



---

# Data valuation

---

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

4 de septiembre de 2023

*Autor:* Francisco AGUILAR MARTÍNEZ  
*Tutores:* Carlos GREGORIO RODRÍGUEZ  
Miguel DE BENITO DELGADO





UNIVERSIDAD  
**COMPLUTENSE**  
MADRID

---

## **Data valuation**

---

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
TRABAJO FINAL DE MÁSTER  
4 de septiembre de 2023

*Autor:* Francisco AGUILAR MARTÍNEZ  
*Tutores:* Carlos GREGORIO RODRÍGUEZ  
Miguel DE BENITO DELGADO



---

## Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Estado del arte</b>                      | <b>6</b>  |
| <b>2. Marco teórico</b>                        | <b>9</b>  |
| 2.1. Teoría de juegos . . . . .                | 9         |
| 2.1.1. El valor de Shapley . . . . .           | 10        |
| 2.1.2. Semivalores . . . . .                   | 12        |
| 2.1.3. El valor de Banzhaf . . . . .           | 12        |
| 2.2. Valoración de datos . . . . .             | 14        |
| 2.3. Midiendo la robustez . . . . .            | 17        |
| 2.3.1. Robustez del valor de Banzhaf . . . . . | 18        |
| 2.3.2. Estimación eficiente . . . . .          | 18        |
| <b>3. Análisis Experimental</b>                | <b>21</b> |
| 3.1. Detección de ruido sintético . . . . .    | 22        |
| 3.2. Entrenamiento ponderado . . . . .         | 22        |
| 3.3. Resultados . . . . .                      | 23        |
| <b>Bibliografía.</b>                           | <b>25</b> |
| <b>Índice alfabético</b>                       | <b>27</b> |
| <b>A. Funciones Gamma y Beta</b>               | <b>28</b> |
| A.1. Función Gamma . . . . .                   | 28        |
| A.2. Función Beta . . . . .                    | 29        |

# CAPÍTULO 1

---

## Estado del arte

---

Desde la aparición del valor de Shapley como un método de reparto justo de recompensas en juegos cooperativos [1], este concepto se ha utilizado en diversos campos como la economía [2], estudio de sistemas multiagente [3] e incluso en áreas en las que su aplicación puede resultar menos evidente como la genética [4]. Esta versatilidad se debe, en parte, a su sólida base matemática y a sus intuitivas interpretaciones, entre las que podemos resaltar:

- Pago justo: El valor de Shapley de un jugador es la cantidad que este debería recibir si las recompensas se distribuyesen de manera que los jugadores fueran recompensados en función de su contribución a la recompensa total.
- Poder de negociación: El valor de Shapley puede interpretarse como una medida del poder de negociación de un jugador. Un jugador tiene más poder de negociación si su ausencia causa una mayor disminución en la recompensa total que se puede obtener.

El valor de Shapley se basa en una serie de axiomas fundamentales, que garantizan propiedades como su equidad, eficiencia y simetría. En economía relajar estos axiomas, con el objetivo de dar lugar a nuevas formas de reparto de recompensa, ha sido uno de los principales temas de estudio. Ejemplos de esto serían el concepto de semivalor, el cual se obtiene al eliminar el axioma de eficiencia [5, 6]. Este axioma asegura que la suma de los valores de todos los jugadores sea igual a la recompensa total disponible. Por tanto, al suprimirlo, los semivalores permiten cierta flexibilidad en este aspecto, lo que puede ser útil en situaciones en las que no todos los beneficios se pueden distribuir. Del mismo modo, eliminar el axioma de simetría, que establece que dos jugadores con igual contribución deben recibir igual recompensa, lleva al valor de Banzhaf [7], que proporciona una medida de poder de un jugador basada en cuánto puede cambiar el resultado de un juego al unirse o abandonar una coalición. Cabe destacar que tanto el valor de Shapley como el valor de Banzhaf pueden obtenerse como particularizaciones del concepto de semivalor.

Debido a la naturaleza combinatoria del valor de Shapley, el cálculo de este es altamente costoso a nivel computacional y resulta en una tarea cuya complejidad crece exponencialmente al aumentar el número de jugadores. Es por esto que surgen métodos de estimación del mismo, la mayoría de estos métodos se basan en técnicas de Montecarlo. En 1960, Irwin Mann y el propio Shapley mencionan las estimaciones basadas en muestreo de permutaciones [8]. Pero no es hasta 2015 que se lleva a cabo un análisis de la complejidad a la hora de muestrear usando dicha técnica [9]. Tras esto, en 2019, Covert propone un nuevo método de estimación basado en la técnica de muestreo por importancia que mejora los actuales [10]. Cabe destacar el *ApproShapley* propuesto en [11] desarrollado por los profesores J. Castro, D. Gómez y J. Tejada de la UCM.

Una de las primeras apariciones del valor de Shapley en el campo del aprendizaje computacional data del año 2005 como un método de selección de variables [12]. Más tarde, en 2017, se utiliza en el diseño del marco SHAP [13], enfocado en la evaluación de la importancia de variables en modelos de predicción. Sin embargo, no es hasta el año 2019 en el que se introduce como una alternativa a los métodos de valoración de datos del momento [14], acuñándose así el concepto *Data Shapley*.

Al igual que el cálculo del valor de Shapley, el cálculo de *Data Shapley* es altamente costoso a nivel computacional, por lo que surgen también varios métodos de aproximación, entre los que podemos destacar *Group Testing* [15], métodos de aproximación y cálculo exacto para problemas en los que se aplican métodos como KNN o derivados de este [16] y diversas técnicas basadas en métodos de Montecarlo como las vistas en [14].

Cuando se prueba la eficacia de *Data Shapley* en problemas de aprendizaje computacional como la detección de outliers o datos corruptos [14], la investigación sigue el mismo camino que años antes en teoría de juegos y se empiezan a reciclar conceptos como los semivalores o el valor de Banzhaf. Es en la línea de los semivalores que en 2022 surge *Beta Shapley* [17], una generalización de *data Shapley* que supera los resultados de los métodos más actuales de valoración de datos en varias tareas como son detección de muestras mal etiquetadas y selección de puntos problemáticos a la hora de entrenar un modelo.

