2 GRÁFICAS DE ECUACIONES POLARES

2.1 RECTAS

En esta sección se estudiará un poco más sobre rectas, recuerde que el eje polar es una recta y una forma de escribirla es mediante la ecuación $\theta = 0$ o también $\theta = \pi$, $\theta = -\pi$, etc. El eje "y" en polares equivale a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, que se puede representar mediante las ecuaciones $\theta = \frac{3\pi}{2}, \theta = -\frac{\pi}{2}$, etc.

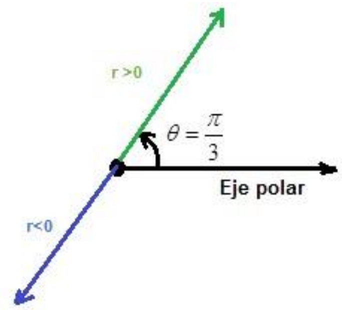
Ejemplos: Elaborar las gráficas de las ecuaciones siguientes

a) $\theta = \frac{\pi}{3}$

Solución:

Note que en esta ecuación no aparece la variable r y θ es constante, es decir, siempre va a valer $\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto r puede tomar cualquier valor real (positivo o negativo).

Para obtener la gráfica que corresponde a la ecuación $\theta = \frac{\pi}{3}$, se mide con el transportador los 60º, que es a lo que equivale $\frac{\pi}{3}$(siempre ubicando el cero radianes en el eje polar) y luego se traza la recta, tal como se observa en la siguiente figura.



Si se pide trasformar la ecuación de la recta $\theta = \frac{\pi}{3}$ a coordenadas rectangulares, se hace lo siguiente:

Recuerde que $Tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Entonces, como el ángulo θ es $\frac{\pi}{3}$

$Tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x}$, pero la tangente de $\frac{\pi}{3}$ es $\frac{\sqrt{3}}{1}$

$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$, que equivale por lo tanto a $y = \sqrt{3}x$ en el sistema rectangular

b) $r = 3Sec(\theta)$

Solución:

En este caso conviene primero convertirla a una ecuación en coordenadas rectangulares $r = 3Sec(\theta)$, aplicando la identidad trigonométrica $Sec(\theta) = \frac{1}{Cos(\theta)}$

$$r = \frac{3}{Cos(\theta)}$$

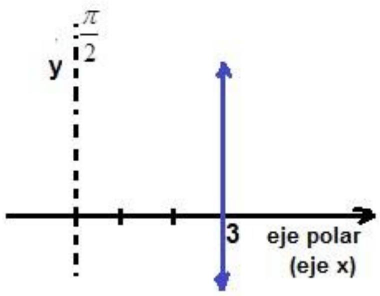
$$rCos(\theta) = 3$$

Se sabe que:

$$rCos(\theta) = x$$ Por lo tanto:

$$x = 3$$

Luego $x = 3$ es una recta vertical que pasa tocando el eje "x" por el valor de 3



c) Convertir la ecuación $4x + 3y - 2 = 0$ al sistema polar. Dejar r en función de θ

Solución:

$4x + 3y - 2 = 0$

Recuerde que $y = rSen(\theta)$ y $x = rCos(\theta)$ Sustituyendo:

$4[rCos(\theta)] + 3[rSen(\theta)] - 2 = 0$

$4rCos(\theta) + 3rSen(\theta) = 2$

$r[4Cos(\theta) + 3Sen(\theta)] = 2$

$$r = \frac{2}{4Cos(\theta) + 3Sen(\theta)}$$

2.2 CIRCUNFERENCIAS

Circunferencias con centro en el polo $(r = a)$ con $a \neq 0$

Algunas circunferencias son más fáciles de representar en coordenadas polares que en rectangulares.

Las circunferencias, en rectangulares, con centro en el origen tienen la forma $x^2 + y^2 = a^2$, donde a es el radio. Se muestra a continuación cómo se representa en polares este tipo de circunferencias:

$$x^2 + y^2 = a^2$$ Se

sabe que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por lo tanto:

$$r^2 = a^2$$

$$r = \pm\sqrt{a^2}$$

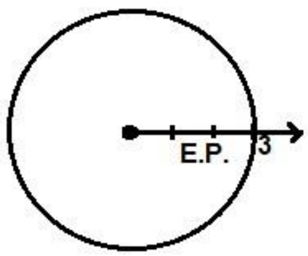
$$r = \pm a$$

Por lo tanto, toda circunferencia con centro en el origen en polares se representa por la ecuación $r = a$ ó $r = -a$, siendo a una constante diferente de cero.

Ejemplo: Hacer un esbozo de la gráfica de la ecuación polar $r = 3$ ***Solución:***

En este caso no importa cuánto vale el ángulo θ, el valor de r siempre tomará el valor de 3 unidades (recuerde que r se mide desde el polo).

