UNIDAD III : GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Rectas en tres dimensiones

La distancia entre 2 puntos y las coordenadas del punto medio en el sistema de coordenadas en 3 dimensiones es una extensión del sistema de coordenadas en 2 dimensiones, así:

Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Punto Medio

$$Pm=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

De la misma manera, la ecuación canónica de la esfera es una extensión de la ecuación ordinaria de la circunferencia.

Ecuación canónica de la esfera

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$, con centro de la esfera (x_0,y_0,z_0) y radio r.

Ejercicio: Hallar la ecuación de la esfera que tiene por extremos de un diámetro los puntos (2, 3, 4) y (-2, -3,2).

<u>solución</u>

Los dos puntos le pertenecen a la esfera, pero como son los extremos de un diámetro, el segmento que une los dos puntos pasa por el centro. Además, el centro es el punto medio de dicho segmento.

$$(x_1,y_1,z_1)=(2,3,4)\ y\ (x_2,y_2,z_2)=(-2,-3,2)$$

$$Pm=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$Pm=\left(\frac{2+(-2)}{2},\frac{3+(-3)}{2},\frac{4+2}{2}\right)$$

$Pm=(0,0,3)$ coordenadas del centro de la esfera

Solamente falta determinar el radio de la esfera. Éste se puede determinar como la distancia entre el centro de la esfera y un punto cualquiera de la esfera. Si tomamos el punto de la esfera (2,3,4) (uno de los puntos que se nos da), entonces:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$
$$r^2=d^2\left((0,0,3),(2,3,4)\right)=(2-0)^2+(3-0)^2+(4-3)^2$$
$$r^2=2^2+3^2+1^2$$
$$r^2=14$$

Luego, la ecuación ordinaria de la esfera es:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=r^2$$
$$x^2+y^2+(z-3)^2=14$$

Ecuaciones de la recta en tres dimensiones

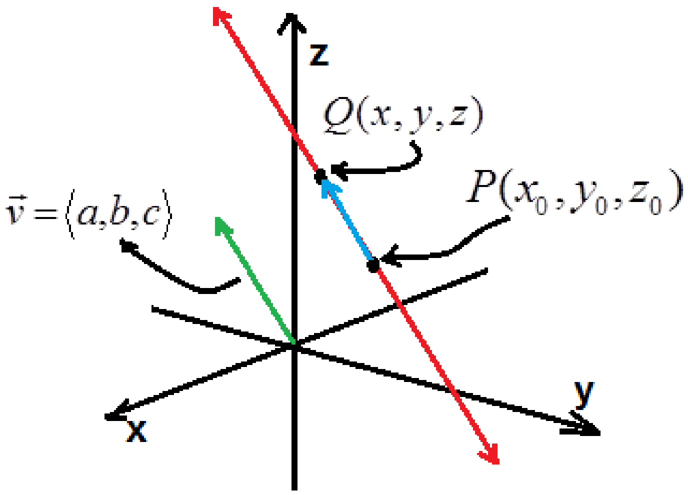


Figura 1

Sean $P(x_0,y_0,z_0)$ y $Q(x,y,z)$ puntos de la recta L, $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle$ un vector paralelo a la recta: Notemos, según la gráfica anterior, que el vector $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle$ también es paralelo al vector $\overrightarrow{PQ}=\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle$. Como $\vec{v}\,//\,\overrightarrow{PQ}$, podemos escribir lo siguiente:

$\overrightarrow{PQ}=t\,\vec{v}$, con t escalar o parámetro.

O de otra forma:

$$\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle=t\,\langle a,b,c\rangle$$

$\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle=\langle at,bt,ct\rangle$ donde obtenemos por igualdad de vectores

$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt, \quad z - z_0 = ct$. De aquí obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \qquad (1) \\ y &= y_0 + bt \qquad (2) \\ z &= z_0 + ct \qquad (3) \end{aligned}$$

NOTA: Al vector $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ se le llama vector de dirección de la recta L. Los valores a, b, c son llamados números directores de L.