En 2023, aparece *data Banzhaf* [18], un nuevo método de valoración de datos derivado del valor de Banzhaf. Este nuevo método surge como una solución a la falta de robustez de las herramientas de valoración de datos existentes, falta de robustez causada en parte por factores difíciles de controlar como la aleatoriedad del método del descenso del gradiente estocástico, el cual es ampliamente usado hoy en día. Para solventar esta falta de robustez se apoya en el concepto de *Safety Margin*, y demuestra que el valor de Banzhaf es el semivalor con mayor *Safety Margin*. *Data Banzhaf* supera a los existentes métodos de valoración basados en semivalores en varias tareas de aprendizaje automático.

Aunque en este trabajo nos centramos en métodos de valoración de datos que se derivan directamente de conceptos de la teoría de juegos, existen otros métodos que, aún utilizando teoría de juegos, siguen enfoques relativamente distintos. Podemos destacar algunas obras como [19] en la que sugieren un método de valoración de datos para modelos generativos que utiliza la discrepancia media máxima (MMD) entre la fuente de datos y la distribución real de datos. En [20] proponen una medida de diversidad, llamada volumen robusto (RV), para valorar las fuentes de datos. La robustez de RV se discute en términos de la estabilidad frente a la replicación de datos. Finalmente en [21] utilizan diferencias estadísticas entre los datos de origen y un conjunto de datos de referencia como la métrica de valoración. Estas diferencias estadísticas se miden mediante el uso de los conceptos de diversidad y relevancia de los datos previamente comentados.

Como algo casi anecdótico hay literatura en la que se lleva a cabo valoración de datos mediante aprendizaje por refuerzo [22]. En dicho trabajo, se utiliza una red neuronal profunda para obtener un estimador de la probabilidad de cada dato de ser usado en el entrenando del modelo de predicción. Este estimador se obtiene mediante aprendizaje por refuerzo.



### Marco teórico

---

## 2.1. Teoría de juegos

### Definición y conceptos básicos

La *teoría de juegos* puede ser entendida como la rama de las matemáticas que analiza situaciones en las que el resultado para cada jugador o participante depende no solo de sus propias decisiones, sino también de las tomadas por otros jugadores. Estas situaciones se conocen como *juegos*.

**Definición 2.1.1.** Un *juego* es una interacción entre jugadores racionales<sup>1</sup>, mutuamente conscientes, en la que las decisiones de un jugador impactan en las ganancias de otros. Un juego se define por:

- **Los jugadores que intervienen.** Cada *jugador* es un agente que tiene a su disposición diversas estrategias basadas en las posibles recompensas que podría recibir.
- **Las estrategias disponibles para cada jugador.** Una *estrategia* es un plan de acción que un jugador puede adoptar dentro de un juego. Esta estrategia dicta las acciones que tomará en cada situación posible que se presente en el juego.
- **Las ganancias de cada jugador en función de los resultados.** Las *ganancias* son representaciones de las motivaciones de los jugadores, pudiendo representar beneficios, cantidades, o simplemente reflejar la conveniencia de los diferentes desenlaces.

A lo largo de este trabajo nos centraremos en el estudio de juegos cooperativos.

**Definición 2.1.2.** Un *juego cooperativo* es aquel en el que los jugadores pueden comunicarse y negociar con el fin de establecer acuerdos vinculantes.

---

<sup>1</sup>Entendemos la racionalidad como el hecho de que cada jugador intenta maximizar su propio beneficio.

Los acuerdos mencionados se denominan *coaliciones*. Se trata de grupos de jugadores que eligen actuar juntos para lograr un objetivo común. Las coaliciones pueden variar desde la compuesta por todos los jugadores hasta la que incluye a un único jugador.

Un juego cooperativo se define completamente a través de su conjunto de jugadores  $N$  y de su función característica. Esta función establece la relación entre la formación de coaliciones y los beneficios que obtienen los jugadores, asignando a cada posible coalición (es decir, a cada subconjunto del conjunto potencia de  $N$ , denotado  $2^N$ ) un beneficio específico que pueden alcanzar.

**Definición 2.1.3.** Una *función característica*  $v$  es una función

$$\begin{aligned} v : 2^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ S &\longmapsto v(S) \end{aligned}.$$

Asignando a cada posible coalición la máxima utilidad que los jugadores de  $S$  pueden obtener, independientemente de lo que haga el resto de jugadores.

Un interrogante esencial emerge tras establecer coaliciones y ganancias: ¿cómo se reparten los beneficios entre los miembros de la coalición? Esta pregunta nos conduce directamente al valor de Shapley.

### 2.1.1. El valor de Shapley

A partir de ahora, consideraremos la situación de un juego cooperativo. Supondremos un conjunto de  $N$  jugadores e identificaremos dicho juego mediante su función característica  $v$ .

El *Valor de Shapley* es un concepto de teoría de juegos que asigna de manera equitativa las ganancias entre los miembros de una coalición. Propuesto por Lloyd Shapley en 1952 [1], se fundamenta en los siguientes axiomas:

- **Simetría.** Si dos jugadores son simétricos, es decir, si su contribución a cualquier coalición es la misma, entonces presentan el mismo valor.

$$\text{Si } \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}, v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \implies \phi_{Shapley}(i; v) = \phi_{Shapley}(j; v).$$

- **Eficiencia.** El valor total producido por la coalición conformada por todos los jugadores se distribuye entre los jugadores. Es decir,

$$v(N) = \sum_{i \in N} \phi_{Shapley}(i; v).$$

- **Linealidad.** Dados dos juegos  $u$  y  $v$ , el valor del juego  $u + v$  es la suma de los valores de cada juego. Es decir,

$$\phi_{Shapley}(i; u + v) = \phi_{Shapley}(i; u) + \phi_{Shapley}(i; v).$$

- **Jugador nulo.** Los jugadores que no aportan a ninguna coalición tendrán valor nulo. Es decir,

$$\text{Si } \forall S \subseteq N \setminus \{i\}, v(S \cup \{i\}) = v(S) \implies \phi_{Shapley}(i; v) = 0.$$

El siguiente teorema, extraído de [1] prueba que se trata del único método de valoración de datos satisfaciendo estos axiomas.

