UNIDAD 7
PRUEBAS DE HIPÓTESIS

HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

HIPÓTESIS NULA Y ALTERNATIVA

ERRORES TIPO 1 Y TIPO 2

POTENCIA DE UNA PRUEBA

VALOR P

PRUEBAS REFERIDAS A UNA POBLACIÓN

PRUEBAS REFERIDAS A DOS POBLACIONES

Empecemos con un ejemplo:

Una compañía petrolera controla su producción de gasolina.

Una característica importante de la calidad de la gasolina es el índice de octano en carretera, ya que si éste es demasiado bajo para la compresión del motor habrá golpeteo excesivo.

Para poder comercializar el combustible sin problemas, deben poder garantizar que el índice octánico medio es al menos 98,7.

Asimismo, saben que el índice octánico es una v.a. normal con varianza 1,26.

La compañía desea probar a un comprador potencial que, efectivamente, su producto cumple la condición sobre el índice octánico medio.

Con el objetivo de probar su afirmación, se hace observaciones del índice octánico en carretera:

Índice octánico:	97,5	98,0	99,0	99,5	100,5	99,0	97,0	97,5	99,0

Ejemplo:

- X: índice octánico de la gasolina de esta compañía.
- $X \sim N(\mu=?;\ \sigma^2=1{,}26)$

Índice octánico:	97,5	98,0	99,0	99,5	100,5	99,0	97,0	97,5	99,0

La media de la muestra observada: $\bar{x} =$ 98,56

Es un VALOR OBSERVADO del estadístico media muestral

Y lo anotaremos así:

$$\bar{x}_o = 98{,}56.$$

Definiciones de algunos conceptos

Definición 1: **Hipótesis estadística.**

Definición 2**: Test o prueba de una hipótesis estadística.**

a) Hipótesis nula e hipótesis alternativa.

b) Zona de rechazo y zona de aceptación.

Definición 3: **Tipos de error y tamaño de los errores.**

En nuestro ejemplo:

La compañía plantea la siguiente prueba de hipótesis acerca del índice octánico medio real:

H_0 $\mu \geq 98{,}7$

H_1: $\mu < 98{,}7$

¿Es verdadera la hipótesis nula?

Tipos de errores

		Situación en la población	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Decisión	Aceptar H_0	**Decisión correcta**	**Decisión errónea Error Tipo II**
	Rechazar H_0	**Decisión errónea Error Tipo I**	**Decisión correcta**

Tipos de errores

		Situación en la población	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Decisión	Aceptar H_0	**Se concluye $\mu \geq 98{,}7$ y es $\mu \geq 98{,}7$**	**Se concluye $\mu \geq 98{,}7$ pero es $\mu < 98{,}7$**
	Rechazar H_0	**Se concluye $\mu < 98{,}7$ pero es $\mu \geq 98{,}7$**	**Se concluye $\mu < 98{,}7$ y es $\mu < 98{,}7$**

Tipos de errores

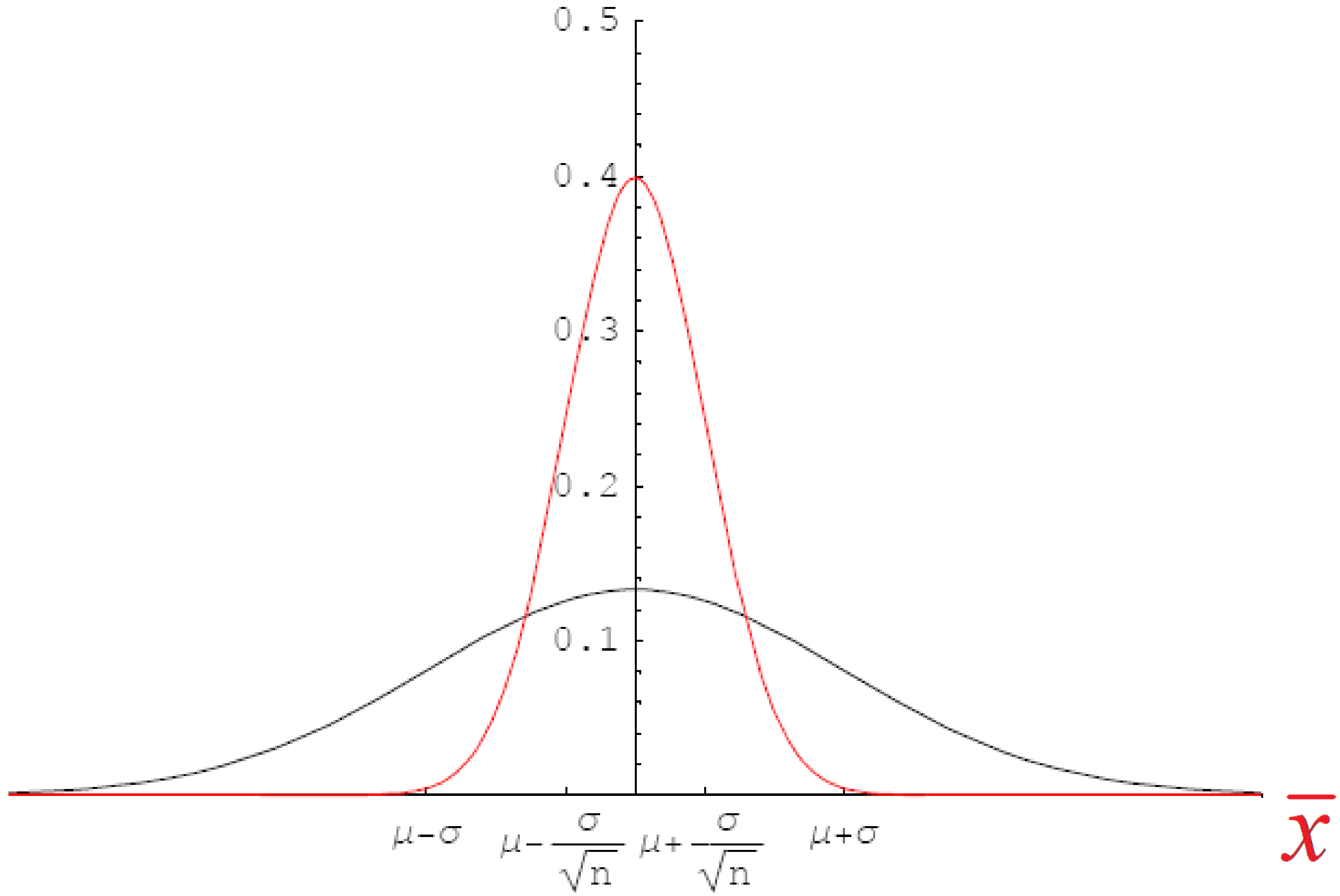
		Situación en la población	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Decisión	Aceptar H_0	**Decisión correcta**	**Decisión errónea Error Tipo II**
	Rechazar H_0	**Decisión errónea Error Tipo I**	**Decisión correcta**

PROBABILIDADES de los tipos de errores

		Situación en la población	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Decisión	Aceptar H_0	**$1-\alpha$**	**β** **P(Error Tipo II)**
	Rechazar H_0	**α: Nivel de significancia P(Error Tipo I)**	**$1-\beta$** **Potencia de la prueba**
		Suma=1	**Suma=1**

Si H_0 es verdadera, μ = 98,7 y...

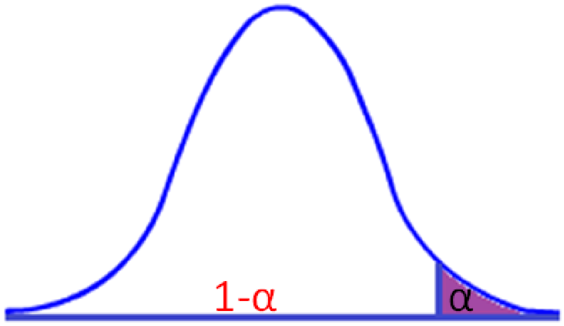
$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

