PRÁCTICO Nº 7: ***PRUEBAS DE HIPÓTESIS***

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

1)

a)

H_0 : El individuo es inocente
H_1 : El individuo no es inocente
α: es la probabilidad de rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera
α: es la probabilidad de creer que es culpable cuando en realidad es inocente
β : es la probabilidad de aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa
β : es la probabilidad de creer que es inocente cuando en realidad es culpable
La justicia considera más grave, el error de tipo I, es decir, la justicia prefiere cometer el error de tipo II.

b)

H_0 : El dispositivo anticontaminante es eficaz
H_1 : El dispositivo anticontaminante no es eficaz
Error tipo I : se comete al rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera
Se cometería **error tipo I** cuando se rechace que el dispositivo es eficaz (es decir, se cree que no es eficaz) pero en realidad lo es.
Error tipo II : se comete al aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa
Se cometería **error tipo II** cuando se acepte que el dispositivo es eficaz pero en realidad no lo es.

c)

H_0 : El hábito de fumar y el cáncer de pulmón son sucesos independientes
H_1 : El hábito de fumar y el cáncer de pulmón no son sucesos independientes
Es preferible cometer error tipo I, es decir, se cometería más error al aceptar que el hábito de fumar no produce cáncer y seguir fumando cuando en realidad eso es falso.

H_0 : La maquinaria nueva es mejor que la existente
H_1 : La maquinaria nueva no es mejor que la existente
Es preferible cometer error tipo I, es decir, rechazar que la nueva maquinaria es mejor, aunque sea cierto a creer que es mejor, e invertir en una nueva maquinaria que no es mejor.

d)

X:"Cantidad de personas alérgicas a ciertos productos lácteos"
$X \sim$ Binomial (n ; p)
$\hat{P} \sim$ Normal (μ = p ; σ^2= p.q/n)
H_0 : p = 0,3
H_1: p $\geq$ 0,3

Error tipo I : se comete al rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera
Se cometería **error tipo I** cuando se concluya que al menos el 30% del público es alérgico, cuando en realidad el 30% es alérgico.
Error tipo II : se comete al aceptar la H_0 cuando en realidad es falsa
Se cometería **error tipo II** cuando se concluya que el 30% del público es alérgico, cuando en realidad más del 30% es alérgico.

e)

e.1) H_0 : El curso de capacitación es eficaz
H_1 : El curso de capacitación no es eficaz

e.2) H_0 : El curso de capacitación es eficaz
H_1 : El curso de capacitación no es eficaz

f)

f.1) H_0 : La empresa no es culpable
H_1 : La empresa es culpable

f.2) H_0 : La empresa es culpable
H_1 : La empresa no es culpable

2)

X:"Elongación del hilo para tapicería"
X ~ Desconocida
$\overline{X} \sim$ Normal ($\mu_{\overline{x}} = \mu$; $\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$)
$H_0 : \mu = 12$ kg
$H_1 : \mu < 12$ kg

a)

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2{,}33 \Rightarrow \quad \overline{x}_c = -2{,}33 . \dfrac{0{,}5}{\sqrt{36}} + 12 = 11{,}806$ kg

Criterio de decisión:
Se acepta la H_0 si el z observado es mayor o igual al z_c.
Se rechaza la H_0 si el z observado es menor a z_c.

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = -1{,}64$
Criterio de decisión:
Se acepta la H_0 si el z observado es mayor o igual a z_c.
Se rechaza la H_0 si el z observado es menor a z_c.

b)

Para un $\alpha = 0{,}01$, **acepto** la **H_0**, o sea, creo que la elongación media del hilo es de 12 kg y que cualquier variación se debe a las variaciones propias del azar y no a un cambio significativo en el valor medio de la elongación.
Para un $\alpha = 0{,}05$, **rechazo** la **H_0**, o sea, creo que la elongación media del hilo es significativamente menor que 12 kg.
Es obvio ver que al disminuir el error tipo I, aumenta la región de aceptación y con ella las probabilidades de aceptar la hipótesis nula.

c)

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2{,}33 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_c = -2{,}33 . \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} + 12 = 11{,}88$ kg

Criterio de decisión:
Se acepta la H_0 si el z observado es mayor o igual al z_c.
Se rechaza la H_0 si el z observado es menor a z_c.

