Tarea 4

Francisca Carrasco

November 2017

1

Un feedback vertex set de un grafo G es un subconjunto S de sus nodos con la propriedad que G S es aciclico. Por el problema Feedback Vertex Set recibimos un grafo G y un entero k y tenemos que decir si hay un feedback vertex set en G de tamaño no más que k.

• Muestre que Feedback Vertex Set esta en NP. (De verdad, es NP-complete — i.e., en NP y NP-hard — pero no tiene que mostrar eso la segunda parte.)

Es NP-complete ya que si tenemos un conjunto de nodos X perteneciente a G y X siendo menor a k. Y si de G removemos X, nos quedamos con S, el cual sólo faltaría verificar que sea aciclico. El elimina nodos para que el grafo este libre de ciclos equivale a encontrar un Spanning Tree, que se realiza en tiempo polinomial.

• Muestre que, dado una caja negra que dice "si" o "no" correctamente por instancias de Feedback Vertex Set, puedes usarla para encontrar un feedback vertex set minimo. (Una caja así se llama un oracle y esta propriedad del problema se llama self-reducibility — pero no tiene que saber eso.)

Dependiendo de la instancia, sea "si" o "no", se crearán dos conjuntos de nodos, los que "sean si" y los que "sean no", los cuales los últimos se eliminan, quedando con el conjunto que habria que verificar si es o no aciclico.

2

Por el problema Hamiltonian Path recibimos un grafo G y tenemos que decir si hay un camino que visita cada nodo exactamente una vez. Muestre que Hamiltonian Path se puede reducir en tiempo polinomial al problema Integer Linear Programming. (Consejo: use un variable por cada nodo, indicando si es un extremo del camino, y un variable por cada arista, indicando si está en el camino.)

Lo que hay que hacer es: sea la matriz xij igual 1 si existe forma de llegar de i a j, y 0 en otro caso, para el conjunto de nodos 0,..., n. Sean ui para i = 1,..., n variables que indicará que es una arista no perteneciente a la solucion final y óptima y sea cij la distancia de i a j

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{j\neq i, j=0}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rr}
0 \leq x_{ij} \leq 1 & i, j = 0, \ldots n \\
x_{ij} \text{ integer} & i, j = 0, \ldots n \\
\displaystyle\sum_{i=0, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 & j = 0, \ldots, n \\
\displaystyle\sum_{j=0, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 & 1 \leq i \neq j \leq n.
\end{array}$$

Figure 1: