<u>UNIDAD N°3:</u> <u>VARIABLES ALEATORIAS</u>

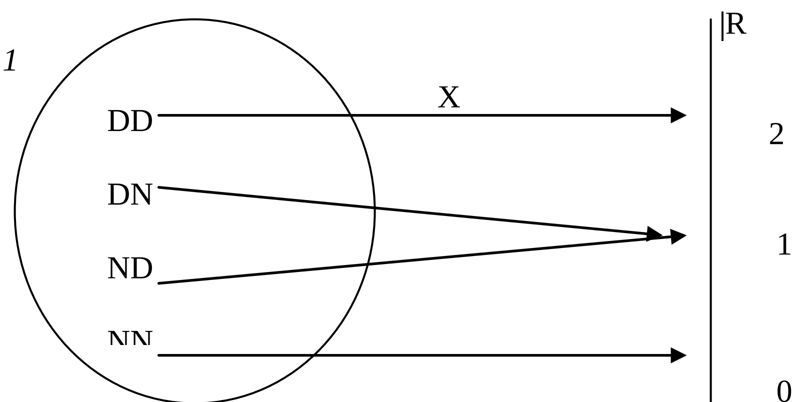
<u>VARIABLE ALEATORIA DISCRETA</u>

Resulta interesante, y algunas veces necesario, asociar a cada uno de los elementos de un suceso con una medida cuantitativa. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1: Consideremos un experimento el cual consiste en probar dos de determinados componentes electrónicos y observar si cada uno de ellos es defectuoso o no, reponiendo el componente observado. Por conocimientos previos se sabe que la probabilidad de obtener un defectuoso es del 5%.
El espacio muestral correspondiente es
S={NN, DN, ND, DD}donde N denota “no defectuoso” y D “defectuoso”.
Supongamos que queremos encontrar la probabilidad al suceso A: “solo un defectuoso”, es decir A={DN, ND}. Cómo ya sabemos, dicha probabilidad es P(A)= 2*0.05*0.95 = 0.095

Observemos la siguiente función, la cual asigna a cada elemento del espacio muestral, un número:

Gráfico 3.1



Como en realidad lo que nos interesa estudiar es el número de defectuosos, es natural que una función X, asigne valores numéricos X(NN) = 0; X(DN) = X(ND) = 1 y
X(DD) = 2 .
Donde X : “número de defectuosos”

A dicha función X, la llamaremos **variable aleatoria**.

Definición 3.1: Una variable aleatoria, es una función X que asigna a cada elemento del espacio muestral un número real.
Es decir que X: S $\longrightarrow$ 1R,
X(s)=x   x ε 1R

- ✓ Si el resultado del experimento es numérico, porque contamos o medimos, los posibles valores de la variable aleatoria coinciden con los resultados del experimento.

Ejemplo 3.2: En el experimento de lanzar un dado legal y observar la cara hacia arriba, el espacio muestral S es S={1 , 2, 3, 4, 5, 6} y la variable aleatoria definida X(1) = 1,
X(2) = 2; X(3) = 3,…,X(6) = 6
Es decir X(i) = i, siendo i = 1,…, 6.

- ✓ Si el resultado del experimento es cualitativo y no me induce a ningún ordenamiento específico, hacemos corresponder a cada resultado un número arbitrariamente.

Ejemplo 3.3: En el experimento de lanzar una moneda legal y observar la cara hacia arriba, S={c, s}, la variable aleatoria puede ser X(c) = 1 y X(s) = 0.

- ✓ Con la definición de una variable aleatoria para nuestro experimento, cada vez que nos preguntemos por determinada probabilidad, nos conduciremos siempre con medidas cuantitativas.

  Plantearemos entonces, probabilidades sobre la variable aleatoria, en general, es decir que $P(\{s \,/\, s \in S \wedge X(s) = x\}) = P(X = x)$ (*)

Observaciones:

- ✓ Llamamos a la función variable aleatoria con letras de imprenta mayúsculas (X, Y, Z, etc) y a los valores que dichas funciones toman con letras imprentas minúsculas (x, y, z, etc)
- ✓ Por abuso del lenguaje, utilizamos expresiones como la que aparece en el segundo miembro, de (*) en la cual si somos estrictos matemáticamente son erróneas, ya que estamos comparando una función (v.a. X) con un número real (x). En definitiva de aquí en más para nosotros la expresión P(X = x) expresa "la probabilidad del evento, en el cual la v.a X toma el valor real x".