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = -1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_c = -1{,}64 . \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} + 12 = 11{,}92$ kg

Criterio de decisión:
Se acepta la H_0 si el z observado es mayor o igual a z_c.
Se rechaza la H_0 si el z observado es menor a z_c.
Para un $\alpha = 0{,}01$ y para $\alpha = 0{,}05$, rechazo la H_0, o sea, creo que la elongación media del hilo es significativamente menor que 12 kg, ya que en ambos casos, la media muestral de 11,83 kg es menor a los respectivos valores críticos.

d)

$\alpha = 0{,}01$

$\beta = P(\bar{X} > 11{,}806 \text{ kg} / \mu = 11{,}7 \text{ kg}) =$

$= P\left(Z > \frac{11{,}806 - 11{,}7}{\frac{0{,}5}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z > 1{,}27) = 0{,}10204$

Tenemos una probabilidad de 0,10204 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 12$ kg) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 11{,}7$ kg). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,89796. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,89796.

$\alpha = 0{,}05$

$\beta = P(\bar{X} > 11{,}86 \text{ kg} / \mu = 11{,}7 \text{ kg}) =$

$= P\left(Z > \frac{11{,}86 - 11{,}7}{\frac{0{,}5}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z > 1{,}92) = 0{,}02743$

Tenemos una probabilidad de 0,02743 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 12$ kg) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 11{,}7$ kg). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,97257. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,97257.

e)

$\alpha = 0{,}01$

$\beta = P(\bar{X} > 11{,}88 \text{ kg} / \mu = 11{,}7 \text{ kg}) =$

$= P\left(Z > \frac{11{,}88 - 11{,}7}{\frac{0{,}5}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z > 3{,}6) = 0{,}00016$

Tenemos una probabilidad de 0,00016 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,99984. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,99984.

$\alpha = 0,05$

$\beta = P(\overline{X} > 11,92 \text{ kg} / \mu = 11,7 \text{ kg}) =$

$$= P\left(Z > \frac{11,92 - 11,7}{\frac{0,5}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z > 4,4) = 0,00001$$

Tenemos una probabilidad de 0,00001 de aceptar la hipótesis nula (μ_{Ho} = 12 kg) cuando en realidad es falsa (μ_{real} = 11,7 kg). Esto indica que la potencia de la prueba, 1 - β, es de 0,99999. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,99999.

3) X:"Volumen de agua oxigenada de los frascos"

X ~ Desconocida

$\overline{X}$ ~ Normal ($\mu_{\overline{x}} = \mu$; $\sigma_{\overline{x}} = \sigma / \sqrt{n}$) Por el teorema del límite central, ya que n es grande (n > 30)

Según los datos del problema:

$\mu = 100 \text{ cm}^3$

n = 144 frascos

$\overline{x}_o = 101 \text{ cm}^3$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu = 100 \text{ cm}^3$

$H_1 : \mu > 100 \text{ cm}^3$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad z_c = 1,64 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 1,64 . \frac{4}{\sqrt{144}} + 100 = 100,55 \text{ cm}^3$$

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:

Se rechaza la H_0, es decir, <u>se ha producido un aumento significativo</u> en el volumen de agua oxigenada de los frascos.

a) El valor P es el menor nivel (de significancia) que hace que el valor observado "caiga" en la zona de rechazo, es decir, en el que el valor observado de la estadística de prueba es significativo.

