65% de las baterías del distribuidor B y el 75% de las baterías del distribuidor C, tienen un rendimiento conforme con las especificaciones. Se elige una batería al azar.

i. Calcule la probabilidad:

a) De que tenga un rendimiento conforme con las especificaciones.
b) De que tenga un rendimiento conforme con las especificaciones y que provenga del distribuidor B.
c) De que provenga del distribuidor B, sabiendo que tiene un rendimiento conforme con las especificaciones
d) De que provenga del distribuidor A, sabiendo que su rendimiento no cumple con las especificaciones.
e) De que no provenga del distribuidor B, sabiendo que tiene un rendimiento conforme con las especificaciones.

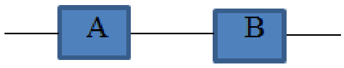
ii. A partir de los probabilidades calculadas puede decir si se cumple la siguiente relación: $P(B/E) + P(\bar{B}/E) = 1$

iii. En caso que se cumpla que puede decir de los sucesos?

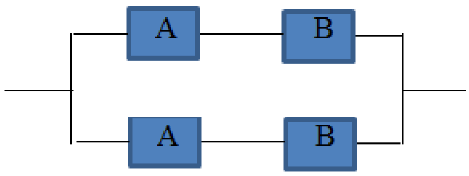
1-37 Se supone que la probabilidad de que cierta pieza de un equipo electrónico aéreo falle después de su primer vuelo es de 0,4; se conoce que la probabilidad de falla de dicha pieza disminuye a la mitad de su valor anterior después de cada vuelo sucesivo. ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza funcione después del tercer vuelo?

1-38 Considere un sistema de emergencia compuesto por dos generadores A y B. Las confiabilidades de que los generadores A y B funcionen adecuadamente bajo condiciones normales son 0,6 y 0,8 respectivamente. Si A y B funcionan independientemente entre sí, determine la confiabilidad de los siguientes sistemas de emergencia:

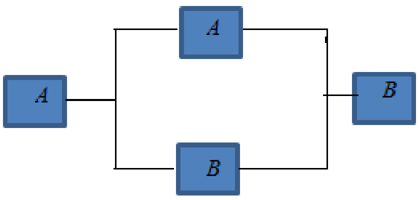
a) Cuando los generadores del sistema están conectados en serie, deben funcionar ambos adecuadamente para que el sistema graficado a continuación funcione correctamente.



b) Los generadores del sistema están conectados en paralelo de manera que, cuando algún enlace A - B funciona adecuadamente, entonces el sistema graficado a continuación también funcione correctamente



c) Cuando los generadores del sistema tiene conexiones en serie y en paralelo como el sistema graficado a continuación



Nota: Se puede definir confiabilidad como la probabilidad de que un producto realice su función prevista sin incidentes bajo condiciones indicadas.

1-39 Una empresa que fabrica componentes electrónicos de dos clases, integrados y discretos en la misma proporción, se sabe que estos pueden presentar fallas en sus distintas etapas de fabricación. La probabilidad de que presente falla los componentes electrónicos integrados es de 0,03 y de que presenten fallas los componentes electrónicos discretos es de 0,06. Se elige un componente electrónico calcule la probabilidad de que

a) No presente fallas
b) Sabiendo que es un componente no presenta fallas, cuál es la probabilidad de que sea un componente electrónico integrado?

1-40 Una familia tiene una casa en la ciudad y una casa de fin de semana en la sierras. Durante el último año la probabilidad de que entren ladrones en la casa de fin de semana se incrementó considerablemente. La probabilidad de que roben en la casa de la ciudad es de 0,01 y de que roben en la casa de fin de semana es de 0,06. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Entren a robar en la casa de la ciudad y en la de fin de semana?
b) Roben sólo en la casa de fin de semana?
c) No roben en ninguna?
d) Roben en la casa de la ciudad o en la de fin de semana pero no en ambas?

1-41 Tres científicos de la NASA investigan independientemente, como descifrar un mensaje recibido en clave. Las probabilidades que tienen de descifrar el mensaje son 1/5; 1/4 y 1/3 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje sea descifrado?

1-42 La probabilidad de que un vuelo programado de una aerolínea de línea salga a tiempo es de 0,83; con una probabilidad de que llegue a tiempo es de 0,92; y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es de 0,78. Encuentre la probabilidad de que:

a) Llegue a tiempo, dado que salió a tiempo.
b) Haya salido a tiempo, dado que llegó a tiempo.