Retomando los ejemplos:

Ej 3.1: P(A) = P(X=1)=P({DN, ND}) = 0.095

Ej 3.2: P("el resultado sea menor que 5")=P({1, 2 ,3 ,4})=P(X<5) = 4/6 = 0.666

Ej3.3: P("sea cara") = P({c}) = P(X=1) = 0.5

Variables aleatorias discretas y continuas:

Una variable aleatoria es discreta, cuando su conjunto imagen es finito o infinito numerable, mientras que una variable aleatoria es continua si su conjunto imagen es infinito no numerable.

Los ejemplos desarrollados anteriormente corresponden a variables aleatorias discretas, mientras que si realizamos el experimento de medir la duración en minutos de las llamadas telefónicas realizadas por los empleados de una empresa, el espacio muestral para este experimento es S = (0,∞). La variable aleatoria definida como X(i) = i para todo i del intervalo (0, ∞) es un ejemplo de variable aleatoria continua.

Trabajaremos a continuación con variables aleatorias discretas.

FUNCION DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Una variable aleatoria discreta toma cada uno de sus valores con cierta probabilidad.

En *Ejemplo 3.1*, podemos obtener las probabilidades para cada valor de variable aleatoria.

$P(X=0)=P(\{NN\}) = 0.95^2 = 0.9025$

$P(X=1)=P(\{ND, DN\}) = 0,095$

$P(X=2)=P(\{DD\}) =0.05^2 = 0,0025$

Observemos que cada probabilidad es positiva y además la suma de todas las probabilidades es uno, es decir P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 (los valores de X agotan todos los casos posibles).

La función que asigna a cada valor de la variable aleatoria su probabilidad se le llama *función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.*

Definición 3.2: Sea X una variable aleatoria discreta, se llamará función de probabilidad de la v.a. X a la función f_X: 1R→[0 , 1] de tal forma que $f_X(x) = P(X = x)$.

Propiedades Fundamentales de la función de probabilidad:

1. $f_X(x) \geq 0$ para todo x de 1R.
2. $\sum_x f_X(x) = 1$

Se denominan propiedades fundamentales porque cualquier función con dominio en 1R y codominio en el intervalo (0 , 1) que cumpla con estas dos propiedades es una función de probabilidad de una variable aleatoria; además cada función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, cumple con estas dos propiedades.

Observación: las imágenes de la función de probabilidad son probabilidades, es decir $f_X(x) = P(X = x)$

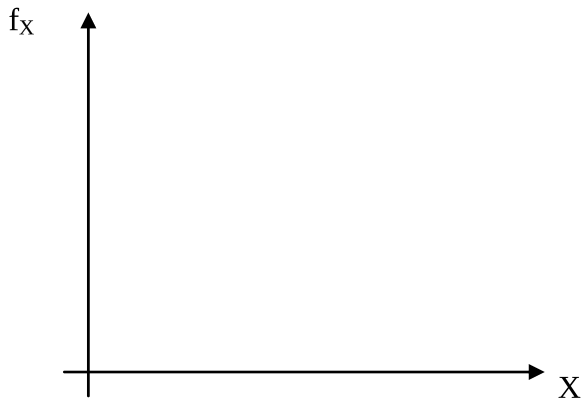
Conviene representar a estas funciones mediante fórmulas.

En el *Ejemplo 3.1*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.9025 \quad si \quad x = 0 \\ 0{,}095 \quad si \quad x = 1 \\ 0.0025 \quad si \quad x = 2 \\ 0 \quad caso \quad contrario \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de probabilidad es:

Gráfico 3.2



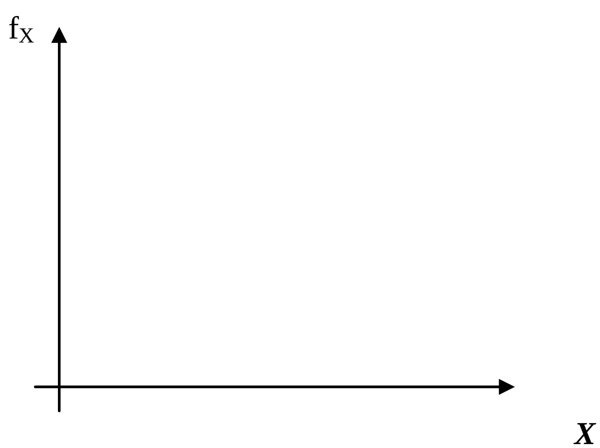
Buscamos la función de probabilidad en el *Ejemplo 3.2*

X	1	2	3	4	5	6
f_X	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La función de probabilidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/6 \quad si \quad x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 \quad c.c \end{cases}$$