Entonces,

Valor P = $P(\overline{X} > \overline{x}_o)$, porque la hipótesis alternativa es $\mu > 100 \text{ cm}^3$

Valor P = $P(\overline{X} > \overline{x}_o) = P(Z > z_o) = P\left(Z > \dfrac{101 - 100}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(Z > 3) = 0{,}00135$

A partir de un nivel de significancia de 0,00135, el valor observado en la muestra caería en la zona de rechazo.
El nivel de significancia de referencia (en este problema) es $\alpha = 0{,}05$, y como el valor P es menor que α, nuestra decisión debe ser la de rechazar la hipótesis nula (como lo hicimos en el inciso a).

b) $\alpha = 0{,}05$

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}55 \text{ cm}^3 / \mu = 101{,}2 \text{ cm}^3) =$

$= P\left(Z < \dfrac{100{,}55 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(Z < -1{,}95) = 0{,}02559$

Tenemos una probabilidad de 0,02559 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 100$ cm^3) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 101{,}2$ cm^3). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,97441. Diremos entonces que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (¡no cometemos error!) es de 0,97441.

c) $\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}33 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 2{,}33 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{144}} + 100 = 100{,}78 \text{ cm}^3$

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}78 \text{ cm}^3 / \mu = 101{,}2 \text{ cm}^3) =$

$= P\left(Z < \dfrac{100{,}78 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{144}}}\right) = P(Z < -1{,}26) = 0{,}10383$

Tenemos una probabilidad de 0,10383 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 100$ cm^3) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 101{,}2$ cm^3). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,89617, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,89617.

- ¿Qué sucede con el valor de β al disminuir el valor de α?

n = 144	$\alpha = 0{,}05$ $\beta = 0{,}02559$	β aumenta al disminuir α.
	$\alpha = 0{,}01$ $\beta = 0{,}10383$	

d) Según los datos del problema:
$\mu = 100$ cm^3
n = 225 frascos
$\overline{x}_o = 101$ cm^3

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \mu = 100$ cm^3
$H_1 : \mu > 100$ cm^3

- Para un nivel de significancia de 0,05, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = 1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_c = 1{,}64.\ \frac{4}{\sqrt{225}} + 100 = 100{,}44\ cm^3$

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, <u>se ha producido un aumento significativo</u> en el volumen de agua oxigenada de los frascos.

El valor de β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm^3, sería:

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}44\ cm^3 / \mu = 101{,}2\ cm^3) =$

$= P\left(Z < \frac{100{,}44 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{225}}}\right) = P(Z < -2{,}85) = 0{,}00219$

Tenemos una probabilidad de 0,00219 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 100\ cm^3$) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 101{,}2\ cm^3$). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,99781, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,99781.

- Para un nivel de significancia de 0,01, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}33 \quad \Rightarrow \quad x_c = 2{,}33.\ \frac{4}{\sqrt{225}} + 100 = 100{,}62$

cm^3

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, <u>se ha producido un aumento significativo</u> en el volumen de agua oxigenada de los frascos.

El valor de β para el caso donde el volumen medio verdadero es de 101,2 cm^3, sería:

$\beta = P(\overline{X} < 100{,}62\ cm^3 / \mu = 101{,}2\ cm^3) =$

$= P\left(Z < \frac{100{,}62 - 101{,}2}{\frac{4}{\sqrt{225}}}\right) = P(Z < -2{,}18) = 0{,}01463$

Tenemos una probabilidad de 0,01463 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 100\ cm^3$) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 101{,}2\ cm^3$). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,98537, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,98537.

n = 225	$\alpha = 0{,}05$ $\beta = 0{,}00219$	β aumenta al disminuir α, y viceversa, pero mucho menos al aumentar el tamaño de la muestra.
	$\alpha = 0{,}01$ $\beta = 0{,}01463$	

e)

Para mantener pequeños ambos errores es necesario aumentar el tamaño de la muestra.

