DISTRIBUCIONES CONTINUAS

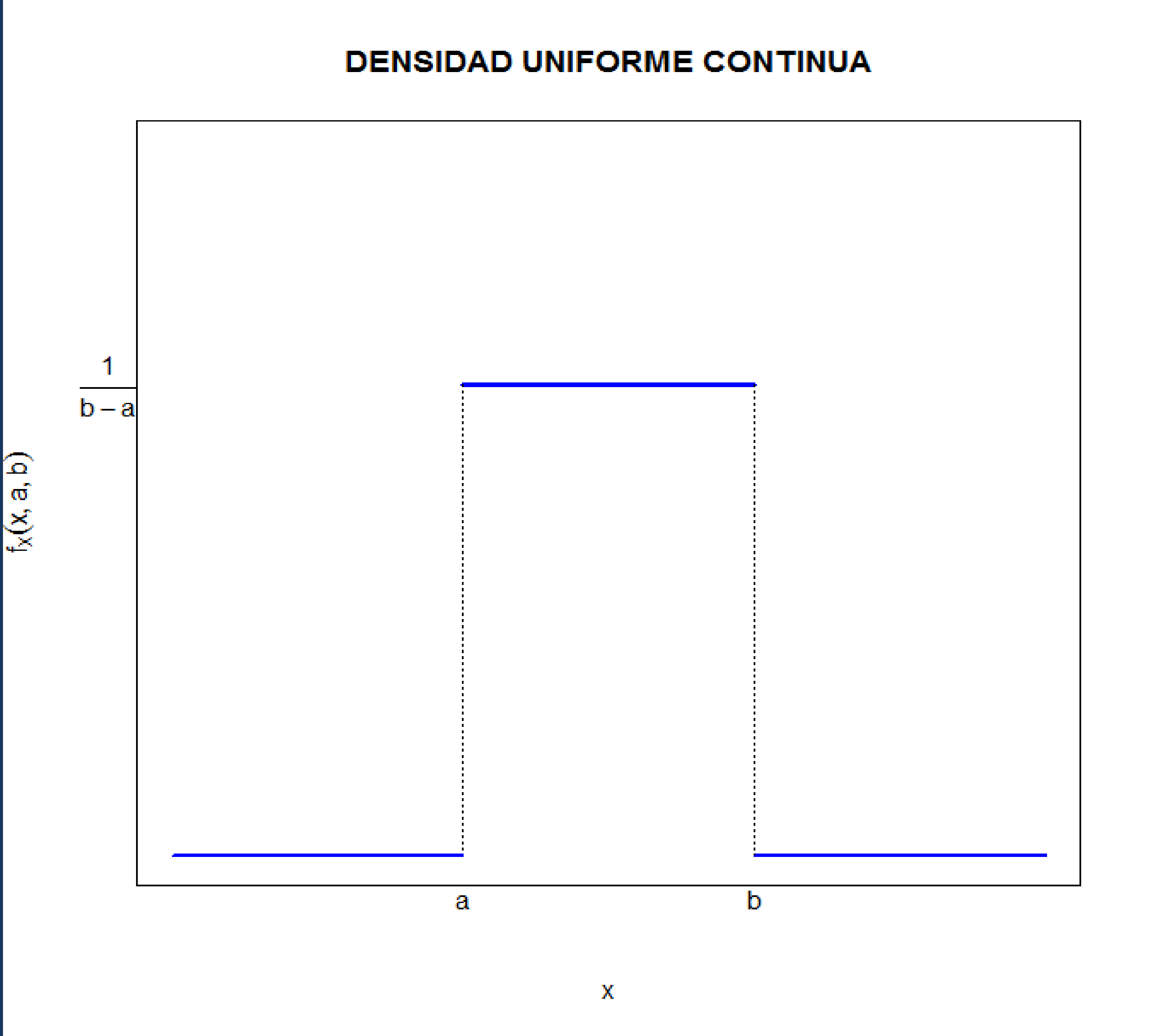
Modelo uniforme continuo
Modelo Normal-Modelo Gamma
Modelo Exponencial Negativo
El modelo Beta- El modelo t-Student
El modelo f de Fisher-Snedecor

Modelo Uniforme continuo

- Una v. a. X tiene una distribución uniforme en el   [a , b] si su función densidad en cada punto x es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a} \quad si\ a < x \le b}$$

X ~ Uniforme(a; b)

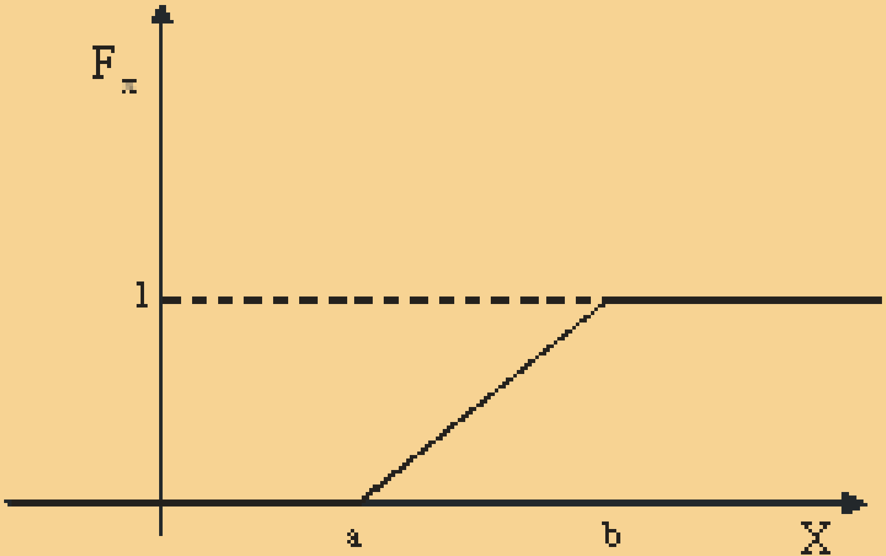


DENSIDAD UNIFORME CONTINUA
1
b – a
fX(x, a, b)
a
b
x

Función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \int_a^x f_X(u)\,du = \frac{1}{b-a}\int_a^x du = \frac{1}{b-a}u\ \Big]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Modelo Uniforme continuo

- Sean x1, x2 dos valores del intervalo [a; b] tales que x1 < x2,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x1}^{x2} \frac{1}{b-a}\, du = (x_2 - x_1)\frac{1}{b-a}$$

- Esperanza

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \frac{1}{b-a} \quad dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x\, dx = \frac{a+b}{2}$$

- Varianza

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x^2\, dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo de Distribución Uniforme

- La cantidad diaria, en litros, de café que despacha una máquina ubicada en la sala de espera del aeropuerto de Mendoza es una v.a. X que tiene distribución uniforme en el intervalo (7,10).

a. Encuentre la probabilidad de que en un determinado día la cantidad de café despachada por la máquina sea de:

Ì) a lo sumo 8.81 litros

ii) más de 7.41 pero menos de 9.51

iii) por lo menos 8.81

Continuación Ejemplo Distribución Uniforme

b. Encuentre la cantidad de café esperado que despacha la máquina instalada en la sala de espera del aeropuerto.
c. Encuentre y grafique la función densidad y la función de distribución acumulada.
d. Calcule el percentil 70 e interprete.
e. Calcule los cuartiles e interprete la mediana.
f. Marque los cuartiles en la función de distribución acumulada.

Ejercicio Distribución Uniforme

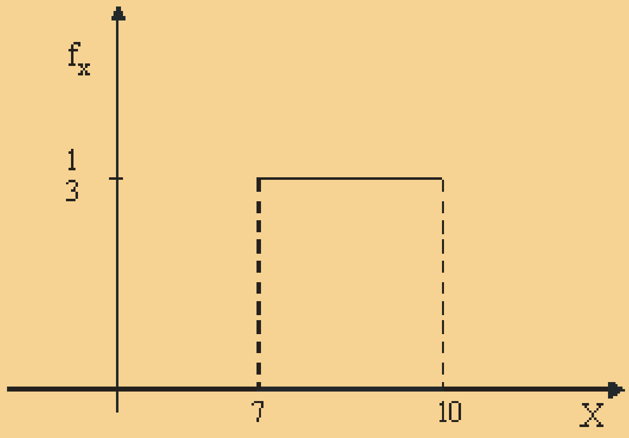
- X: "Cantidad de café (en litros) que despacha una máquina instalada en una sala del aeropuerto"
- $X \sim U\,(7,10)$

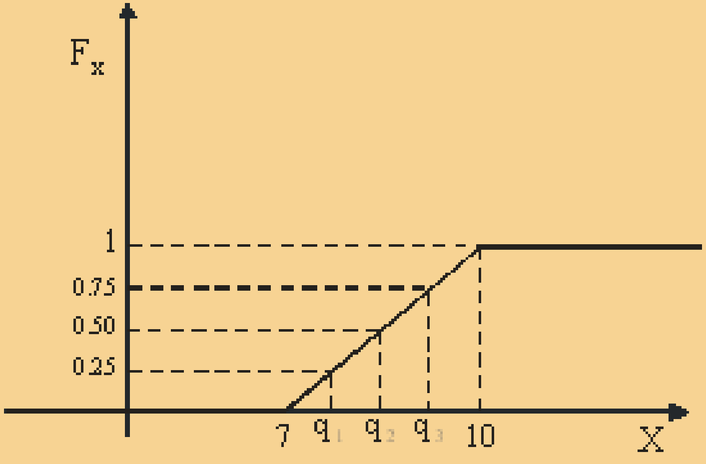
$c)\qquad f_X(x) = \frac{1}{3}\ si\ 7 \le x \le 10 \qquad\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 7 \\ \frac{x-7}{3} & 7 \le x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$

e) $F_x(x) = P(X < x) = \int_7^x \frac{1}{3}\,dx = 0.70 = \frac{1}{3}(x-7) = 0.70 \Rightarrow x = 9.1$

Cuartiles

- e) $q_1 = P(X < x) = 0.25$ $x = 7.75$
- $q_2 = P(X < x) = 0.50$ $x = 8.5$
- $q_3 = P(X < x) = 0.75$ $x = 9.25$





Modelo Normal o Gaussiano

- En el siglo XVIII los científicos notaron una regularidad predecible en la frecuencia con que se presentaban ciertos errores, especialmente los de medida.
- Se observó que los errores en situaciones de esta naturaleza presentaban una distribución simétrica en relación al cero, que originalmente recibió el nombre de curva normal de errores.
- Una variable aleatoria X tiene distribución normal si la mayoría de sus valores están concentrados alrededor de su valor medio y los valores de esta variable son cada vez menos frecuentes a medida que nos alejamos de este valor medio.

Modelo Normal

- Función de densidad: $f_X : R \rightarrow R^+$,

$$f_X(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ \sigma^2}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma^2 > 0$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \mu \quad \mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

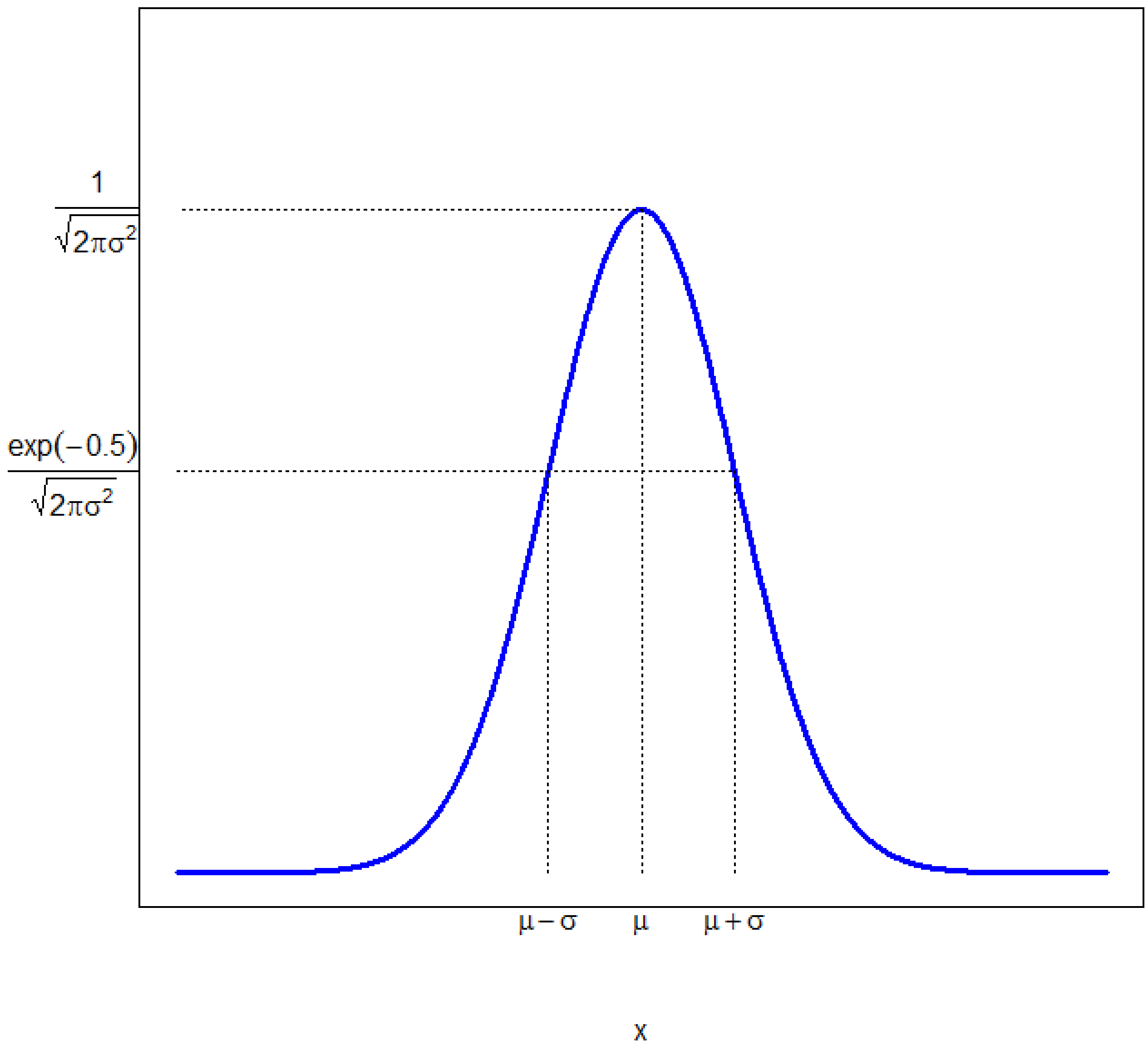
- $X \sim N(\mu,\sigma)$

Distribución Normal

- f(x)≥0 para toda x real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma)^2} dx = 1$$