Para hacer la gráfica cuya ecuación en polares es $r = 3$, se mide 3 unidades desde el polo y con un compás se traza la circunferencia con centro en el polo de radio 3.



Circunferencias que pasan por el polo y cuyo eje de simetría es el eje polar o la recta $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

Estas ecuaciones son de la forma $r = aCos(\theta)$ ó $r = aSen(\theta)$

Se verifica ahora que la gráfica de $r = aSen(\theta)$ es una circunferencia de diámetro a unidades lineales

$r = aSen(\theta)$

multiplicando por r en ambos lados

$$rr = arSen(\theta)$$
$$r^2 = arSen(\theta)$$

Se sabe que:

$$y = rSen(\theta)$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

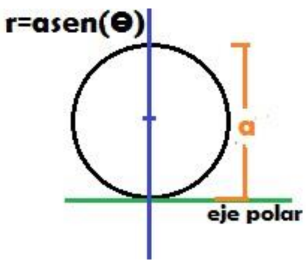
Sustituyendo entonces:

$$x^2 + y^2 = ay$$
$$x^2 + y^2 - ay = 0$$

Se completan los cuadrados para y:

$$x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a^2}{4} = 0$$
$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

Resultando lo anterior en una circunferencia con centro en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{a}{2}$(diámetro a) y su gráfico será:



Por lo tanto, para graficar circunferencias de la forma $r = aSen(\theta)$, se toma en cuenta lo siguiente:

i) Se sabe que pasan por el polo ii) Que el centro es $\left(0,\frac{a}{2}\right)$

iii) El eje polar es la recta tangente de la gráfica iv) Hay simetría respecto a la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$

v) Si a es positiva, la circunferencia va hacia arriba del eje polar y si es negativa la circunferencia va hacia abajo del eje polar.

De forma similar se puede analizar las circunferencias de la forma $r=aCos(\theta)$

Por lo tanto, para graficar circunferencias de la forma $r=aCos(\theta)$, se toma en cuenta lo siguiente:

i) Se sabe que pasan por el polo

ii) Que el centro es $\left(\frac{a}{2},0\right)$

iii) La recta $\theta=\frac{\pi}{2}$ es la recta tangente de la gráfica iv) Hay simetría respecto al eje polar

v) Si a es positiva, la circunferencia va hacia la derecha de la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$ y si es negativa la circunferencia va hacia la izquierda.

Ejemplo:

Graficar las siguientes ecuaciones polares:

a) $r=5Sen(\theta)$

b) $r=-4Cos(\theta)$

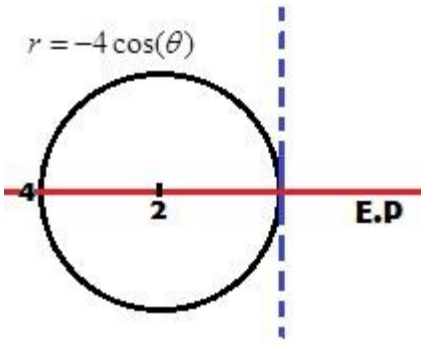
Solución para a)

Circunferencia que pasa por el polo, simétrica respecto a $\theta=\frac{\pi}{2}$, de radio 2.5 y orientada hacia arriba. Además, su tangente en el polo es $\theta=0$

Observación: todos los puntos de la gráfica de esta circunferencia se obtienen dándole valores a la ecuación mediante ángulos entre 0 y π radianes.

Solución para b)

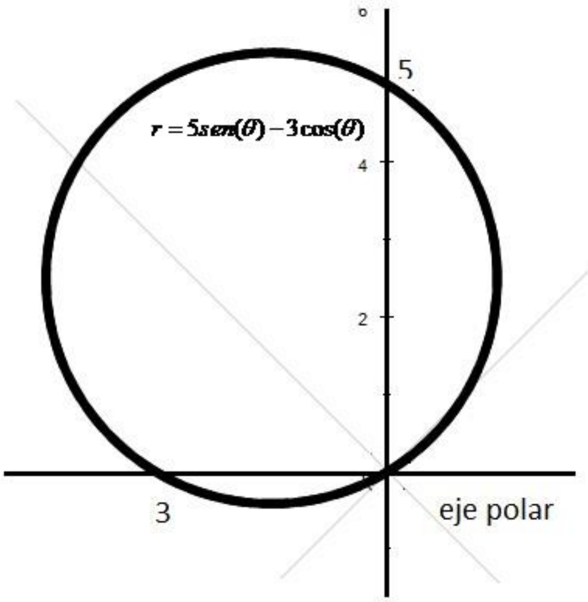
Circunferencia que pasa por el polo, simétrica respecto $\theta = 0$, de radio 2 y orientada hacia la izquierda. Además, su tangente en el polo es $\theta = \frac{\pi}{2}$



Observación: La gráfica completa se obtiene a través de valores entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ radianes.