1-43 En una fábrica automotriz hay 3 máquinas para la producción de los ejes de los vehículos. La máquina A produce el 48% de los ejes; la máquina B el 32% y la máquina C el resto. Se ha observado que el 6% de los ejes producidos por la máquina A están fuera de especificaciones, el 5 % de los producidos por la máquina B, y el 8% de los producidos por la máquina C. El departamento de calidad de la fábrica quiere comprobar si se está produciendo con la consigna de mejorar los procesos tratando de disminuir la variabilidad de estos, para lo cual selecciona al azar un eje del lote general de producción.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este fuera de especificaciones?
b) Sabiendo que esta fuera de especificaciones, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina C?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que cumpla con las especificaciones?
d) Observando que cumple con las especificaciones, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina B?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que no provenga de la máquina B si cumple con las especificaciones?

1-44 Una fábrica de televisores LCD recibe placas de video de tres proveedores: A, B y C. El proveedor A abastece el doble que el proveedor B y B a su vez provee 2/3 de lo que provee C. El estándar de las placas de video defectuosos provenientes de A llega al 5%; el de B, al 2% y el de C, al 1%. Se elige al azar una placa de video.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
b) Si la placa de video está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de proveedor C? Utilice un diagrama de árbol para ayudarse a resolver.

1-45 Un vendedor tiene 10 pequeños motores eléctricos, dos de los cuales son defectuosos. Un comprador está interesado en los 10 motores. El vendedor puede guardar los 10 motores en una caja o bien ubicar en dos cajas con cinco motores cada una. Sabe que el comprador seleccionará 2 si viene en una sola caja ó uno de cada caja si los ubica en dos cajas y los inspeccionará. El vendedor puede colocar a) los 10 en una sola caja b) colocar un motor defectuoso en cada caja de 5, c) colocar los dos defectuosos en una caja y ninguno en la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que el comprador no encuentre ningún motor defectuoso en los distintos casos?

1-46 Un matrimonio va al cine con tres hijos. Se sientan al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los padres queden sentados juntos?

1-47 En un aeropuerto se han instalado dos sensores que funcionan independientemente con el propósito de detectar las situaciones de emergencia que surgen ocasionalmente durante una avería. La probabilidad de que accione el sensor 1 durante una avería es 0,95 y de que accione el sensor 2 durante una avería es 0,90. Hallar la probabilidad de que en una emergencia:

a) Se accione sólo un sensor
b) No se accione ninguno
c) Se accionen ambos sensores.

1-48 Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ y los sucesos A y B ε $\mathscr{P}(\Omega)$. La P(A)=0,2, P(AUB)=0,8 y la P(B)=p. Calcular el valor de p si:

a) A y B son sucesos independientes
b) A y B son sucesos mutuamente excluyentes

1-49 La probabilidad de que se produzca un incendio en una empresa química es de 0,1. Para su protección se instala un sistema de alarma contra incendios. Si este se produce la probabilidad de que la alarma funcione correctamente es de 0,95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber peligro es de 0,03. Encuentre la probabilidad de que:

a) La alarma funcione
b) No haya peligro dado que funcionó la alarma,
c) Halla peligro y la alarma no funcione
d) La alarma no funcione

1-50 Las heladas en la Provincia de Mendoza han afectado el 21% de la provincia y el granizo el 12%. Considere que los sucesos las heladas y el granizo que afectaron a la Provincia de Mendoza son estadísticamente independientes. ¿Qué probabilidad tiene el dueño de una pequeña finca de no haber sufrido daño?

1-51 Una máquina de fabricar tornillos produce el 1% de defectuosos, y una máquina de fabricar tuercas, 2% de defectuosos. Se toman 100 tornillos y 100 tuercas y se tratan de enroscar. Indicar la probabilidad de encontrar 3 parejas o menos que no enrosquen. Se supone que las fallas en tuercas y tornillos son independientes.

1-52 Se han realizados numerosos estudios sobre los proyectos de los consumidores para la compra de electrodomésticos. En uno de estos estudios se tomó una muestra aleatoria de 500 personas, y se le preguntó si tenían algún proyecto de compra de un nuevo microondas eléctrico en el próximo año. Un año después se entrevistó a las mismas personas para ver si llevaron a cabo su proyecto de compra de un nuevo microondas. Los datos obtenidos en ambas entrevistas se presenta en la siguiente tabla:

	Compradores	No compradores	totales
Proyectaron comprar	**100**	**25**	**125**
No proyectaron comprar	**50**	**325**	**375**
totales	**150**	**350**	**500**

Se selecciona aleatoriamente a una de estas personas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el último año haya comprado un microondas eléctrico?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya proyectado comprar un microondas eléctrico?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya planeado comprar un microondas y luego lo haya comprado?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya planeado comprar un microondas y luego no lo haya comprado?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya planeado comprar un microondas y no lo haya comprado?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya planeado comprar un microondas o no lo haya comprado?
g) Si proyectó comprar un microondas, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya comprado?
h) Si no proyectó comprar un microondas, ¿cuál es la probabilidad de que lo comprara?
i) ¿Los sucesos proyectar comprar un microondas y comprar el microondas durante el año, son independientes? Justifique.