DENSIDAD NORMAL

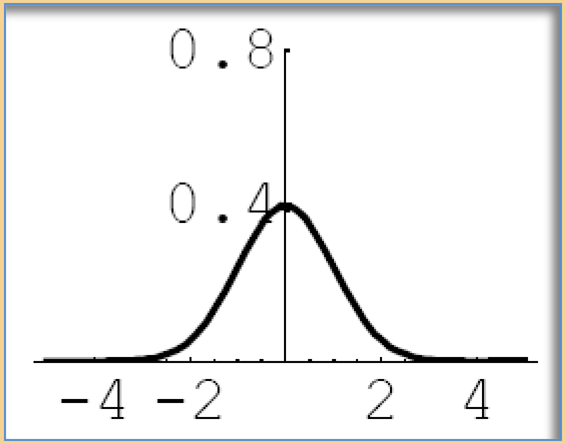


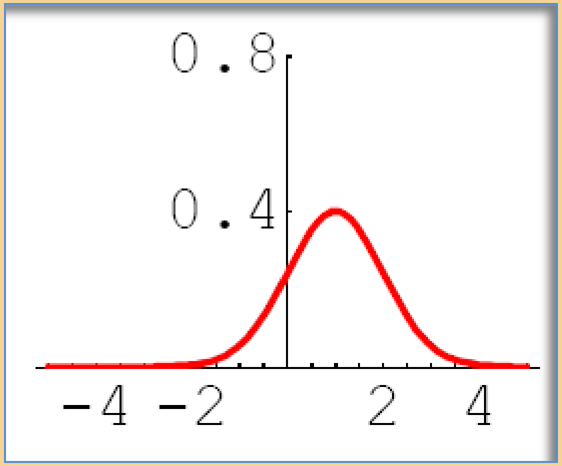
Modelo Normal

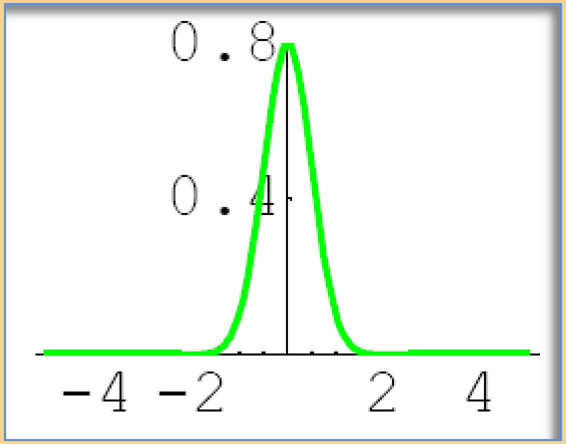
- Si observamos la ecuación de la función densidad, para cada par de valores de media μ y σ^2 existe una curva, por lo tanto, existe una familia de curvas normales.

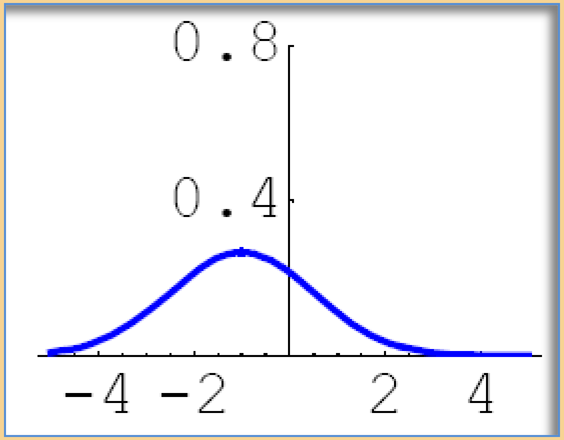
Esperanza y Varianza

- $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$









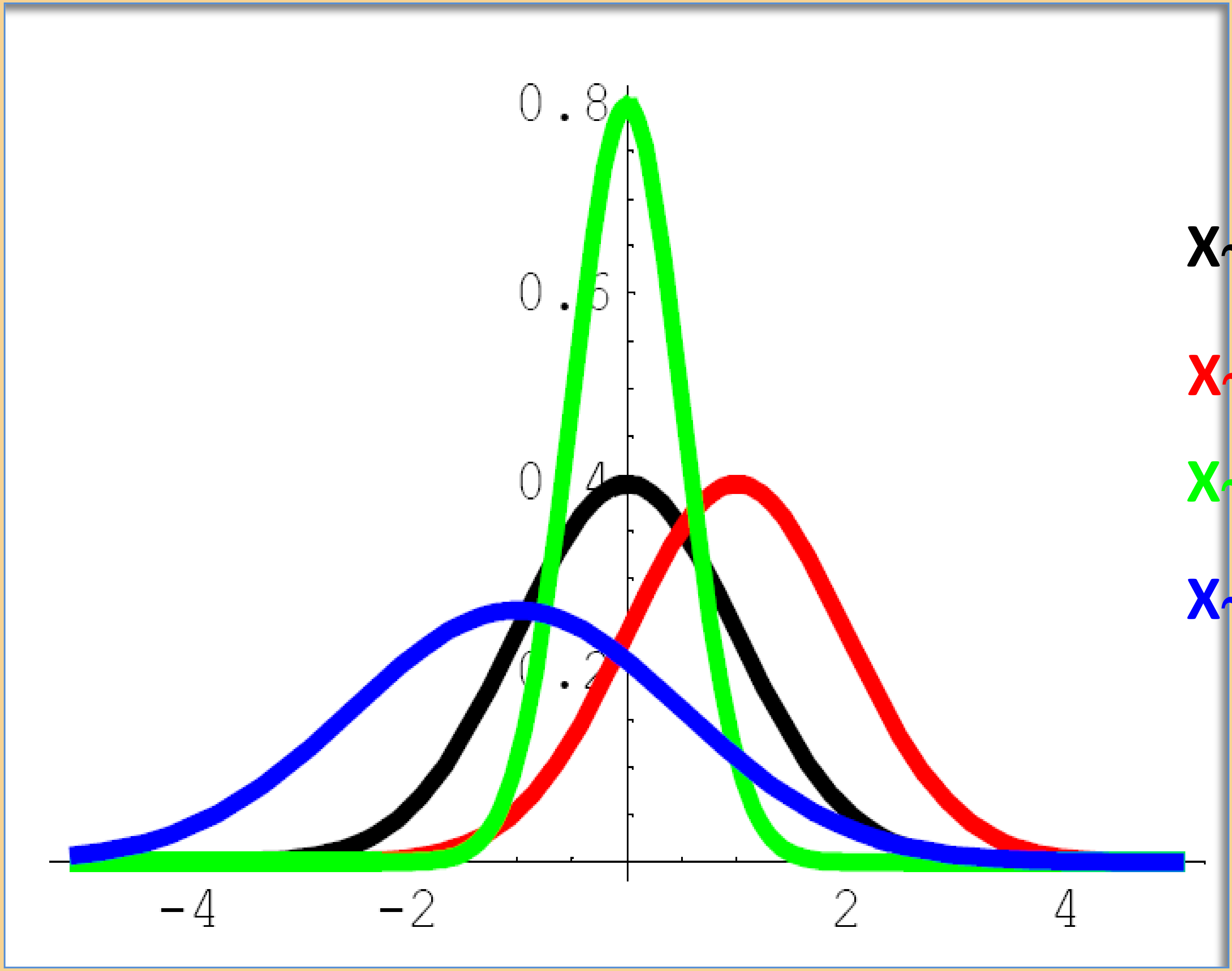
X~N(0,1)

X~N(1,1)

X~N(0,0.5)

X~N(-1,2)

Gráficos variando Esperanza y Varianza

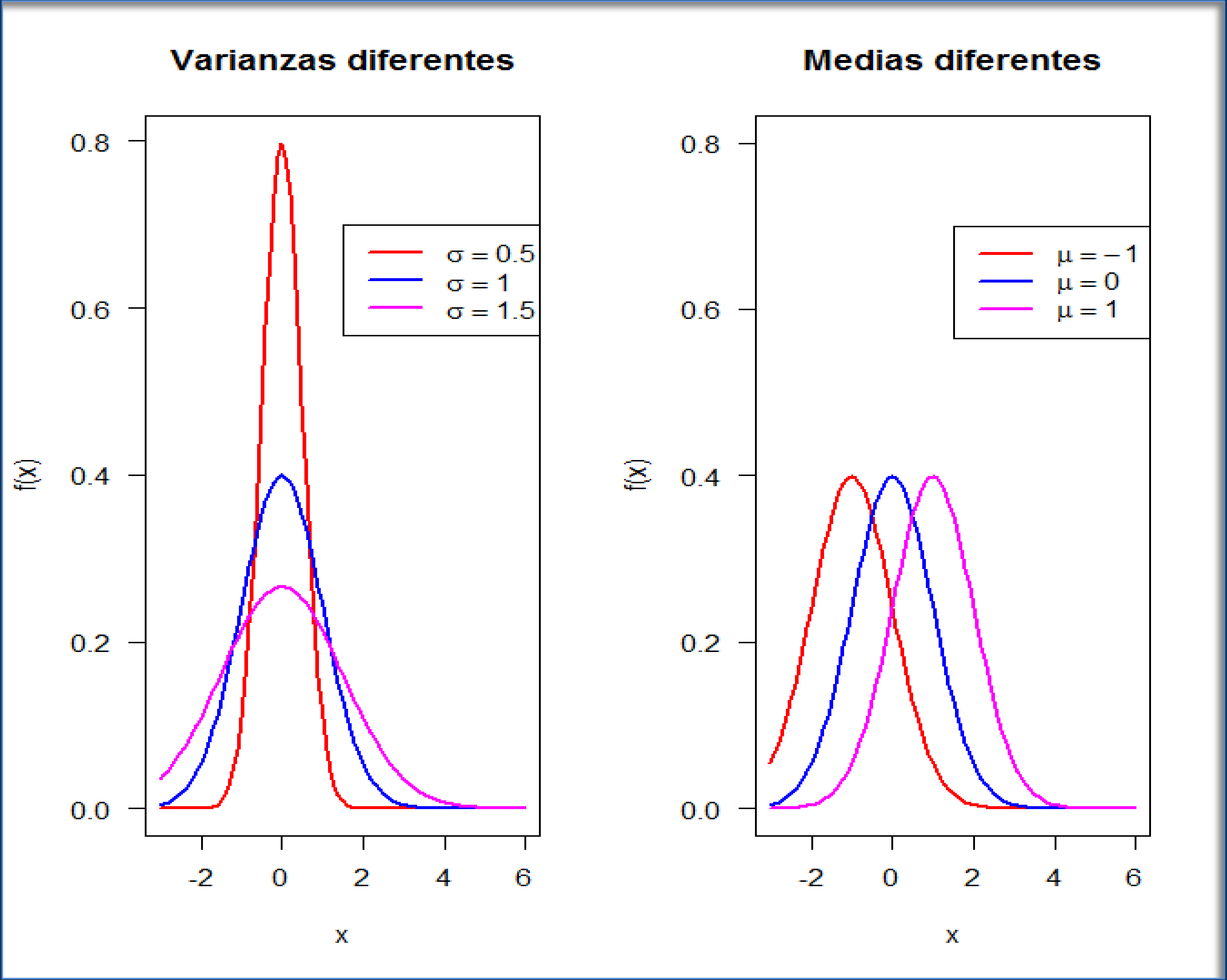


X~N(0,1)

X~N(1,1)

X~N(0,0.5)

X~N(-1,2)



Varianzas diferentes
Medias diferentes
σ = 0.5
σ = 1
σ = 1.5
μ = −1
μ = 0
μ = 1
f(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
-2
0
2
4
6

Propiedades

- Cualesquiera sean μ y σ, la función de densidad de la distribución normal tiene las siguientes propiedades:
- Tiene forma de campana. (campana de Gauss)
- Es simétrica con respecto al eje x= μ.
- La función densidad es estrictamente positiva: $f_X(x) > 0 \quad \forall x \in R$ (por ser una función exponencial)
- Es asintótica al eje x: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

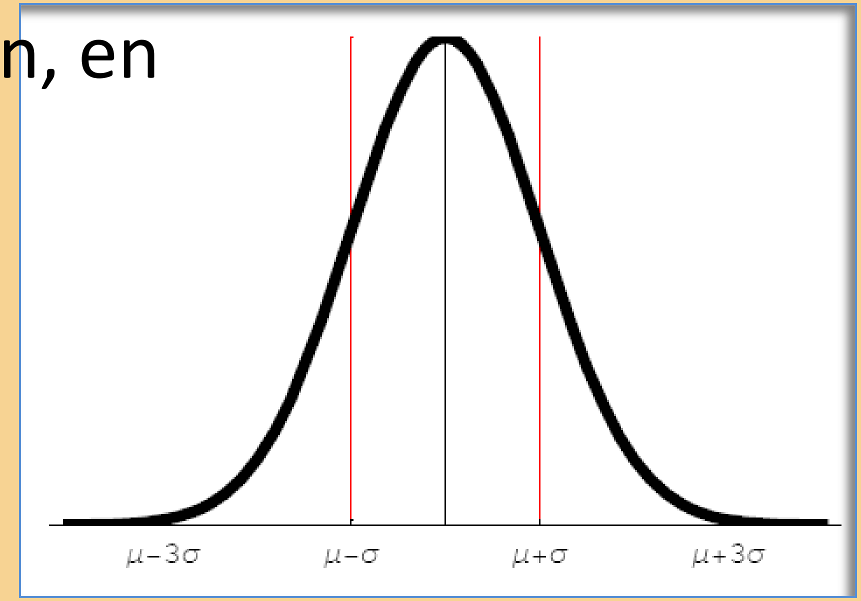
Propiedades

- Tiene un máximo absoluto en x= μ llamado moda
- media=Me=Mo
- Por ser función densidad, $f(x) \geq 0$ para todo x de R y el área total bajo la curva vale 1.
- Tiene dos puntos de inflexión, en x= $\mu - \sigma$ y en x= $\mu + \sigma$;

Propiedades de la distribución Normal

- Por ser función densidad, $f(x) \geq 0$ para todo x de R y el área total bajo la curva vale 1.