Circunferencias que pasan por el polo y cuyo eje de simetría no es el eje polar ni la recta $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

Estas circunferencia son de la forma $r = aCos(\theta) + bSen(\theta)$, con $a\ y\ b \neq 0$



En este caso, para graficar solamente se necesita ubicar el centro de la circunferencia, del cual pueden deducirse sus coordenadas así:

$$r = aCos(\theta) + bSen(\theta)$$

$$r^2 = arCos(\theta) + brSen(\theta)$$

$$r = ax + by$$

$$x^2 + y^2 = ax + by$$

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

Completando cuadrados se llega a la ecuación canónica de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Donde su centro ocurre en $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y éstos corresponden a los valores a la mitad de los coeficientes que acompañan a $Cos(\theta)$ y $Sen(\theta)$, respectivamente.

Observaciones:

a) Para graficar este tipo de circunferencia, solamente se necesita determinar el centro de ella y como se sabe que pasa por el polo, entonces se pone la punta del compás en el centro

y la punta del lápiz del compás en el polo y se traza la circunferencia. b) Estas circunferencias tienen una tangente en el polo.
c) La representación del centro de la circunferencia es en coordenadas rectangulares.

Ejemplo:

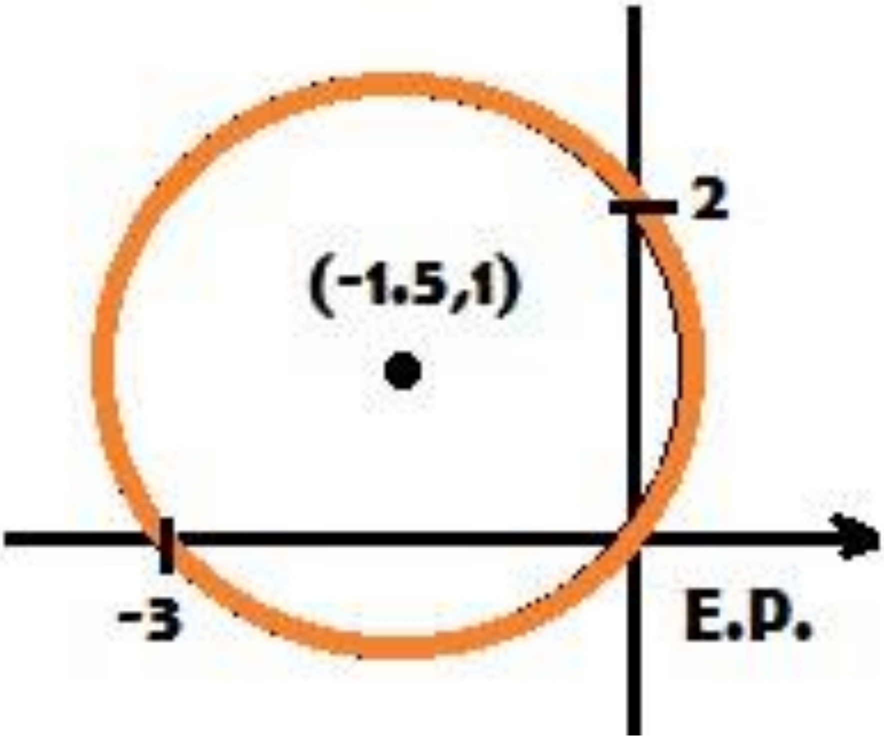
Dada la ecuación polar $r = -3Cos(\theta) + 2Sen\,(\theta)$:

a) Elaborar la gráfica
b) Determinar la tangente en el polo

Solución para a)

$$r = -3Cos(\theta) + 2Sen\,(\theta)$$

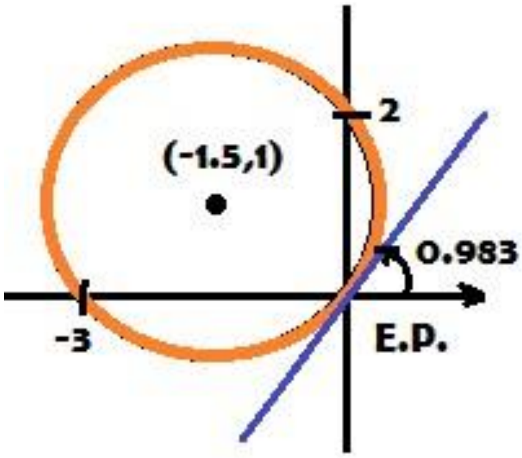
$a = -3\ \ y\, b = 2$ por lo tanto, el centro es $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$



Solución para b)