1-53 En una fábrica hay cinco motores de los cuales tres son defectuosos. Calcule la probabilidad de que al elegir dos motores al azar sin reposición:

a. Ambos estén en buen estado
b. Sólo uno esté en buen estado
c. Al menos uno esté en buen estado

1-54 Tres docentes de la facultad han convenido en acudir a una determinada reunión de cátedra, si las circunstancias se lo permitía. La probabilidad de que cada uno pueda asistir es ¾. ¿Cuál es la probabilidad de que asistan dos docentes y el tercero no pueda asistir?

1-55 Una máquina de fabricar tornillos produce el 1% de defectuosos, y una de fabricar tuercas produce el 2% de defectuosas. Se toma una muestra de 100 tornillos y 100 tuercas y se tratan de enroscar. Se supone que las fallas en tuercas y tornillos son independientes. Indicar la probabilidad de:

a) Encontrar una pareja que no enrosque.
b) Encontrar 3 parejas o menos que no enrosquen.

1-56 Demuestre que si A,B $\epsilon \mathscr{P}(\Omega)$ son dos eventos no mutuamente excluyentes entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1-57 Se calcula que la probabilidad que un futbolista convierta un penal es de 0,89. ¿Cuál es la probabilidad de que no convierta el penal?

Marque la respuesta correcta.

a) -0,89

b) 0,11

c) -0,11

d) 0,21

1-58 Si se lanza una moneda legal tres veces, la probabilidad de obtener tres caras es: (Marque la respuesta correcta)

a) ½

b) 1/3

c) 1/8

d) 1

1-59 Sean A y B dos sucesos aleatorios con P(A) = ½; P (B) = 1/3; y P(A $\cap$ B) = ¼. Cuál es la respuesta correcta a cada caso:

a) P (A/B)
  a1) ¾
  a2) ½

b) P (AUB)
  b1) 13/12
  b2) 7/12

c) $P(\bar{A}/\bar{B})$
  c1) 5/8
  c2) 5/6

1-60 Una empresa ensambladora recibe microcircuitos provenientes de tres distintos proveedores, $F_1, F_2\ y\ F_3$. El 50% del total se compra al proveedor F_1 mientras que a $F_2\ y\ F_3$ se le compra un 25% a cada uno de ellos. El proveedor F_1 fabrica un 5% de microcircuitos defectuosos, el $F_2\ y\ F_3$ fabrican el 10 y 12% de defectuosos respectivamente. Los microcircuitos se almacenan en la planta sin importar quién es el proveedor. Se elige al azar un microcircuito:

a) Determinar la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Que no es defectuoso, cuál es la probabilidad de que proceda del proveedor F_2 .

1-61 En una encuesta preelectoral que se realizó en Estados Unidos resultó que el 70% de los encuestados eran hombres y el 30% restante mujeres. Entre los hombres, el 40% dijo que votaría a los republicanos y entre las mujeres, el 45% se inclinaría por los republicanos”.

Siendo los sucesos:

H: Los encuestados son hombres.
M: Los encuestados son mujeres.
R: Los encuestados votarían a los republicanos.

Marque la respuesta correcta en cada uno de los ítems siguientes y/o complete en aquellos que sea necesario. Tenga en cuenta que cada ítem tiene una sola respuesta correcta:

a) Es correcto concluir que:
  i. P(H) = 0,70
  ii. P(M) = 0,30
  iii. P(R) = 0,415
  iv. Todas las anteriores.
  v. Ninguno de los anteriores, los valores son:……………………………………..
  ……………………………………………………………………….

b) Es correcto concluir que:
  i. El 40% de los encuestados votaría a los republicanos.
  ii. El 40% de los encuestados eran hombres.
  iii. Dado que la persona seleccionada al azar era hombre, la probabilidad de que vote a los republicanos es igual a 0,40.
  iv. P(H/R) = 0,40
  v. Todas las anteriores

c) Es correcto concluir que:
  i. P(R/M) = 0,45
  ii. P(M∩R) = 0,45
  iii. Dado que la persona seleccionada votó a los republicanos, la probabilidad de que sea mujer es de 0,45.
  iv. P(RUM) = 0,45
  v. P$P(\bar{R}) = 0{,}865$

d) Complete estas probabilidades para los eventos definidos:
  i. P(R/H) =
  ii. P(R/M) =
  iii. $P(\bar{R}) =$
  iv. $P\ (\bar{R}/M) =$
  v. $P\ (\bar{R}/H) =$

e) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar que dijo que votaría al partido republicano sea mujer?