- Tiene dos puntos de inflexión, en $x = \mu - \sigma$ y en $x = \mu + \sigma$;
- Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \mu - \sigma)$ y en $(\mu + \sigma, \infty)$; es cóncava hacia abajo en $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.



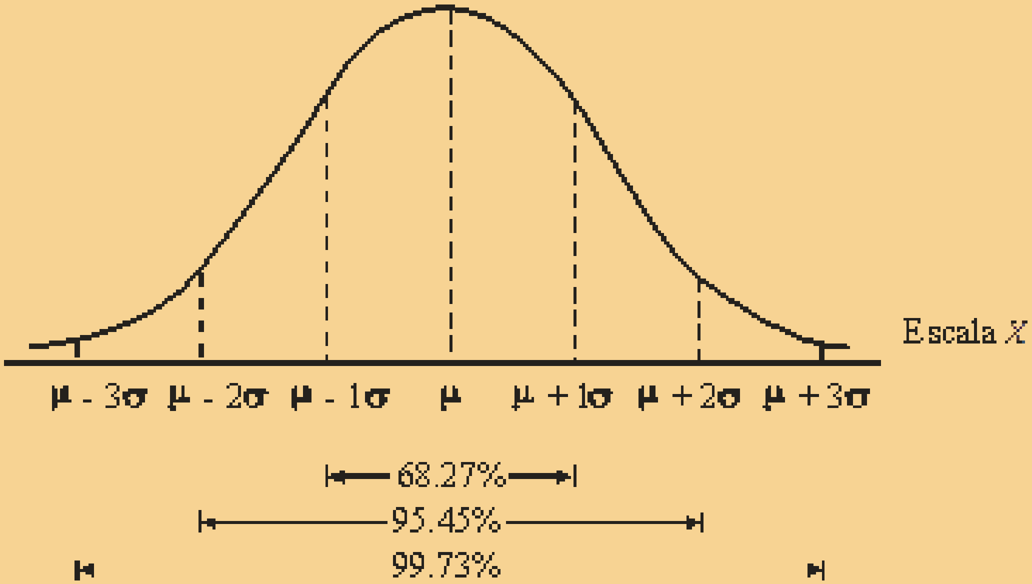
μ

Áreas debajo de la curva

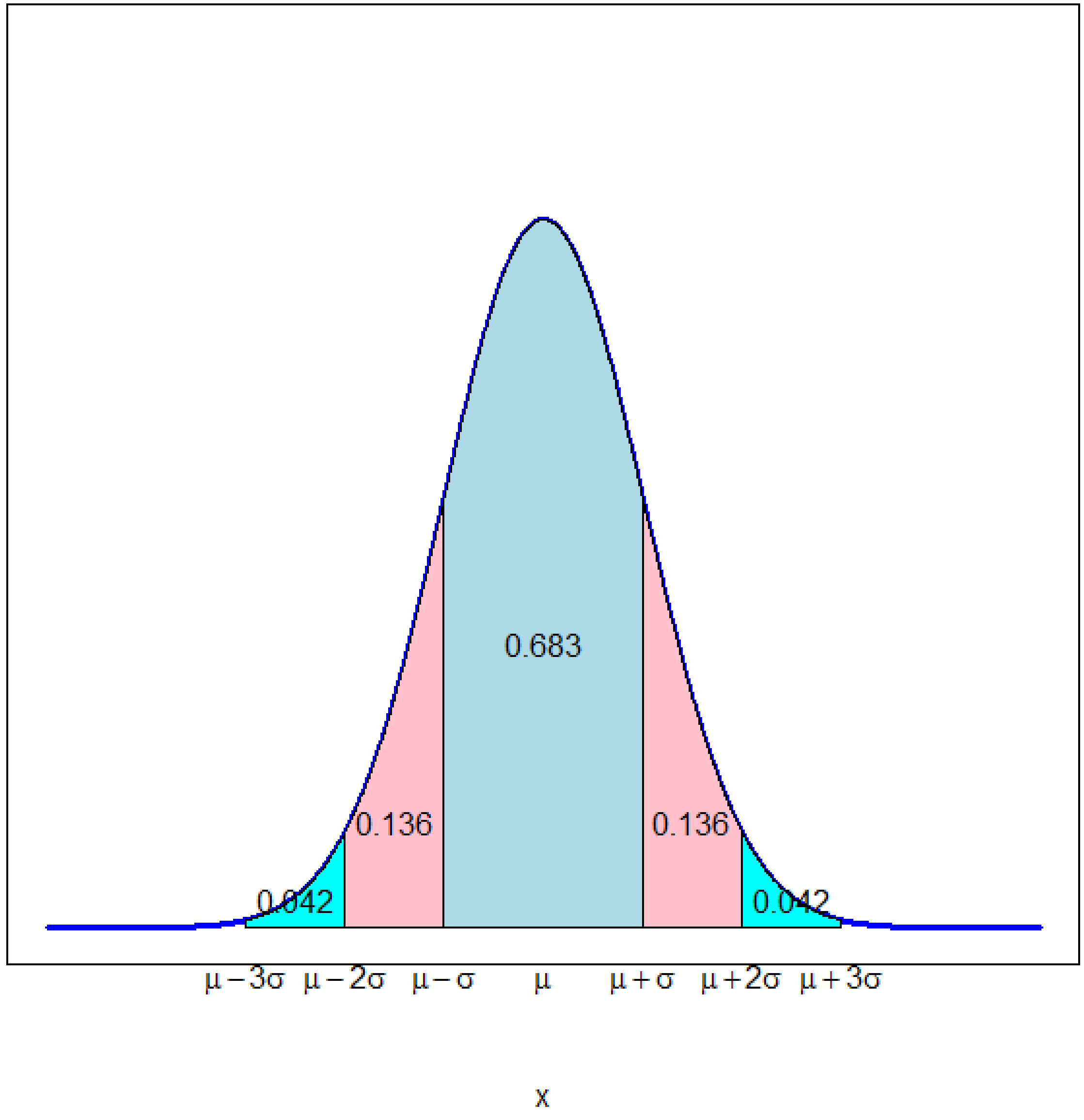
- En una distribución probabilística normal:
- Aproximadamente el 68 % del área bajo la curva normal se encuentra en el intervalo $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$
- Aproximadamente el 95 % del área bajo la curva normal se encuentra en el intervalo $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$
- Aproximadamente el 99.73 % del área bajo la curva normal se encuentra en el intervalo

$$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$$

Áreas debajo de la curva normal



ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

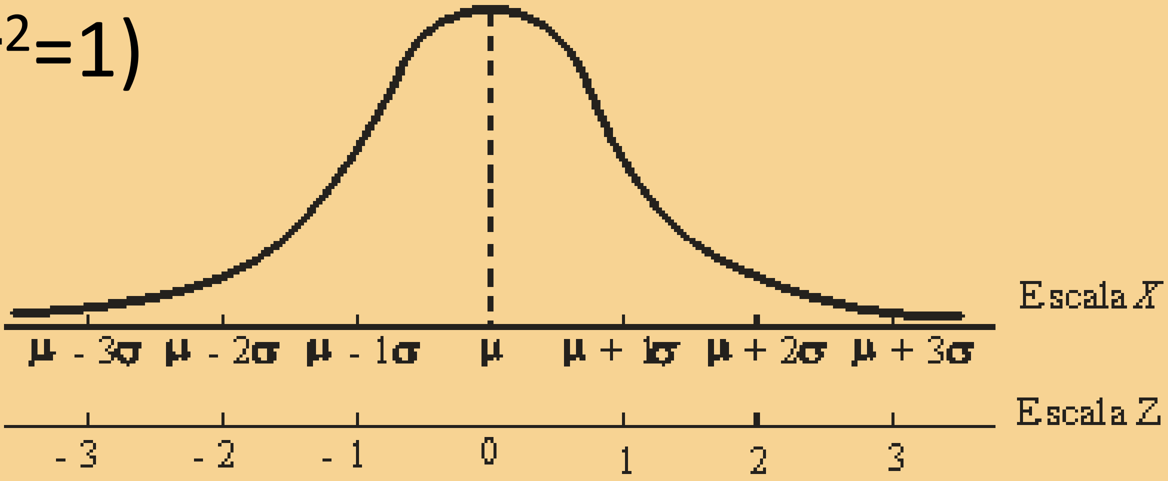


Distribución Normal Estándar

- Si $X \sim N(\mu , \sigma^2)$
- Es posible definir una variable Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(\mu=0 , \sigma^2=1)$

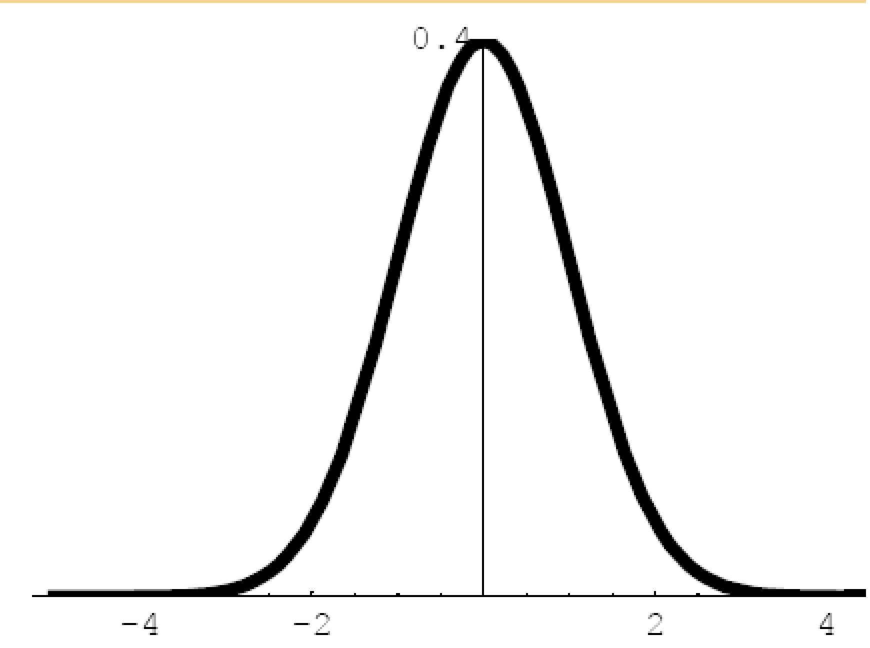


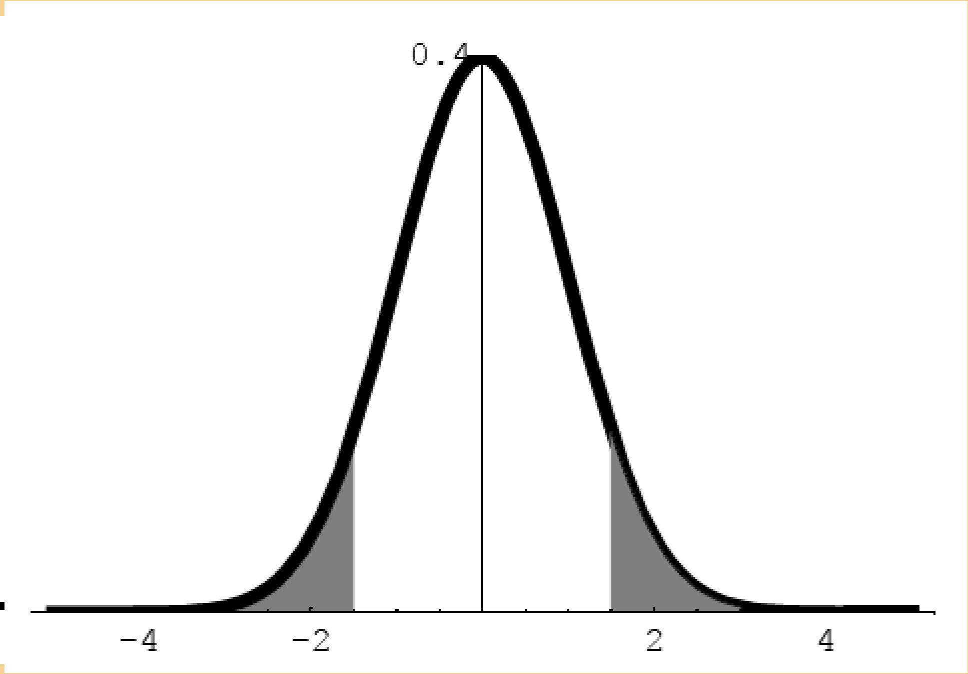
Distribución Normal Estándar

- Su media, varianza y desviación típica son:
- $\mu_Z = 0 \qquad \sigma_z^2 = 1 \quad \sigma_z = 1$
- La curva f $_Z$ es simétrica respecto al eje z = 0, y tiene un máximo en este eje y dos puntos de inflexión en z = -1 y z = 1.
- La gran utilidad de la variable estándar Z es que nos permite calcular áreas (o abscisas) de cualquier variable con distribución normal:

Distribución normal estándar

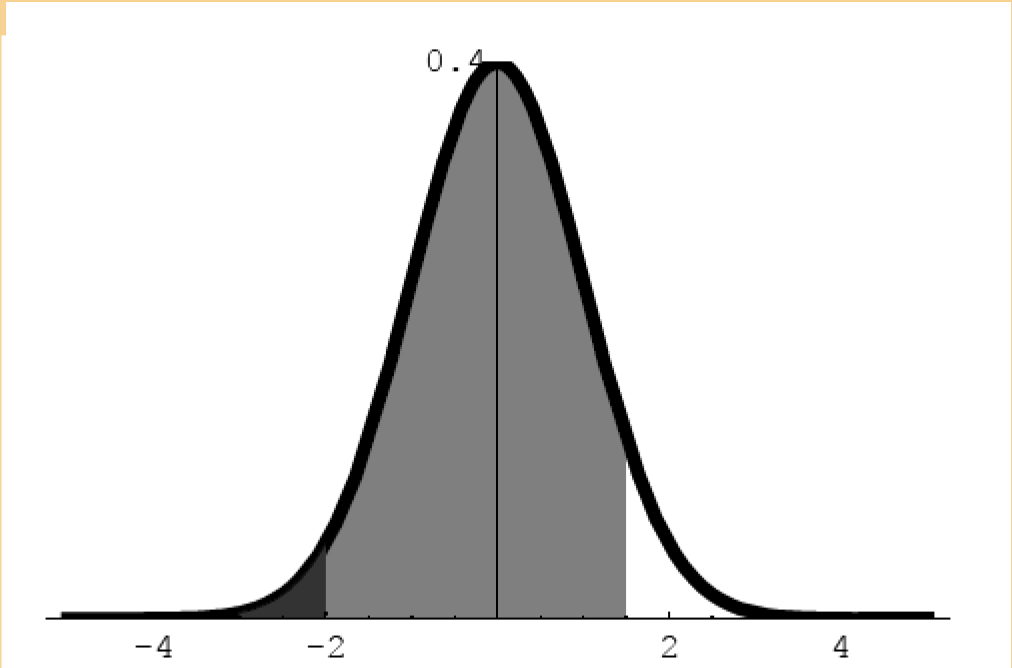
- La distribución normal estándar cumple las mismas propiedades que la normal
- Recordando la simetría de la curva:
- “Colas” de la distribución normal estándar





Manejo de R

- Calculemos la siguiente probabilidad para $Z \sim N(0,1)$:
- $P(-2<Z<1.5)$ = pnorm(1.5,0,1)- pnorm(-2,0,1)= 0.91044



Percentiles de la Distribución normal estándar

- Usemos el R para hallar el percentil 95 de una v.a. con distribución normal estándar:

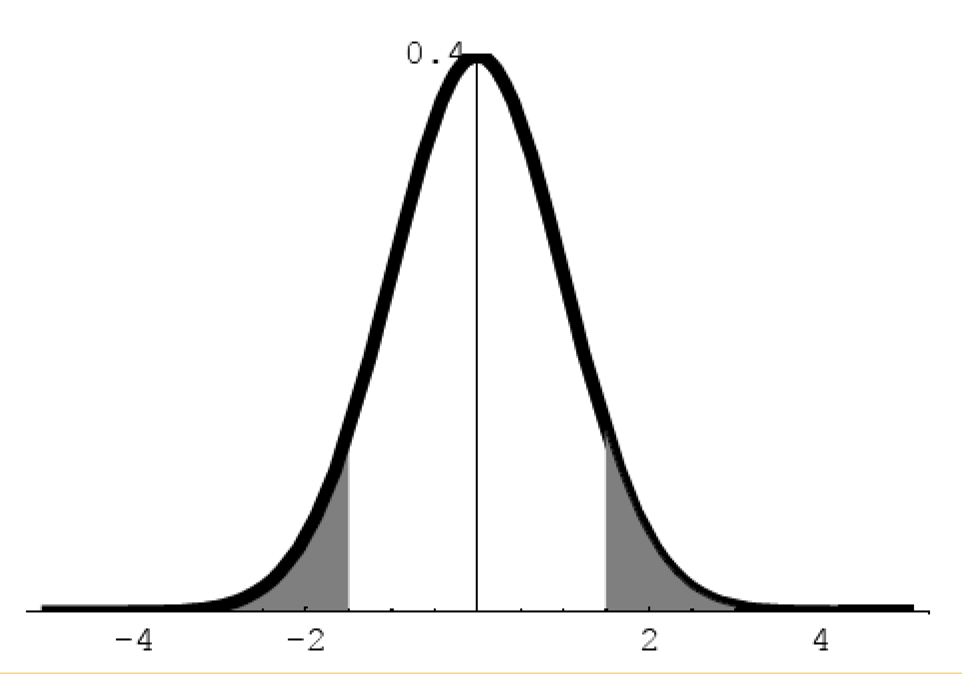
>qnorm(p,μ, σ)=qnorm(0.95,0,1)=1,645

Notación z_{α}: $z_{0.95}=P_{95}=1{,}645$

>qnorm(p, μ, σ)=

=qnorm(0.90,0,1)=1,28

- $z_{0.90}=P_{90}=1{,}28$



Distribuciones normales no estándar

- Estandarización:
- Si X~N(μ,σ), la v.a. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sigue una distribución normal estándar.
- Para conocer los parámetros de su distribución, necesitamos conocer su esperanza y su varianza.
- ¿Recuerdan las fórmulas para $E(aX+b)$ y $V(aX+b)$?

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X)$$

- Así: $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = 0$
- y $V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$

Luego Z~N(0,1)!!!

Cálculo de probabilidades en una distribución normal

- Si X~N(μ,σ) y a y b son números reales tales que a$\leq$b, la probabilidad P(a<X<b) es

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Ejemplo concreto:

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?

Ahora resolvamos el ejercicio

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?

- $X \sim N(\mu=200ml, \sigma=15ml)$
- $P(X>224) = P(Z > 224) = 0.05479$
- >pnorm(224,200,15) =

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 190 y 205 mililitros?

c) Si los vasos utilizados en la máquina tienen una capacidad de 230 mililitros, ¿cuántos vasos se derramarán al servir las siguientes 1000 bebidas?

d) ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de los vasos menos llenos?

e) ¿Qué cantidad de bebida tendrá el 95% de los vasos, alrededor de la media?

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 190 y 205 mililitros?

- $X \sim N(\mu=200ml, \sigma=15ml)$
- $P(190<X<205)=0,37807$
- >pnorm(205,200,15)-pnorm(190,200,15)=

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

c) Si los vasos utilizados en la máquina tienen una capacidad de 230 mililitros, ¿cuántos vasos se derramarán al servir las siguientes 1000 bebidas?

- $X \sim N(\mu=200ml, \sigma=15ml)$
- $P(X>230)=$ 0.02275
- Y: número de vasos derramados de los próximos 1000
- $Y \sim Bin(n=1000, p=0.02275)$
- $E(Y)=np=22.75$

Se espera que se derramen 23 de los próximos 1000 vasos.

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 190 y 205 mililitros?

c) Si los vasos utilizados en la máquina tienen una capacidad de 230 mililitros, ¿cuántos vasos se derramarán al servir las siguientes 1000 bebidas?

d) ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de los vasos menos llenos?

e) ¿Qué cantidad de bebida tendrá el 95% de los vasos, alrededor de la media?

Percentiles de una distribución normal

- Tenemos: $X \sim N(\mu=200ml, \sigma=15ml)$
- d) Por debajo de qué valor obtendremos el 25% de los vasos menos llenos?
- Se refiere a un percentil... ¿cuál?
- $P(X<x_{0.25})=0.25$ ⇒ $z_{0.25}=?$
- >qnorm(0.25,200,15)

⇒ $x_{0.25} = 189.88$

e) ¿Qué cantidad de bebida tendrá el 95% de los vasos, alrededor de la media?

3-3.92. EX190902

En una universidad determinada el tamaño ideal de una clase de primer año es de 150 estudiantes. Como la universidad sabe por experiencia que en promedio sólo el 30% de los estudiantes que solicitan inscripción se inscriben realmente, sigue la política de aprobar 450 solicitudes de inscripción. Calcule la probabilidad de que se inscriban, para primer año, más de 150 alumnos. ¿Qué puede decir respecto de las veces que se verá en problemas la universidad por exceder el número óptimo de estudiantes para el que está dimensionada?

MODELO GAMMA

- Algunas variables aleatorias son siempre no negativas y tienen distribuciones asimétricas a derecha. La mayor parte del área bajo la función densidad se encuentra cerca del origen y la función densidad disminuye gradualmente cuando X aumenta.
- Por ejemplo: los intervalos de tiempo entre dos fallas del motor de un avión posee una distribución de frecuencias sesgada que puede modelarse con dicha distribución Gamma.
- Estas juegan un importante papel en la teoría de colas, y problemas de confiabilidad.

MODELO GAMMA

- Se dice que una v.a. X tiene distribución Gamma si su función densidad tiene la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$ x > 0, α >0 , β > 0

- *Sus parámetros son:*

α (parámetro de forma) y β(parámetro de escala)

- La función gamma se define

- $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$ α >0

Función Gamma

- Esta función Gamma es también llamada **función factorial**, ya que cuando α >0, se puede probar

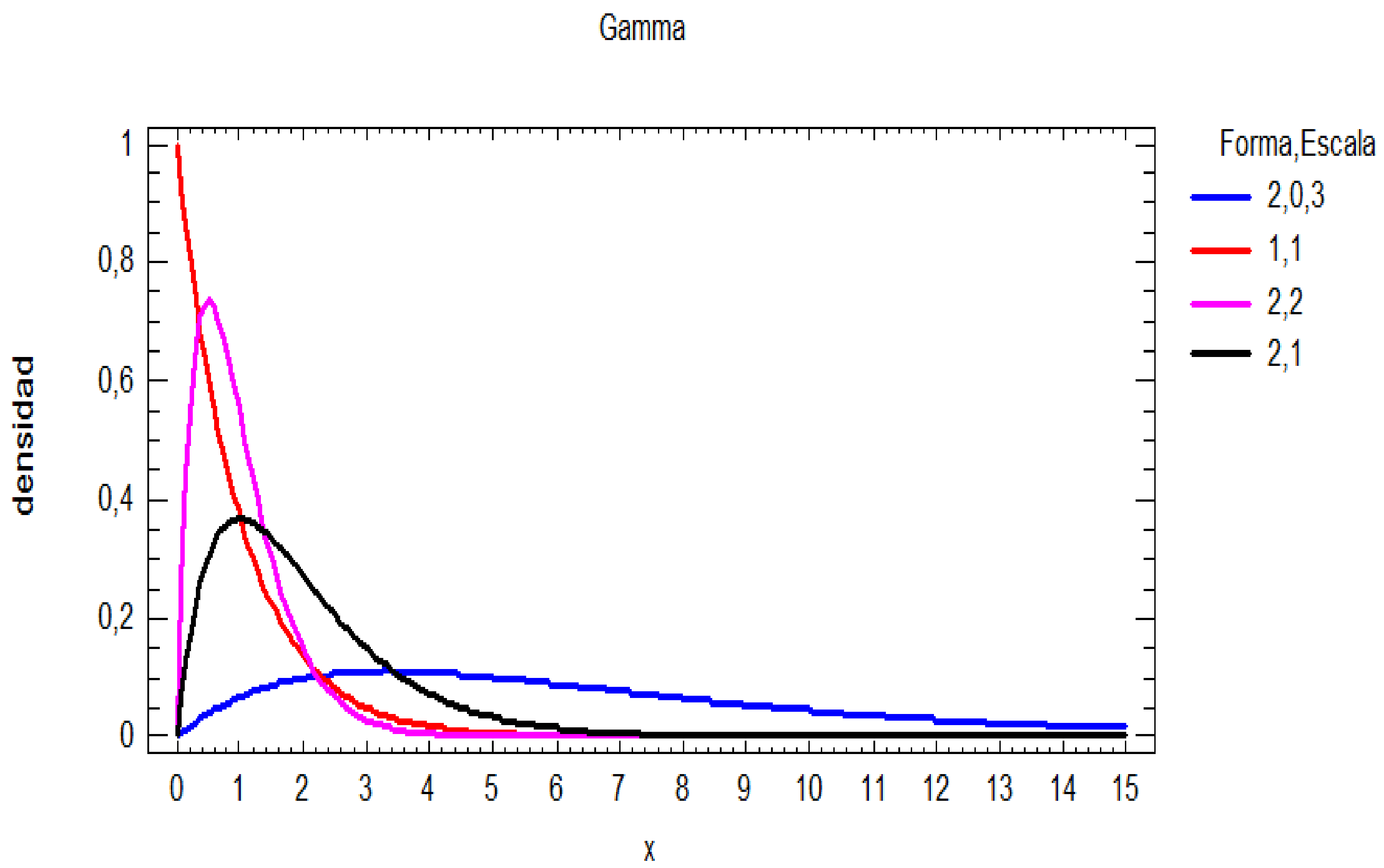
$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\ \Gamma(\alpha)$$