**Teorema 2.1.4.** *Existe una única función  $\phi_{Shapley}$  satisfaciendo los axiomas de simetría, eficiencia, linealidad y jugador nulo, y viene dada por la fórmula:*

$$\begin{aligned} \phi_{Shapley}(i; v) &= \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \end{aligned}$$

*Demostración.* La demostración detallada se encuentra en la sección 3 de [1]. □

Más adelante nos será útil expresar el valor de Shapley de una forma alternativa, que nos permitirá relacionarlo mejor con otros conceptos.

**Proposición 2.1.5.** *El valor de Shapley puede ser expresado como:*

$$\phi_{Shapley}(i; v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}^{-1} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ |S|=k-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \quad (2.1)$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que

$$\binom{n-1}{k-1}^{-1} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!},$$

podemos reescribir la ecuación 2.1 como:

$$\begin{aligned} \phi_{Shapley}(i, v) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ |S|=k-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ |S|=k-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \end{aligned}$$

□

### 2.1.2. Semivalores

Los semivalores son una generalización del valor de Shapley, que surgen al relajar el axioma de eficiencia. Así, permiten una variedad más amplia de métodos de valoración en el estudio de juegos cooperativos, siendo especialmente útiles en escenarios donde no es necesario o deseado que la totalidad de la recompensa sea distribuida.

La clave de los semivalores es que asignan pesos a las coaliciones basándose en el tamaño de estas. Estos pesos son utilizados para calcular la contribución marginal promedio de cada jugador. A diferencia del valor de Shapley, que es único dada su definición basada en axiomas [1], hay múltiples semivalores posibles, dependiendo de cómo se determinen los pesos. Esta variabilidad en los semivalores queda formalizada en el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.6.** *Representación de semivalores [6].*

Una función  $\phi$  es un semivalor, si y solo si, existe una función peso  $w : [n] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} w(k) = n,$$

que permite representar  $\phi$  mediante la expresión:

$$\phi(i; v) = \sum_{k=1}^n \frac{w(k)}{n} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ |S|=k-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

*Demostración.* Se puede consultar en [6]. □

Este teorema establece una biyección entre semivalores y funciones de peso. Esta correspondencia uno a uno nos permite identificar y estudiar semivalores a través de sus funciones de peso. Además de esto, proporciona una fórmula general para representar cualquier semivalor en términos de su función de peso.

Finalmente, es importante destacar que el valor de Shapley es un caso particular de semivalor. En este caso la función de peso será  $w_{Shapley} = \binom{n-1}{k-1}^{-1}$ .

### 2.1.3. El valor de Banzhaf

El *valor de Banzhaf*, también denominado índice de poder de Banzhaf[7], es una métrica de teoría de juegos cooperativos que busca cuantificar el poder e influencia de un jugador dentro de una coalición. Este índice fue introducido por John F. Banzhaf III en 1965, con la finalidad de ofrecer una herramienta analítica que pudiese determinar el poder de influencia de un jugador, especialmente en escenarios de votación ponderada.

Para comprender mejor la esencia y la utilidad del valor de Banzhaf, es fundamental familiarizarse con ciertos conceptos relacionados:

- *Sistema de votación ponderado:* Es un sistema de votación en el que cada jugador tiene un peso o poder de voto particular. Para que una propuesta sea

aprobada, la suma de los pesos de los jugadores que votan a favor debe superar un umbral o cuota establecida.

- *Jugador pivote*: Se considera que un jugador actúa como pivote si, al modificar su voto de negativo a positivo, la propuesta es aprobada. Sin embargo, si se abstuviera o mantuviera su voto en contra, la propuesta sería rechazada.
- *Índice de poder de Banzhaf* Este índice mide la frecuencia con la que un jugador se convierte en pivote. Es importante destacar que el poder de un jugador no siempre es directamente proporcional a su peso en la votación.

**Definición 2.1.7.** El *valor de Banzhaf* de un jugador  $i$  en un juego cooperativo  $v$  viene dado por la expresión:

$$\phi_{Banzhaf}(i; v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]. \quad (2.2)$$

A pesar de sus similitudes con el valor de Shapley, el índice de Banzhaf se diferencia en su enfoque y en la forma de asignar poder a los jugadores. Mientras que el valor de Shapley se basa en contribuciones marginales promediadas, el índice de Banzhaf se enfoca en la capacidad de un jugador de influir en el resultado final de una votación. Específicamente, es un semivalor con un peso asociado dado por  $w_{Banzhaf} = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

## 2.2. Valoración de datos

Hoy en día, el dato representa uno de los recursos más valiosos en el mundo para negocios, gobiernos y particulares. La toma de decisiones basada en datos está presente en casi todos los ámbitos de la sociedad, desde la medicina predictiva hasta la publicidad personalizada. Debido a esto, la habilidad para determinar el valor de un dato se ha vuelto indispensable. Es aquí donde entra en juego la valoración de datos.

Cuando nos referimos al valor de un dato, es esencial comprender que dicho valor no es unidimensional. Un dato puede ser valorado desde diferentes perspectivas y categorizado basado en diversas cualidades:

### 1. Valor Intrínseco vs. Extrínseco:

- *Valor intrínseco*: Se refiere al valor inherente al propio dato, basado en su precisión y calidad. Este valor es independiente del uso que se le dé al dato.
- *Valor extrínseco*: Se corresponde al valor que se le atribuye al dato en función de su uso. Depende, pues, del contexto en el que se use el dato.