e-1) El planteo correcto de la solución es:

i. P(RUM)
ii. P(R/M)
iii. P(R∩M)
iv. P(M)
v. P(M/R)
vi. P(H)

e-2) Marque con una X la opción correcta:

i. 0,135
ii. 0,6747
iii. 0,3253
iv. Menor de 0,45
v. Ninguna de las anteriores su probabilidad es ……………………………………

e-3) Para encontrar los resultados supuso que:

i. H y R son eventos independientes.
ii. H y H´ son eventos compatibles.
iii. H y R son eventos complementarios.
iv. Ninguna de las anteriores.

e-4) Interprete el resultado numérico obtenido, haciéndolo en el contexto del problema para responder a la consigna:

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………….

1-12 RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS IMPARES DEL CAPITULO 1

1-1.

a) Determinístico
b) Aleatorio
c) Determinístico
d) Aleatorio
e) Aleatorio
f) Determinístico

1-3 Correcto a)

1-5.

a) La probabilidad del experimento seguro, P(Ω) no da 1
b) La suma de la probabilidad del suceso: L: " Llueve mañana" y el de su complemento $\bar{L}$: "No llueve mañana", no da 1.
c) La probabilidad de que un editor cometa 2 errores es negativa.

d) La probabilidad de elegir un corazón y una carta negra es cero. Sucesos mutuamente excluyentes. $P(corazón \cap negra) = P(\emptyset) = 0$

1-7.

Eventos:

I: "Persona con estudio de Ingeniería"
C: "Persona casada"
V: " Varón"

a) $P(V \cap I \cap C) = \frac{3}{50} = 0,06$
b) $P(V \cap I)$=$P(V).P(I/V) = \frac{8}{50} = 0,16$
c) $P(M \cap I) = P(M).P(I/M) = \frac{5}{20} = 0,25$
d) $P(\bar{C}) = \frac{22}{50} = 0,44$
e) $P(V \cap I/\bar{C}) = P(V/\bar{C}).P(I/V \cap \bar{C}) = \frac{5}{28} = 0,1786$
f) $P(C/V) = \frac{13}{30} = 0,4333$
g) $P(M/I \cap C) = \frac{4}{7} = 0,5714$

1-9

Eventos:

A: "Funcione correctamente el generador A"
B: "Funcione correctamente el generador B"

a) $P(A \cup B) = 0,97$
b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,03$
c) $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 0,04$
d) $P(A \cap \bar{B}) = 0,01$
e) $P(B \cap \bar{A}) = 0,03$
f) $P(B/\bar{A}\,) = 0,5$
g) $P(A/B) = 0,969$
h) $P(\bar{A}/\bar{B}) = 0,75$
i) Se cumple la ecuación por lo tanto los sucesos $A\ y\ \bar{A}$, son complementarios en B
j) No son mutuamente excluyente
k) No son independientes

1-11

Eventos:

A: "El automóvil tiene defecto de ensamblaje"
B: "El automóvil tiene defecto de acabado exterior"
C: "El automóvil tiene defecto en su tapizado interior"
D: "El automóvil no tiene defectos"

a. P$(\bar{D}) = 0,375$

b. P$(B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) = 0{,}1875$
c. P $P(A \cup B) = 0{,}4375$
d. $P(\bar{A}) = 0{,}8438$
e. $P(A \cup B \cup C) = 0{,}625$
f. $P(B \cap C) = 0{,}125$

1-12

Si $A\ y\ B\ son\ independientes\ \Rightarrow \bar{A}\ y$ B son independientes (Lo que queremos demostrar)

Si $A\ y\ B\ son\ independientes\ \Rightarrow\ P(A).P(B)$ (Es lo que se sabe que se cumple)

Demostración:

$\bar{A} \cap B = B - (A \cap B)$

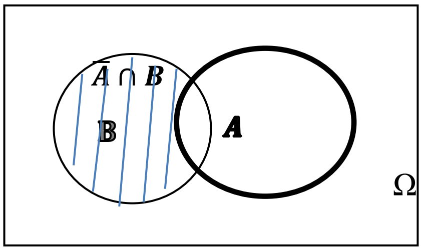
$P(\bar{A} \cap B) = P(B - (A \cap B))$ (Nota: $A \cap B \subset B$)

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B).P(A)\ dado\ que\ A\ y\ B\ son\ independientes$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B)[1 - P(A)]$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B).P(\bar{A})$ luego $\bar{A}\ y\ B\ son\ independientes$



1-13

Si A y B son independientes $\Rightarrow P(B/A)\ = P(B/\bar{A}\,)$

Demostración

Si A y B son independientes se cumple:

$$P(B/A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A)}{P(A)} = P(B) \qquad (1)$$

Si A y B son independientes entonces $\bar{A}\ \ y\ B$ son independientes demostrado en el punto 1-12

$$P(B/\bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B).P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B) \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$P(B/A) = P(B/\bar{A})$ que es lo que queríamos demostrar.