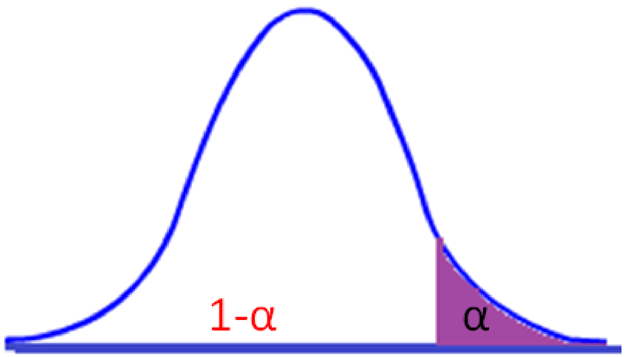


Tamaño de error

Tamaño del error tipo I =

=P(rechazar H_0/ H_0 verdadera) = α





A mayor tamaño de alfa mayor error tipo I

El complemento de α, es el nivel de confianza

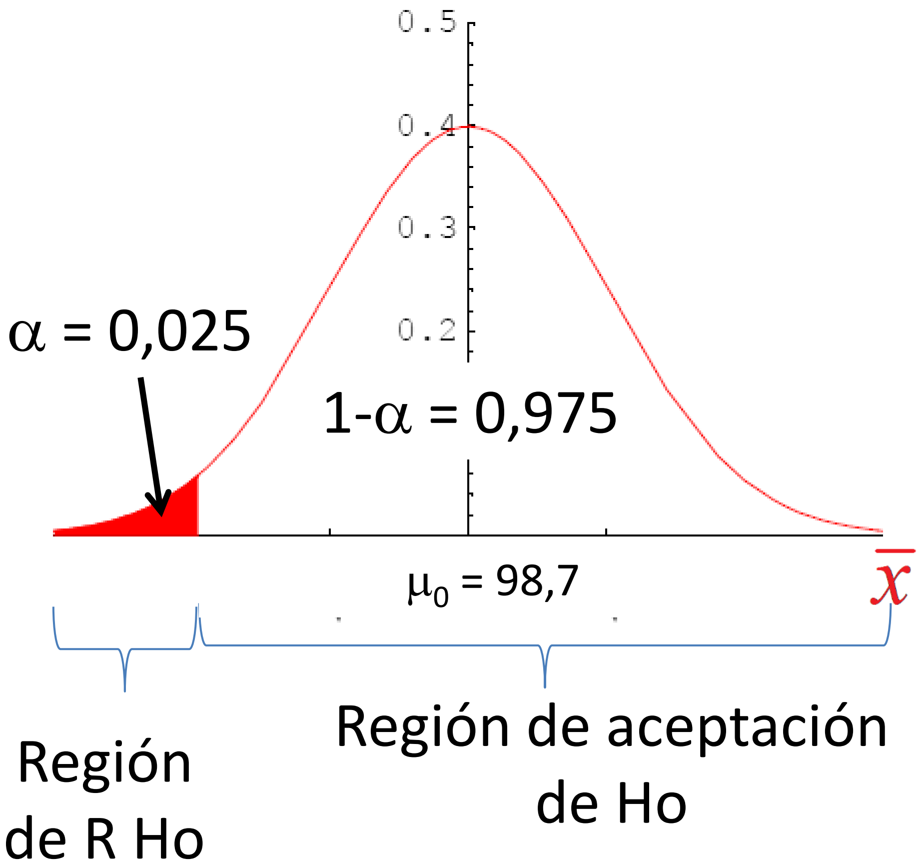
Si H_0 es verdadera, μ = 98,7…

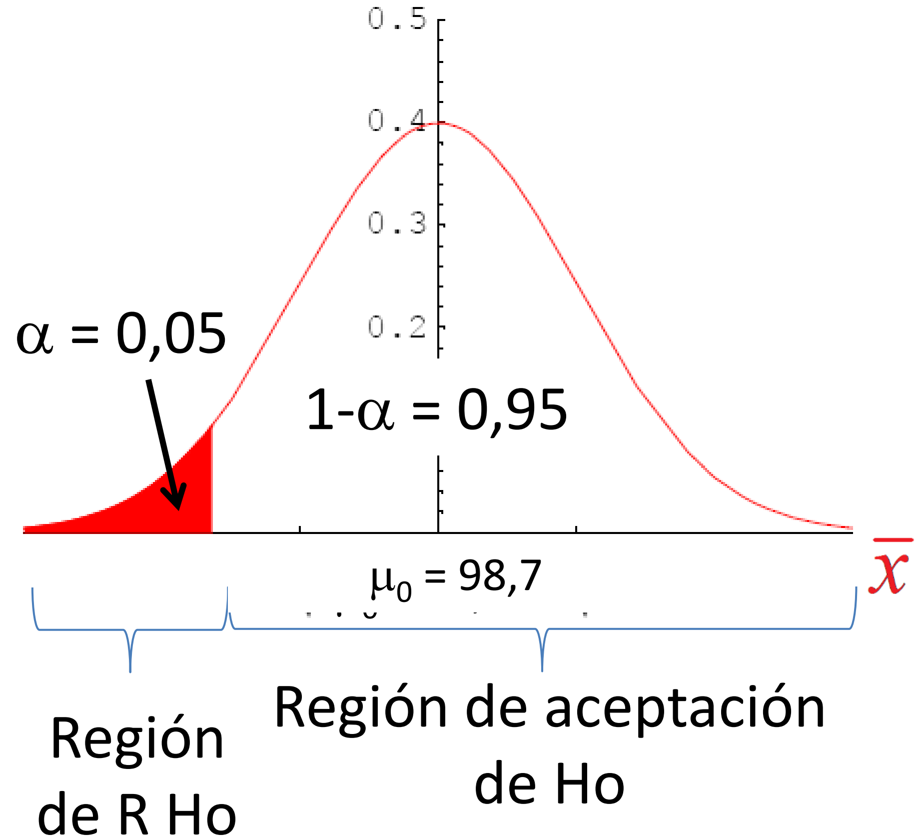
α = Tamaño del error tipo I

= P(rechazar H_0/ H_0 es verdadera)

¿Qué pasa si α crece?

¿Qué pasa si α decrece?





En nuestro ejemplo:

- La compañía plantea la siguiente prueba de hipótesis acerca del índice octánico medio real:

$$H_0: \mu=98{,}7.$$

$$H_1: \mu<98{,}7.$$

Hay 3 maneras de comprobar una prueba de hipótesis:

II. Métodos para probar hipótesis estadísticas

- **A**. Método estándar.
- **B**. Otro método es el de los intervalos de confianza.
- **C**. A través del nivel de significación alcanzado o valor *P*.

Pasos para probar una prueba de hipótesis utilizando el método estándar

1º)Plantear las hipótesis nula y alternativa

2º)Determinar el estadístico apropiado para la prueba y el test correspondiente.

3º)Fijar el tamaño del error de tipo I y determinar la región crítica

4º)Tomar la muestra y **c**alcular el valor observado del estadístico de la prueba.

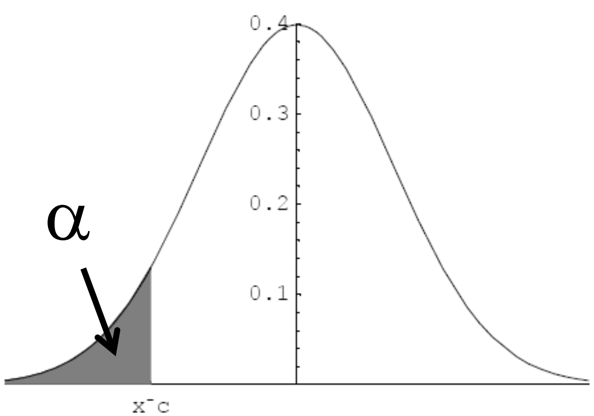
5º)Tomar la decisión estadística e interpretar.

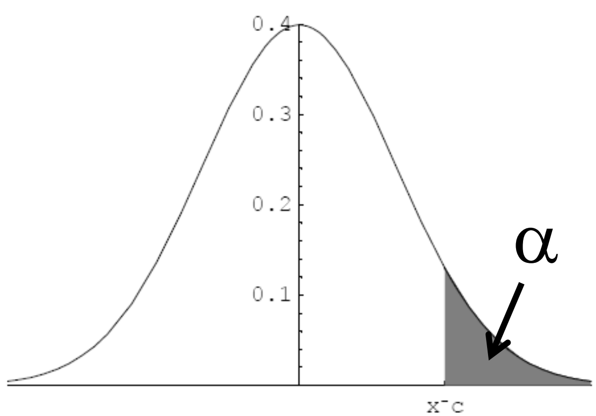
Tipos de pruebas de hipótesis:

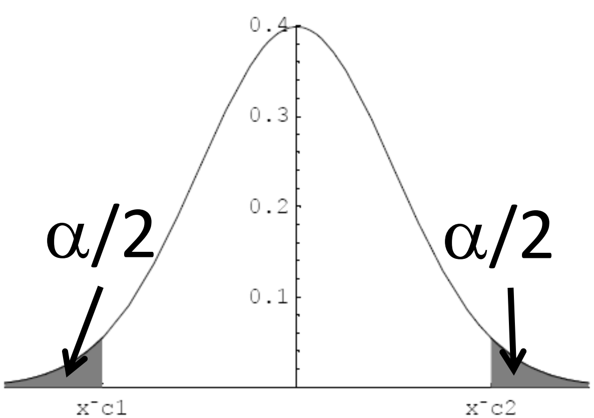
- Supongamos que hacemos una prueba de hipótesis con respecto a la media de una población.
- Se pueden plantear distintos tipos de hipótesis alternas:

H_0: $\mu = \mu_0$.	H_0: $\mu = \mu_0$.	H_0: $\mu = \mu_0$.
H_1: $\mu < \mu_0$.	H_1: $\mu > \mu_0$.	H_1: $\mu \neq \mu_0$.

- Si se elige un nivel de significancia α, se plantean:







- Se trata de pruebas de hipótesis a una cola o a dos colas.

Método estándar:

- 1º)Plantear las hipótesis nula y alternativa
- X: índice octánico de la gasolina de esta compañía.
- $X \sim N(\mu=?;\ \sigma^2=1{,}26)$
- La compañía plantea la siguiente prueba de hipótesis acerca del índice octánico medio real:
- H_0: $\mu=98{,}7$ vs. H_1: $\mu<98{,}7$
- Información de la muestra y datos del problema

n=9;

$$\bar{x}_o = 98{,}56$$

Nivel de significancia: $\alpha=0{,}05$.

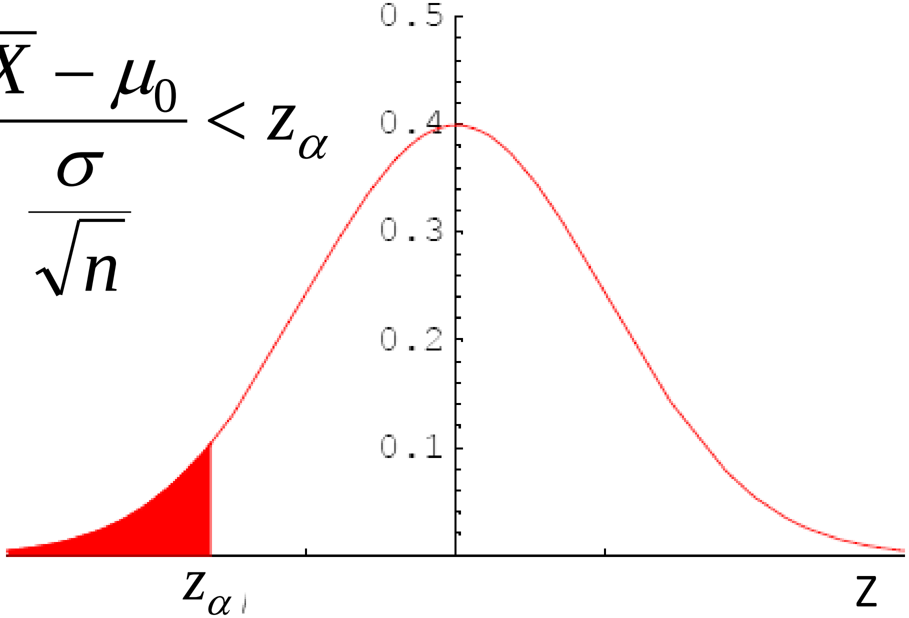
$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Método estándar

- 2º)Determinar el estadístico apropiado para la prueba y el test correspondiente.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

- τ: Rechazar $H_0 \Leftrightarrow Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha$

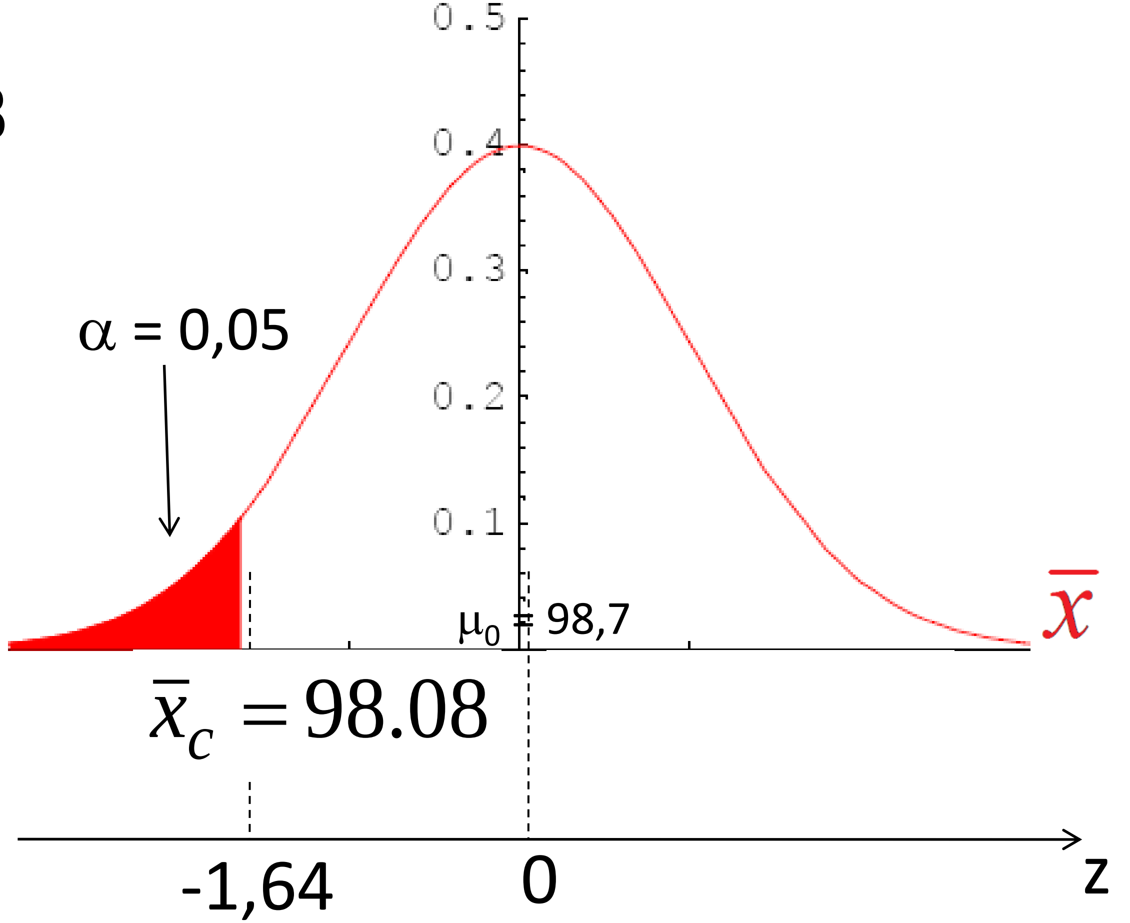


Si H_0 es verdadera...