- y cuando α es un entero positivo

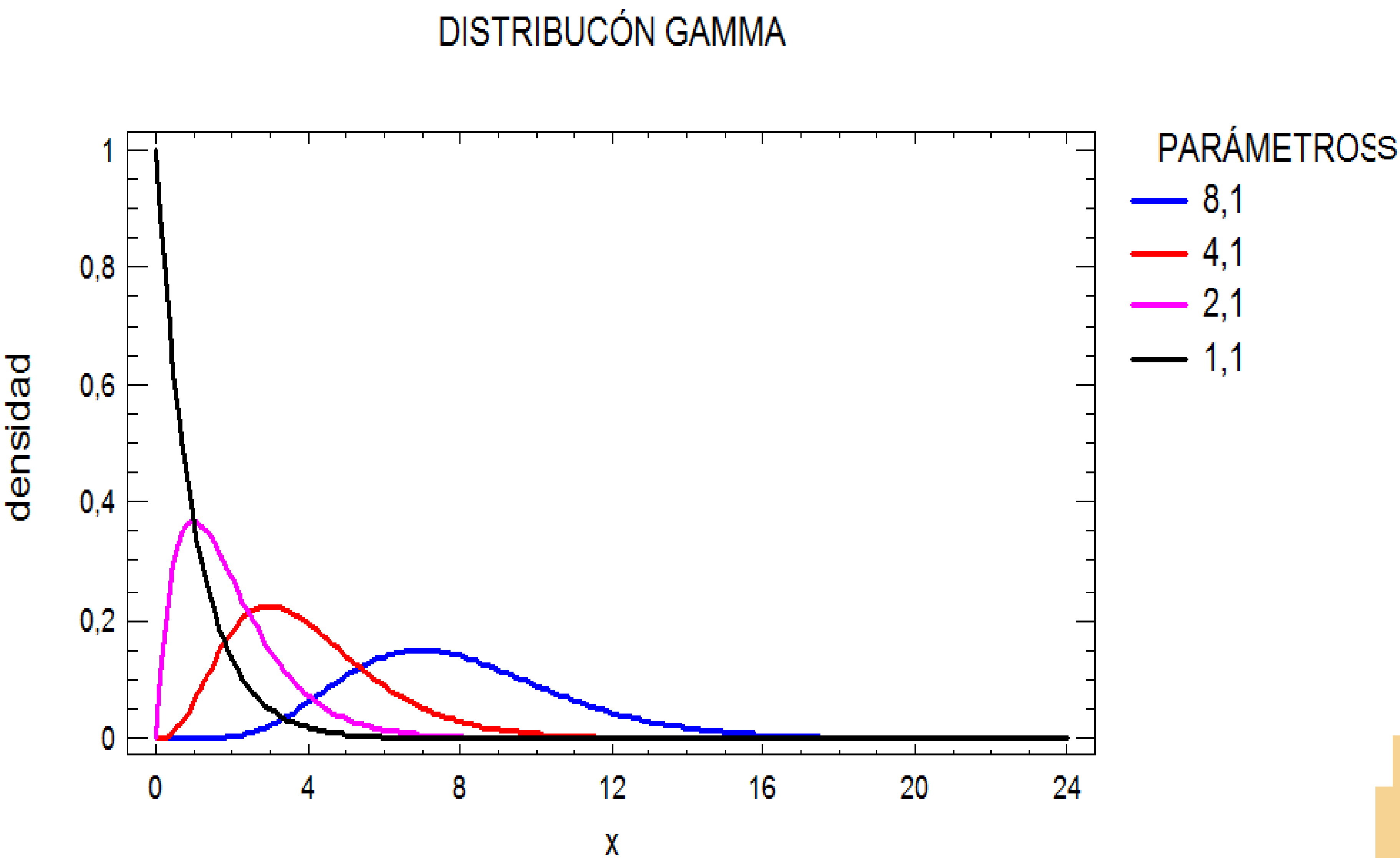
$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

- Además Γ(1/2)= $\sqrt{\pi}$
-

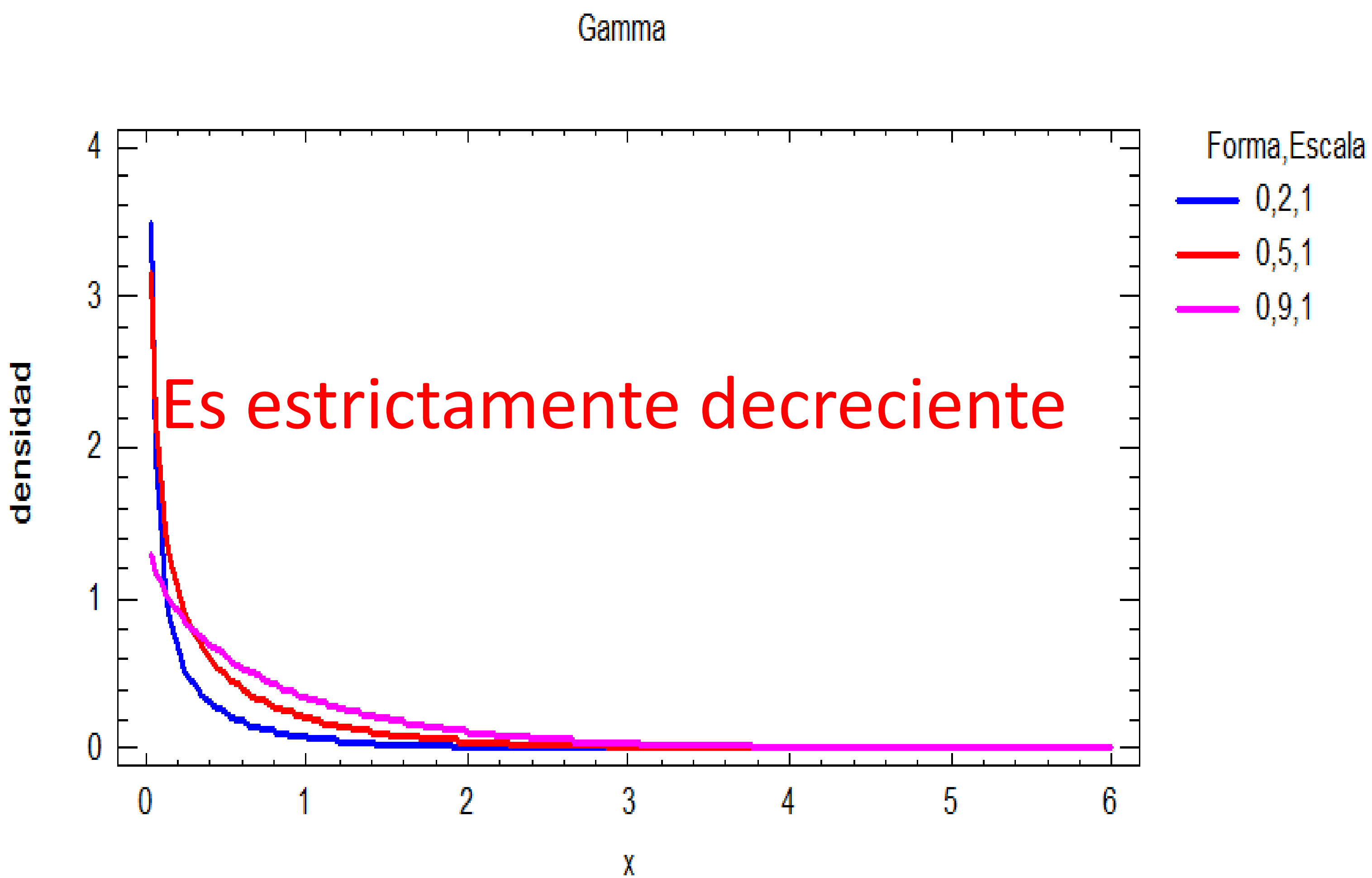
DISTRIBUCIÓN GAMMA



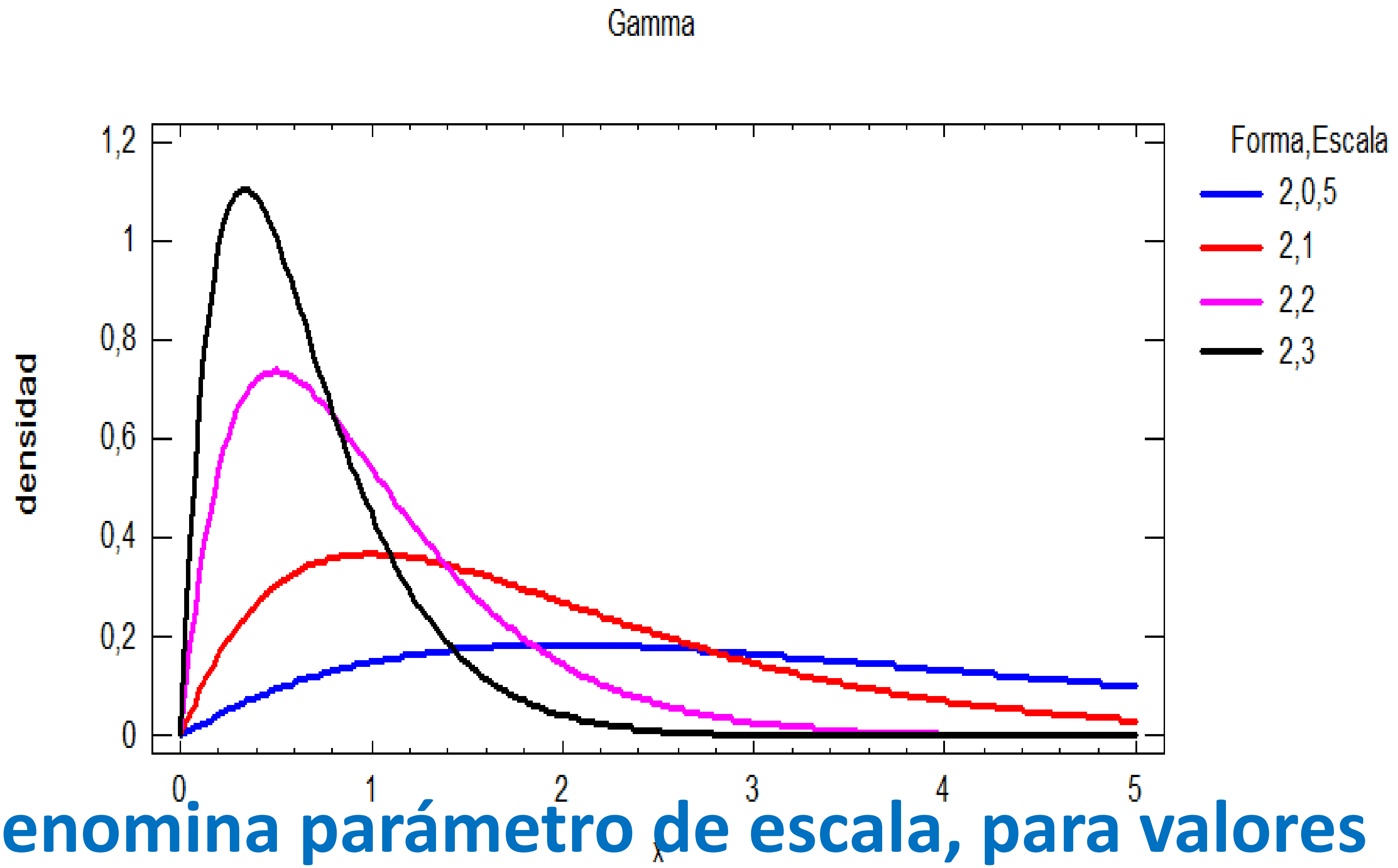
DISTRIBUCIÓN GAMMA (β=1) y $\alpha \geq 1$



MODELO GAMMA β=1Y $\alpha \leq 1$



MODELO GAMMA- β diversos VALORES



β se denomina parámetro de escala, para valores distintos de 1 <u>alargan o comprimen</u> la función

Esperanza y varianza del Modelo Gamma

- Esperanza

$$\boxed{E(X) = \alpha\beta}$$

- Varianza

$$\boxed{Var(X) = \alpha\beta^2}$$

Ejemplo Distribución Gamma

- En una ciudad el consumo diario de energía eléctrica, en millones de Kilowatts-hora, es una variable aleatoria que tiene distribución Gamma con parámetro de forma α=3 y parámetro de escala β=2
- a) Encuentre la probabilidad de que en un día determinado el consuma diario de energía exceda los 12 millones de kw-h.
- X: consumo diario de energía eléctrica
- X ~ Gamma (α=3, β=2)
- Encontraremos primeramente la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{1}{2^{3}\Gamma(3)} x^{3-1} e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$f(x) = \frac{1}{16} x^{2} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x > 0$$

Ejemplo

- X: consumo diario de energía eléctrica
- X ~ Gamma (α=3, β=2)

$$P(X > 12) = 1 - \int_0^{12} \frac{1}{16} x^2 \, e^{-\frac{x}{2}} dx = 0.0619$$

- > **1-pgamma(12,3,1/2)**
- >0.0619688
- (para usar este programa debe el parámetro de escala usar λ=1/ β

Ejemplo de distribución Gamma

- b) Encuentre la probabilidad de que en un día determinado el consumo diario de energía sea de 5 millones de kw-h o menos.

$$P(X \le 5) = \int_0^5 \frac{1}{16} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$P(X \le 5) = 0.4561869$$

- **> pgamma(5,3,1/2)**
- > 0.4561869

DOS CASOS PARTICULARES DEL MODELO GAMMA

- **I- Modelo exponencial negativo**

  (α =1 en el modelo Gamma)

- **II- Modelo Chi-Cuadrado**

  (α =n/2 y β=2 **)**

Distribución exponencial

- Distribución exponencial: alfa=1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, x\geq 0;\\ 0\, en\, otro\, caso.\end{cases}$$

Haciendo α=1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, x\geq 0;\\ 0\; en\, otro\, caso.\end{cases}$$