Gráfico 3.3



Nota: Para agilizar la notación de las funciones, utilizaremos una función que se denomina "función indicadora".
La función indicadora se define de la siguiente manera:

$$I_A : R \to \{0,1\}$$

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in A \\ \\ 0 \quad si \quad x \notin A \end{cases}$$

En el *Ejemplo 3.2* la función de probabilidad utilizando la función indicadora queda expresada como:

$$f_X(x) = \frac{1}{6} I_{\{1,2,3,4,5,6\}}(x)$$

En el *Ejemplo 3.1:*

$$f_X(x) = 0{,}9025 I_{\{0\}}(x) + 0{,}095 I_{\{1\}}(x) + 0{,}0025 I_{\{2\}}(x)$$

FUNCION DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Hay muchos problemas donde deseamos calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X sea menor o igual que algún número real x.
Trabajando sobre el E*jemplo 3.1*, nos podemos preguntar cual es la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que 1, es decir la probabilidad de que en una realización del experimento, obtengamos a lo sumo un componente defectuoso, dicha probabilidad ya la sabemos calcular,

$P(X \leq 1)=P(\{NN\} \cup \{ND\} \cup \{DN\}) =$ (sucesos mutuamente excluyentes)

$P(\{NN\}) + (P(\{ND , DN\}))=$

$$P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$f_X(0) + f_X(1) = 0{,}9025 + 0{,}095 = 0{,}9975$$ (por definición de fc. de densidad de probabilidad)

Esta situación nos conduce a definir lo que se llama función de distribución acumulada.

Definición 3.3: Sea (S, P) un espacio de probabilidad y $X: S \to 1R$ una v. a. en S, se define a la función de distribución acumulada como $F_X: 1R \to [0 , 1]$ de tal forma que:
$F_X(x) = P(X \leq x)$

Propiedades Fundamentales:

1. Se define para todo número real y

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

2. F_X es no decreciente, o creciente en sentido amplio:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

3. La función de distribución es una función continua por la derecha en cada punto. Es decir que presenta saltos en los puntos (x_1, x_2, …, x_n) iguales a la probabilidad de dicho punto, siendo constante en los intervalos entre los puntos de salto. En dichos puntos de saltos, el valor de la función es igual a límite por derecha.

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x); \forall x \in \Re$$

Toda función de distribución acumulativa, cumple con estas tres propiedades y toda función con dominio en 1R y codominio en el intervalo [0, 1] que cumpla con estas tres propiedades es una función de distribución.

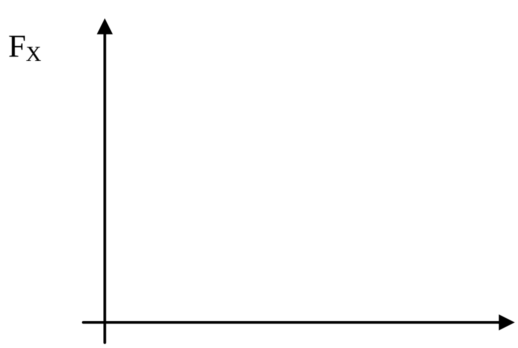
En el *Ejemplo 3.1* la función de distribución acumulada:

X	0	1	2
f_X	0.9025	0.095	0.0025
F_X	0.9025	0.9975	1

Para realizar el gráfico planteamos lo siguiente:

Valores que toma la v.a. X	Evento correspondiente	Probabilidad acumulada Correspondiente
X < 0	∅	0
0 ≤ X < 1	{NN}	0.9025
1 ≤ X < 2	{NN, DN, ND}	0.9975
X ≥ 2	{NN, DN, ND, DD}	1

Gráfico 3.4



Actividad para el alumno: Encuentra y grafica la función de distribución acumulada para los Ejemplos 3.2 y 3.3.

Relación entre la función de distribución acumulada y la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X:

- ✓ *¿Cómo obtenemos F_X si conocemos a f_X?*

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

- ✓ *¿Cómo obtenemos f_X si conocemos a F_X?*

$$f_X(x) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) - \lim_{h \to 0^-} F(x-h)$$

En el E*jemplo 3.1* si conocemos a F_X y necesitamos conocer a $f_X(1)$.

$$f_X(1) = \lim_{h \to 0^+} F(1-h) - \lim_{h \to 0^-} F(1-h) = F_X(1) - F_X(0) = 0.9975 - 0.9025 = 0.095$$

La longitud del "salto" que da la función F_X desde el valor $F_X(0)$ hasta $F_X(1)$ representa el valor de la función de probabilidad en el valor 1, es decir $f_X(1)$.

CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Generalizando las medidas estudiadas en la Unidad 1, en la que se trabajó sobre muestras obtenidas, veremos distintas medidas que caracterizan a una v.a. discreta con su respectiva función de probabilidad y de distribución acumulada que definen a una población.

ESPERANZA MATEMÁTICA O VALOR ESPERADO

Definición 3.4: Sea X una v.a discreta, X(S) el conjunto de los valores de X, la esperanza:
$E(X) = \mu = \sum_{x} x f_X(x)$ ($\sum_{x}$ expresa sumar sobre todos los elementos de X(S))

Ejemplo 3.4 : El gerente de un almacén en una fábrica ha construido la siguiente distribución de probabilidad para la demanda diaria (número de veces utilizada) para una herramienta en particular:

X	0	1	2
f_x	0.1	0.5	0.4

A la fábrica le cuesta 10$ cada vez que utiliza tal herramienta.

Una situación que puede interesarnos, es conocer ¿Cuál es el valor esperado, el valor promedio, de uso diario de esa herramienta?. Contestar a dicho interrogante es plantearnos sobre la esperanza matemática o valor esperado de la variable en estudio, en este caso, X: “Número de veces que es utilizada la herramienta por día”.

E(X)=0 . f(0) + 1 . f(1) + 2 . f(2) = 0 . 0,1 + 1 . 0,5 + 2 . 0,4 = 1,3 veces de uso por día.
También podemos saber cuál será el costo esperado de uso diario de la herramienta:

E(C) =10*1,3 = 13$ por día.

- ✓ E(X) es un valor promedio y no es necesariamente un posible resultado del experimento. Como nos muestra este ejemplo, es imposible que un día se utilice 1,3 veces dicha herramienta, o se utiliza 1 vez o 2 veces, o ninguna vez.

- ✓ ¿Cómo lo interpretamos? ***Realizando el experimento durante varios días, se espera una frecuencia promedio de uso de 1,3 veces por día.***

Volviendo al *Ejemplo 3.1*

X. “Número de defectuosos”

E(X)=0 . f(0) + 1 . f(1) + 2 . f(2) = 0 . 0,9025 + 1 . 0,095 + 2 . 0,0025 = 0,1

Interpretación: ***Se espera que realizado el experimento de observar dos componentes electrónicos, una y otra vez, se encuentre en promedio 0,1 componente defectuoso.***

Esperanza de una función de variable aleatoria

Sea $g : R \rightarrow R$ y X: S $\rightarrow$ R una variable aleatoria, entonces la función compuesta g o X = g(X) es también una variable aleatoria y la esperanza de g(X) será:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x).f_X(x)$$

Ejemplo: Si X es una v.a. y g(X)= X^2; g(X) es también una v.a y su esperanza,
E(g(X)) = E(X^2) = $\sum_x x^2 f_X(x)$

En *Ejemplo 3.4:*

E(X^2) = 0^2 . f(0) + 1^2 . f(1) + 2^2 . f(2) = 0 . 0,1 + 1 . 0,5 + 4 . 0,4 = 2,1

Propiedades de la esperanza

1. La esperanza de una constante es la misma constante:
Si para todo s $\in$ S se cumple que X(s) = c, donde c es un número real

(P(X = c) = 1), entonces E(X) = c.

Demostración:

$E(X) = \sum_{x} c.f_X(c) =$ (Definición de esperanza)

$= c\sum_{x} f_X(c) =$ (***c*** factor común)

$= c.1 = c$ (Propiedad Fundamental de fc. de probabilidad)

2. Sean g y h dos funciones cualquiera definidas en los reales , g(X) y h(X) también son v.a., y la esperanza de la suma de dos funciones es la suma de las esperanzas de dichas funciones:

E(g(X)+h(X)) = E(g(X)) + E(h(X))

Demostración:

$E(g(X)+h(X)) = \sum_{x}(g(X)+h(X))f_X(x) =$ (esperanza de una fc. de v.a.)

$= \sum_{x}[g(X)f_X(x) + h(X)f_X(x) =$ (distributiva)

$= \sum_{x} g(X)f_X(x) + \sum_{x} h(X)f_X(x) =$ (asociativa de la adición)

$= E(g(X)) + E(h(X))$ (esperanza de una fc. de v.a.)

3. La esperanza de una constante por una función, es el producto de la constante por la esperanza de la función:

E(c g(X)) = c . E(g(X))

Actividad para el alumno: Demuestre la propiedad 3.