4) X:"Voltaje de salida de una fuente de alimentación"

$X \sim$ Normal (μ = 5 V ; σ = 1 V)

$\overline{X} \sim$ Normal ($\mu_{\overline{x}} = \mu$; $\sigma_{\overline{x}} = \sigma / \sqrt{n}$) Por provenir la muestra de una distribución normal

a) μ = 5 V

n = 64 fuentes

$\overline{x}_o$ = 5,3 V

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu = 5$ V

$H_1 : \mu \neq 5$ V

Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:

$$\Rightarrow \quad \overline{x}_{c1} = -1{,}96 . \frac{1}{\sqrt{64}} + 5 = 4{,}755 \text{ V}$$

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = \pm 1{,}96$

$$\Rightarrow \quad \overline{x}_{c2} = 1{,}96 . \frac{1}{\sqrt{64}} + 5 = 5{,}245 \text{ V}$$

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor crítico 2 es menor que el valor observado en la muestra, es decir, el valor observado no se encuentra entre los valores críticos.

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,05, hay diferencias significativas que hacen creer que <u>el voltaje de salida medio no es de 5 V</u>.

b)

$$\text{Valor P} = 2 . P(\overline{X} > \overline{x}_o) = 2 . P(Z > z_o) = 2 . P\left(Z > \frac{5{,}3 - 5}{\frac{1}{\sqrt{64}}}\right) = 2 . P(Z > 2{,}4) =$$

$$= 2 . 0{,}0082 = 0{,}0164$$

A partir de un nivel de significancia de 0,0164, el valor observado en la muestra caería en la zona de rechazo.

El nivel de significancia de referencia (en este problema) es $\alpha = 0{,}05$, y como el valor P es menor que α, nuestra decisión debe ser la de rechazar la hipótesis nula (como lo hicimos en el inciso a).

c)
El valor de β para el caso en que la media real fuera de 4,8 V, sería:

$\beta = P(4{,}755 \text{ V} < \overline{X} < 5{,}245 \text{ V} / \mu = 4{,}8 \text{ V}) =$

$$= P\left(\frac{4{,}755 - 4{,}8}{\frac{1}{\sqrt{64}}} < Z < \frac{5{,}245 - 4{,}8}{\frac{1}{\sqrt{64}}} \right) = P(-0{,}36 < Z < 3{,}56) = 0{,}64039$$

Tenemos una probabilidad de 0,64039 de aceptar la hipótesis nula ($\mu_{Ho} = 5$ V) cuando en realidad es falsa ($\mu_{real} = 4{,}8$ V). Esto indica que la potencia de la prueba, $1 - \beta$, es de 0,35961, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa es de 0,35961.

5) X:"Resistencia a la adhesión de especímenes de aleación U-700"

X ~ Normal (μ ; σ)

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t \text{ con n-1 grados de libertad}$$

Según los datos del problema:
μ = 10 Mpa
n = 22 especímenes
$\overline{x}_o$ = 13,71 MPa
s_o = 3,55 MPa

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \mu = 10$ MPa
$H_1 : \mu > 10$ MPa

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad t_{c;21} = 1{,}721 \quad \Rightarrow \quad t_c = 1{,}721 . \frac{3{,}55}{\sqrt{22}} + 10 =$ **11,30 MPa**

Por lo que decidimos **rechazar** la **H_0**, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,05, <u>la carga de falla promedio es mayor que 10 MPa</u>.

6) X:"Cantidad de controladores defectuosos"

$\hat{P}$ ~ Normal ($\mu = p$; $\sigma^2 = p.q/n$)

Según los datos del problema:
x = 4 n = 200 p = 4/200 = 0,02

El estadístico de prueba es $z_o = \dfrac{\bar{p} - p}{\sqrt{p.(1-p)/n}} = \dfrac{0{,}02 - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05.(1-0{,}05)/200}} = -1{,}95$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : p = 0{,}05$
$H_1 : p < 0{,}05$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad z_c = -1{,}64$
Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los valores de la muestra) es menor que el valor crítico ($z_o < z_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que la fracción de artículos defectuosos p es significativamente menor del 5% con una probabilidad de 0,05 de cometer un error. Luego, podemos decir que el proceso tiene el nivel de calidad que se requiere.