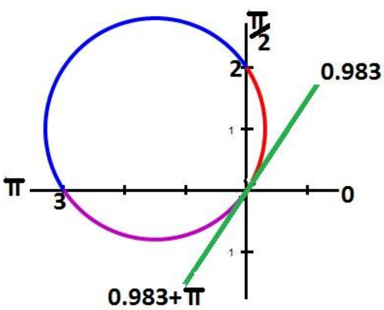
$$r = -3Cos(\theta) + 2Sen\,(\theta)$$

$$-3Cos(\theta) + 2Sen\ (\theta) = 0$$
$$2Sen\ (\theta) = 3Cos(\theta)$$
$$\frac{Sen(\theta)}{Cos(\theta)} = \frac{3}{2}$$
$$Tan(\theta) = 1.5$$
$$\theta = Tan^{-1}(1.5)$$
$$\theta \approx 0.983\ Radianes$$



La calculadora tiene que configurarse en radianes. El valor de 0.983 son radianes. Luego, ya que la única tangente al polo es 0.983, no se va probar que al evaluar 0.983 en la derivada de r es diferente de cero.

OBSERVACIÓN:
La gráfica de la circunferencia anterior (y todas las de este tipo de circunferencias) se generan de la tangente al polo al otro extremo de la tangente, es decir, de 0.983 a 0.983+π, en este caso particular.



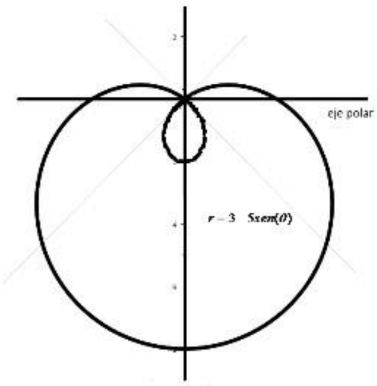
Al sustituir en la ecuación $r = -3Cos(\theta) + 2Sen\ (\theta)$ por ángulos entre 0.983 radianes y $\frac{\pi}{2}$ se generan los puntos que están en rojo de la circunferencia, de $\frac{\pi}{2}$ a π los puntos en azul y de π a $0.983 + \pi$ los puntos en color morado.

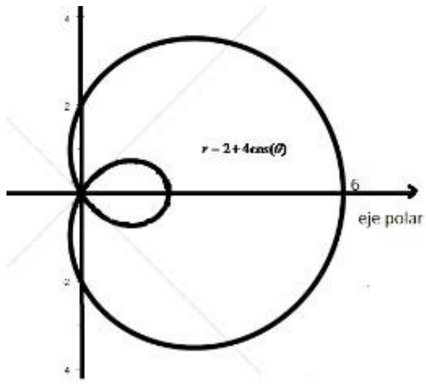
Puede verificarse también, que al darle valores a la ecuación polar mediante ángulos entre 0 y 0.983 se generan los puntos de color morado, de cero a $-\frac{\pi}{2}$ los de color azul y de $\theta = -\frac{\pi}{2}$ al ángulo $\theta = -\frac{\pi}{2} - 0.983$ se generan los puntos de color rojo. **Esto es muy importante comprenderlo, ya que más adelante se ocuparán estos conceptos para determinar áreas de regiones polares.**

2.3 CARACOLES

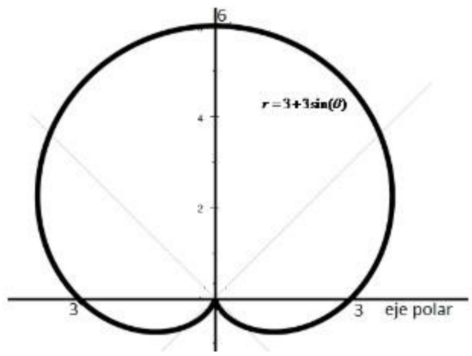
Son de la forma $r = a \pm bCos(\theta)$ o $r = a \pm bSen(\theta)$ con $a > 0, b > 0$ Existen 4 clases de caracoles que dependen de los valores de $a\ y\ b$, así:

1) Si $\frac{a}{b} < 1$ entonces la gráfica es un caracol con lazo interior. Ejemplos de sus gráficas son:

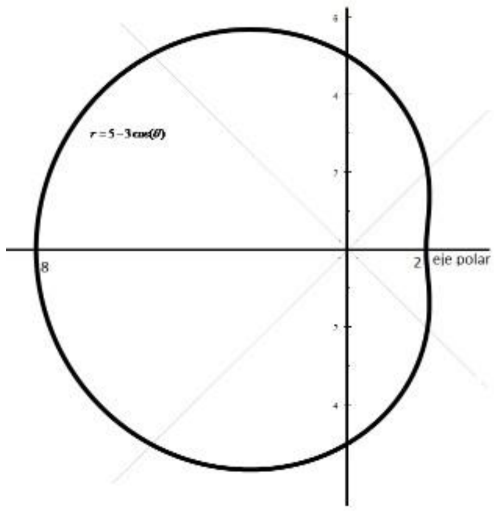




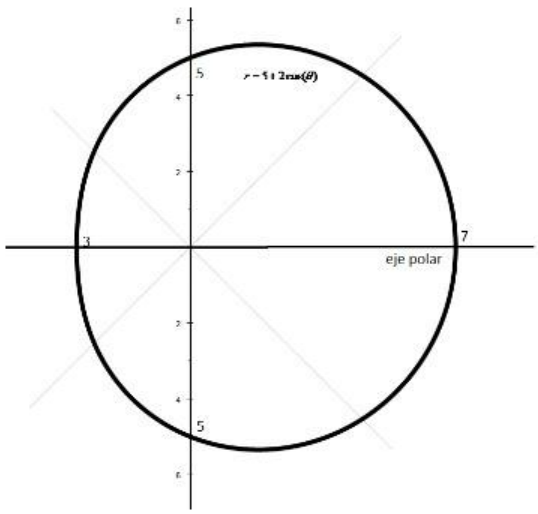
2) Si $\frac{a}{b} = 1$ entonces la gráfica es un caracol llamado cardioide, del cual se muestra un ejemplo a continuación:



3) Si $1 < \frac{a}{b} < 2$, se tiene entonces un caracol con hoyuelo, cuya ejemplo de gráfica se muestra a continuación:



4) Si $\frac{a}{b} \geq 2$, la gráfica es un caracol convexo, cuya gráfica de ejemplo es como sigue:



Observaciones:

a) El caracol con lazo es el único caracol que posee tangente al polo y son dos

b) En los caracoles el criterio rápido de simetría se cumple

c) Para graficar un caracol se utilizará solamente la evaluación de la ecuación polar en cuatro valores de θ $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ejemplo:

Para cada ecuación polar

a) Identificar el tipo de caracol

b) Mencionar su orientación y simetría

c) Si es caracol con lazo determine sus tangentes al polo.

d) Graficar el caracol

i) $r = 3 + 2Sen(\theta)$ ii) $r = 3 + 5Cos(\theta)$

Solución para i):

$$r = 3 + 2Sen(\theta)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}; 1 < \frac{3}{2} < 2$$

a) Caracol con hoyuelo ya que
b) Orientado hacia arriba y es simétrico respecto a $\frac{\pi}{2}$

c) No posee tangentes al polo.

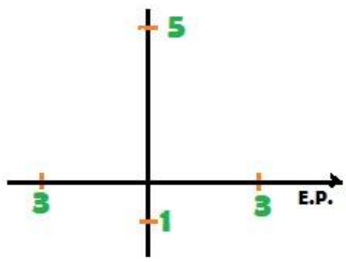
d) Elaborando la gráfica resulta:

Tabulando en los siguientes valores:

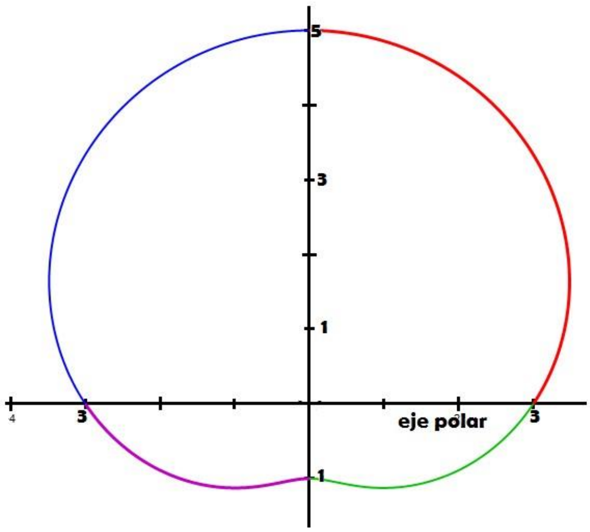
$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = 3 + 2Sen(\theta)}$	$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$
0	$r = 3 + 2Sen(0) = 3$	$(3,0)$
$\frac{\pi}{2}$	$r = 3 + 2Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$	$\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$
π	$r = 3 + 2Sen(\pi) = 3 + 2(0) = 3$	$(3, \pi)$

$\frac{3\pi}{2}$	$r = 3 + 2Sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + 2(-1) = 1$	$\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$

Graficando los cuatro puntos obtenidos en el plano polar:



Finalmente, se realiza la gráfica:



Solución para ii)

$$r = 3 + 5Cos(\theta)$$

a) Caracol con lazo interior ya que $\frac{a}{b} = \frac{3}{5};\ \frac{3}{5} < 1$

b) Orientado hacia la derecha y es simétrico respecto a $\theta = 0$ (eje polar)

c) Tiene dos tangentes al polo.