1-15

Eventos:

F: “Opinión del elector favorable”

C: “Opinión del elector contraria”

$$\Omega = \{(F,F,F,F),(F,F,F,C),(F,F,C,F),(F,F,C,C),(F,C,F,F),(F,C,F,C),(F,C,C,F),(F,C,C,C),(C,F,F,F),(C,F,F,C),(C,F,C,F),(C,F,C,C),(C,C,F,F),(C,C,F,C),(C,C,C,F),(C,C,C,C)\}$$

1-17

ε: **"Lanzar un dado legal y observar el número obtenido en la cara superior"**

Gana G: “El resultado es par o divisible por 3”

$$\Omega = \{2,3,4,6\}$$

$$G = \{2,3,4,6\}$$

P(G)=$\frac{4}{6} = 0,67$

1-19

Sea $P(A) > 0 \;\; y \; P(B) > 0 \quad y \; A \cap B = \phi$ probar que A y B no son independientes

$$P(A/B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\phi)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

$$P(A/B) = 0 \; entonces \; los \; sucesos \; A \; y \; B \; no \; son \; independientes$$

Aclaración: Para que sean independientes $P(A/B) = P(A)$

1-21

a) 0,000047
b) 0,0000050

1-23

a) 0,79

b) O,21

1-25

a) 0,96
b) 0,98
c)
d) 0,93
e) 0,02
f) 0,6
g) 0,031
h) Los eventos no son independientes

P(NRM)= 0,96

P (NRM/$\overline{\text{TV}}$M)= 0,979

1-27

Demostración

- Si {A_n} es una sucesión decreciente de elementos de $\mathscr{P}$ (S), entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Sea $A_1 \supset A_2 \supset \ldots\ldots \supset A_n \supset \ldots\ldots$ (sucesión decreciente de sucesos), entonces sus complementos forman una sucesión creciente de sucesos:

$\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2 \subset \ldots\ldots \subset \overline{A}_n \subset \ldots\ldots$ Luego, por la propiedad anterior, es:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n)$$

Pero $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}\right)$ por una de las leyes de De Morgan, y, por pp3, para cualquier suceso A

es, $P(\overline{A})$ = 1 - P(A), luego,

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) = P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n})$= 1 - $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n)$= 1 - $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$

De donde, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

1-29

a) 0,1
b) 0,2
c) 0,4

1-31

a) 0,083
b) 0,497
c) 0,503
d) 0,167

1-33

a) 0,376
b) 0,255

1-35

a) 0,033
b) 0,0099
c) 0,33

1-37

P(Funcione)= 0,9

1-39

a) 0,998
b) 0,485

1-41.

D_1: Mensaje descifrado por científico 1.
D_2: Mensaje descifrado por científico 2.
D_3: Mensaje descifrado por científico 2.
$P(D_1 U D_2 U D_3) = 0,6$

1-43.

A: Máquina A que produce ejes de los vehículos.
B: Máquina B que produce ejes de los vehículos.
C: Máquina C que produce ejes de los vehículos.
F: Ejes producidos fuera de especificaciones.

a) P(F) = 0,0608
b) P(C/F) = 0,2332
c) P($\bar{F}$) = 0,9392
d) P(B/$\bar{F}$) = 0,3237
e) P($\bar{B}/\bar{F}$) = 0,6763

1-45.

D_1: Motor eléctrico defectuoso 1.
D_2: Motor eléctrico defectuoso 2.

a) P($\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$) = 0,6222
b) P($\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$) = 0,64
c) P($\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$) = 0,60

1-47.

S_1: Sensor 1 activado durante una avería.
S_2: Sensor 2 activado durante una avería.

a) $P((S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2))$= 0,14
b) P($\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$) = 0,005
c) P($S_1 \cap S_2$) = 0,855

1-49.

I: Produzca un incendio.
C: Alama funcione correctamente.

a) P(C) = 0,122
b) P($\bar{I}$/C) = 0,2213
c) P(I$\cap\bar{C}$) = 0,005
d) P($\bar{C}$) = 0,878

1-53.