Llamando $\lambda=\dfrac{1}{\beta}$

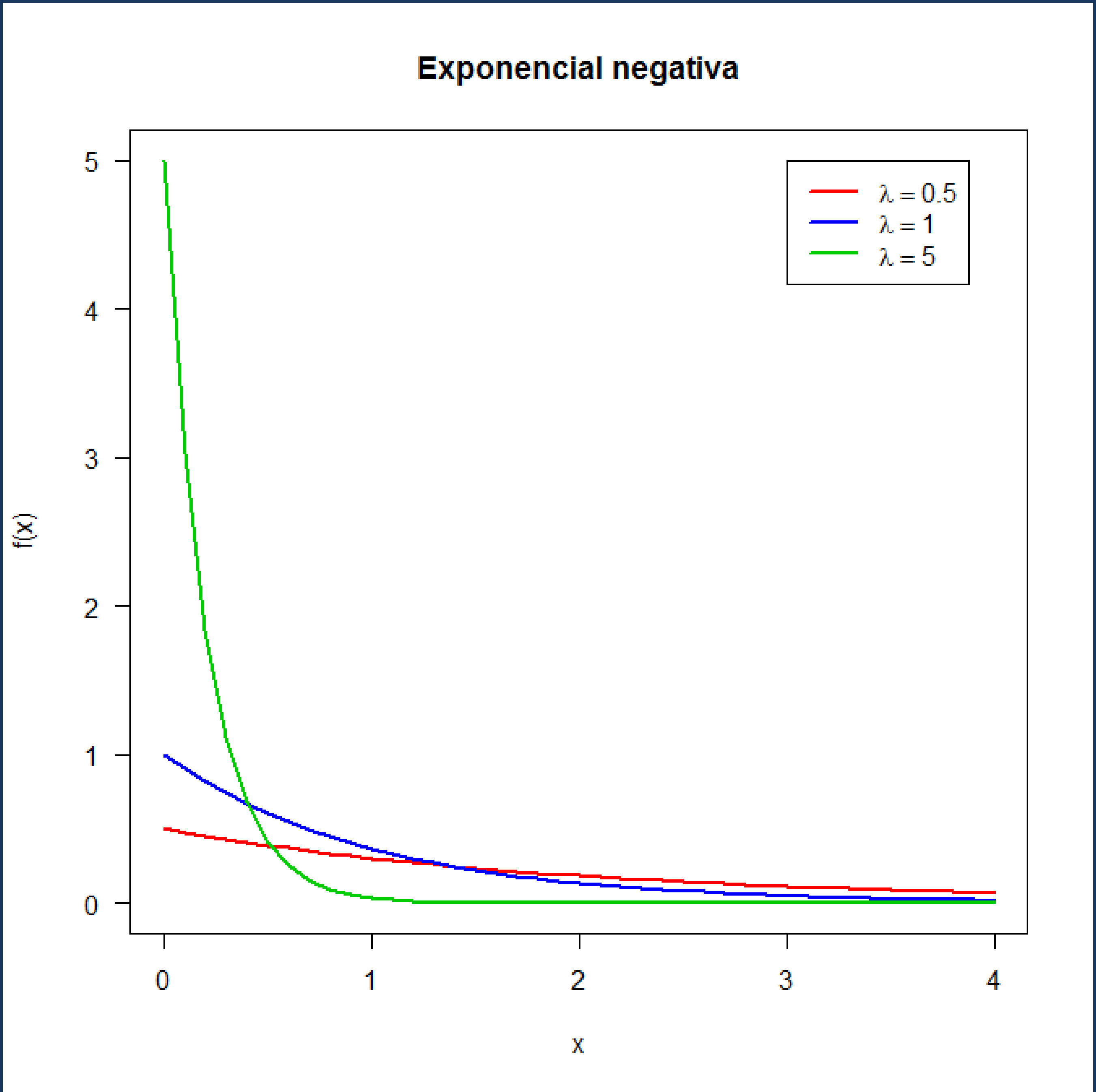
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0;\\ 0\; en\, otro\, caso.\end{cases}$$

Modelo Exponencial negativo

- X tiene distribución exponencial si su función densidad tiene la siguiente expresión:
- $$\boxed{f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}}$$ x>0 , λ>0
- Se consideró $\beta = 1/\lambda$
- Esperanza Varianza

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}} \qquad \boxed{\operatorname{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

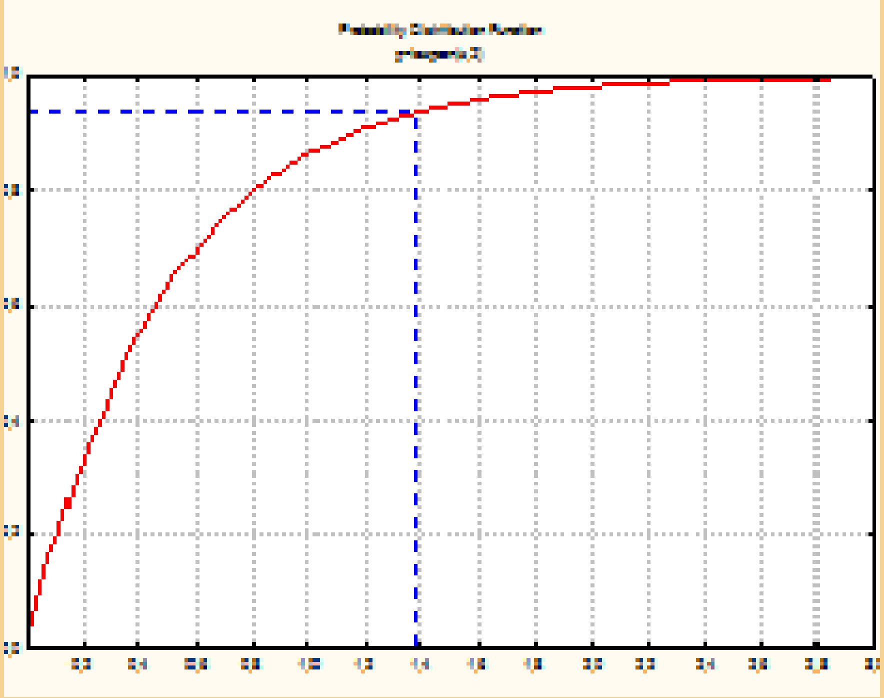
- Modela problemas del tipo tiempo de falla.



Exponencial negativa
$\lambda = 0.5$
$\lambda = 1$
$\lambda = 5$
5
4
3
2
1
0
f(x)
0
1
2
3
4
x

Función de distribución exponencial

$$F(x;\lambda)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$$



Modelo Exponencial

- Es una importante distribución continua que está relacionada con la distribución de Poisson, ya estudiada en la Unidad II.
- Estas dos distribuciones tienen muchas aplicaciones en la investigación de operaciones, especialmente en la teoría de colas (líneas de espera).
- Están relacionadas con dichas aplicaciones por el hecho de que, si se supone que los sucesos ocurren de acuerdo a la distribución de Poisson, entonces puede usarse la distribución exponencial para determinar la distribución probabilística del tiempo transcurrido entre tales sucesos.

Distribución Exponencial y Distribución de Poisson

- Por ejemplo, si la llegada de los clientes a un banco se produce de acuerdo con la distribución de Poisson, podemos utilizar el modelo exponencial para determinar la distribución probabilística de los intervalos de tiempo entre llegadas.
- La distribución exponencial tiene el mismo parámetro λ que la distribución de Poisson. ($\beta=1/ \lambda$)

DITRIBUCION EXPONENCIAL Y PROCESO DE POISSON

- Entonces la distribución exponencial modela la distribución de tiempo entre la presentación de dos eventos sucesivos, con **$\lambda=1/\beta$**

- Si el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo t tiene una distribución de Poisson con **λ =**αt (número esperado de eventos que ocurren en una unidad de tiempo)

X="Cantidad de clientes que llegan a un taller en una hora"

Y="Tiempo que transcurre entre la llegada de dos clientes al taller"

- Ejercicio
- La vida en años, de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una vida promedio de 2 años. Si cien de estos interruptores se instalan en diferentes sistemas. Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 30 fallen durante el 1er año?
- **X: "vida de un interruptor eléctrico X~Exponencial (x, $\beta = \frac{1}{\lambda}$=2)**
- **P(X≤1)=F(1)=1 $- e^{-\frac{1}{2}}$ = 0,3935**
- **>pexp(1,0.5)**

Y="Cantidad de interruptores que fallan en una muestra de cien"

X~binomial (x, n=100 p =0,3935)

P(X≤30)= pbinom(30,100,0.3935)= 0,03343

DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA

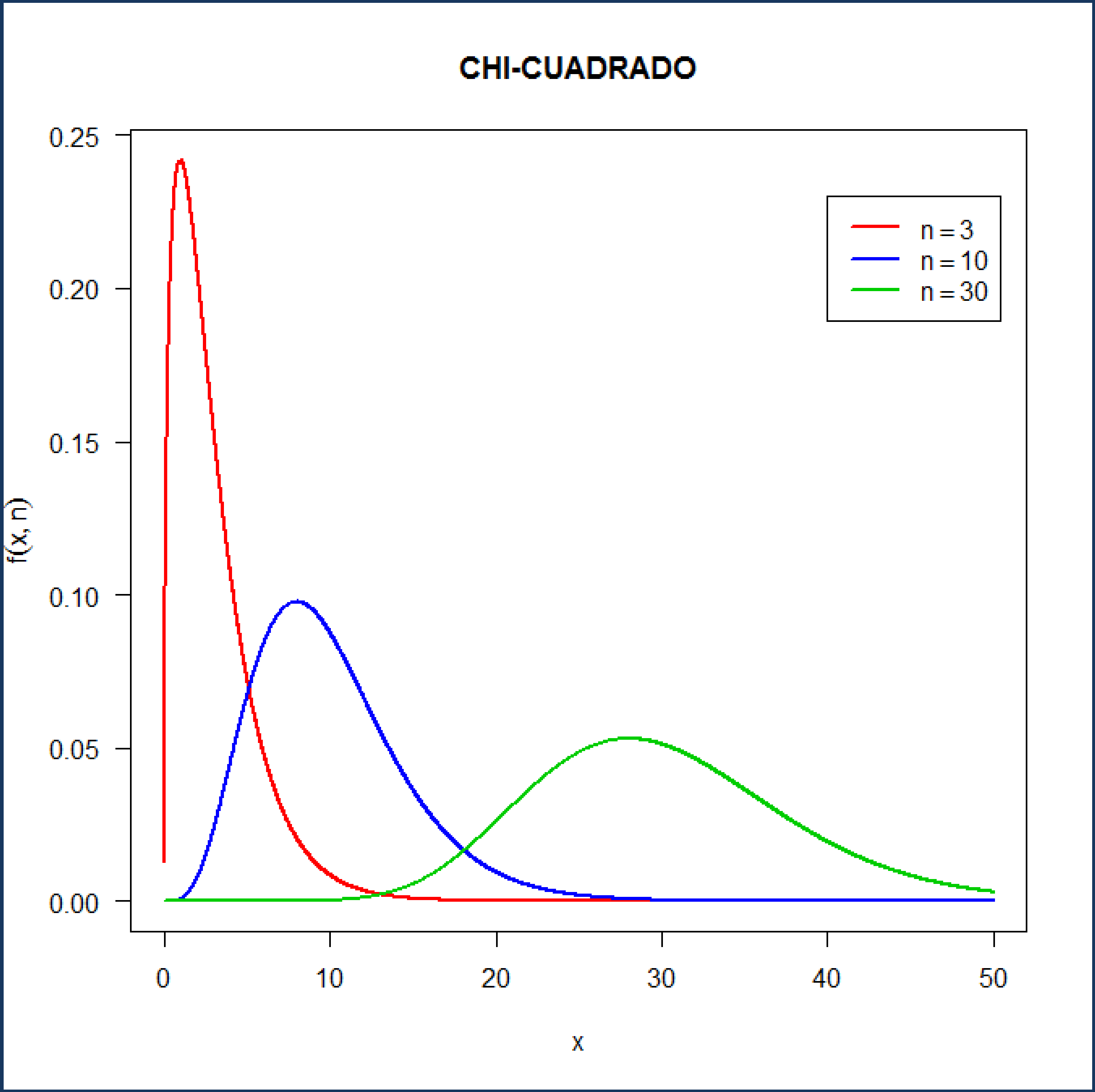
Si v es un entero positivo. Entonces X tiene una distribución Ji- cuadrada con parámetros v si la pdf es la función de densidad gamma con α=n/2 y β=2

$$f(x,\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 \quad {}_{\nu} & \text{de otra manera} \end{cases}$$

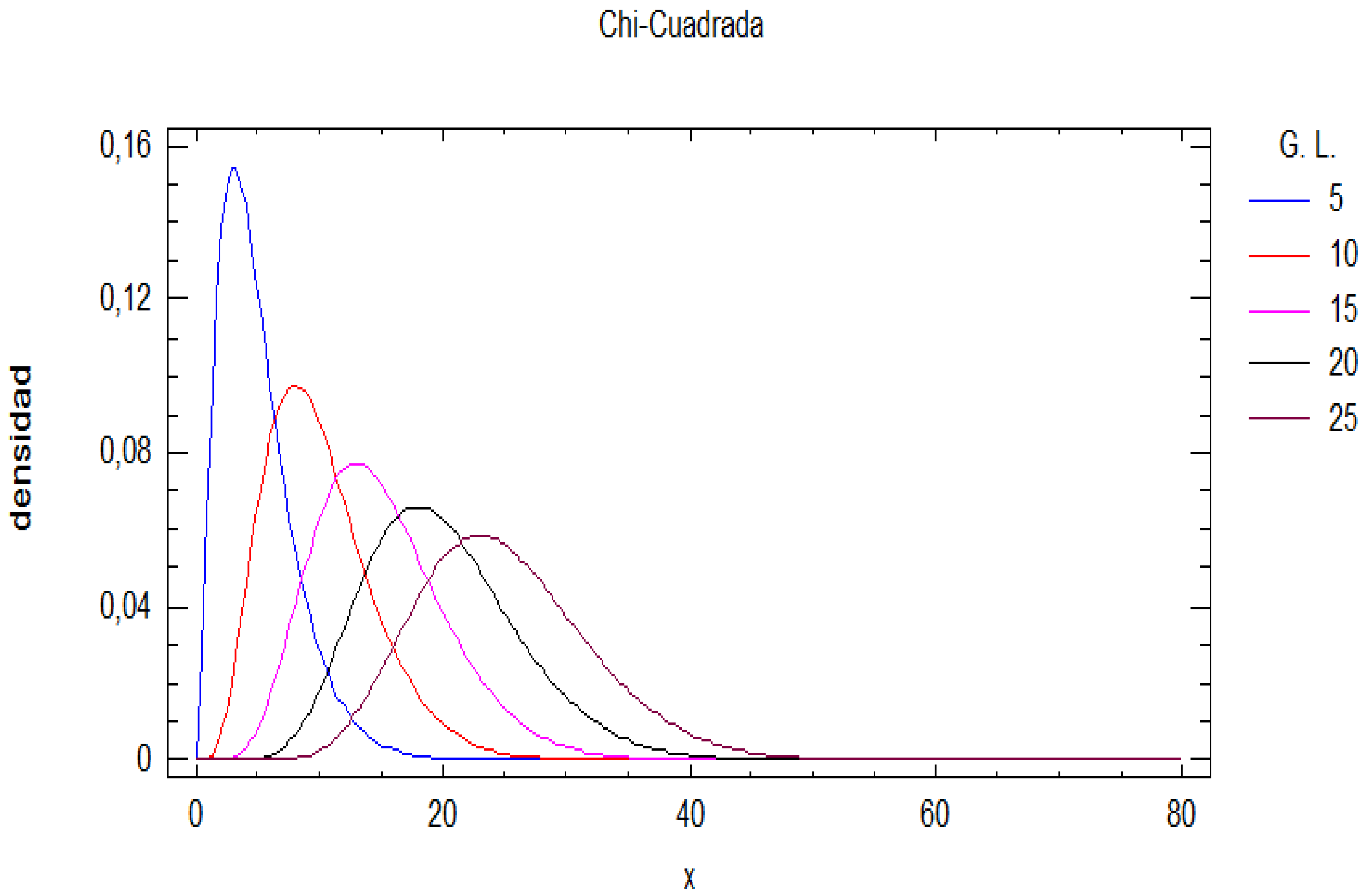
ESPERANZA Y VARIANZA

$$E(X) = \alpha\beta = \frac{n}{2}.2 = n$$

$$V(X) = \alpha\beta^2 = \frac{n}{2}.4 = 2n$$


CHI-CUADRADO
n = 3
n = 10
n = 30
f(x, n)
x
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
10
20
30
40
50