$$r = 3 + 5Cos(\theta)$$

$$3 + 5Cos(\theta) = 0$$

$$5Cos(\theta) = -3$$

$$Cos(\theta) = -\frac{3}{5}$$

$$\theta = 2.21\ Radianes$$

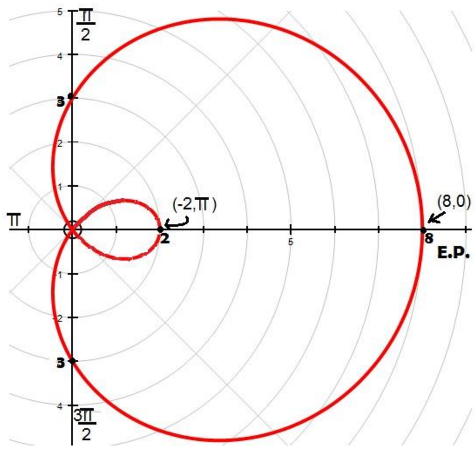
La otra tangente al polo se encontrará con la ayuda de la gráfica, utilizando simetría.

d) Elaborando la gráfica resulta:

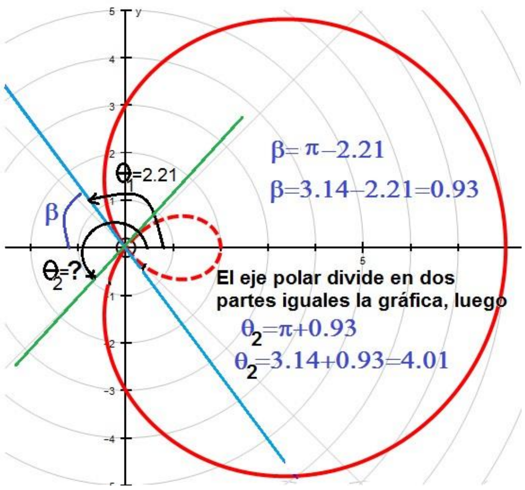
Tabulando en los siguientes valores:

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = 3 + 5Cos(\theta)}$	$\boldsymbol{(r, \theta)}$
0	$r = 3 + 5Cos(0) = 8$	$(8,0)$
$\frac{\pi}{2}$	$r = 3 + 5Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 5(0) = 3$	$\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$
π	$r = 3 + 5Cos(\pi) = 3 + 5(-1) = -2$	$(-2, \pi)$
$\frac{3\pi}{2}$	$r = 3 + 5Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + 5(0) = 3$	$\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

Finalmente, se realiza la gráfica:



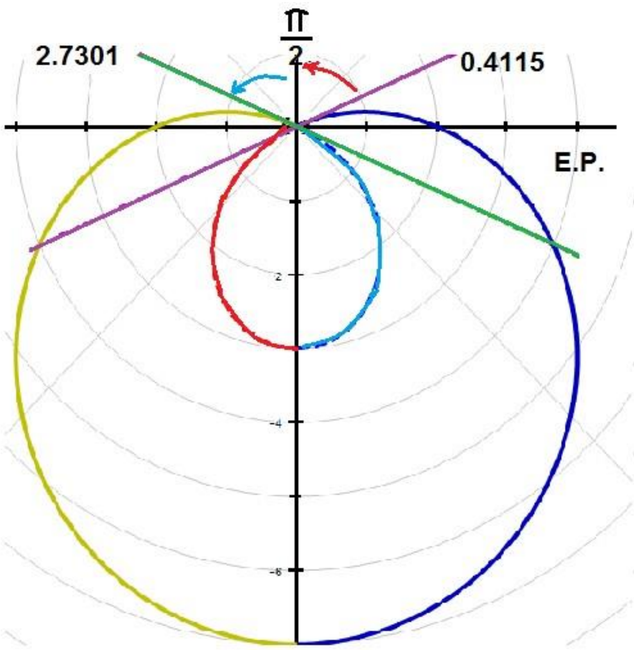
Y la gráfica con sus tangentes sería:



Por lo tanto, la otra tangente al polo es 4.01 radianes (equivale a 229.8º aproximadamente). Recordando que un radián es 57.3º aproximadamente.

Observación importante: los puntos del lazo interior del caracol con lazo se obtienen dándole valores al ángulo θ en la ecuación$r = a + bSen(\theta)$ o $r = a + bCos(\theta)$ entre las dos tangentes al polo.

Por ejemplo, en la gráfica de $r = 2 - 5Sen(\theta)$, las tangentes al polo son $\theta = 0.4115$ y $\theta = 2.7301$. La mayor longitud del lazo interior es cuando el ángulo θ es $\frac{\pi}{2}$ y la mayor longitud del caracol es cuando θ es $\frac{3\pi}{2}$. Su gráfica sería:



Los puntos en rojo del lazo interior se obtienen dándole valores de ángulos a la ecuación de $r = 2 - 5Sen(\theta)$, entre 0.4115 radianes a $\frac{\pi}{2}$ radianes; se puede intuir como se obtienen los puntos en color celeste del lazo interior

2.4 Rosas

Las ecuaciones que tienen la forma $r = aCos(n\theta)$ o $r = aSen(n\theta)$ con $n \geq 2$ se conocen como rosas. Si n es impar el número de pétalos de la rosa es n, y si n es par el número de pétalos es 2n. El valor de a es la longitud de cada pétalo. El número de tangentes al polo coincide con el valor de n.