D: Motor defectuoso

a) P($\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$) = 0,10
b) P($\bar{D}_1 \cap D_2$) + P($D_1 \cap \bar{D}_2$) = 0,60
c) P($\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$) = 0,70

1-57.

Opción b)

1-59.

a) Opción a1)

b) Opción b2)
c) Opción c1)

1-61.

a) V. Ninguno de los anteriores, los valores son: P(H) = 0,70; P(M) = 0,30; P(R/H) = 0,40; P(R/M) = 0,45
b) iii.
c) i.
d) i. P(R/H) = 0,40
ii. P(R/M) = 0,45
iii. $P(\bar{R}) = 0{,}585$
iv. $P\,(\bar{R}/M) = 0{,}55$
v. $P\,(\bar{R}/H) = 0{,}60$
e) e-1) v.
e-2) iii.
e-3) iv.

ANEXO I: TEORÍA DE CONJUNTOS

De todas las herramientas que utiliza la Probabilidad, la teoría de conjuntos es la más importante, por lo que es conveniente enfatizar sobre esta disciplina y realizar un repaso de los conceptos imprescindibles de conocer, para poder interpretar los problemas de probabilidad. Además se relacionará íntimamente con la Lógica proposicional. Comenzaremos con algunas definiciones indispensables de recordar.

CONJUNTO

Los términos conjunto, pertenencia y elemento son considerados primitivos, por lo que no se definen.

Diremos que un conjunto es una colección de objetos. Los objetos se denominan elementos del conjunto.

Los conjuntos lo anotamos simbólicamente con letras mayúsculas y los elementos con letras minúsculas.

La relación que vincula a un elemento y a un conjunto que lo contiene es la pertenencia, por ejemplo: sea b un elemento del conjunto A, diremos entonces: $b \in A$, se lee b pertenece al conjunto A.

En el caso que b no sea un elemento del conjunto A diremos entonces $b \notin A$, se lee b no pertenece al conjunto A.

Un conjunto puede describirse por comprensión o por extensión. Un conjunto se define por comprensión cuando se da una propiedad que caracterice a todos los elementos del conjunto. Se define por extensión cuando se enumera todos sus elementos.

Un conjunto está bien determinado o descripto, si se conoce con exactitud si un elemento pertenece o no a dicho conjunto.

Un conjunto puede determinarse por extensión o comprensión. Un conjunto esta determinado por comprensión cuando se da una propiedad que debe cumplir todos los elementos que pertenecen al conjunto.

Un conjunto está determinado por extensión cuando se nombra cada uno de los elementos.

Ejemplo de un conjunto definido por comprensión:

A = { x/x es un pieza de una computadora}

x_1 =motherboard es un elemento de A.

luego $x_1 \in A$

x_2 = carillón no es un elemento de A

luego $x_2 \notin$ A.

Ejemplo de un conjunto definido por extensión:

El conjunto B formado por los 6 primeros enteros positivos impares, puede describirse por extensión como:

B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

Podemos decir por ejemplo que $1 \in B$ ó $8 \notin B$

CONJUNTO REFERENCIAL O CONJUNTO UNIVERSAL

Hemos visto que en muchos problemas el investigador puede estar interesado en estudiar alguna característica de una población, por ejemplo el tiempo de duración de unas determinadas baterías. El conjunto que consiste en el tiempo de duración de todas las baterías es nuestra población. A este conjunto se le denomina conjunto de referencia en teoría de conjunto y en probabilidad se denomina espacio muestral, y se representa con la letra Ω.

Conjunto referencial o conjunto universal es aquel que está formado por todos los elementos del tema de referencia. Simbólicamente lo representaremos con la letra Ω ó S.

Con el propósito de visualizar mejor un conjunto, se suele representar mediante los denominados diagramas de Venn, o diagramas de Euler.

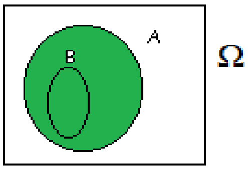
Al conjunto referencial se lo representa mediante un rectángulo.

SUBCONJUNTO

Se dice que un conjunto B es un subconjunto de otro A cuando el conjunto B esta "contenido" en A.

Se dice que un conjunto B está incluido en otro A o que B es un subconjunto de A, si y sólo si todo elemento de B es también un elemento de A,

Simbólicamente: $B \subset A \Leftrightarrow (\, para\ todo\ x \varepsilon B \Rightarrow x \varepsilon A)$



En un conjunto de n elementos hay 2^nsubconjuntos, así un conjunto de 3 elementos tiene $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos. Entre los ocho subconjuntos se encuentra siempre como subconjunto el conjunto vacío y el mismo.