DISTRIBUCIÓN CHI- CUADRADA



DISTRIBUCIÓN WEIBULL

X es una variable continua, tiene una distribución Weibull si la pdf de X es:

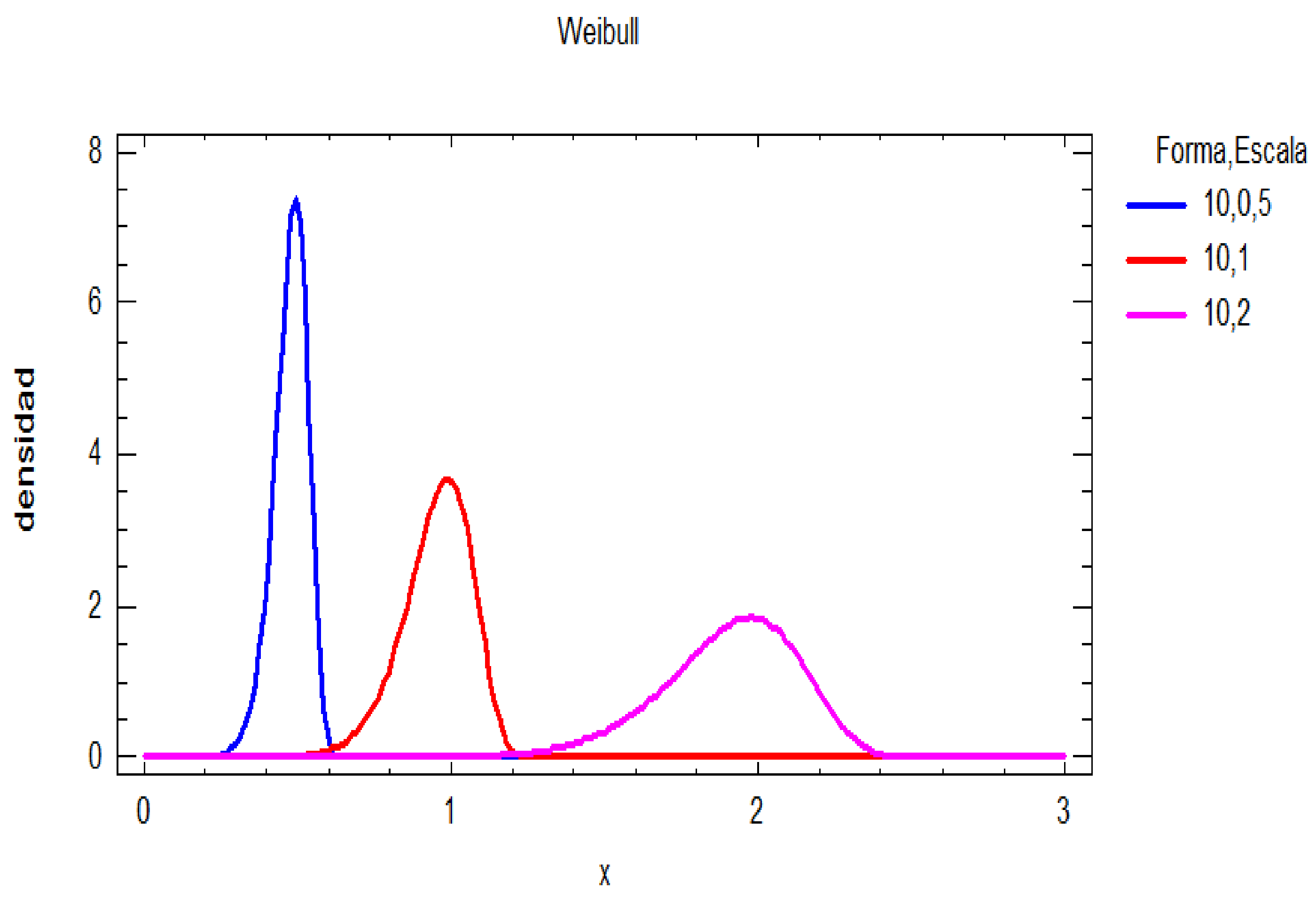
$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x\geq 0\\ 0 & de\ otra\ manera\end{cases}$$

Cuando α=1 la pdf se reduce a la distribución exponencial

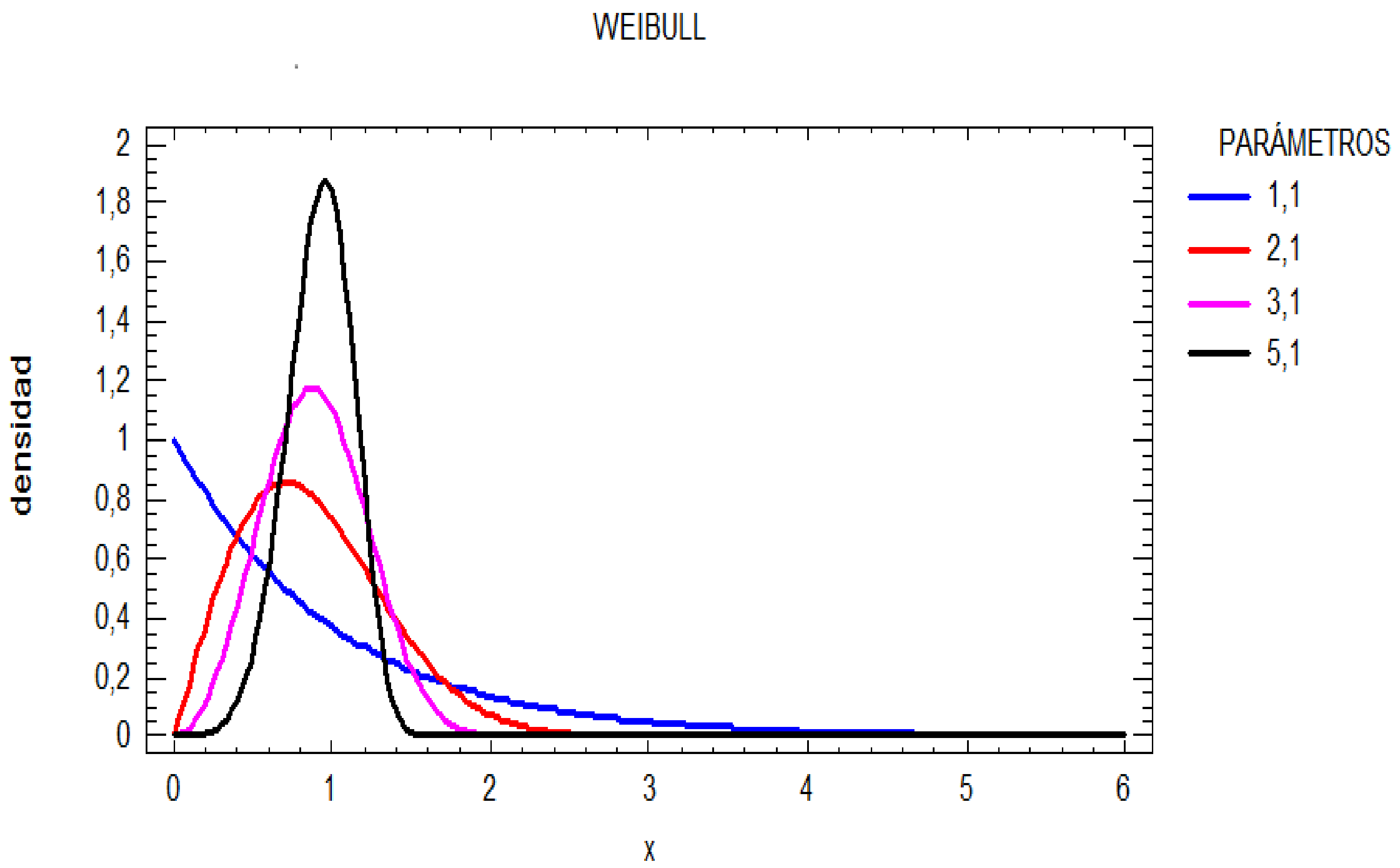
Sin embargo hay distribuciones gammas que no son Weibull y viceversa, por lo tanto una familia no es un subconjunto de la otra.

Pueden variar α y β obteniéndose una familia.