Ejemplos:

$r = 4Cos(3\theta)$: Su gráfica corresponde a una rosa de 3 pétalos de 4 unidades lineales de longitud (simétrica respecto al eje polar). Posee 3 tangentes al polo.

$r = -3Sen(2\theta)$: Rosa de 4 pétalos de 3 unidades lineales de longitud (simétrica respecto a $\frac{\pi}{2}$. Posee 2 tangentes al polo.

Para graficar se utilizan las tangentes al polo, pues esto será de gran utilidad para el cálculo de áreas.

Ejemplo:

Elaborar la gráfica de la ecuación polar $r = 4Sen(3\theta)$, utilizando las tangentes al polo.

Solución:

Se trata de una rosa de 3 pétalos con una longitud de 4 unidades cada pétalo.

Se encuentran las 3 tangentes al polo y luego se grafican dichas tangentes en el plano polar.

En el ángulo que se forma a partir de dos tangentes (al polo) consecutivas es probable que esté un pétalo de la rosa y/o en el opuesto por el vértice cuya longitud mayor de r se ubica en el **ángulo medio** de dos tangentes (al polo) consecutivas.

Las tangentes al polo serían:

$$r = 4Sen(3\theta)$$

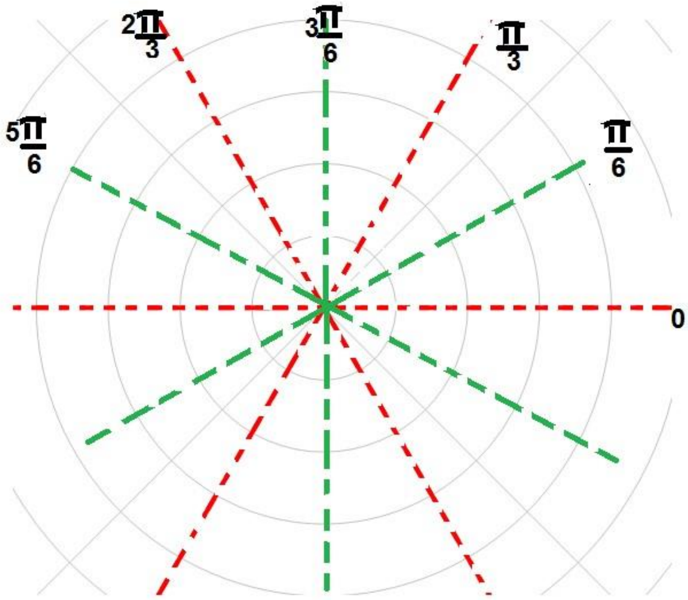
$$4Sen(3\theta) = 0$$

$$Sen(3\theta) = 0$$

$$3\theta = 0, 3\theta = \pi, 3\theta = 2\pi$$

$$\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Las tangentes al polo se muestran, en la siguiente gráfica polar en color rojo. Como son 3 tangentes al polo, generan 6 espacios donde pueden ir los pétalos. Las líneas en verde son los ángulos medios y es sobre éstas que irán los pétalos. Se tiene entonces:



Ahora bien, lo que realmente lo que se necesita es un punto de inicio de un pétalo de la rosa. Para comenzar se utiliza una de las rectas donde es posible que haya un pétalo. Se escoge la mitad entre 0 y $\frac{\pi}{3}$, es decir la recta $\theta = \frac{\pi}{6}$. Sobre esta recta pueda que exista un pétalo y si no irá en la prolongación de $\frac{\pi}{6}$ y para verificarlo, se evalúa el ángulo $\frac{\pi}{6}$ en la ecuación polar.

$$r = 4Sen(3\theta); \;\; \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$r = 4Sen\left(3\frac{\pi}{6}\right)$$

$$r = 4Sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

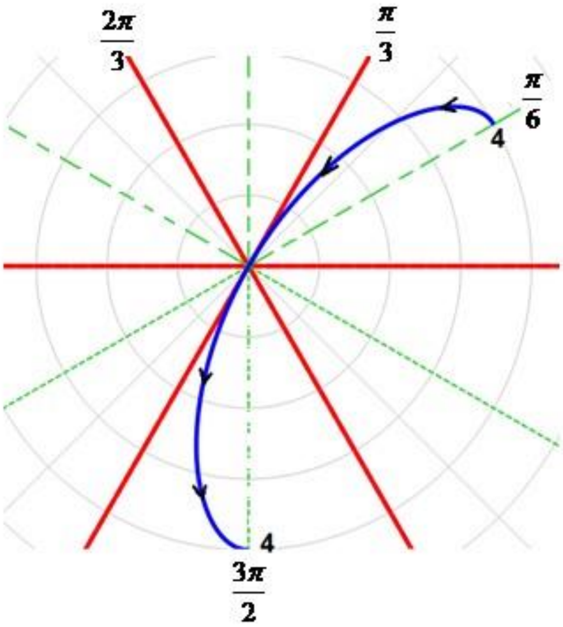
$$r = 4(1)$$

$$r = 4$$

Luego el valor de $r = 4$ se mide sobre el lado terminal del ángulo $\frac{\pi}{6}$. Si el valor de r hubiera dado negativo el pétalo iría en la prolongación de $\frac{\pi}{6}$.