VARIANZA

La esperanza de una v.a. X es de especial importancia en estadística, pues describe el lugar donde se centra la distribución de probabilidad. Por sí misma, sin embargo la esperanza no da una descripción adecuada de la forma de la distribución.
Necesitamos caracterizar la variabilidad en la distribución, es decir la dispersión de sus observaciones alrededor de la media.

La medida de variabilidad más importante de una v.a. x se obtiene al hacer $g(X)=(X-\mu)^2$ y obtener su valor esperado.

A dicha medida se la llama *varianza de una v.a. X*, se la denota por var(X) o σ_X^2 .

Definición 3.5 : Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X y esperanza μ. La varianza de X es

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 . f_X(x)$$

Observaciones:

- ✓ La cantidad $x-\mu$ se llama **desvío de una observación** respecto de su media.
- ✓ Cómo estas desviaciones se elevan al cuadrado y luego se promedian, la var(X) será mucho menor para un conjunto de valores de x que sean cercanos a μ que para un conjunto de valores que varíe de forma considerable de μ.
- ✓ Debido a que la unidad de var(X), es el cuadrado de la unidad con que trabaja la v.a. X, para poder interpretar ese dato comparándolo con la E(X) se utiliza la raíz cuadrada positiva de la varianza, σ_X, medida que denominamos **desviación estándar** de la v.a. X..
- ✓ Se puede probar que **Var(X) = E(X^2)-[E(X)]^2**. Está expresión es utilizada generalmente para agilizar el cálculo de la var(X).

Encontramos la varianza en el *Ejemplo 3.4*
Sabemos que E(X) = 1,3 y que E(X^2) = 2,1 luego var(X) = 2,1 – 1,3^2 = 0,41
En el *Ejemplo 3.1:*
Sabemos que E(X)=0.1; luego

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 . f_X(x) =$$

$= (0 – 0,1)^2 *0.9025 + (1 – 0,1)^2 *0.095 + (2 – 0,1)^2 *0.0025 = 0.095$

Propiedades de la varianza

1. La varianza de una constante es igual a cero.
Demostración:
Var(C) = E(C^2)- E (C) ^{2} = (definición de varianza)
= C^2 – C^2 = 0 (Prop, 1 de esperanza)
2. La varianza de una constante por una variable, es igual al producto de la constante elevada al cuadrado por la varianza de la variable:
Var(C.X) = C^2.var(X)
Demostración:
Var(CX) = E[(CX)^2] – [E(CX)]^2 = (Def. de varianza)
= E(C^2.X^2) – [C.E(X)]^2 = (Distr. de potencia, Prop.3 de esperanza).
= C^{2}E(X^2) – C^2. (E(X))^2 = (Prop.3 de esperanza; distrib. de potencia)
= C^2[E(X^2) – (E(X))^2] = (Factor común)
= C^2 . Var (X) (Def. de varianza)

<u>A continuación el alumno deberá constar con sus apuntes de clase para el estudio de diferentes modelos de distribución de variables aleatorias discretas.</u>

UNIDAD N°3 : VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Recordemos que una **variable aleatoria contínua** es cuando una variable aleatoria puede tomar cualquier valor en un intervalo. Por ejemplo, el peso de una persona, el tiempo de duración de un suceso, etc.

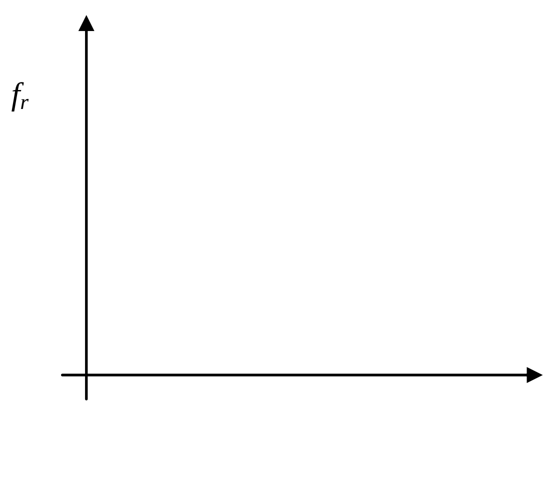
Una variable aleatoria contínua tiene **probabilidad cero** de tomar **exactamente** cualquiera de sus valores.
$P(X = x) = 0$
Esto puede parecer sorprendente, pero analicemos un ejemplo particular:

Consideremos una variable aleatoria cuyos valores son las alturas de todas las personas mayores de 21 años de edad. Entre dos valores cualesquiera, por ejemplo, 164,9 y 165,1 cms, hay infinitos valores de alturas.
Luego la probabilidad de seleccionar una persona al azar que mida exactamente 164,9532 cm de estatura y no sea una del conjunto infinitamente grande de estaturas tan cercanas a 165,1 cms, humanamente medir la diferencia es remota, por ello se asigna probabilidad cero a dicho evento.
Tratamos ahora con intervalos en lugar de valores puntuales.