### 2. Valor Directo vs. Indirecto:

- *Valor directo*: Alude al beneficio inmediato que se obtiene de un dato, como podría ser al venderlo.
- *Valor indirecto*: Se refiere al beneficio derivado del uso estratégico del dato.

En este trabajo nos centraremos en estudiar el valor extrínseco e indirecto de los datos. Esta investigación nos permitirá, posteriormente, discernir el valor directo de los datos y detectar posibles problemas en su valor intrínseco.

A pesar de que la valoración de datos es un concepto multifacético que depende de varios factores, nos ajustaremos al enfoque propuesto en [14, 17], el cual se compone de tres elementos esenciales:

1. Denominaremos  $N$  al *conjunto prefijado de datos de entrenamiento*, siendo  $N = \{(x_i, y_i)\}_1^n$ . Aquí,  $x_i$  hace referencia a las características del dato  $i$ -ésimo, e  $y_i$  a su categoría en problemas de clasificación o su valor en problemas de regresión.
2. El *algoritmo de aprendizaje*  $\mathcal{A}$ , será tratado como una caja negra que toma un conjunto de entrenamiento  $N$  y genera un predictor  $f$ .
3. La *función de utilidad*  $v$  es una aplicación que asigna a cada subconjunto de  $N$  un valor, reflejando la utilidad de ese subconjunto. Para problemas de clasificación, la opción común para  $v$  es la precisión del modelo entrenado con el subconjunto dado, es decir  $v(S) = \text{acc}(\mathcal{A}(S))$ . Sin pérdida de generalidad asumiremos a lo largo del documento que  $v(S) \in [0, 1]$  para cualquier  $S \subseteq N$ .

Por lo tanto, podemos concebir la valoración de datos como el proceso de asignar un valor a cada dato del conjunto  $N$ , reflejando su contribución en el entrenamiento del modelo. Cada uno de estos valores estará determinado por  $N$ ,  $\mathcal{A}$  y  $v$ , pero por simplicidad, lo expresaremos como  $\phi(i; v)$ . A estas puntuaciones se les denomina *data values*.

Los distintos enfoques que seguiremos para calcular estos *data values* son los siguientes:

## LOO Error

El método más sencillo para valorar datos consiste en medir la contribución de un punto individual al desempeño global del conjunto de entrenamiento:

$$\phi_{loo}(i; v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

Este método es conocido como *leave-one-out* (LOO). Para calcular el valor exacto de los valores LOO para un conjunto de entrenamiento de tamaño  $N$ , sería necesario reentrenar el modelo  $N$  veces. Este procedimiento resulta poco práctica cuando el tamaño del conjunto de datos es considerablemente grande [15].

## Data Shapley

En la sección 2.1.1, se presentó el valor de Shapley. En [1], se propone desarrollar un método para lograr una valoración equitativa. Resulta que las condiciones de métodos equitativos coinciden con los axiomas del valor de Shapley, es así que surge el concepto de *data Shapley*. La fórmula de data Shapley es la misma que la vista en la ecuación 2.1

## Beta Shapley

En [17] proponen utilizar la función Beta con parámetros positivos  $(\alpha, \beta)$  para definir un caso particular de semivalor, con la siguiente función de peso:

$$\begin{aligned} w_{\alpha, \beta}(j) &:= n \int_0^1 t^{j-1} (1-t)^{n-j} \frac{t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1}}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} dt \\ &= n \frac{\text{Beta}(j + \beta - 1, n - j + \alpha)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Dónde  $\text{Beta}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$  es la función Beta, y  $\Gamma(\circ)$  es la función Gamma. Utilizando algunas de las propiedades vistas en A podemos simplificar la expresión anterior a:

$$w_{\alpha, \beta}(j) = n \frac{\prod_{k=1}^{j-1} (\beta + k - 1) \prod_{k=1}^{n-j} (\alpha + k - 1)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha + \beta + k - 1)}.$$

Con esto, el nuevo semivalor propuesto, al que llamaremos Beta( $\alpha, \beta$ )-Shapley, queda definido como:

$$\phi_{Beta}(i; v) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{\alpha, \beta}(j) \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ ||S||=j-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Los hiperparámetros  $(\alpha, \beta)$  determinan la distribución de pesos para cada elemento de  $N$ . Por ejemplo, cuando  $\alpha = \beta = 1$  tendremos,  $w_{1,1}(j) = \binom{n-1}{j-1}^{-1}$  para todo  $j \in N$ , dando el peso uniforme en las contribuciones marginales, es decir, Beta(1,1)-Shapley es exactamente el valor de Shapley de los datos originales. Cuando  $\alpha \geq \beta = 1$ , el peso normalizado asigna grandes pesos a conjuntos de pequeña cardinalidad y elimina el ruido de los conjuntos de cardinalidad mayor. Por el contrario, Beta(1,  $\beta$ ) pone más pesos en la gran cardinalidad y se acerca a LOO a medida que  $\beta$  aumenta.

## Data Banzhaf

Se denomina *Data Banzhaf* a la aplicación del valor de Banzhaf2.2 en el contexto de valoración de datos. Este semivalor presenta una serie de ventajas que lo hacen especialmente interesante. Dichas propiedades serán estudiadas en detalle en secciones subsiguientes.



## 2.3. Midiendo la robustez

En diversas situaciones, como la selección de datos, el orden de los *data values* es lo que aporta valor[17]. Un ejemplo podría ser el filtrado de datos de baja calidad. El escenario ideal, sería aquel en el que incluso estando perturbada la función de utilidad, se preserva el mismo orden de *data values*.

En este contexto, la robustez alude a la resistencia de los métodos de valoración de datos ante perturbaciones o ruido. Del mismo modo que un modelo de aprendizaje robusto debería resistir entradas ruidosas, un método de valoración de datos robusto debería conservar el orden de los *data values* a pesar del ruido intrínseco de los algoritmos de aprendizaje automático.