Un conjunto estará incluido en si mismo?

$A \subset A$ si porque cumple que todo elemento de A es elemento de A

El conjunto vació es un subconjunto de todos los conjuntos porque cumple con la definición.

$$\emptyset \subset A$$

CONJUNTO VACÍO

Se denomina conjunto vacío al conjunto que no tiene elementos.

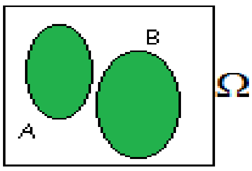
Simbólicamente: $\emptyset$; $por\ extensión$: $\emptyset = \{\,\}$; $por\ comprensión$: $\emptyset = \{x/x \neq x\}$

CONJUNTOS DISJUNTOS:

Dos conjuntos son disjuntos o mutuamente excluyentes si y solo si, su intersección es vacía.

Simbólicamente: $A\ es\ disjunto\ con\ B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Gráficamente:

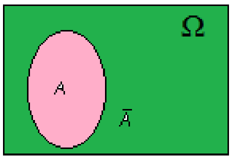


PROPOSICIÓN

Una proposición es un enunciado con un determinado valor de verdad, verdadero o falso. Simbólicamente a cada proposición se la denota con una letra minúscula.
Ejemplos:
p: El artículo es defectuoso
q: La alarma funciona correctamente.

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Se llama complemento de un conjunto A con respecto al conjunto universal o referencial, Ω, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al Universal ó Referencial y no pertenecen a *A.*
Se expresa por $\overline{A}$ otra anotación es A^C ó A'
Simbólicamente: $\bar{A} = A' = \{x \, / \, x \varepsilon \, \Omega \wedge \notin \mathrm{A}\}$
Gráficamente:



En otras palabras diremos que dos conjuntos A y $\overline{A}$, son complementarios si cumple con las siguientes dos propiedades:

1- su unión da el conjunto de referencia o espacio muestral.
   En símbolos: $A \cup \bar{A} = \Omega$
2- su intersección da el conjunto vacío, es decir son mutuamente excluyen.
   En símbolos: $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Propiedades del complemento de un conjunto:

- El complemento del complemento de un conjunto es el mismo conjunto.
  En símbolos: $\overline{\overline{A}} = A$
- El complemento del conjunto vacío, es el mismo conjunto de referencia o conjunto universal Ω. En símbolos: $\overline{\varnothing} = \Omega$
- El complemento del complemento del conjunto de referencia es el conjunto vacío.
  En símbolos: $\overline{\Omega} = \varnothing$

CONJUNTOS IGUALES O EQUIVALENTES

Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos. El orden de los elementos o la repetición de uno o más de ellos no influye.
Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$

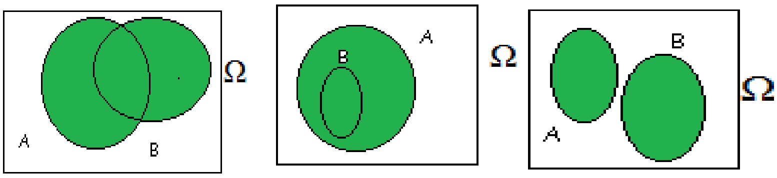
OPERACIONES CON CONJUNTOS

A continuación veremos algunas operaciones entre conjuntos, como unión, intersección y diferencia entre conjuntos. Se analizará su relación con la lógica proposicional.

UNIÓN ENTRE CONJUNTOS

Sea Ω, el conjunto referencial o universal, $A \subset \Omega$ y $B \subset \Omega$, llamaremos unión de A con B al conjunto formado por todos los elementos de A ó de B ó de ambos.
Simbólicamente: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente:



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cup B = A$ $\qquad$ $A \cup B$

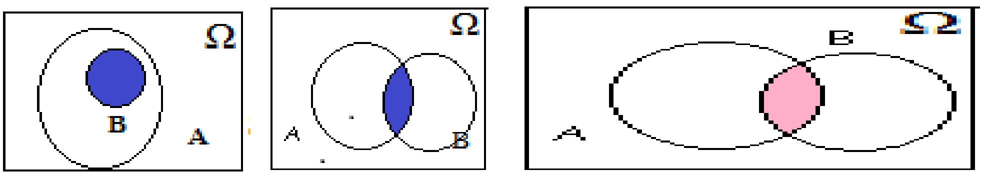
Nota: En los gráficos anteriores $A \cup B$ está representada por la zona sombreada.

Se puede relacionar la lógica matemática con la teoría de conjuntos y de esta forma relacionar el lenguaje coloquial con el lenguaje simbólico de la teoría de conjuntos utilizada en probabilidad.