FUNCION DE DENSIDAD

Supongamos , que medimos dichas alturas, y representamos las medidas obtenidas en un histograma.
Es razonable admitir que tomando más y más observaciones y haciendo intervalos de clases cada vez más finos, el histograma tenderá a una curva suave que describirá el comportamiento a largo plazo de la variable. Llamaremos *función de densidad* a esta función límite.

Gráfico 3.5

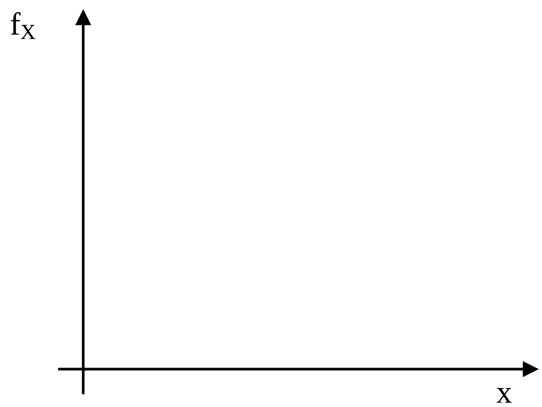


Definición 3.5 : La función f(x) es una función de densidad para la variable aleatoria continua X, definida como $f_x : R \rightarrow R$, si cumple con las siguientes Propiedades Fundamentales:

1. $f(x) \geq 0, \quad para \quad todo \quad x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

Gráfico 3.6



El conocimiento de la función densidad nos permite calcular cualquier probabilidad por integración.
Por ejemplo , la probabilidad de que la variable aleatoria x sea menor que x_0; se obtiene fácilmente calculando el área bajo la curva de la función densidad hasta un punto x_0 mediante: $P(X < x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$.
Esta situación nos conduce a definir la *función de distribución acumulativa de una v.a. contínua.*

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

Definición 3.6: Sea X una variable aleatoria continua definida en el espacio de probabilidad (S, P), su función de distribución acumulativa es una función definida como

F_X: 1R $\rightarrow$ [0 , 1] tal que

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, siendo f_x función de densidad de la variable aleatoria X.

Propiedades de la función de distribución:

1. Se define para todo número real y

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

2. F_X es no decreciente, o creciente en sentido amplio:

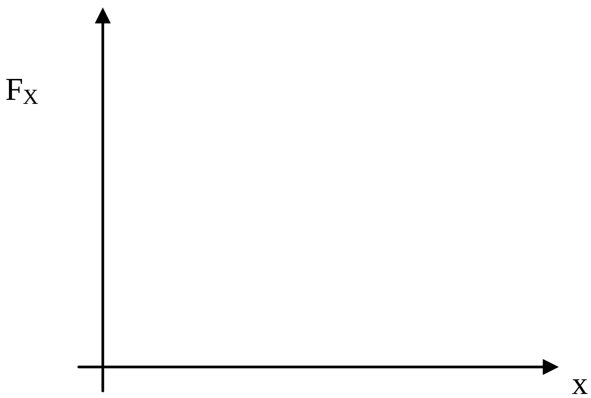
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

3. La función de distribución es una función continua para todo punto x.

$$\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Representación gráfica de la función de distribución para una variable aleatoria continua:

Gráfico 3.7



Observaciones:

- ✓ ***L***a función de densidad en un punto no es igual a la probabilidad en dicho punto, puede f_X tomar valores mayores a 1.
- ✓ Recordar que $f_X(x) \ge 0$ pero $p(X = x) = 0$ para todo valor x de 1R, siendo X una v.a. contínua.
- ✓ Por la segunda observación es fácil observar que :