- 3º)Fijar el tamaño del error de tipo I y determinar la región crítica

α=0,05 ⇒ $\bar{x}_c = 98.08$

α=0,05 ⇒ z_c=-1,64

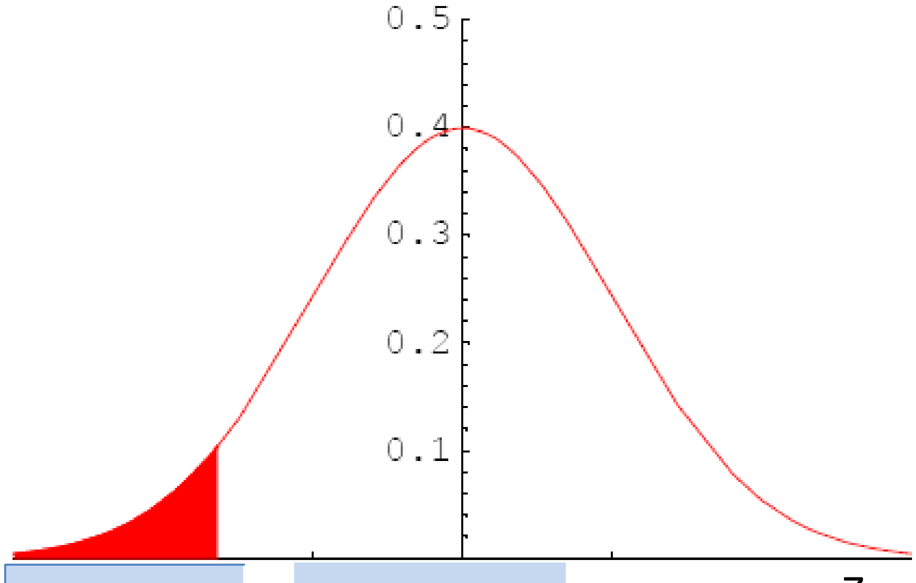


A. Método estándar

- 4º)Tomar la muestra y calcular el valor observado del estadístico de la prueba.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$z_o = \frac{98{,}56 - 98{,}7}{\sqrt{\frac{1{,}26}{9}}} = -0{,}37$$



$z_\alpha = -1{,}64$ $z_o = -0{,}37$

Método estándar

- 5º)Tomar la decisión estadística e interpretar.

$$z_\alpha = -1{,}64$$

$$z_o = -0{,}33$$

- $\boxed{z_\alpha < z_o} \Rightarrow$ No Rechazo H_0

- Concluimos que no hay evidencia para suponer que $\mu<98{,}7$.

En el gráfico:

Región de rechazo← →Región de aceptación

- Como α=0,05,
- z_c=-1,64

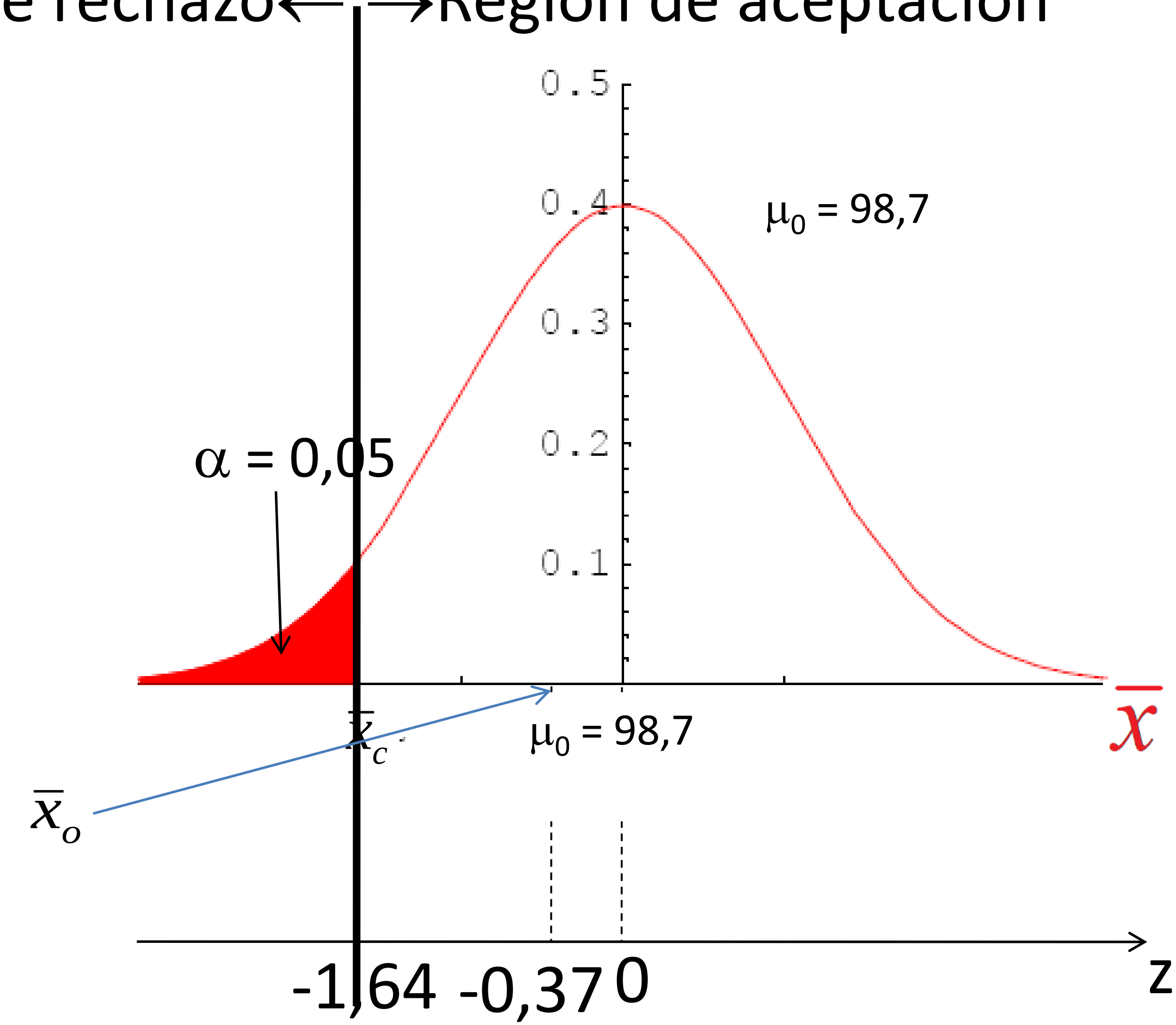
$$\bar{x}_c = 98,09$$

$$\bar{x}_o = 98,56;$$

- O también:

$$z_o = \frac{\bar{x}_o - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- z_o=-0,3742



Conclusión

$$comparando \quad z_o > z_c$$

En nuestro ejemplo, se acepta H_0

Podemo decir que no existe una *diferencia significativa* entre el índice octánico medio de la gasolina encontrada en la muestra y el índice octánico medio hipotético.
Por lo tanto no hay evidencia para creer que el índice medio es inferior A un nivel de significación de 0,05.

B. 2ºMétodo: intervalos de confianza.

- H_0: $\theta = \theta_0$ vs H_1: $\theta \neq \theta_0$
- Si la hipótesis nula es verdadera el valor estimado de θ deberá estar cerca de θ_0. Luego, construimos un intervalo de confianza para θ. Si θ_0 cae adentro de dicho intervalo aceptamos H0, sino la rechazamos.
- Entonces, si (l1(X1; ..Xn); l2(X1; ..;Xn)) es un
- intervalo de confianza bilateral para con un nivel de confianza γ ,el test apropiado es:
- Rechazar H0 $\Leftrightarrow$ $\theta_0 \notin$((l1(x1; ..; xn); l2(x1; ...; xn))

C. 3º Método: Valor p

- En los problemas considerados hasta aquí tomamos un α y luego decidimos rechazo o no rechazo, sin tomar en cuenta el peso de las evidencias.
  - ¿Cómo podemos medir el peso de la evidencia que nos proporciona la muestra para rechazar una hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa?
- El peso de la evidencia para rechazar la hipótesis nula se llama **p-level** o p- valor o nivel de significación alcanzado por la prueba.

Valor p

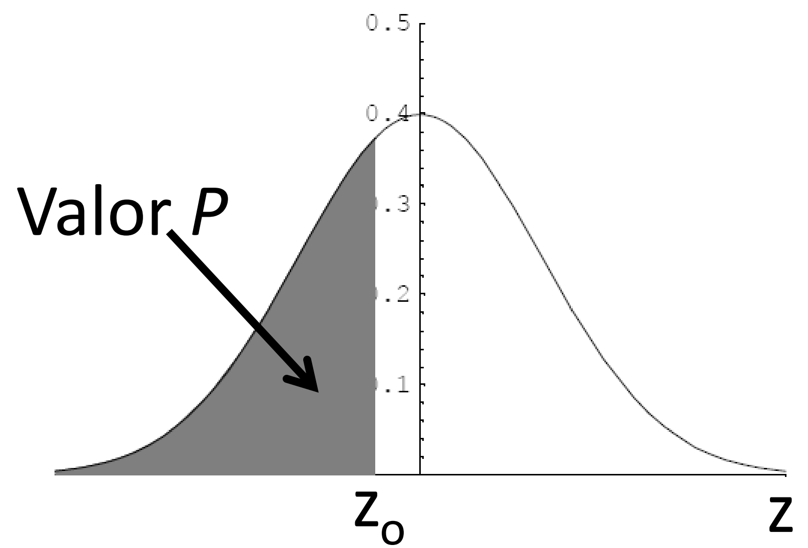
- **El valor p es la probabilidad, *suponiendo H_0 es cierta*, de obtener un valor del estadístico de prueba a una distancia mayor o igual que la del valor observado**.
- A medida que el estadístico de prueba se adentra en la región de rechazo, el peso de la evidencia para rechazar la hipótesis nula es más decisivo y el **valor p** se hace más pequeño.

C- Valor *P*

El valor p es la probabilidad, *suponiendo H_0 verdadera*, de obtener un valor del estadístico de prueba a una distancia mayor o igual que la del valor observado.

- En vez de fijar un nivel de significancia (α) se calcula el área bajo la curva a partir del valor observado en la muestra, así:
- $\bar{x}_o =$ 98,56; lo estandarizamos
- z_o=-0,3742

$$\text{Valor P} = P(Z < z_o) =$$
$$= P(Z < -0{,}37) = 0{,}35569$$

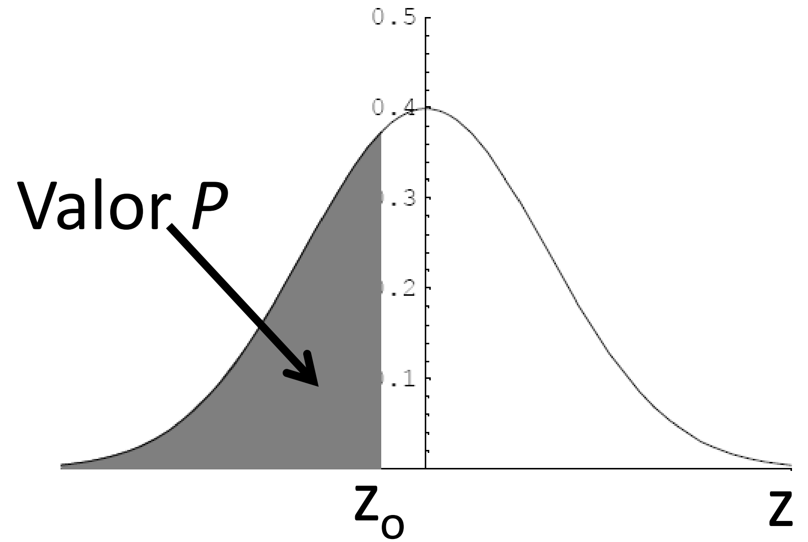


Valor *P*

- **El valor p es la probabilidad, suponiendo H_0 verdadera, de obtener un valor del estadístico de prueba a una distancia mayor o igual que la del valor observado.**
- **Es un nivel de significancia**:
- Valor *P*=0,35569

Es el menor nivel de significancia α para el cual los datos indican que se tendría que rechazar H0

$\overline{X}_o =$ 98,56



- Si el valor *P* es grande, ¿acepto o rechazo H_0?
- ¿Y si es chico?