Ahora, vamos a establecer los conceptos requeridos para formalizar y medir la robustez. Recordemos que un semivalor está determinado por su función de peso  $w$ . Así, definimos la diferencia escalada como:

**Definición 2.3.1.** Sean  $i, j \in N$ . La diferencia entre los *data values*  $\phi(i; v)$  y  $\phi(j; v)$  se define como:

$$\begin{aligned} D_{i,j}(v, w) &:= n(\phi(i; v) - \phi(j; v)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (w(k) + w(k+1)) \binom{n-2}{k-1} \Delta_{i,j}^k(v). \end{aligned}$$

Donde  $\Delta_{i,j}^k(v) := \binom{n-2}{k-1}^{-1} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i,j\} \\ |S|=k-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S \cup \{j\}))$ , representa la *distinguibilidad promedio entre  $i$  y  $j$*  en subconjuntos de tamaño  $k$  usando una función de utilidad sin ruido  $v$ .

Sea ahora  $\hat{v}$  un estimador de  $v$ . Sabemos que  $\hat{v}$  y  $v$  generarán diferentes *data values* para un par de puntos  $i$  y  $j$  si, y solo si,  $D_{i,j}(v, w) D_{i,j}(\hat{v}, w) \leq 0$ . Se podría pensar inicialmente en definir la robustez de un semivalor como la menor cantidad de ruido  $\|\hat{v} - v\|$  que alteraría el orden de los *data values*. Sin embargo, una definición así dependería de la función de utilidad original  $v$ . Si la función original  $v$  no es capaz de diferenciar dos puntos  $i$  y  $j$  ( $\Delta_{i,j}^{(k)}(v) \simeq 0$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ ), entonces  $D_{i,j}(v, w)$  será casi 0, y cualquier mínima perturbación podría modificar el orden entre  $\phi(i; v)$  y  $\phi(j; v)$ .

Por ello, para definir de forma razonable la robustez de un semivalor, debemos considerar solo las funciones de utilidad que sean capaces de distinguir entre  $i$  y  $j$ .

**Definición 2.3.2.** Diremos que un par de puntos  $(i, j)$  son  $\tau$ -distinguibles por la función de utilidad  $v$  si, y solo si,  $\Delta_{i,j}^{(k)}(v) \geq \tau$  para todo  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Sea ahora  $\mathcal{V}_{i,j}^{(k)}$  el conjunto de todas las funciones de utilidad  $v$  que son capaces de  $\tau$ -distinguir  $(i, j)$ . Usando la definición anterior, podemos caracterizar la robustez de un semivalor mediante su *safety margin*, que representa la menor cantidad

de ruido  $\|\hat{v} - v\|$  que, al añadirse, invertiría el orden de los *data values* de al menos un par de puntos  $(i, j)$ , para al menos una función de utilidad  $v \in \mathcal{V}_{i,j}^{(k)}$ .

**Definición 2.3.3.** Dado  $\tau > 0$ , definimos el *safety margin* de un semivalor para un par de puntos  $i, j \in N$  como:

$$\text{Safe}_{i,j}^{(k)}(\tau; w) := \min_{v \in \mathcal{V}_{i,j}^{(\tau)}} \min_{\hat{v} \in \{\hat{v} : D_{i,j}(v; w) D_{i,j}(\hat{v}; w) \leq 0\}} \|\hat{v} - v\|.$$

El *safety margin* de un semivalor es:

$$\text{Safe}(\tau; w) := \min_{i, j \in N, i \neq j} \text{Safe}_{i,j}(\tau; w).$$

### 2.3.1. Robustez del valor de Banzhaf

Los resultados aquí mostrados pertenecen a la sección 4 de [18].

**Teorema 2.3.4.** Para cualquier  $\tau > 0$ , el valor de Banzhaf alcanza el mayor *safety margin*,

$$\text{Safe}(\tau; w_{\text{Banzhaf}}) = \frac{\tau}{2^{\frac{n}{2}-1}}.$$

De entre todos los semivalores.

*Demostración.* Consultar apéndice C de [18]. □

Intuitivamente, este resultado se debe a cómo los semivalores asignan diferentes pesos en función del tamaño de los subconjuntos evaluados. Así, es posible construir una perturbación de la función de utilidad que maximice la influencia sobre el semivalor correspondiente, introduciendo ruido en los subconjuntos con mayor peso asignado. De ahí que la estrategia óptima para robustecer sea asignar pesos uniformes a todos los subconjuntos, tal como lo hace el valor de Banzhaf.

Además, se puede demostrar que el valor de Banzhaf es el semivalor más robusto en el sentido de que el ruido de la utilidad afecta mínimamente a los cambios en los *data values*. En concreto, el valor de Banzhaf alcanza la menor constante de Lipschitz  $L$  tal que  $\|\phi(v) - \phi(\hat{v})\| \leq L\|v - \hat{v}\|$ , para todos los posibles pares de funciones de utilidad  $v$  y  $\hat{v}$ .

**Teorema 2.3.5.** El valor de Banzhaf, con  $w(k) = \frac{n}{2^{n-1}}$ , logra la menor constante de Lipschitz,  $L = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$  de entre todos los semivalores.

*Demostración.* Consultar apéndice C.4 de [18]. □

### 2.3.2. Estimación eficiente

Dado que es prácticamente imposible calcular los *data values* exactos en métodos de valoración de datos basados en semivalores, debido a la necesidad de un número exponencial de evaluaciones de la función de utilidad, se debe recurrir a

métodos de aproximación. A continuación, introducimos el concepto de error asociado a un estimador, el cual nos será de utilidad a la hora de comparar distintos estimadores.

**Definición 2.3.6.** Un estimador de un semivalor  $\hat{\phi}$  es una  $(\epsilon, \delta)$ -aproximación del semivalor  $\phi$  en norma  $l_p$  si, y solo si,

$$P_{\hat{\phi}}[||\hat{\phi} - \phi||_p \leq \epsilon] \geq 1 - \delta.$$

Donde la aleatoriedad se da en la construcción del estimador.