DISTRIBUCIÓN WEIBULL



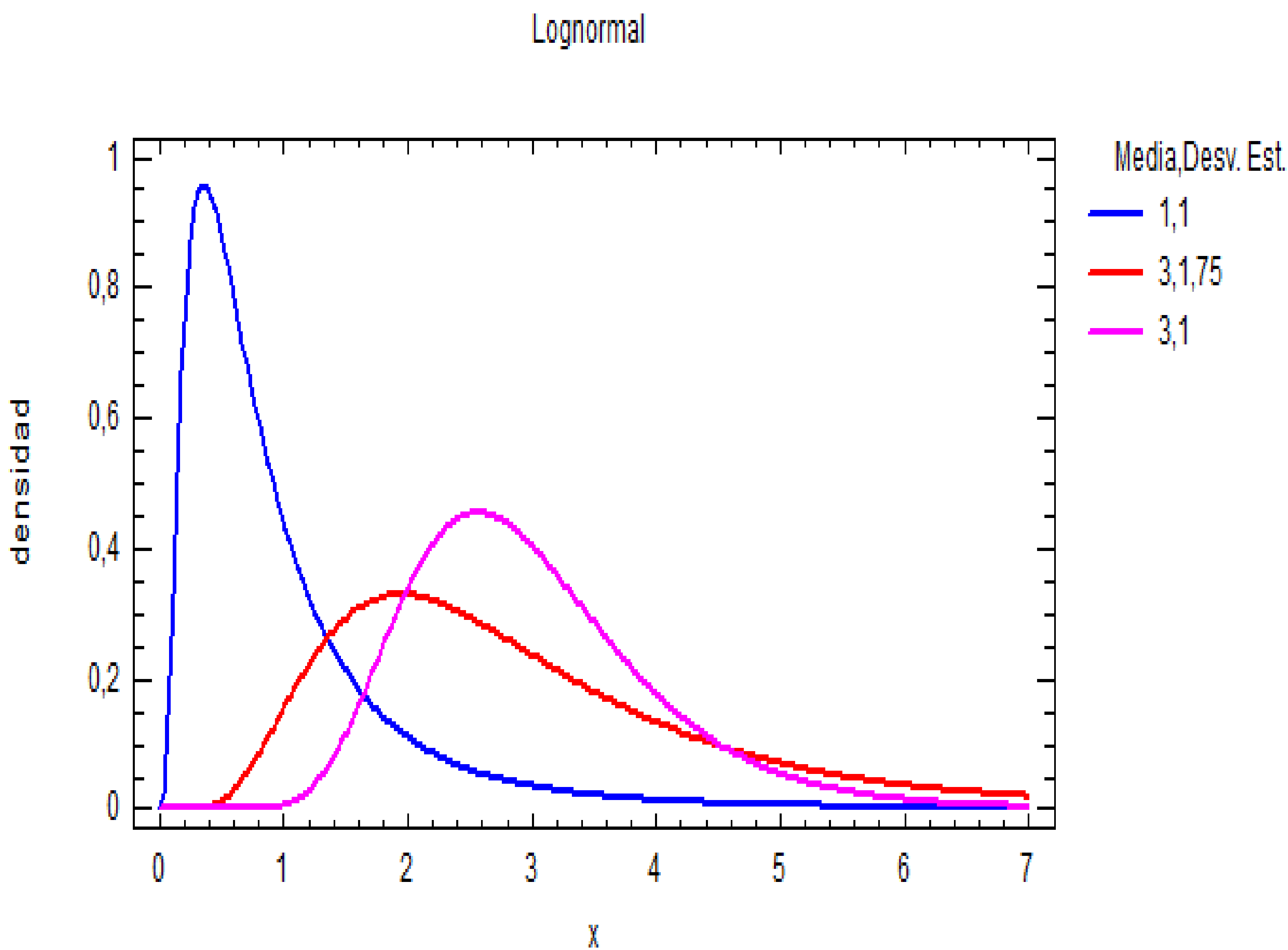
DISTRIBUCIÓN WEIBULL



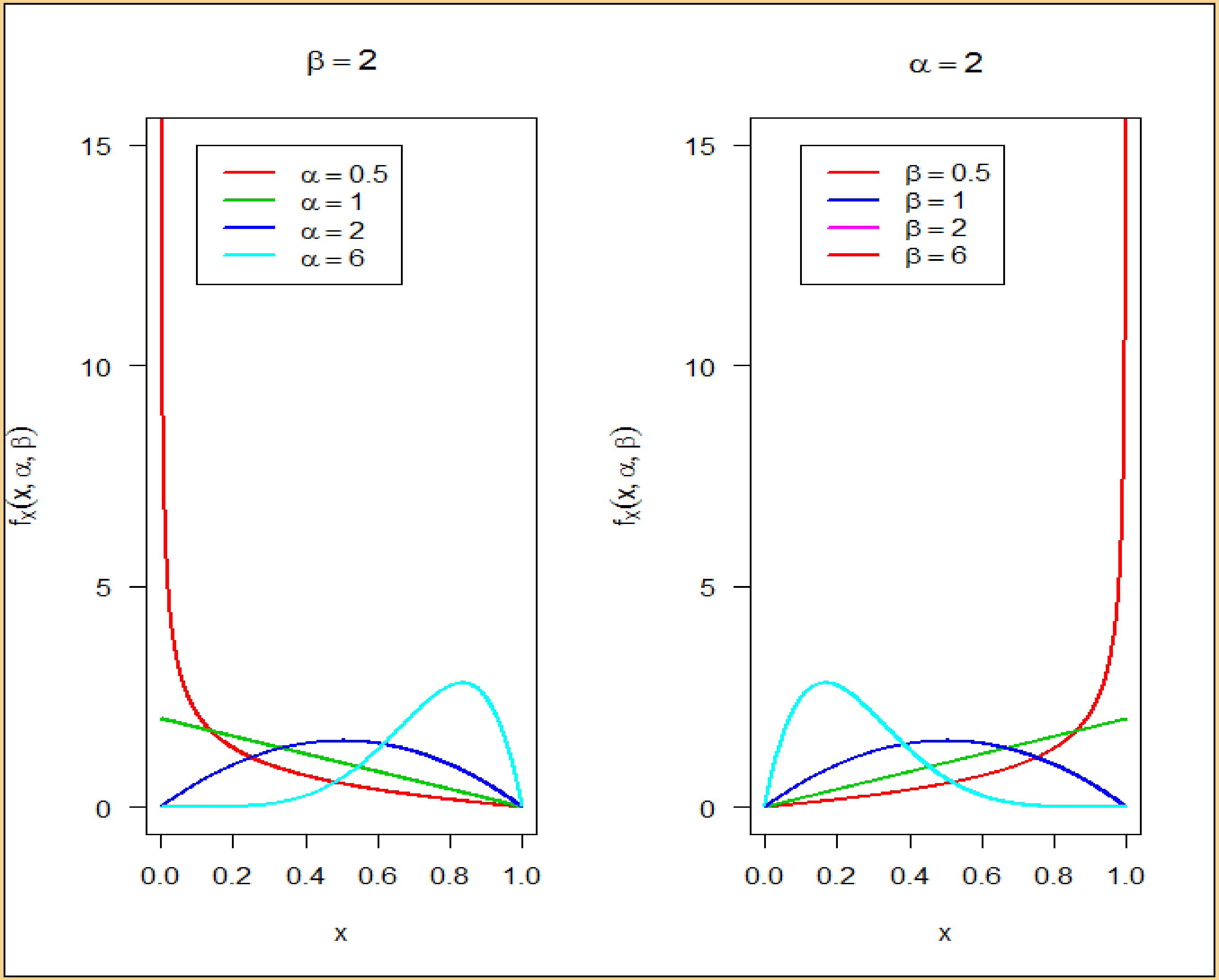
DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Se dice que una v.a X tiene una distribución lognormal si la v.a Y= ln(X) tiene una distribución normal. La pdf resultante es una v.a lognormal cuando ln(X) está normalmente distribuida con parámetros μ σ

$$f(x,\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\left[\ln(x)-\mu^{2}/(2\sigma^{2})\right]} & x\geq 0\\ 0 & x<1\end{cases}$$


Lognormal
Media,Desv. Est.
1,1
3,1,75
3,1
densidad
x
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
0
1
2
3
4
5
6
7

Modelo beta



β = 2
α = 0.5
α = 1
α = 2
α = 6
15
10
5
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
f_X(x, α, β)
α = 2
β = 0.5
β = 1
β = 2
β = 6
15
10
5
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
f_X(x, α, β)

DISTRIBUCIÓN t-Student

- Sea X una v.a.c. con función densidad

$$f(x;\nu) = \frac{1}{\nu\sqrt{\pi}} . \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} . \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{n}} \qquad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ \nu > 0 \end{matrix}$$

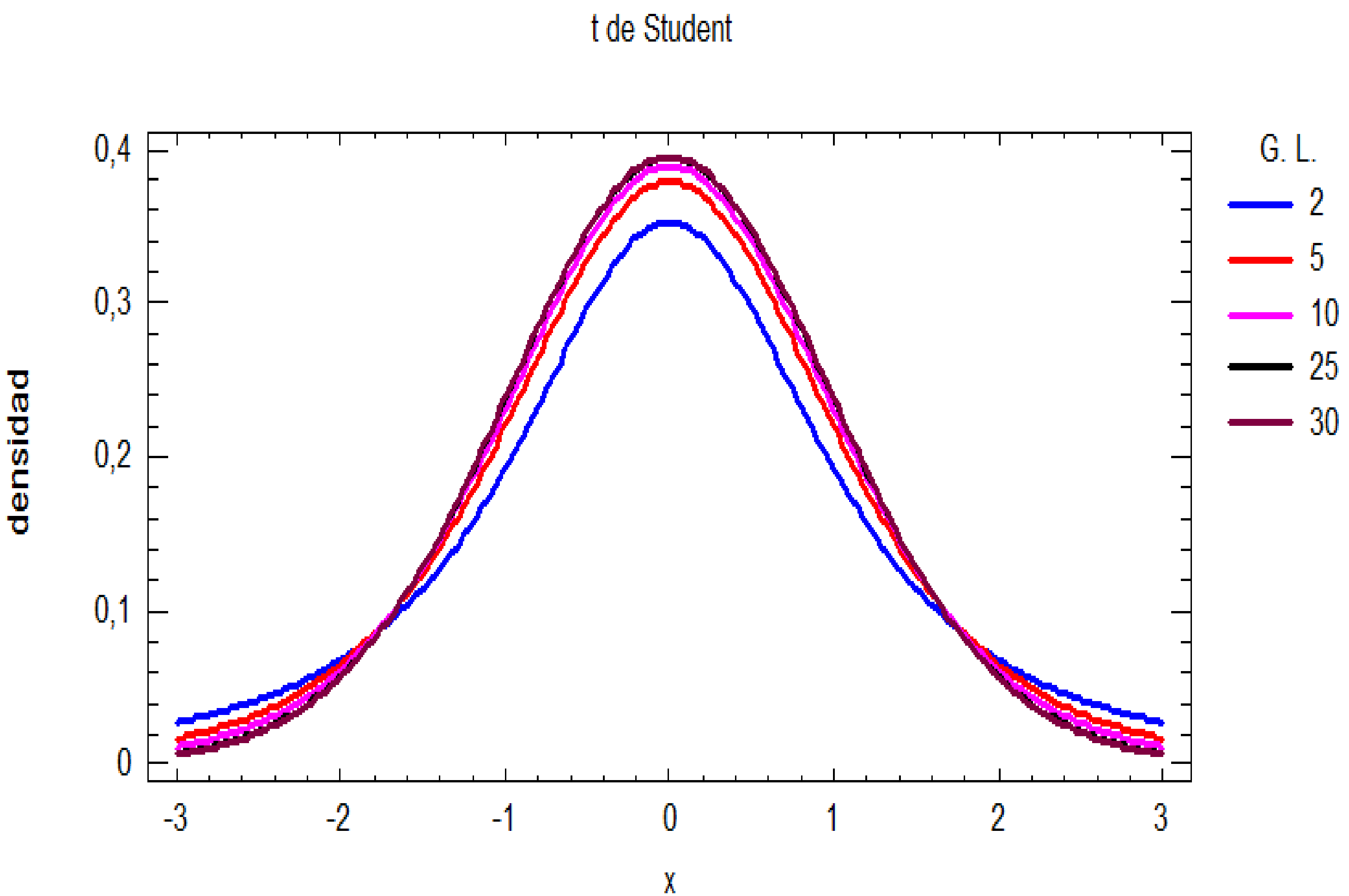
- Entonces X~como una t-Student con ν grados de libertad

Obtención de una t-Student

- <u>Teorema</u>: Si Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar y V una variable aleatoria con distribución ji-cuadrado con ν grados de libertad, y además son independientes entre sí, entonces la distribución de la variable aleatoria T

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t_{\nu}$$

DISTRIBUCIÓN t-Student



Distribución F de Fisher - Snedecor

- Si X es una v.a.c. cuya función de densidad es

$$f(x;\nu_1,\nu_2)=\begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right).\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}.\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}.\dfrac{x^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{(\nu_2+\nu_1.x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & \text{para} \quad x>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Esta distribución se conoce como F de Fischer-Snedecor, con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

Distribución F-de Fisher-Snedecor

- Teorema:
- $U \sim \chi^2_{\nu_1}$
- $V \sim \chi^2_{\nu_2}$
- U y V
-

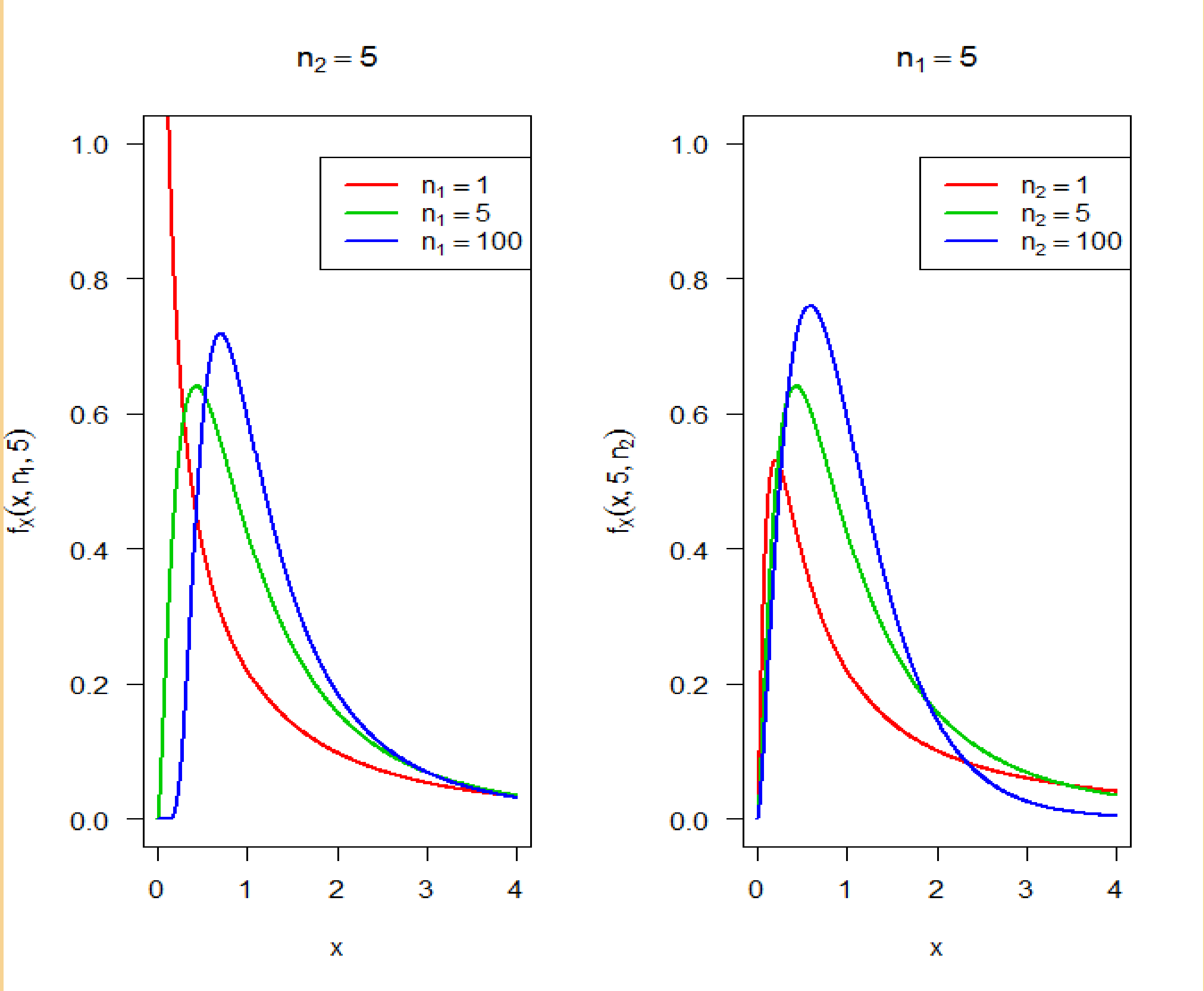
$$F = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \sim f_{\nu_1,\nu_2}$$

Distribución F-de Fisher-Snedecor

- Propiedad: Si *F* tiene una distribución f con $\nu 1$ y ν_2 grados de libertad, entonces $F' = 1/F$ tiene una distribución f pero con ν_2 y $\nu 1$ grados de libertad (en ese orden), de tal forma que

$$\boxed{f_{1-\alpha};\nu_1,\nu_2 = \frac{1}{f_{\alpha};\nu_2,\nu_1}}$$

Distribución F-de Fisher-Snedecor



Combinaciones lineales de V.A

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con medias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente, entonces la variable aleatoria

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

tiene una distribución normal

con media $\mu_Y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots + a_n \mu_n$

y varianza $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2$

Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, diríamos que la suma de n variables aleatorias normales independientes, es otra variable aleatoria con distribución normal.

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias mutuamente independientes que tienen, respectivamente, distribuciones ji-cuadrada con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ grados de libertad.

Corolario

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales idénticas con media μ y varianza σ^2, entonces la variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = n$ grados de libertad.