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b)$$

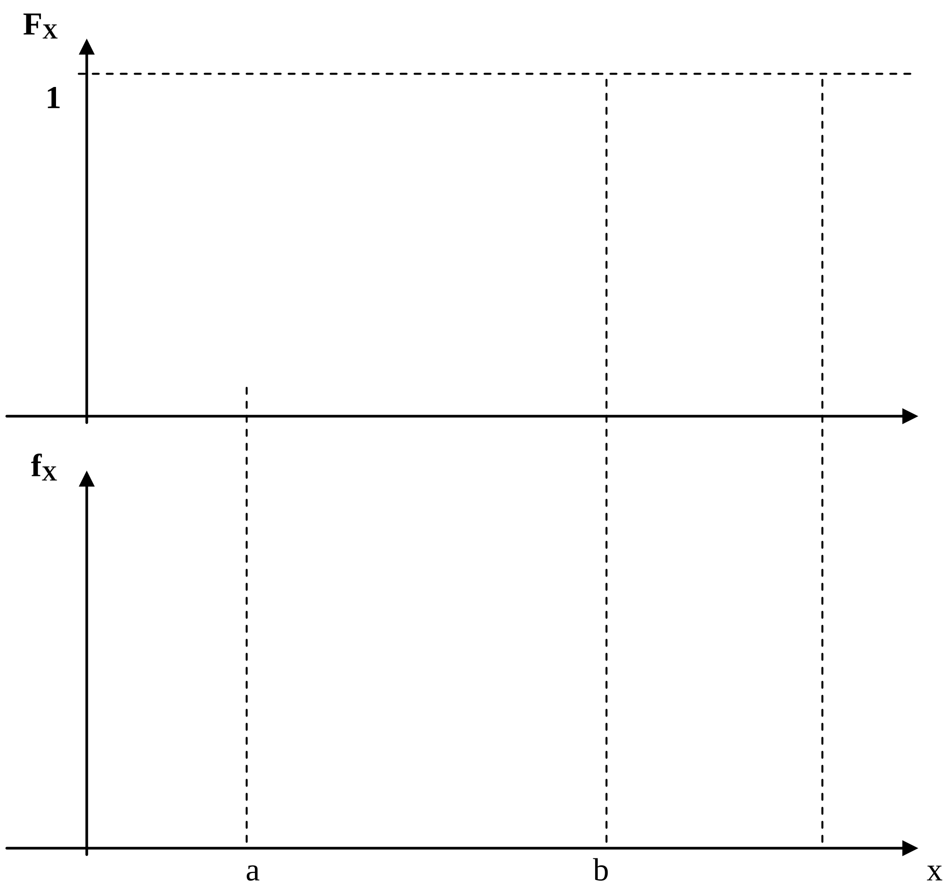
- ✓ $P(a < X < b) = \int_a^b f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f_x(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = F_x(b) - F_X(a)$

Gráfico 3.8

- ✓ Las funciones de densidad y de distribución de v.a. continuas, no se pueden expresar en forma tabular, pero si en cambio mediante fórmulas.
- ✓ Conociendo la función de distribución obtenemos la función de densidad como:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Gráfico 3.9



Ejemplo 3. 6: La proporción de personas que responden a cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua X que tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{2}{5}(x+2)I_{(0,1)}(x)$$

a) Verifique que dicha función es una función de densidad.
b) Encuentre su función de distribución acumulada.
c) Encuentre la probabilidad de que más de ¼ pero menos de ½ de las personas contactadas responden a este tipo de encuestas.
d) Encuentre la probabilidad de que más de ¾ de las personas contactadas responden a la encuesta.

Respuestas:
a)

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{5}(x+2)I_{(0,1)}(x)dx = \frac{2}{5}\int_{0}^{1}(x+2)dx = \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{2}{5}.\frac{5}{2} = 1$$

- Observando el dominio de la función indicadora, los valores de f(x) > 0 , fuera de el f(x) = 0; por lo tanto para todo x real, f(x) ≥ 0

Concluimos entonces que f_X es una función densidad.

b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{5}(u+2)I_{(0,1)}(u)du = \frac{2}{5}\int_{0}^{x}(u+2)du =$$

$$= \frac{2}{5}\left[u^2/2+2u\right]_0^x = \frac{2}{5}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]I_{(0,1)}(x) + I_{[1,+\infty)}(x)$$

Notas:

- ✓ Cuando las variables aleatorias definidas son continuas, el conjunto que caracteriza a la función indicadora, es un intervalo real.
- ✓ Se debe agregar a la función que resulte de integrar, las funciones indicadoras teniendo en cuenta que una función de distribución, cuando x tiende a más infinito es siempre uno. Entonces se adiciona, al final de la fórmula obtenida al integrar, otra función indicadora, que exprese cuando la función toma el valor 1.

c)

$$P(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{5}(x+2)I_{(0,1)}(x)dx = \frac{2}{5}\int_{1/4}^{1/2}(x+2)dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left[x^2/2 + 2x\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{2}{5}\left[\frac{(1/2)^2}{2} + 2\frac{1}{2} - \frac{(1/4)^2}{2} - 2.\frac{1}{4}\right] = 0{,}2375$$

Hay un 23,75% de probabilidad de que más de ¼ pero menos de ½ de las personas contactadas respondan a este tipo de encuestas.

d)

$$P(X > 3/4) = 1 - P(X \leq 3/4) = 1 - F(3/4) = 1 - \frac{2}{5}\left[(3/4)^2/2 + 2(3/4)\right] = 0{,}2875$$

Hay un 28,75 % de probabilidad de que más de ¾ de las personas contactadas respondan a la encuesta.

CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

ESPERANZA MATEMÁTICA O VALOR ESPERADO

Definición 3.4: Sea X una variable aleatoria continua, con función densidad f(x) la esperanza:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Esperanza de una función de variable aleatoria

Sea $g : R \rightarrow R$ y X: S → R una variable aleatoria, entonces la función compuesta g°X = g(X) es también una variable aleatoria y la esperanza de g(X) será:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Ejemplo:

Si X es una v.a. y g(X)= X^2; g(X) es también una variable aleatoria y su esperanza,

E(g(X)) = E(X^2) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$

VARIANZA

Definición 3.5: Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X y esperanza μ. La varianza de X es

$$\operatorname{var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

Observación:

- ✓ Las propiedades dadas para Esperanza y Varianza de una variable aleatoria discreta, se cumplen cuando tenemos variables aleatorias continuas, difiere la demostración, solamente en el hecho, que en vez de expresar sumatorias, ahora consideramos integrales.

Encontramos la esperanza y la varianza en el *Ejemplo 3.6*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x.\frac{2}{5}(x+2)dx = \frac{2}{5}\int_0^1 (x^2+2x)dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left[x^3/3 + 2x^2/2\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left[\frac{1}{3}+1-0\right] = 0{,}53$$

Interpretación: Se espera que un 53% de las personas contactadas, respondan a la encuesta.

$$\operatorname{var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$\left[\int_0^1 x^2\,\frac{2}{5}(x+2)dx\right] - 0{,}53^2 = [\frac{2}{5}\int_0^1 (x^3+2x^2)dx] - 0{,}2809 =$$

$$\left[\frac{2}{5}\left(x^4/4 + 2.x^3/3\right)\right]_0^1 - 0{,}2809 = 0{,}4352$$

Interpretación: Las proporciones de encuestados se dispersan respecto a su valor esperado con una desviación estándar de 0,65 .

OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Momentos de una variable aleatoria

- Momentos no centrados:

Definimos momento de orden k , respecto al origen, de una variable aleatoria X (discreta o continua) a $m_k = E(x^k)$.
k=1; $m_1 = E(X)$

k=2 ; m_2= E(X^2)

- Momentos centrados: Definimos momento centrado de orden k, respecto a la media, de una variable aleatoria X (discreta o continua) a $\mu_k = E[(x-\mu)^k]$

K=1 $\mu_1 = E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0$

K=2 $\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \text{var}(X)$

Las siguientes medidas, describen otras características de una población dada:

Coeficiente de asimetría

$$CA = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Coeficiente de apuntamiento

$$CA_p = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Coeficiente de variación

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

Percentil de orden p

Es el valor x_p que toma la variable aleatoria X , discreta, que verifica.

$$P(X < x_p) \leq p$$

$$P(X \leq x_p) \geq p$$

Si la variable aleatoria X es continua las dos condiciones anteriores equivalen a F(x_p) = p.

Mediana

Me =$x_{0.5}$

Modo

Cuando las variables son discretas, corresponde al valor de v.a. cuya función de probabilidad toma el valor mayor.
Cuando las variables son contínuas, corresponde al máximo de la función de densidad.

ACOTACIÓN DE TCHEBYCHEV

Conocer la esperanza y la desviación estándar de una variable aleatoria contínua o discreta, nos permite calcular la proporción de la distribución que está situada entre $\mu \pm k\sigma$, siendo k una constante positiva. Se verifica que:

$$\boxed{P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}}$$

para cualquier valor de k.

La fórmula dada, nos dice que para cualquier variable aleatoria, discreta o contínua, y desconociendo su distribución puedo asegurar que:
Hay una probabilidad del 75% de que un dato elegido al azar de mi población se encuentre en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$, (k = 2).
Hay una probabilidad del 89% de que un dato elegido al azar de mi población se encuentre en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$, (k = 3) .
Hay una probabilidad del 94% de que un dato elegido al azar de mi población se encuentre en el intervalo $\mu \pm 4\sigma$, (k=4).

A continuación (en clase) veremos distintos modelos con nombre propio que responden a variables aleatorias continuas.