### Estimador Simple de Montecarlo

El valor de Banzhaf 2.2 puede ser reformulado como:

$$\phi_{Banzhaf}(i; v) = \mathbb{E}_{S \sim \text{Unif}(2^{N \setminus \{i\}})}[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

A partir de esto, un método de Montecarlo directo para estimar  $\phi_{Banzhaf}(i; v)$  consistiría en generar muestras uniformes de  $\mathcal{S}_i \subset 2^{N \setminus \{i\}}$  y calcular:

$$\hat{\phi}_{MC}(i; v) = \frac{1}{|\mathcal{S}_i|} \sum_{S \in \mathcal{S}_i} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]. \quad (2.3)$$

Al repetir este proceso para cada punto  $i \in N$ , obtendremos el estimador  $\hat{\phi}_{MC} = [\hat{\phi}_{MC}(1), \dots, \hat{\phi}_{MC}(n)]$ .

**Teorema 2.3.7.** El estimador de Montecarlo simple  $\hat{\phi}_{MC}$  es una  $(\epsilon, \delta)$ -aproximación de  $\phi_{Banzhaf}$  en norma  $l_p$  con  $\mathcal{O}(\frac{n^2}{\epsilon^2} \log(\frac{n}{\delta}))$  evaluaciones de  $v$ , y  $\mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon^2} \log \frac{n}{\delta})$  evaluaciones de  $v$  en la norma  $l_\infty$ .

*Demostración.* Consultar apéndice C.1.2 de [18]. □

### Estimador de máxima reutilización

El método anterior podría mejorarse en eficiencia, dado que cada muestra  $S \in \mathcal{S}_i$  generada solo contribuye a la estimación de  $\hat{\phi}_{Banzhaf}(i; v)$ . Esto introduce un factor de  $n$  en la complejidad, ya que es necesario generar un mismo número de muestras para cada dato.

En este contexto surge el concepto de estimador de máxima reutilización (MSR)[18]. La idea es explotar la linealidad de la esperanza, de forma que partiendo de 2.3 llegamos a:

$$\phi_{Banzhaf}(i; v) = \mathbb{E}_{S \sim \text{Unif}(2^{N \setminus i})}[v(S \cup \{i\})] - \mathbb{E}_{S \sim \text{Unif}(2^{N \setminus i})}[v(S)]. \quad (2.4)$$

Tomemos como ejemplo un conjunto de  $m$  muestras  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ , generado de manera uniforme. Para cada  $i \in N$ , podemos clasificar las muestras de  $\mathcal{S}$  en dos categorías:

- $\mathcal{S}_{\ni i}$ : el conjunto de muestras que contienen el dato  $i$ , es decir,  $\mathcal{S}_{\ni i} = \{S \in \mathcal{S} : i \in S\}$ .

- $\mathcal{S}_{\neq i}$ : el conjunto de muestras que no contienen el dato  $i$ , esto es,  $\mathcal{S}_{\neq i} = \{S \in \mathcal{S} : i \notin S\}$ .

Así, para cada jugador, diferenciamos entre las muestras que incluyen a dicho jugador y las que no. Utilizando esta clasificación y la ecuación 2.4, podemos estimar  $\phi_{\text{Banzhaf}}(i; v)$  de la siguiente manera:

$$\hat{\phi}_{\text{MSR}}(i; v) = \frac{1}{|\mathcal{S}_{\ni i}|} \sum_{S \in \mathcal{S}_{\ni i}} v(S) - \frac{1}{|\mathcal{S}_{\neq i}|} \sum_{S \in \mathcal{S}_{\neq i}} v(S).$$

Este estimador se conoce como *estimador de máxima reutilización* (MSR).

**Teorema 2.3.8.**  $\hat{\phi}_{\text{MSR}}$  es una  $(\epsilon, \delta)$ -aproximación de  $\phi_{\text{Banzhaf}}$  en norma  $l_p$  con  $\mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon^2} \log(\frac{n}{\delta}))$  evaluaciones de  $v$ , y  $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2} \log \frac{n}{\delta})$  evaluaciones de  $v$  en la norma  $l_\infty$ .

*Demostración.* Consultar apéndice C.1.2 de [18]. □

Una de las grandes ventajas que presenta el valor de Banzhaf respecto a los demás semivalores es que se trata del único semivalor que permite la implementación del algoritmo MSR. Como puede verse en el apéndice C.2 de [18].

El siguiente teorema nos da una estimación de la bondad del MSR frente al resto de estimadores posibles.

**Teorema 2.3.9.** *Todo estimador aleatorio del valor de Banzhaf que sea una  $(\epsilon, \delta)$ -aproximación en norma  $l_\infty$  con  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$  requiere al menos  $\Omega(\frac{1}{\epsilon})$ .*

Como hemos visto anteriormente el algoritmo MSR presenta una complejidad de  $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2} \log(\frac{n}{\delta}))$  en la norma  $l_\infty$ . Lo que quiere decir que se aleja de la optimalidad en un factor de  $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon} \log(\frac{n}{\delta}))$ .

---

### Análisis Experimental

---

#### Introducción

Esta sección detalla los experimentos efectuados para evaluar la eficacia de los métodos de valoración de datos que hemos investigado. Cabe destacar el uso de las herramientas *pyDVL*, una librería de [appliedAI](#) y *DVC*, herramienta de control del versiones para proyectos de ciencia de datos.

Se trabajará con conjuntos de datos estandar que se usan normalmente en la literatura para la evaluación de métodos de clasificación [18]. Los dataset se pueden observar en la tabla 3.1.

Evaluaremos los métodos de valoración de datos en dos tareas de aprendizaje automático, la detección de puntos mal etiquetados y el entrenamiento ponderado. Compararemos los resultados obtenidos por LOO, data Banzhaf, data Shapley, Beta(1, 4), Beta(1, 16), Beta(4, 1), Beta(16, 1). En cuanto a los conjuntos de datos, se utilizarán siete conjuntos de datos que se usan habitualmente en la literatura como *benchmarks* para la valoración de datos [18].