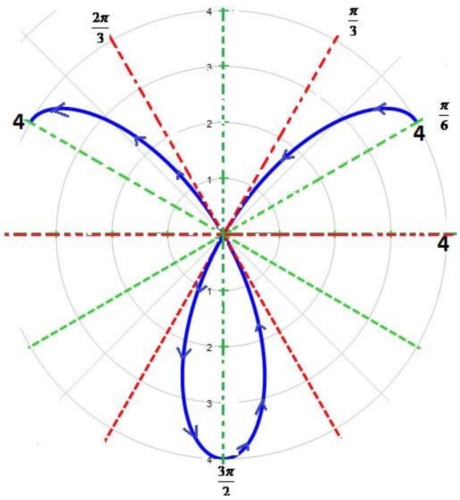
Ya se tiene un punto donde empezar a graficar la rosa. Al posicionarse en el punto $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ se puede empezar la gráfica hacia arriba o hacia abajo.

Si se empieza a trazar la gráfica hacia arriba se utiliza la tangente al polo $\frac{\pi}{3}$. En teoría, no se debe atravesar dicha tangente al polo, tal como se observa en la siguiente figura

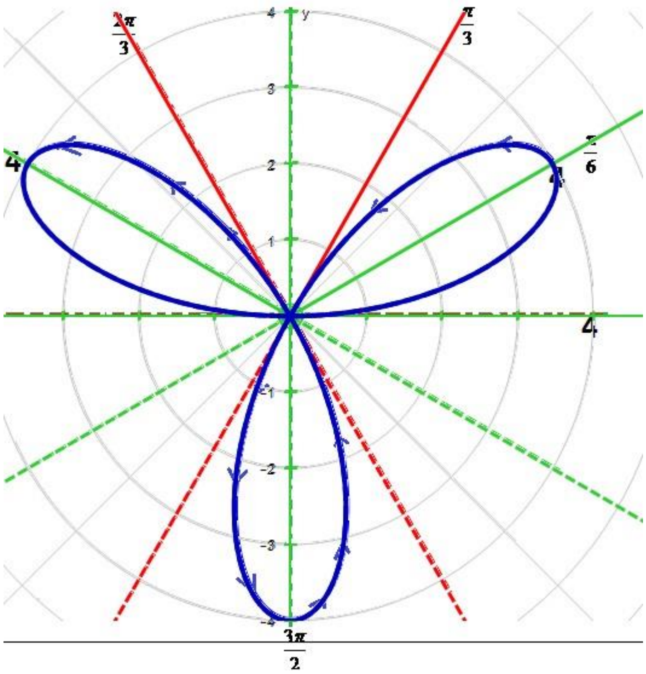


Las puntas de flechas indican la trayectoria que se sigue (no son parte de la gráfica).

Luego se puede continuar en $\frac{3\pi}{2}$ hacia arriba. En este caso se utiliza la tangente al polo $\frac{2\pi}{3}$



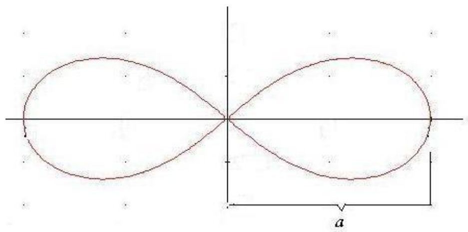
Para terminar, se utiliza la tangente al polo $\theta = 0$ y como siempre, no se debe de atravesar dicha tangente al polo, completando entonces la gráfica como sigue:

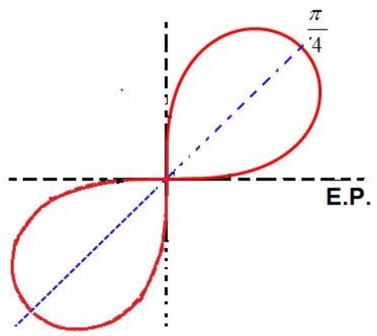


2.5 Lemniscata

Son ecuaciones en coordenadas polares de la forma $r^2 = a^2Cos(2\theta)$ o $r^2 = a^2Sen(2\theta)$

Sus gráficas serían similares a las siguientes:





También es conocida como la rosa de 2 pétalos.

Por ejemplo la gráfica $r^2 = 5Cos(2\theta)$ es una lemniscata con una longitud de cada pétalo igual a:

$$a^2 = 5$$
$$a = \sqrt{5}$$