El valor P toma en cuenta la evidencia de la muestra para aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Interpretación del Valor *P*

- Tenemos en nuestro ejemplo: valor *P*=0,35569.
- Es un nivel de significancia, es decir que es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera.
- Podemos apreciar que, según la evidencia de esta muestra, la probabilidad de cometer error tipo 1,es decir la probabilidad de equivocarnos si decidimos rechazar H_0 es… ¿chica o grande?

bastante grande (más de 35%!!!)

- Y en consecuencia decidimos… ¿aceptar o rechazar H_0?

ACEPTAMOS

- ¿Y si, en cambio, hubiéramos obtenido un valor *P*=0,001?
- En ese caso, la probabilidad de equivocarnos si decidimos rechazar H_0 es… ¿chica o grande?

Bastante chica !!! 0,001

- Y por lo tanto decidimos RECHAZAR

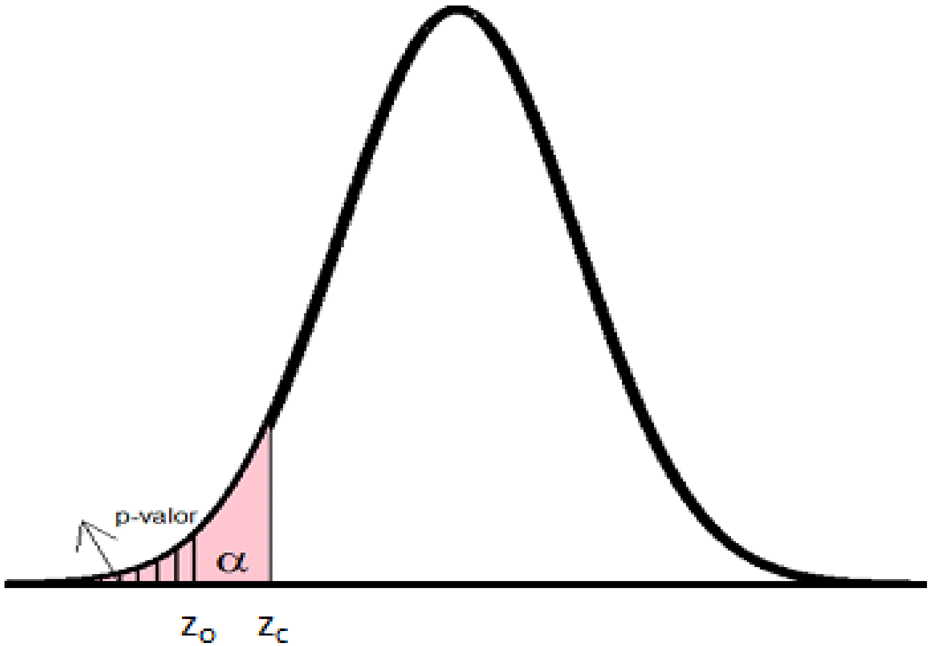
Comparación de valor P y α para la toma de decisiones

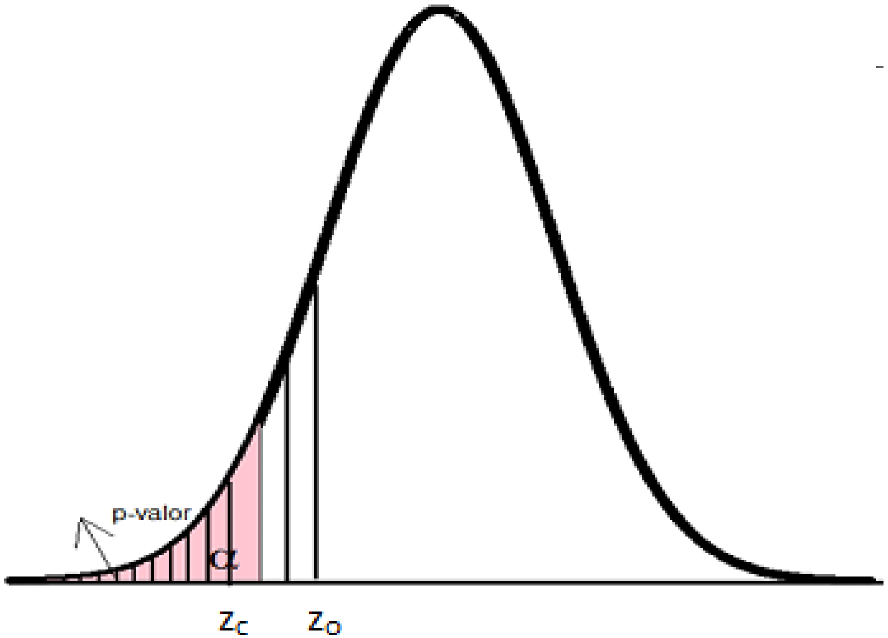
Valor P = 0,35569 α=0,05

Si **p<α** rechazamos la hipótesis nula.

Si **p≥α** no rechazamos la hipótesis nula.

Como 0,05 < 0,35569 ACEPTAMOS H_0





p<α rechazamos la hipótesis nula p≥α no rechazamos la hip. nula

Distintas hipótesis alternativas y la forma de hallar p

Hipótesis nula	**Estadístico de prueba bajo H_0**
H_0: $\mu_X = \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$
Hipótesis alternativa	**test τ : Rechazar $H_0 \Leftrightarrow p < \alpha$**
H_1: $\mu_X \neq \mu_0$ H_1: $\mu_X > \mu_0$ H_1: $\mu_X < \mu_0$	valor $p = P(\lvert Z \rvert > \lvert z_o \rvert) = 2P(Z > \lvert z_o \rvert)$ valor $p = P(Z > z_o)$ valor $p = P(Z < z_o)$

Error de tipo II

- X: índice octánico de la gasolina de esta compañía.
- $X \sim N(\mu=?; \sigma^2=1{,}26)$

$$H_0: \mu=98{,}7$$

$$H_1: \mu<98{,}7$$

- Fijando $\alpha=0{,}05$, $\bar{x}_c = 98{,}09$
- Si la <u>media verdadera es 97,7</u>

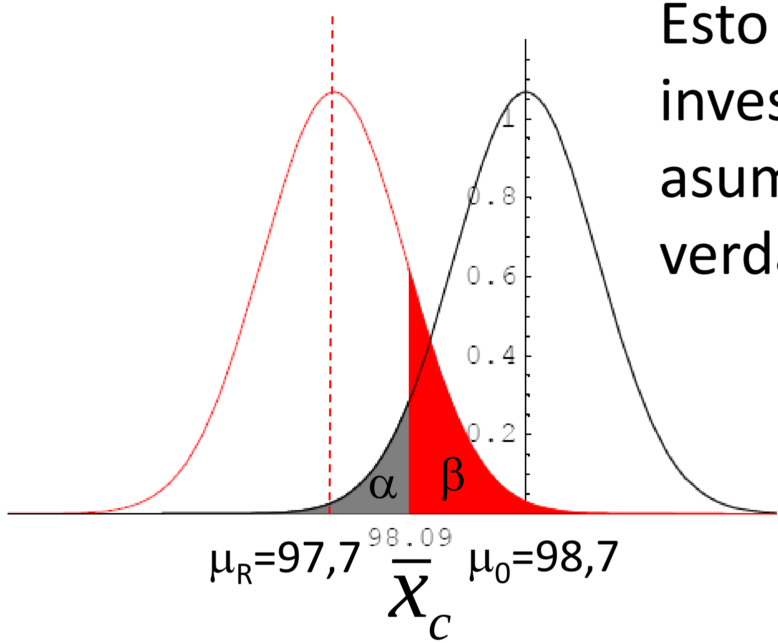
¿qué probabilidad tenemos de cometer error de tipo II?

¿Qué tal probable es creer que el índice octánico de la gasolina es igual a 98,7 cuando en verdad en inferior?

Veamos los gráficos:

Esta es la realidad, desconocida para el investigador.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_R, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

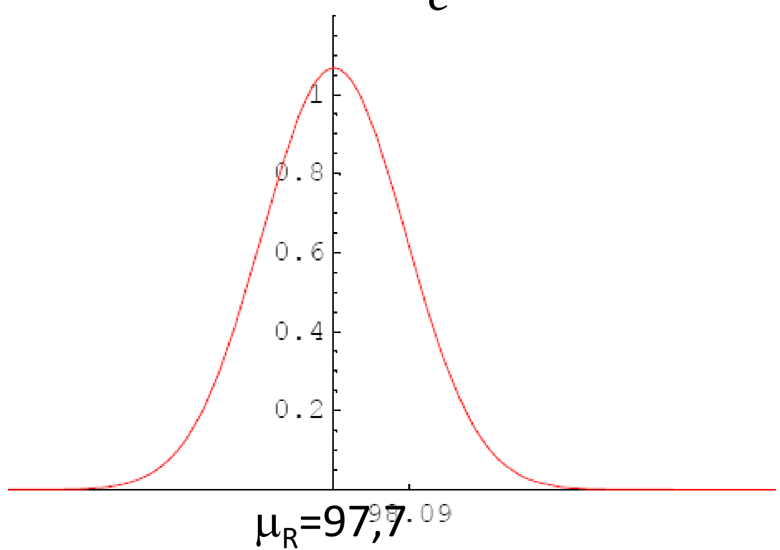


Esto es lo que el investigador supone, asumiendo que H_0 es verdadera.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\bar{X}$

Esta es la realidad, desconocida para el investigador.



$$\bar{X} \sim N\left(\mu_R, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\bar{X}$

Cálculo de β

- β= P(aceptar H_0/ H_0 es falsa, ya que μ_R=97,7)

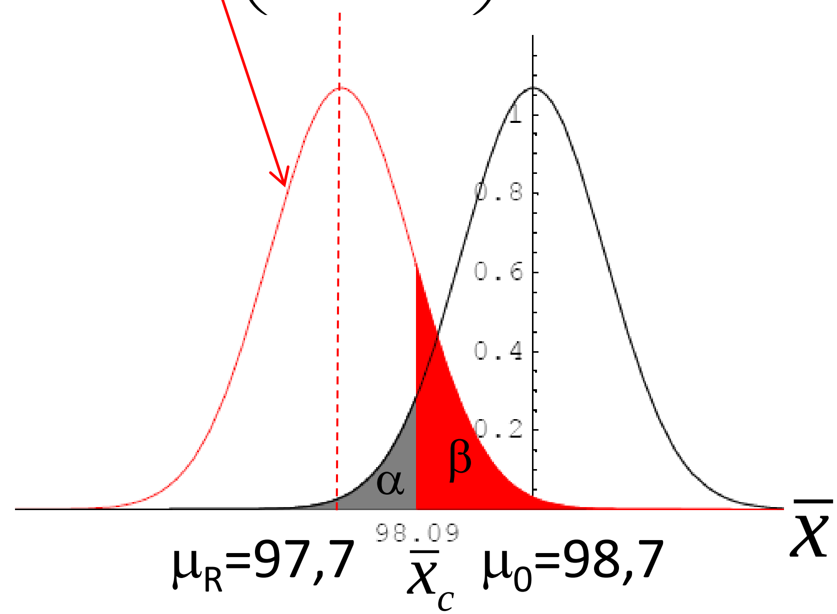
$$\beta = P(\bar{X} > \bar{x}_c / \mu_R = 97{,}7)$$

$$\beta = P(\bar{X} > 98{,}09 / \mu_R = 97{,}7)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_R, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$ds = \sqrt{\frac{1{,}26}{9}}$$

$$\beta = P(\bar{X} > 98{,}09) = 0{,}14917$$



Interpretemos el resultado…

- β= P(aceptar H_0/ H_0 es falsa, ya que μ_R=97,7)

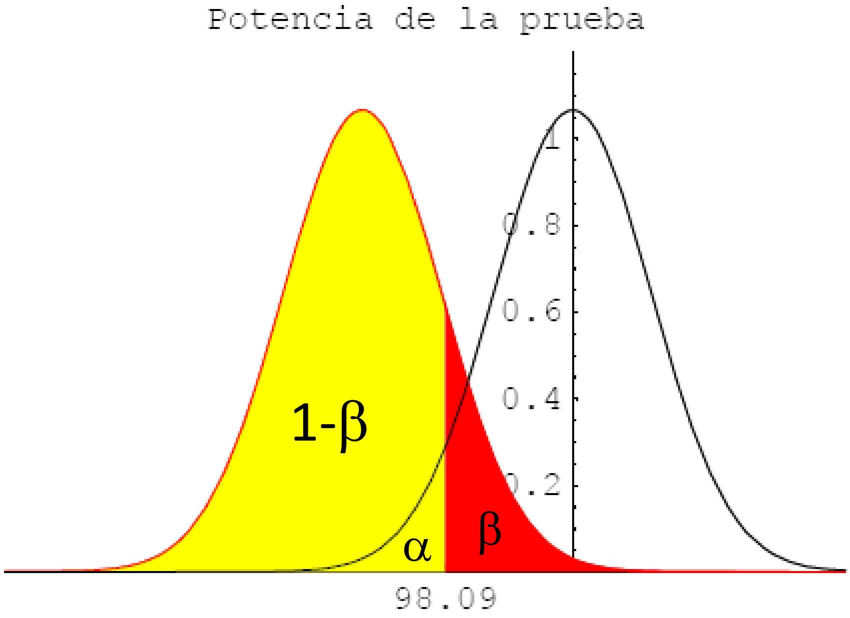
$$\beta = P(\bar{X} > 98{,}09) = 0{,}14917$$

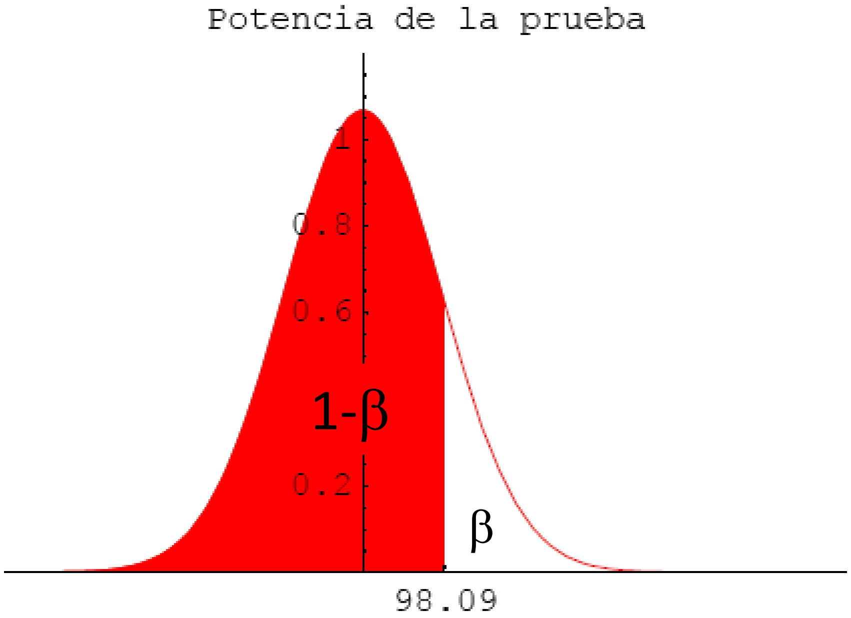
Existe una probabilidad 0,14917 de creer que el nivel octánico medio de la gasolina es de 98,7, cuando en verdad es inferior (97,7) A un nivel de significancia 0,05.

Potencia de la prueba

$1-\beta$= P(rechazar H_0/ H_0 es falsa, ya que μ_R=97,7)

$1-\beta=1-0{,}14917=0{,}85083$

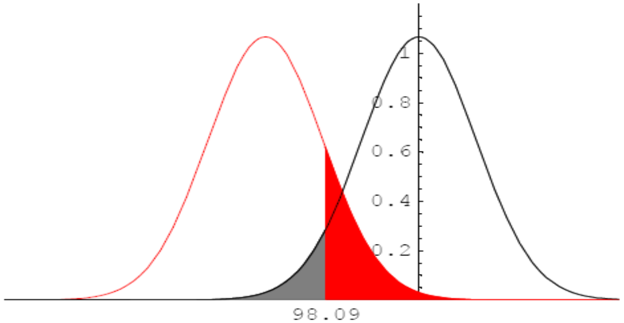




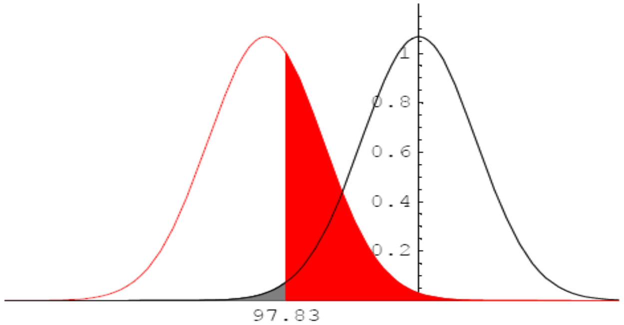
- Recordemos que la potencia de la prueba es $1-\beta$

¿Cómo cambia β si modifico α?

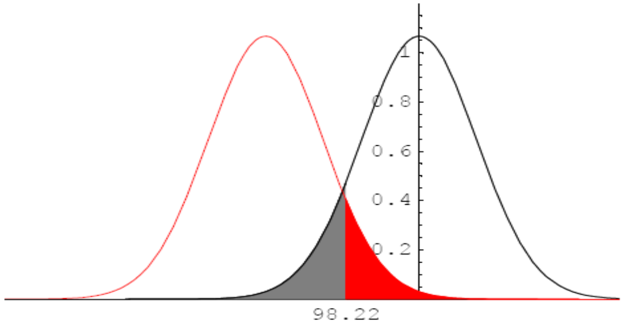
- Cuando fijamos α=0,05, obtuvimos $\bar{x}_c = 98{,}09$
- y β=0,15.



- Si fijáramos α=0,01,
- tendríamos $\bar{x}_c = 97{,}83$
- y β=0,36.



- Si, en cambio, tomáramos α=0,10,
- obtendríamos $\bar{x}_c = 98{,}22$
- y β=0,09.



¿Cómo cambia β si modifico α?

- Es decir:
- si α crece, β decrece…
- Y recíprocamente.
- ¿Cómo se puede hacer que β decrezca sin aumentar α?
- ¿Ya adivinaron?

Disminuyo β, sin agrandar α, aumentando n

Disminuyo β, sin agrandar α, aumentando n

- X: índice octánico de la gasolina de esta compañía.
- $X \sim N(\mu=?;\ \sigma^2=1{,}26)$
- H_0: $\mu=98{,}7$.
- H_1: $\mu<98{,}7$.
- $\alpha=0{,}05$.
- Si ahora tomo una muestra de tamaño $n_2=25$,
- Trabajamos con:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_2}\right) \quad y \quad \overline{X}_R \sim N\left(\mu_R, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

Disminuyo β, sin agrandar α, aumentando n

- H_0: μ=98,7.
- H_1: μ<98,7.
- α=0,05.
- n_2=25
- Tenemos:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_2}\right) \quad y \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_R, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\frac{\overline{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}} = -1{,}64 \qquad \overline{x}_c = 98{,}33$$

- Si la media verdadera es 97,7, β vale…

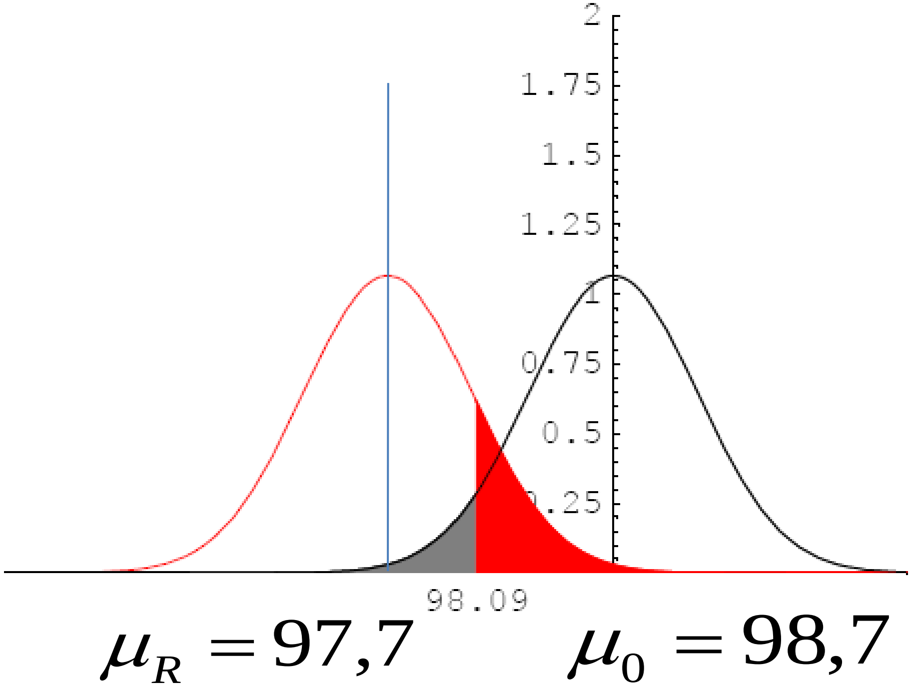
$$\beta = P(\overline{X} > \overline{x}_c / \mu_R = 97{,}7) = P\left(Z > \frac{\overline{x}_c - \mu_R}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$ =P(Z>2,81) =0,00248

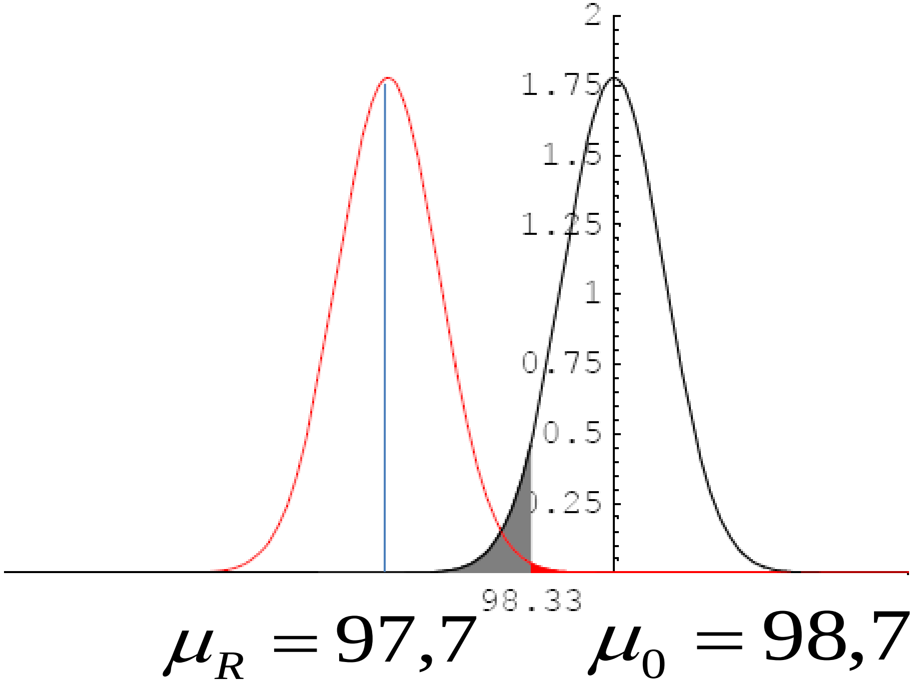
¡Y antes era 0,14917!