Sea p y q dos proposiciones, la disyunción de proposiciones "$p \vee q$" que se lee "p o q", se corresponde a la unión entre conjuntos. El significado del "o" en este caso es que se puede cumplir p, se puede cumplir q o también ambas a la vez. El "o", en este caso está usado en sentido incluyente.

INTERSECCIÓN ENTRE CONJUNTOS

Sea Ω, el conjunto referencial o universal, $A \subset \Omega$ y $B \subset \Omega$, llamaremos intersección entre A y B al conjunto formado por los elementos comunes a ambos.
Simbólicamente: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
Gráficamente:



$A \cap B = B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \varnothing$

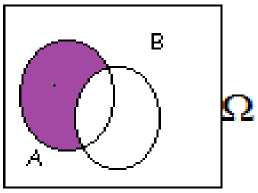
Nota: En los gráficos anteriores $A \cap B$ está representada por la zona sombreada.

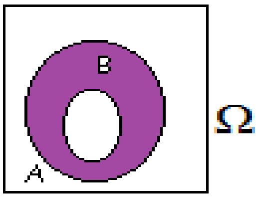
Sea p y q dos proposiciones, la conjunción de proposiciones "$p \wedge q$" que se lee "p y q", se corresponde a la operación intersección entre conjuntos. El significado del "y" en este caso es la exigencia del cumplimiento de ambas proposiciones para que la conjunción sea verdadera. Es decir se debe cumplir p, y se debe cumplir q, ambas simultáneamente.

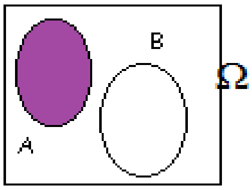
DIFERENCIA ENTRE CONJUNTOS

Sea Ω, el conjunto referencial o universal, $A \subset \Omega \ y \ B \subset \Omega$, llamaremos diferencia A menos B al conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B.
Simbólicamente: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Gráficamente:







$A - B$ $\qquad$ $A - B$ $\qquad$ $A - B = A$

Nota: En los gráficos anteriores $A - B$ esta representada por la parte sombreada.
Relación que guarda la diferencia de conjuntos con las operaciones lógica:
Sea p y q dos proposiciones, "$p \wedge \sim q$" que se lee "p y no q", corresponde a la operación diferencia entre conjuntos.
Propiedad: La diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección del primero con el complemento del segundo.
En símbolos: $A - B = A \cap \overline{B}$

La diferencia entre conjuntos cumple las siguientes propiedades:

1. No cumple con la propiedad conmutativa
$$\boldsymbol{A - B \neq B - A}$$
2. No cumple con la propiedad asociativa
$$(\boldsymbol{A - B}) - \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{B - C})$$
3. $\boldsymbol{A - A = \emptyset}$
4. $\boldsymbol{A - U = \emptyset}$
5. $\boldsymbol{U - \emptyset = U}$
6. $\boldsymbol{A - B = A \cap B'}$
7. $\boldsymbol{\emptyset - A = \emptyset}$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES UNIÓN E INTERSECCIÓN ENTRE CONJUNTOS

IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
ASOCIATIVIDAD	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

CONMUTATIVIDAD $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

DISTRIBUTIVIDAD $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ELEMENTO NEUTRO $A \cup \varnothing = A$

$A \cap \Omega = A$

ELEMENTO ABSORVENTE $A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

COMPLEMENTO $A \cup \overline{A} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

LEYES DE MORGAN

Estas leyes de gran aplicación en probabilidad permite relacionar la complementación con la operaciones de conjuntos unión e intersección.

1era Ley: El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos**.**

En símbolos: $\overline{(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

2da Ley: El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

En símbolos: $\overline{(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$

CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO DADO

Sea un conjunto A, consideremos el cuyos elementos son todos los s**ubconjuntos** del conjunto A se denomina **conjunto de partes** de A.
A partir de la definición de conjunto de partes, se entiende que todos los conjuntos que están incluidos en A son ahora elementos del conjunto partes, $\mathscr{P}$(A).

Ejemplo: Si lanzamos una moneda y llamamos c al resultado cara y s al resultado sello, podemos escribir esos resultados en un conjunto llamado espacio muestral Ω:
Ω = { c, s}

$\mathscr{P}$(Ω) = {{c}, {s}, {c, s}, ∅}

Si A es finito y tiene n elementos, $\mathscr{P}$*(A)* tiene 2^n elementos.

PARTICIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL

Sean los eventos $B_1, B_{2\,,} \ldots, B_K$, pertenecientes a Ω, determinan una partición del espacio muestral si se cumplen con las dos condiciones siguientes:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \;\; para\ todo\ i \neq j$$