7) X:"Volumen de llenado de las botellas con detergente"
X ~ Normal (μ ; σ)

$(n-1) . \dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$ con n-1 grados de libertad

Según los datos del problema:
n = 20 botellas
$s^2 = 0{,}0153$ onzas^2
$\sigma^2 = 0{,}01$ onzas^2

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{(20-1).0{,}0153}{0{,}01} = 29{,}07$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2 = 0{,}01$
$H_1 : \sigma^2 > 0{,}01$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{c;\ \alpha=0{,}05, n-1=19} = 30{,}144$
Por lo que decidimos aceptar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos de la muestra) es menor que el valor crítico ($\chi^2_o < \chi^2_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay evidencia fuerte que indique que la varianza del volumen de llenado sea mayor que 0,01 onzas^2. La varianza del volumen de llenado no es significativamente mayor que 0,01 onzas^2.

8) X:"Incremento del ritmo cardíaco al realizar una tarea extenuante"

X ~ Normal (μ ; σ)

(n-1) . $\frac{s^2}{\sigma^2}$ ~ χ^2 con n-1 grados de libertad

Según los datos del problema:
n = 25 trabajadores
s = 4,9 puls./min
σ^2 = 30 (puls./min)^2

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \frac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \frac{(25-1).4,9^2}{30} = 19,208$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2 = 30$
$H_1 : \sigma^2 < 30$

Test: Rechazo Ho si solo si $\chi^2_o < \chi^2_c$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{c;\ \alpha=0,05, n-1=24} = 13,848$

Por lo que decidimos no rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos de la muestra) es mayor que el valor crítico ($\chi^2_o > \chi^2_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- No se rechaza la H_0, es decir, se concluye que la varianza de las pulsaciones por minuto, mientras se realiza una tarea extenuante, no es menor a 30.

p-valor = 0,2592

9) X:"Tiempo que tarda en llegar al lugar solicitado una ambulancia"

X ~ Normal (μ ; σ)

(n-1) . $\frac{s^2}{\sigma^2}$ ~ χ^2 con n-1 grados de libertad

Según los datos del problema:
n = 10
s = 2,2 min

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \frac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \frac{(10-1).2,2^2}{4} = 10,89$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2 = 4$ min^2
$H_1 : \sigma^2 \neq 4$ min^2

Para un nivel de significancia de 0,01, los valores críticos son:

$\chi^2_{c1\ ;\ 1-\alpha/2=0,995,n-1=9} = 1,735$

$\chi^2_{c2\ ;\ \alpha/2\ =\ 0,005,n-1=9} = 23,589$

Por lo que decidimos aceptar la H_0, ya que el valor observado (calculado con datos muestrales) se encuentra entre los valores críticos ($\chi^2_{c1} < \chi^2_o < \chi^2_{c2}$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay diferencias significativas como para creer que la varianza es distinta a 4 minutos^2.

10)

11) El peso de las prótesis producidos por un fabricante tiene una media de 84 g y una desviación típica de 4,5 g. Un nuevo equipo de fabricantes aspira a que el peso disminuya, para esto ensaya con un nuevo producto en una muestra de 50 prótesis y se encuentra que el peso es de 83 g.

a) ¿Puede sostenerse que hay una disminución del peso de las prótesis al nivel de significancia 0,01?

b) Calcule el valor p y verifique la decisión tomada anteriormente.

a) X: "Peso de las prótesis producidas por un fabricante, en g".