Dejo α fijo y disminuyo β, aumentando n

- α =0,05, μ_0=98,7, μ_R=97,7 y n=9
- Dieron β=0,14917

- α =0,05, μ_0=98,7, μ_R=97,7 y n=25, en cambio, dieron
- β=0,00248





Pruebas de hipótesis a los parámetros de una población Normal

1-Test para la media

Dividimos el problemas en dos casos:

1-A) se conoce la varianza poblacional σ^2

1-B) desconoce la varianza poblacionalσ^2

2-Test para la varianza poblacional

Prueba de hipótesis para la media de una población no Normal o desconocida

3-Test para la media, con varianza finita n grande

- 3-1-Desconocida
- 3-2. Caso particular población Bernoulli, prueba de hipótesis para la proporción de la población
- 3-3- Caso particular población Poisson, prueba de hipótesis para lamda de la población

1-Prueba de hipótesis para el parámetro poblacional μ de una población Normal

A- Se conoce la varianza poblacional σ^2

1º) Planteo de hipótesis

$$H_o: \mu = \mu_0 \qquad vs. \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$$

2º)Determinar el estadístico apropiado para la prueba y su distribución

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_O}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Determinar el test correspondiente

el test : Rechazar $H_0 \Leftrightarrow \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{1-\alpha/2}$

Prueba de hipótesis para el parámetro poblacional μ de una población Normal

3º)Fijar el nivel de significación de la prueba y determinar la región crítica

α

4º)Tomar la muestra y calcular el valor observado del estadístico de la prueba.

5º) Tomar la decisión estadística e interpretar.

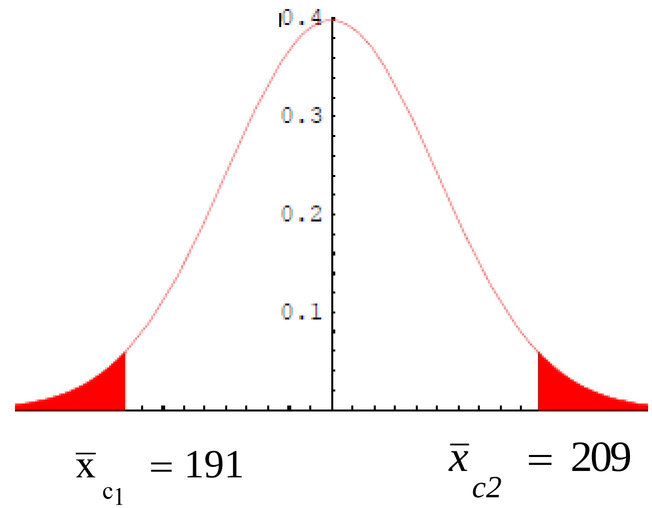
6.4.

La máquina de refrescos de un restaurante se ajusta de modo que la cantidad de bebida que sirve está distribuida de forma aproximadamente normal con una media de 200 mililitros y una desviación estándar de 15 mililitros. La máquina se verifica periódicamente con una muestra de nueve bebidas, midiendo el contenido promedio de los mismos. Si el promedio está en el intervalo (191, 209), se considera que la máquina funciona correctamente; de otro modo se suspende el expendio y se ajusta la máquina.

a) ¿Con qué nivel de significancia se está realizando el control de calidad?

X : "Cantidad de bebida que sirve la máquina de refrescos"

$X \sim N(\mu = 200; \sigma = 15)$



$$H_o : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu \neq 200$$

$$\alpha = P(Rechazar\ Ho\ / Ho\ es\ V)$$

$$\alpha = P(\bar{X} < 191 \text{ ó } \bar{X} > 209) = 0{,}07186$$

El nivel de significancia utilizado es α=0,07186

b) La última muestra que se tomó arrojó un valor medio de 210 mililitros, la decisión que debe tomar es bastante obvia, pero ¿cuál es el valor *P* con el que está trabajando? Interprete su valor.

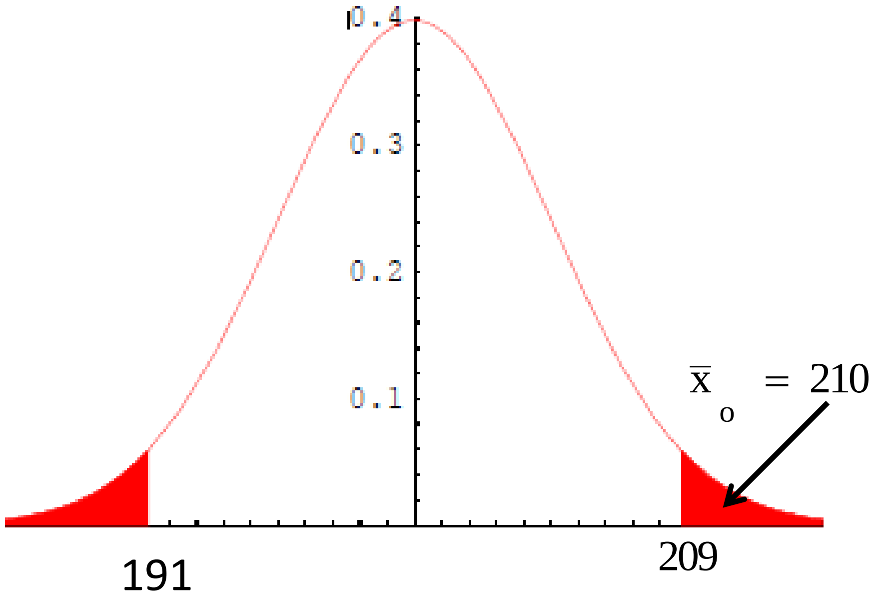
X : "Cantidad de bebida que sirve la máquina de refrescos" $X \sim N(\mu = 200; \sigma = 15)$

$$\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}} = 200; \sigma_{\overline{X}} = 15/\sqrt{9})$$

$$H_0 : \mu = 200$$
$$H_1 : \mu \neq 200$$

$$\text{Valor P} = 2.P(\overline{X} > 210) =$$

$$= 2.0{,}02275 = 0{,}0455$$



El valor P es igual a 0,0455

Si la maquina sirviera los 200 ml habría una probabilidad de creer que no es así de 4,5%

d) Si se toma una decisión en base a la media de la muestra de 210 mililitros, al nivel de significancia del 1%, ¿cuál sería su decisión y qué consecuencias tendría?

X : "Cantidad de bebida que sirve la máquina de refrescos" $X \sim N(\mu = 200; \sigma = 15)$

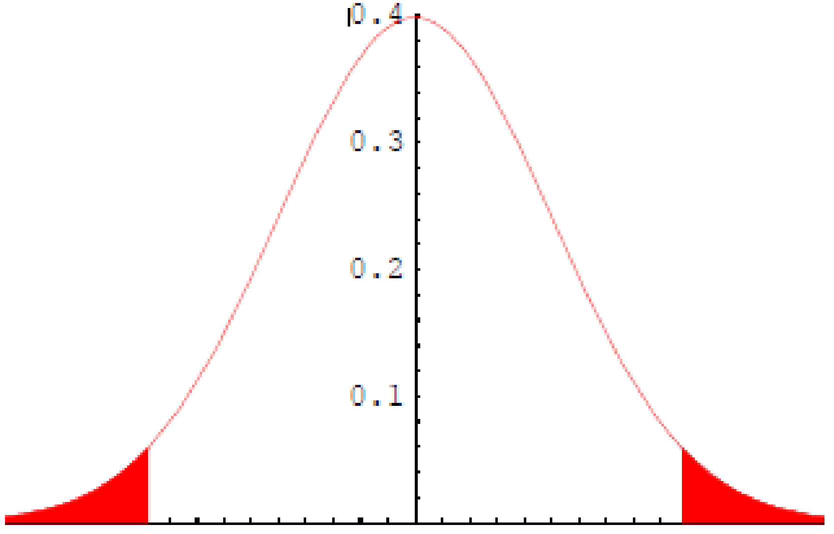
$$\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}} = 200; \sigma_{\overline{X}} = 15/\sqrt{9})$$

$$H_o : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu \neq 200$$

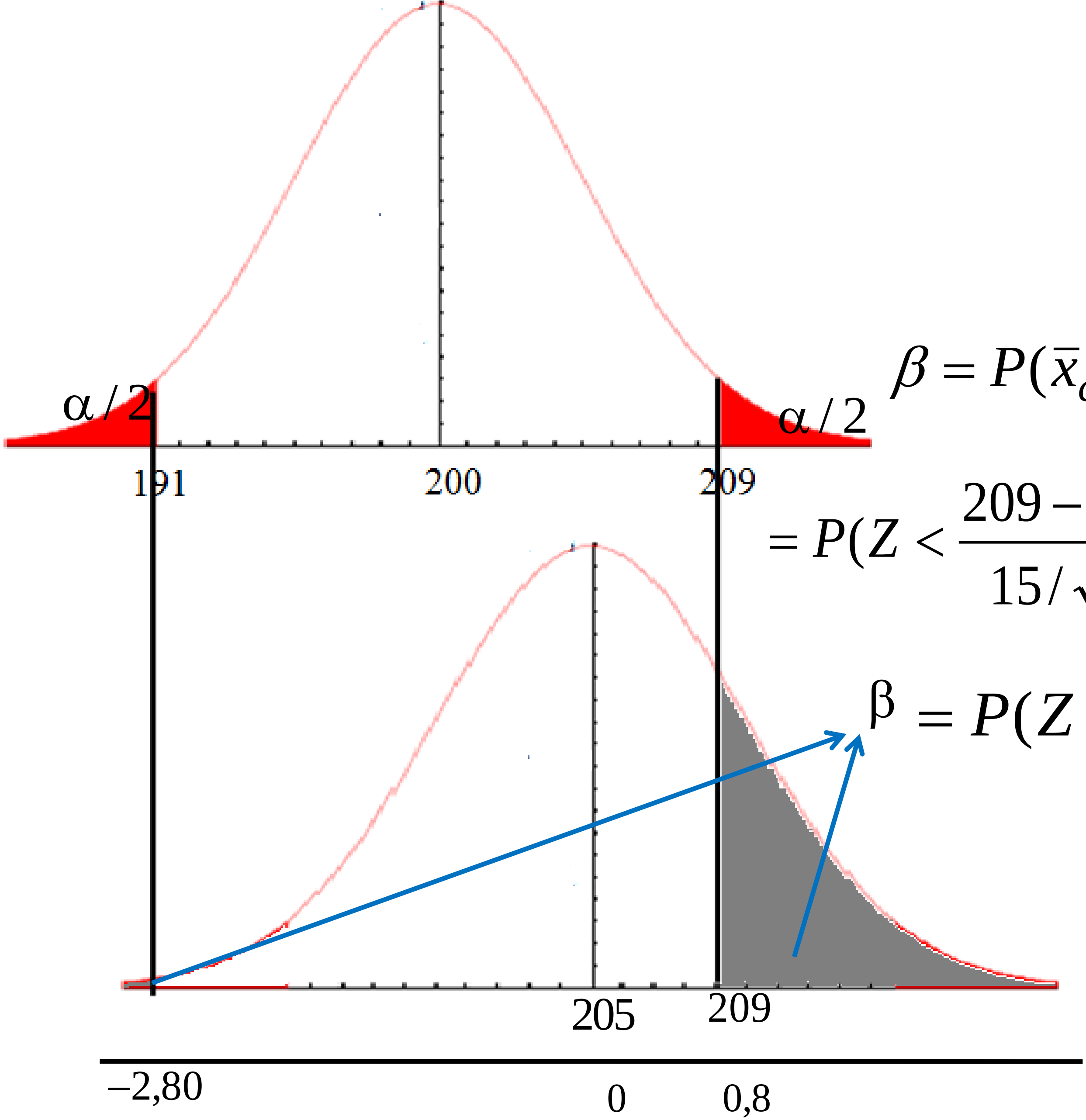
$$z_o = \frac{210 - 200}{15/\sqrt{9}} = 2$$

$$z_o < z_{c2} \rightarrow \text{Acepto } H_o$$



$z_{c1} = -2{,}58$ $\qquad 0 \qquad$ $z_{c2} = 2{,}58$

Si trabajamos con un nivel de significancia del 1% la decisión sigue siendo la misma, aceptamos la hipótesis nula.