#### pyDVL

[pyDVL](#) es una herramienta en proceso de mejora, actualmente en su versión 0.7.0. *pyDVL* agrupa algoritmos destinados al cálculo de valores de datos, la mayoría basados en la teoría de juegos cooperativos.

*pyDVL* nos permite calcular de forma sencilla y automática los valores de datos de un conjunto de datos usando distintos métodos de valoración, métodos de muestreo, estimadores...

*pyDVL* divide el proceso del cálculo de valores de datos en tres sencillos pasos:

1. Construcción del *pyDVL* Dataset a partir de tus datos.
2. Se crea la utilidad. Concepto abstracto que vincula el modelo que se usará, el conjunto de datos y la métrica de error.
3. Se calculan los valores de datos, con el método que se desee.

| Dataset  | Source  |
|----------|---|
| Click    | <a href="https://www.openml.org/d/1218">https://www.openml.org/d/1218</a>   |
| Apsfail  | <a href="https://www.openml.org/d/41138">https://www.openml.org/d/41138</a> |
| Phoneme  | <a href="https://www.openml.org/d/1489">https://www.openml.org/d/1489</a>   |
| Wind     | <a href="https://www.openml.org/d/847">https://www.openml.org/d/847</a>     |
| Pol      | <a href="https://www.openml.org/d/722">https://www.openml.org/d/722</a>     |
| CPU      | <a href="https://www.openml.org/d/761">https://www.openml.org/d/761</a>     |
| 2DPlanes | <a href="https://www.openml.org/d/727">https://www.openml.org/d/727</a>     |

TABLA 3.1: Conjuntos de datos usados en los experimentos

## DVC

*DVC*, acrónimo de Data Version Control, es una herramienta diseñada para la ciencia de datos que se integra con herramientas de ingeniería de software ya existentes. Su función es asistir a los equipos de machine learning en la administración de grandes conjuntos de datos, garantizar la reproducibilidad de los proyectos y potenciar la colaboración. *DVC* es compatible con cualquier terminal y puede ser usado como una biblioteca de Python.

El objetivo central de *DVC* es brindar una experiencia al estilo Git para estructurar datos, modelos y experimentos en proyectos de Ciencia de Datos y Aprendizaje Automático.

Para más detalles, consulta la [Documentación de DVC](#).

### 3.1. Detección de ruido sintético

Compararemos la habilidad de detección de

We investigate the ability of different data value notions in detecting mislabeled points under noisy utility functions. We generate noisy labeled samples by flipping labels for a randomly chosen 10 % of training data points. We mark a data point as a mislabeled one if its data value is less than 10 percentile of all data value scores. We use F1-score as the performance metric for mislabeling detection.

### 3.2. Entrenamiento ponderado

En este experimento se usan los *data values* como pesos para el entrenamiento de un modelo.

We now examine how the data value-based importance weight can be applied to subsample data points. We train a model with 25 % of the given dataset by using the importance weight max for the  $i$ -th sample. With this importance weight, data points with higher values are more likely to be selected and data points with negative values are not used. We train a classifier to minimize the weighted loss then evaluate the accuracy on the held-out test dataset.

Se hace algo similar a esto: Explicar lo que hace el fit We weight each training point by normalizing the associated data value between  $[0,1]$ . Then, during training, each training sample will be selected with a probability equal to the assigned

weight. As a result, data points with a higher value are more likely to be selected in the random mini-batch of SGD, and data points with a lower value are rarely used. We train a neural network classifier to minimize the weighted loss, and then evaluate the accuracy on the held-out test dataset. As Table 1 shows, Data Banzhaf outperforms other baselines.

### **3.3. Resultados**





---

## Bibliografía.

---

- [1] Lloyd S Shapley «A Value for n-Person Games», 1952 ed. por Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker, págs. 307-317.
- [2] Alvin E Roth «*The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*» Cambridge University Press, 1988.
- [3] Shaheen S. Fatima, Michael Wooldridge y Nicholas R. Jennings «A linear approximation method for the Shapley value» *Artificial Intelligence* 172.14, 2008, págs. 1673-1699.
- [4] Stefano Moretti, Vito Fragnelli, Fioravante Patrone y Stefano Bonassi «Using coalitional games on biological networks to measure centrality and power of genes» *Bioinformatics (Oxford, England)* 26, 2010, págs. 2721-30.
- [5] Pradeep Dubey y Robert J. Weber *Probabilistic Values for Games* Cowles Foundation Discussion Papers 471 Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, 1977.
- [6] Pradeep Dubey, Abraham Neyman y Robert James Weber «Value Theory without Efficiency» *Mathematics of Operations Research* 6.1, 1981, págs. 122-128.
- [7] J.F. Banzhaf «Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis» *Rutgers Law Review* 19.2, 1965, págs. 317-343.
- [8] Irwin Mann y Lloyd S. Shapley «Values of Large Games, IV: Evaluating the Electoral College by Montecarlo Techniques», 1960.
- [9] Sasan Maleki «Addressing the computational issues of the Shapley value with applications in the smart grid» Tesis doct. University of Southampton, ago. de 2015.
- [10] Ian C Covert, Scott M Lundberg y Su-In Lee «Shapley feature utility» *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019.
- [11] Javier Castro, Daniel Gómez y Juan Tejada «Polynomial calculation of the Shapley value based on sampling» *Computers & Operations Research* 36.5, 2009 Selected papers presented at the Tenth International Symposium on Locational Decisions (ISOLDE X), págs. 1726-1730.
- [12] Shay Cohen, Eytan Ruppín y Gideon Dror «Feature selection based on the shapley value» *other words* 1.98Eqr, 2005, pág. 155.