$X \sim$ Desconocida ($\mu = 84$; $\sigma = 4,5$)

$\overline{X} \sim$ Normal ($\mu_{\bar{x}} = \mu$; $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$) por TLC

Según los datos del problema:

n = 50 prótesis

$\bar{x}_o = 83$ g

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu = 84$ g

$H_1 : \mu < 84$ g

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0,01 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2,3264 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2,3264.\frac{4,5}{\sqrt{50}} + 84 = \mathbf{82,52\ g}$

Por lo que decidimos **no rechazar** la $\mathbf{H_0}$, ya que el valor crítico es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:

- No se rechaza la H_0, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,01, que no hay evidencia significativa de que el peso de las prótesis promedio haya disminuido .

b) p-valor = $P(\overline{X} < \bar{x}_o) = P(\overline{X} < 83) = 0,0581$

$p > \alpha$, por lo tanto No se rechaza la H_0

12)

X: “Peso de elementos de precisión, en g”.
X ~ Desconocida (μ ; σ)
$\overline{X}$ ~ Normal ($\mu_{\overline{x}}$ = μ ; $\sigma_{\overline{x}}$ = σ/ $\sqrt{n}$) por TLC

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \text{t con n-1 grados de libertad}$$

Según los datos del problema:
μ = 12,5 g
n = 31 elementos
$\overline{x}_o$ = 12,02 g
s_o = 1,74 g

Las hipótesis propuestas son:
H_0 : μ = 12,5 g
H_1 : μ ≠ 12,5 g

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
α = 0,05 ⇒ $t_{c1;30}$ = -2,0423 ⇒ $t_{c1} = -2{,}0423.\frac{1{,}74}{\sqrt{31}} + 12{,}5 =$ **11,86**
⇒ $t_{c2;30}$ = 2,0423 ⇒ $t_{c2} = 2{,}0423.\frac{1{,}74}{\sqrt{31}} + 12{,}5 =$ **13,14**

Por lo que decidimos **no rechazar** la **H_0**, ya que el valor crítico uno es menor que el valor observado en la muestra.

Según la conclusión, interpretamos:
- No se rechaza la H_0, es decir, se concluye que con un nivel de significancia de 0,05, que <u>no hay evidencia significativa para suponer que el peso medio deseado de los elementos de precisión sea diferente a 12,5 g</u>. Por lo tanto el comprador deberá aceptar el embarque basado en la inspección de la muestra.

13)

X: “Cantidad de parejas de cierta región que utilizaron algún método de control natal”.
$\hat{P}$ ~ Normal (μ = p ; σ^2= p.q/n)

Según los datos del problema:
x = 21 n = 120 p = 21/120 = 0,175

El estadístico de prueba es $z_o = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{p.(1-p)/n}} = \frac{0{,}175-0{,}25}{\sqrt{0{,}25.(1-0{,}25)/120}} = -1{,}90$

Las hipótesis propuestas son:
H_0 : p = 0,25
H_1 : p < 0,25

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = -2{,}3264$
Por lo que decidimos no rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los valores de la muestra) es mayor que el valor crítico ($z_c < z_o$).

Según la conclusión, interpretamos:

- No se rechaza la H_0, es decir, se concluye que el trabajador social no tiene razón. <u>No hay evidencia significativa para suponer que menos del 25 % de las parejas de cierta región han utilizado por lo menos una vez alguna forma de control natal.</u>

14)

a) X: "Número de nacimientos de mujeres en un período determinado".
$\hat{P} \sim$ Normal ($\mu = p$; $\sigma^2 = p.q/n$)

Según los datos del problema:
x = 1580 n = 2000 p = 1580/2000 = 0,79
El estadístico de prueba es $z_o = \dfrac{\bar{p}-p}{\sqrt{p.(1-p)/n}} = \dfrac{0{,}79-0{,}50}{\sqrt{0{,}50.(1-0{,}50)/2000}} = 25{,}94$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : p = 0{,}5$
$H_1 : p > 0{,}5$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}3264$
Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los valores de la muestra) es mayor que el valor crítico ($z_c < z_o$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que <u>la proporción de nacimientos de niñas es significativamente mayor del 50%</u> con una probabilidad de 0,01 de cometer un error.