Calcular el error tipo II si

$$\mu_R = 205$$

$$\beta = P(\bar{x}_{c1} < \bar{X} < \bar{x}_{c2} / \mu_R = 205)$$

$$= P(Z < \frac{209-205}{15/\sqrt{9}}) - P(Z < \frac{191-205}{15/\sqrt{9}})$$

$$\beta = P(Z < 0{,}8) - P(Z < -2.8) =$$

$$= 0.7855895$$

Tenemos una posibilidad del 78,55% de creer que la maquina sirve en promedio 200 ml cuando en verdad el llenado promedio es mayor.

1-B-Prueba de hipótesis para la media poblacional μ Población normal. **σ^2_1 DESCONOCIDA**

$1 - \textit{Planteo de Hipótesis}$

$H_O : \mu = a$

$H_1 : \mu > a$

$\textit{Datos de las muestra}$

$n \quad \bar{x} \quad s$

$\textit{Nivel de significancia}$

$\alpha \to t_c$

$t_o \to \textit{Observado}$

$$t_o = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$2 - \textit{Estádistica de prueba}$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$\tau: \textit{Rechazar } H_0 \Leftrightarrow t_0 > t_c$


```
t.test(uvas, mu=500 ,alternative=c("greater"), conf.level=0.99))
```

Comandos con R

- >t.test(x,y, mu=0, var.equal=F, conf.level=0.90)
- Para comparar la media de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas y distintas
- > t.test(x, mu= 1000, alternative="less", conf.level=0.99)
- >t.test(x, mu=1000,alternative="greater", conf.level=0.99)
- Para una prueba de hipótesis para la media

2-Prueba de hipótesis para la varianza poblacional - Población Normal

Planteo de Hipótesis

$$H_O : \sigma^2 = a$$

$$H_1 : \sigma^2 > a$$

Datos de las muestra

$$n \quad \sigma \quad s^2$$

Nivel de significancia

$$\alpha \to \chi_{c;\alpha;n-1}$$

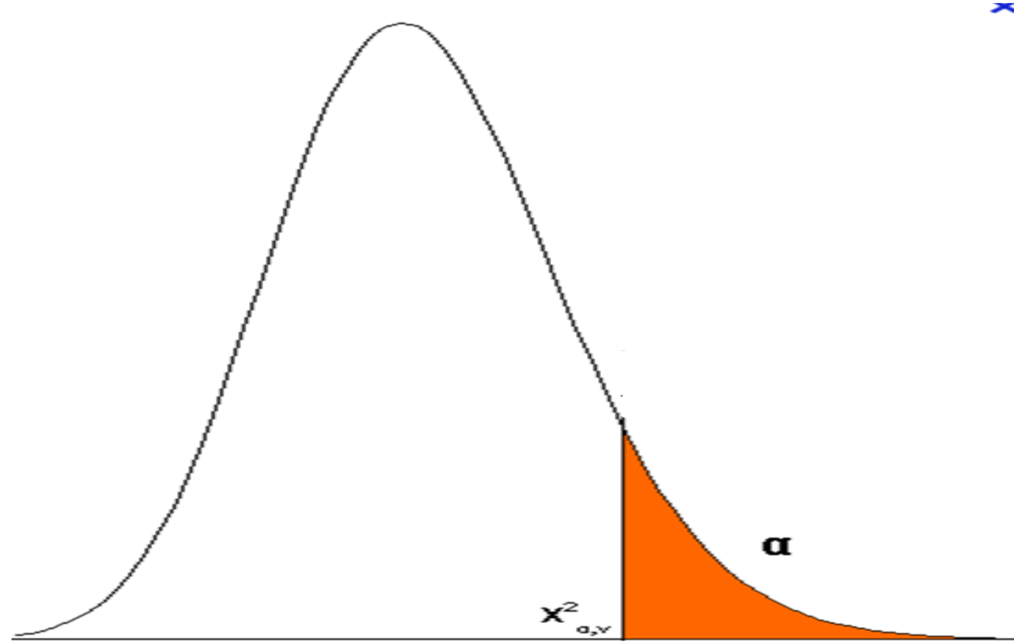
$$\chi_o \to Observado$$

$$\chi_o = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}}$$

$$2 - Estadístico\ de\ prueba$$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \sim \chi^2_{\nu=n-1}$$

$$\tau : Rechazar\ H_0 \Leftrightarrow \chi_0 > \chi_c$$



2-Test para la varianza poblacional Población Normal

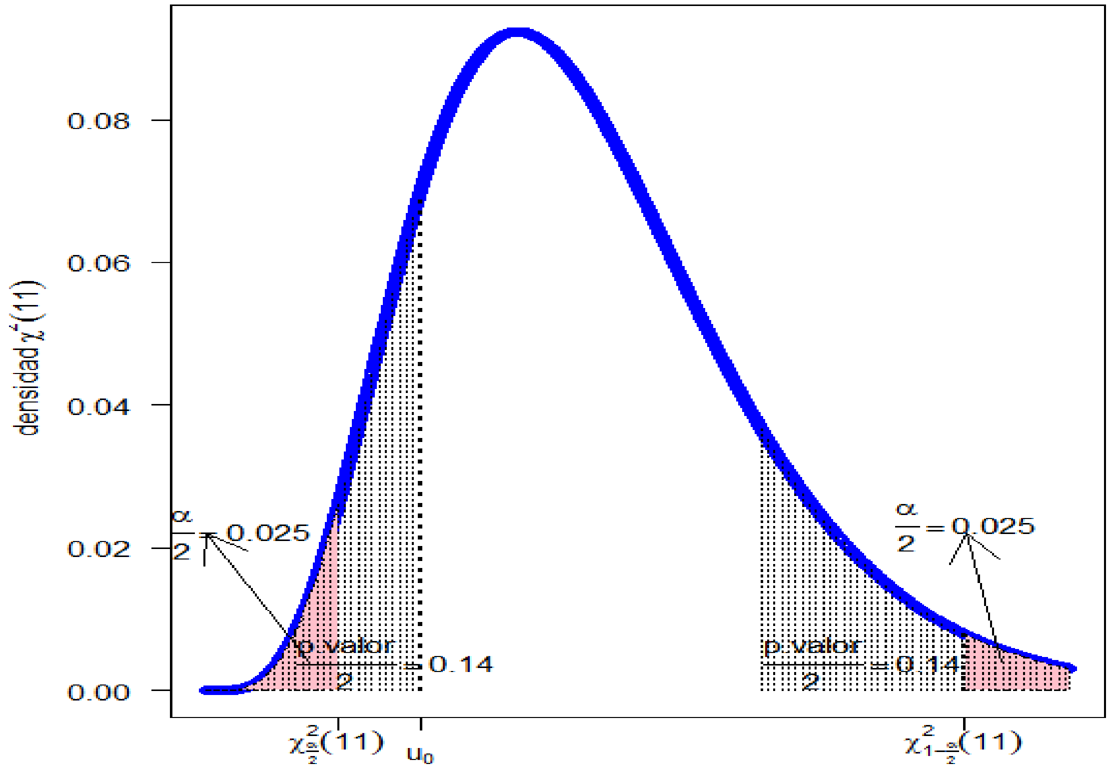
- *Planteo de Hipótesis*
- *Ho:* $\sigma^2 = \sigma_0^2$ *vs.* H_1*:* $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Estadístico de Prueba

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Test τ: Rechazar $H_o \Leftrightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} < k_1$ ó $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} > k_2$

- siendo $k_1 < k_2$

2-Test para la varianza poblacional Población Normal



6.17.

Se dice que una máquina despachadora de refrescos está fuera de control si la varianza de los contenidos difiere de 1,15 decilitros². Si una muestra aleatoria, tomada de una población con distribución normal, de 25 bebidas de esta máquina tiene una varianza de 2,03 decilitros²; ¿es evidencia suficiente, con un nivel de significancia de 0,05, de que la máquina está fuera de control?

X : "Variabilidad de los contenidos que sirve la maquina despachadora de gaseosas"

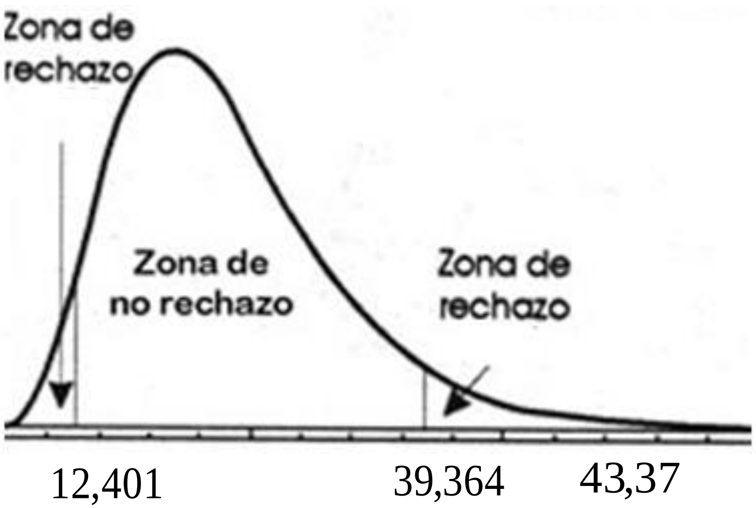
$$n = 25 \quad s^2 = 2{,}03 \quad X \sim \text{Normal}(\mu; \sigma^2 = 1{,}15) \qquad \frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^{\,2}} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$H_o : \sigma^2 = 1{,}15$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 1{,}15$$

$$\alpha = 0{,}05 \rightarrow \chi_{c1} = 12{,}401$$

$$\chi_{c2} = 39{,}364 \qquad \chi_o = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{24.2{,}03}{1{,}15} = 43{,}37$$



Según la evidencia maestral podemos asegurar con un nivel de significancia del 5% que la máquina está fuera de control.

3-1-Prueba de hipótesis para la media poblacional μ Población No Normal o desconocida

σ^2_1 finita (n grande)

$$\overline{X} \xrightarrow{n\to\infty} N(\mu_{\overline{X}} = \mu; \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2 / n)$$

Planteo de Hipótesis

$H_O : \mu = a$

$H_1 : \mu > a$

$2 - \textit{Estadístico de prueba}$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0,1)$$

$\tau : Rechazar\ Ho \Leftrightarrow z_o > z_c$

Datos de las muestra

$n \geq 30 \quad \overline{x}$

Nivel de significancia

$\alpha \to z_c$

$z_o \to$ Observado

$$z_o = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

6.3.