- [13] Scott M. Lundberg y Su-In Lee «A Unified Approach to Interpreting Model Predictions», 2017 ed. por Isabelle Guyon, Ulrike von Luxburg, Samy Bengio, Hanna M. Wallach, Rob Fergus, S. V. N. Vishwanathan y Roman Garnett, págs. 4765-4774.
- [14] Amirata Ghorbani y James Y. Zou «Data Shapley: Equitable Valuation of Data for Machine Learning» Proceedings of Machine Learning Research 97, 2019 ed. por Kamalika Chaudhuri y Ruslan Salakhutdinov, págs. 2242-2251.
- [15] Ruoxi Jia et al. «Scalability vs. Utility: Do We Have to Sacrifice One for the Other in Data Importance Quantification?», 2019.
- [16] Ruoxi Jia et al. «Efficient Task-Specific Data Valuation for Nearest Neighbor Algorithms» *Proc. VLDB Endow.* 12.11, 2019, págs. 1610-1623.
- [17] Yongchan Kwon y James Zou «Beta Shapley: a Unified and Noise-reduced Data Valuation Framework for Machine Learning» Proceedings of Machine Learning Research 151, 2022 ed. por Gustau Camps-Valls, Francisco J. R. Ruiz e Isabel Valera, págs. 8780-8802.
- [18] Jiachen T. Wang y Ruoxi Jia «Data Banzhaf: A Robust Data Valuation Framework for Machine Learning» Proceedings of Machine Learning Research 206, 2023 ed. por Francisco J. R. Ruiz, Jennifer G. Dy y Jan-Willem van de Meent, págs. 6388-6421.
- [19] Sebastian Shenghong Tay, Xinyi Xu, Chuan Sheng Foo y Bryan Kian Hsiang Low «Incentivizing Collaboration in Machine Learning via Synthetic Data Rewards», 2022, págs. 9448-9456.
- [20] Xinyi Xu, Zhaoxuan Wu, Chuan Sheng Foo y Bryan Kian Hsiang Low «Validation Free and Replication Robust Volume-based Data Valuation» 34, 2021 ed. por M. Ranzato, A. Beygelzimer, Y. Dauphin, P.S. Liang y J. Wortman Vaughan, págs. 10837-10848.
- [21] Mohammad Mohammadi Amiri, Frederic Berdoz y Ramesh Raskar «Fundamentals of Task-Agnostic Data Valuation», 2023 ed. por Brian Williams, Yiling Chen y Jennifer Neville, págs. 9226-9234.
- [22] Jinsung Yoon, Serkan Arik y Tomas Pfister «Data Valuation using Reinforcement Learning» Proceedings of Machine Learning Research 119, 2020 ed. por Hal Daumé III y Aarti Singh, págs. 10842-10851.

---

## Índice alfabético

---

Juego cooperativo, 9

## APÉNDICE A

---

### Funciones Gamma y Beta

---

#### A.1. Función Gamma

Llamaremos función Gamma ( $\Gamma$ ) a la función definida en el intervalo  $(0, +\infty)$  por

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt. \quad (\text{A.1})$$

**Teorema A.1.1.** Para todo  $p > 0$  se tiene que  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ .

En particular,  $\Gamma(n+1) = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Integramos por partes.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p dt = [-e^{-t} t^p]_0^{+\infty} + p \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$$

Como  $[-e^{-t} t^p]_0^{+\infty} = 0$  al ser  $p > 0$ , tenemos que  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ .

Para la segunda afirmación, sabiendo que  $\Gamma(1) = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ , tendremos

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!.$$

□

**Teorema A.1.2.** Si  $a \in \mathbb{C}$ , tal que  $\text{Re}(a) > 0$ , y  $p > 0$ , entonces:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} t^{p-1} dt = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$

*Demostración.* Realizando el cambio de variable  $t = au$  en la integral de la función  $\Gamma$ , tenemos:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-au} (au)^{p-1} \cdot a du = a^p \int_0^{+\infty} e^{-au} u^{p-1} du.$$

Despejando tenemos

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} = \int_0^{+\infty} e^{-at} t^{p-1} dt.$$

Esta igualdad se tiene para todo  $a \in \mathbb{R}$ , ahora bien, si  $a \in \mathbb{C}$ , con  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , tenemos que las funciones complejas a cada lado de la igualdad son analíticas en  $a$  y coinciden en el eje real positivo, por lo que coinciden en todos los puntos en los que sean holomorfas, es decir, al menos en el semiplano real positivo.  $\square$

## A.2. Función Beta

Llamaremos función Beta  $Beta$  a la función definida para todo par de puntos  $p, q > 0$  por la integral:

$$Beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

**Teorema A.2.1.** *La función Beta es simétrica en sus dos variables, es decir,  $Beta(p, q) = Beta(q, p)$ .*

*Demostración.* Realizando el cambio de variable  $t = 1 - u$  en la integral de la función Beta, tenemos:

$$Beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du.$$

Intercambiando  $p$  y  $q$  tenemos

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = - \int_1^0 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \int_0^1 u^{q-1} (1-u)^{p-1} du = B(q, p).$$

$\square$

**Teorema A.2.2.** *Para todo  $p, q > 0$  se tiene que*

$$Beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

*Demostración.* Realizamos el cambio de variables  $v = \frac{t}{1-t}$  en la integral que define la función Beta, se tiene:

$$Beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}} dv.$$

Usando la propiedad vista en A.1.2, y tomando  $\alpha = p+q$  y  $a = 1+v$ , tenemos:

$$\frac{1}{(1+v)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-(1+v)x} dx.$$

Sustituyendo esta última igualdad en la expresión anterior de la función beta se tiene

$$\begin{aligned}\beta(p, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}} dv = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} v^{p-1} x^{p+q-1} e^{-(1+v)x} dv dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} v^{p-1} e^{-vx} dv \right) dx.\end{aligned}$$

Volviendo a usar la expresión

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{a^\alpha}, a, \alpha > 0$$

se deduce

$$\beta(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} v^{p-1} e^{-vx} dv \right) dx = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} \frac{\Gamma(p)}{x^p} dx$$

y utilizando la expresión de la función gamma, se concluye

$$\beta(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} \frac{\Gamma(p)}{x^p} dx = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{+\infty} x^{q-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□