b)
Según los datos del problema:
n = 300 p = 0,79
El estadístico de prueba es $z_o = \dfrac{\bar{p}-p}{\sqrt{p.(1-p)/n}} = \dfrac{0{,}79-0{,}5}{\sqrt{0{,}5.(1-0{,}5)/300}} = 10{,}05$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : p = 0{,}5$
$H_1 : p > 0{,}5$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2{,}3264$

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los valores de la muestra) es mayor que el valor crítico ($z_c < z_o$).

Según la conclusión, interpretamos:

Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que la proporción de nacimientos de niñas es significativamente mayor del 50% con una probabilidad de 0,01 de cometer un error.

15)

X: “Duración de batería para automóviles, en años”.

X ~ Normal (μ ; σ)

$(n-1) \cdot \dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$ con n-1 grados de libertad

Según los datos del problema:
n = 10 baterías
s = 1,2 años
σ = 0,9 años

El estadístico de prueba es $\chi^2_o = \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{(10-1).1.44}{0{,}81} = 16$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : \sigma^2 = 0{,}81$
$H_1 : \sigma^2 > 0{,}81$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{c;\,\alpha=0{,}05,n-1=9} = 16{,}919$

Por lo que decidimos aceptar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos de la muestra) es menor que el valor crítico ($\chi^2_o < \chi^2_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay evidencia fuerte que indique que la varianza de la duración de las baterías para automóviles sea mayor que 0,81 años^2. La desviación estándar de la duración de las baterías no es significativamente mayor que 0,9 años.

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA DOS POBLACIONES

16) X_1:"Tiempo de secado de la pintura con contenido químico estándar"

X_2:" Tiempo de secado de la pintura con nuevo ingrediente secante"

$X_1 \sim$ Normal (μ_1 ; $\sigma_1 = 8$ min)

$X_2 \sim$ Normal (μ_2 ; $\sigma_2 = 8$ min)

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim$ Normal ($\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$; $\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$) Por provenir de muestras normales y tener varianzas poblacionales conocidas

Según los datos del problema:

$n_1 = 35$ placas	$\overline{x}_{1o} = 116$ min	$\sigma_{1o} = 8$ min
$n_2 = 35$ placas	$\overline{x}_{2o} = 112$ min	$\sigma_{2o} = 8$ min

El estadístico de prueba es: $z_o = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{121-112}{\sqrt{\frac{64}{35}+\frac{64}{35}}} = 4,71$

Las hipótesis propuestas son:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:

$\alpha = 0,01 \quad \Rightarrow \quad z_c = 2,33$

Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales, ahora dado en términos de z) es mayor que el valor crítico (obviamente dado en términos de z, para poder comparar).

Según la conclusión, interpretamos:

(1) Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que <u>la adición del nuevo ingrediente a la pintura sí disminuye de manera significativa el tiempo de secado</u>.

17)

X_1:"Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 1"

X_2:" Rendimiento de un proceso químico utilizando el catalizador 2"

$X_1 \sim$ Normal (μ_1 ; σ_1)

$X_2 \sim$ Normal (μ_2 ; σ_2)

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim \text{ F con } n_1 - 1 \text{ y } n_2 - 1 \text{ grados de libertad}$$

Según los datos del problema:

$n_1 = 8$ $\bar{x}_{1o} = 95{,}142$ $s_{1o} = 2{,}39$

$n_2 = 8$ $\bar{x}_{2o} = 92{,}733$ $s_{2o} = 2{,}98$

El estadístico de prueba es: $F_o = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{2{,}39^2}{2{,}98^2} = 0{,}6432$

Las hipótesis propuestas, para analizar la igualdad de las varianzas, son:

$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$

$H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$

Para un nivel de significancia de 0,10, los valores críticos son:

$F_{c1\,;\,\alpha/2;\,n1-1,n2-1} = F_{c1\,;\,1-\alpha/2=0,95;\,n1-1=7,n2-1=7} = 1/F_{\alpha/2=0,05;\,n2-1=7,n1-1=7} = 1/3{,}787 = 0{,}264$

$F_{c2\,;\,\alpha/2;\,n1-1,n2-1} = F_{c2\,;\,\alpha/2=0,05;\,n1-1=7,n2-1=7} = 3{,}787$

Por lo que decidimos aceptar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales) se encuentra entre los valores críticos ($F_{c1} < F_o < F_{c2}$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se acepta la H_0, es decir, se concluye que no hay diferencia significativa entre las varianzas poblacionales. Luego, para resolver nuestro problema, debemos suponer $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p.\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim \text{ t-Student con } n_1 + n_2 - 2 \text{ grados de libertad}$$

- Según los datos del problema:

  $n_1 = 8$ $\bar{x}_{1o} = 95{,}142$ $s_{1o} = 2{,}39$

  $n_2 = 8$ $\bar{x}_{2o} = 92{,}733$ $s_{2o} = 2{,}98$

  El estadístico de prueba es $t_o = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p.\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

  siendo $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} =$

  $$\frac{(8-1)(2{,}39)^2 + (8-1)(2{,}98)^2}{8+8-2} = 7{,}3$$

  Entonces $t_o = \dfrac{95{,}142 - 92{,}233}{2{,}7.\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}}} = 2{,}1539$

  Las hipótesis propuestas son:

  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$

  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Para el nivel de significancia indicado, los valores críticos son:
$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad t_{c\,;\,n1+n2-2=14} = \pm 2,145$
Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los datos muestrales) es mayor que el valor crítico ($t_o > t_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

- Se rechaza la H_0, es decir, se debería suponer que los catalizadores no proveen al proceso químico un rendimiento promedio similar. Hay una evidencia fuerte que permite concluir que el catalizador 2 dará como resultado un rendimiento promedio significativamente diferente del obtenido con el uso del catalizador 1. Más específicamente, el catalizador 2 provee al proceso químico un rendimiento medio significativamente menor que el catalizador 1.

18) X_1:"Cantidad de lentes pulidas con la solución 1 que resultaron satisfactorias"
X_2:" Cantidad de lentes pulidas con la solución 2 que resultaron satisfactorias"
$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim$ Normal ($\mu = p_1 - p_2$; $\sigma^2 = p_1.q_1/n_1 + p_2.q_2/n_2$)

Según los datos del problema:
$x_1 = 253 \qquad n_1 = 300 \qquad p_1 = 253/300 = 0,84333...$
$x_2 = 196 \qquad n_2 = 300 \qquad p_2 = 196/300 = 0,65333...$

El estadístico de prueba es $z_o = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{p.(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$

El valor de la estimación combinada de p es:
$p = (x_1+x_2)/(n_1+n_2) = 449/600 = 0,748333...$

Entonces $z_o = \dfrac{0,8433 - 0,6533}{\sqrt{0,7483.(1-0,7483)\left(\dfrac{1}{300}+\dfrac{1}{300}\right)}} = 5,36$

Las hipótesis propuestas son:
$H_0 : p_1 = p_2$
$H_1 : p_1 \neq p_2$

Para el nivel de significancia indicado, el valor crítico es:
$\alpha = 0,01 \quad \Rightarrow \quad z_c = \pm 2,58$
Por lo que decidimos rechazar la H_0, ya que el valor observado (calculado con los valores muestrales) es mayor que el valor crítico ($z_o > z_c$).

Según la conclusión, interpretamos:

(1) Se rechaza la H_0, es decir, se concluye que existe evidencia fuerte que apoya la afirmación de que los dos fluidos para pulir son significativamente diferentes, con un nivel de significancia de 0,01. El fluido 1 produce una fracción mayor de lentes no defectuosas.