Un fabricante que desarrolla un nuevo sedal para pesca afirma que tiene una resistencia media a la ruptura de por lo menos 15 kilogramos, con una desviación estándar de 0,5 kilogramos. Para verificar lo que dice el fabricante se toma una muestra aleatoria de 50 sedales y se obtiene una media de 14,9 kilogramos.

a) ¿Hay evidencia suficiente como para desmentir lo que afirma el fabricante, a un nivel de significancia de 0,05?

a) ¿Hay evidencia suficiente como para desmentir lo que afirma el fabricante, a un nivel de significancia de 0,05?

X : "Resistencia a la rotura de un sedal"

$$X \sim desconocida(\mu = 15; \sigma = 0.5)$$

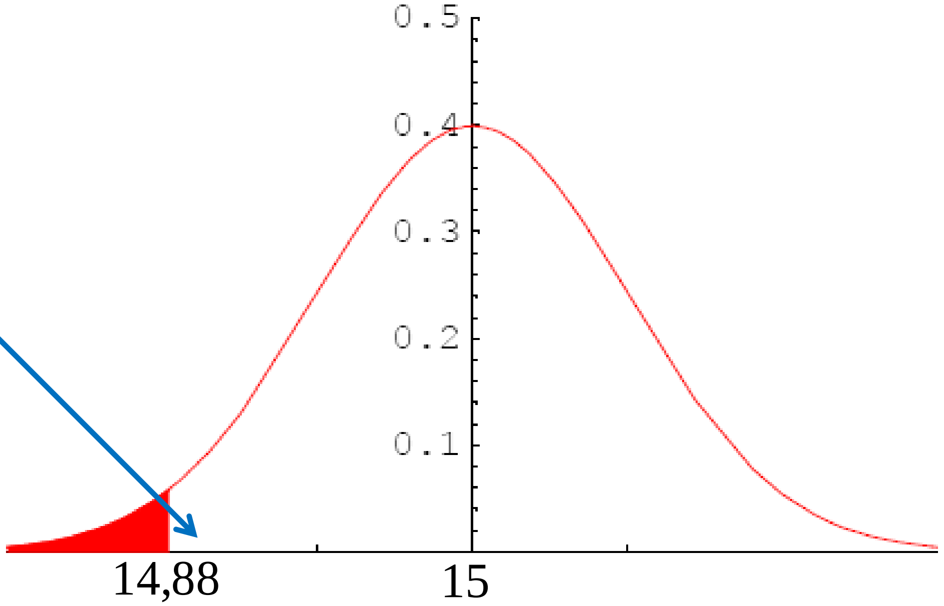
$$n = 50 \quad \bar{x}_o = 14{,}9$$

$$\overline{X} \xrightarrow{TLC} N(\mu_{\overline{X}} = 15; \sigma_{\overline{X}} = 0{,}5/\sqrt{50})$$

$$H_o: \mu = 15$$
$$H_1: \mu < 15$$

$$z_o = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = -1{,}42$$

$$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_c = -1{,}64$$



$$z_o > z_c \rightarrow -1.42 > -1.64 \rightarrow \text{Acepto } H_o$$

En base a la evidencia muestral <u>¿no existe?</u> una diferencia significativa entre el valor observado y el hipotético.

b) ¿Cuál es el valor *P* de esta prueba? Interprete su valor en el contexto del problema.

X: *"Resistencia a la rotura de un sedal"*

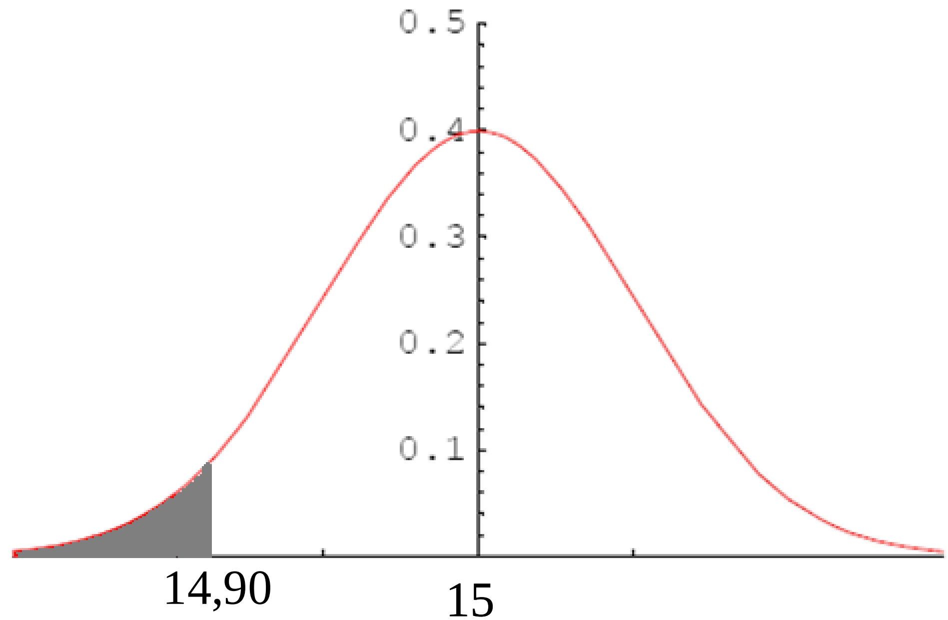
$$X \sim desconocida(\mu = 15; \sigma = 0.5)$$

$$n = 50 \quad \bar{x}_o = 14,9$$

$$\overline{X} \xrightarrow{TLC} N(\mu_{\overline{X}} = 15; \sigma_{\overline{X}} = 0,5/\sqrt{50}$$

$$H_o : \mu = 15$$

$$H_1 : \mu < 15$$

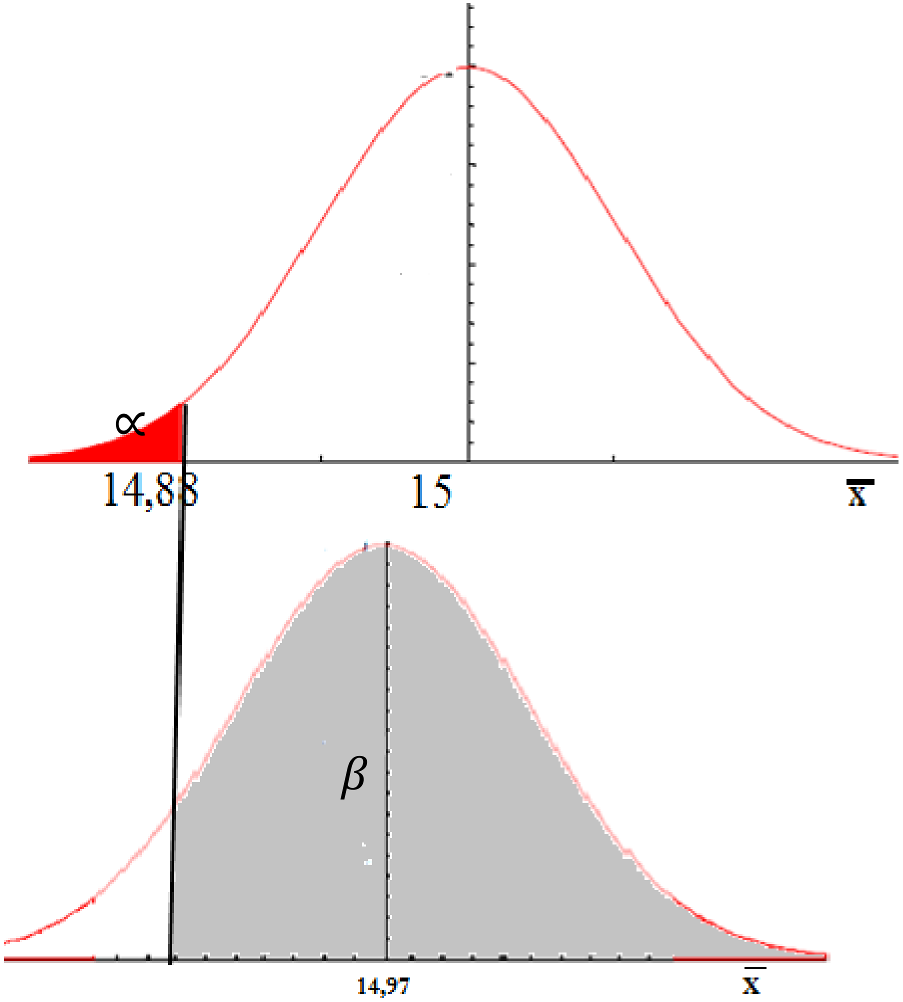


$$\text{Valor P} = P(Z < zo) = P(Z < \frac{14,9 - 15}{0,5/\sqrt{50}}) = P(Z < -1,41) = 0,079$$

$$\alpha < valorP \rightarrow acepto\ H_o$$

$$0,05 < 0,078927$$

c) Si la verdadera media poblacional es de 14,97 kilogramos, ¿qué error se cometería? ¿Cuál es la probabilidad de cometerlo en tal situación?



$$\beta = P(\bar{X} > \bar{x}_c \,/\, \mu_R = 14{,}97) =$$

$$= P\left(Z > \frac{14{,}88 - 14{,}97}{0{,}5/\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P(Z > -1{,}27) = 0.8979$$

La probabilidad de aceptar que la resistencia media del sedal es igual a 15 kg cuando es menor es del 0,8979

d) ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error de tipo II, si la verdadera media es igual a 14,9?

$$\beta = P(\overline{X} > \overline{x}_c / \mu_R = 14{,}90) =$$

$$= P\left(Z > \frac{14{,}88 - 14{,}90}{0{,}5/\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P(Z > -0{,}28) = 0{,}61026$$

La probabilidad de aceptar que la resistencia media del sedal es igual a 15 kg cuando es menor es del 0,61026

3-2-Prueba de hipótesis para el parámetro poblacional p. Población Bernoulli. n grande

$$Planteo\ de\ Hipótesis$$

$$H_O : p = p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$Datos\ de\ las\ muestra$$

$$n \quad \hat{p}$$

$$Nivel\ de\ significancia$$

$$\alpha \rightarrow z_c$$

$$z_o \rightarrow Observado$$

$$z_o = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

3-2-Test para proporción. Población Bernoulli

- *Planteo de hipótesis*
- H_0: $p = p_0$ vs. H_1: $p \neq p_0$

Estadístico de Prueba

- $$Z = \frac{\overline{X} - p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$ Si $n \rightarrow \propto$ por TLC

Ejemplo

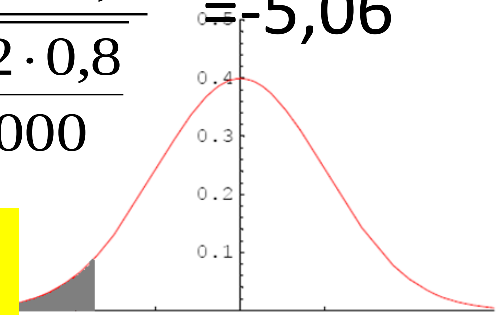
- Una compañía petrolera afirma que un quinto de las casas en cierta ciudad tienen sistema de calefacción que funcionan con combustibles derivados del petróleo. ¿Hay alguna razón para dudar de esta afirmación, si en una muestra aleatoria de 1000 casas en la ciudad se encuentra que 136 utilizan derivados del petróleo para sus sistemas de calefacción?. Trabaje con un nivel de significancia de 0,01

- H_0: p= 1/5.
- H_1: p<1/5.
- n=1000
- p_o=0,136

- Como
- n=1000
- α=0,01
- z_c=-2,33
- p_o=0,136

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} \sim N(0,1)$$

$$z_o = \frac{0{,}136 - 0{,}2}{\sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{1000}}} = -5{,}06$$



RECHAZO H_0