De las ecuaciones paramétricas de la recta, si a, b, c son diferentes de cero, despejado t, en cada una de las ecuaciones obtenemos las ecuaciones simétricas de la recta:

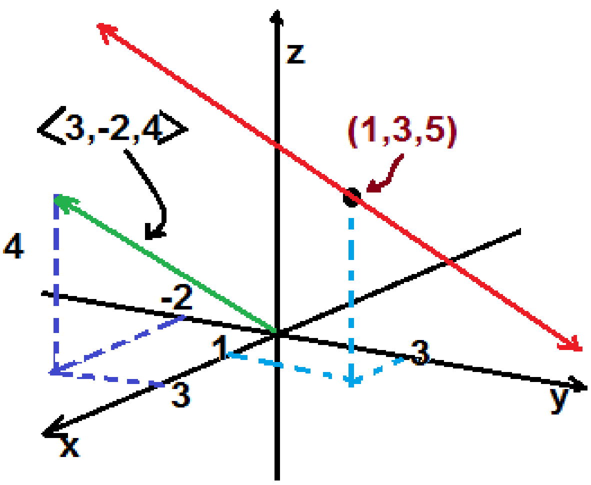
$t = \dfrac{x - x_0}{a}$, $t = \dfrac{y - y_0}{b}$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$. Es decir

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (4)$$

Ejemplo: Obtener las ecuaciones paramétricas y la ecuación simétrica de la recta *L* que pasa por el punto $(1,3,5)$ y que es paralela a $\vec{v} = \langle 3, -2, 4 \rangle$.

Solución:

En la figura 2 se muestra la gráfica de la recta *L,* del vector $\vec{v}$ y del punto indicado



Nota: el vector director lo hemos colocado como un vector de posición, es decir, partiendo del origen. Sin embargo, puede ubicarse partiendo desde cualquier punto del espacio tridimensional.

Figura 2

Con las coordenadas $x_0 = 1 \quad y_0 = 3 \quad z_0 = 5$ y los números de dirección $a = 3 \quad , b = -2, \quad c = 4$

De las ecuaciones (1), (2) y (3), un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta *L* es

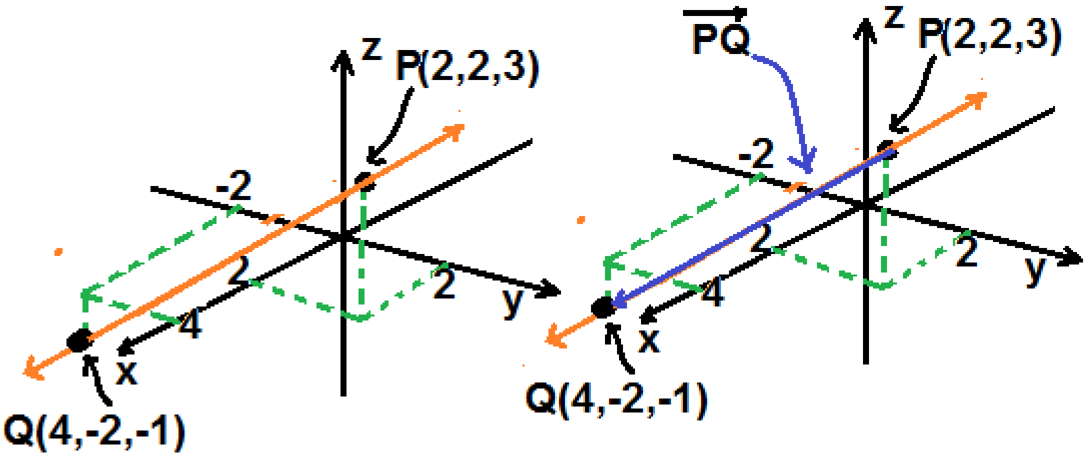
$$x = 1 + 3t$$
$$y = 3 - 2t$$
$$z = 5 + 4t$$

Como los números directores son no nulos un conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{4}$$

Ejercicio: Obtener las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos (2, 2, 3) y (4,-2,1).

__Solución__



El vector que va del punto P hacia el punto Q, nos puede servir de vector director de la recta o cualquier múltiplo o submúltiplo de dicho vector. Recordemos que para obtener las coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$ se resta el punto de llegada (Q) menos el de partida (P).

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-2, -2-2, -1-3 \rangle$$
$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2, -4, -4 \rangle = \vec{V}$$

Entonces, como ya tenemos el vector director, para formar las ecuaciones paramétricas de la recta necesitamos un punto que pertenece a la recta y tenemos 2 puntos. Por lo tanto, podemos ocupar cualquiera de los dos puntos.

Tomando $(x_0, y_0, z_0) = (2,2,3)$ y $\vec{V} = \langle a,b,c \rangle = \langle 2,-4,-4 \rangle$, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (2, 2, 3) y (4,-2,1) son:

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$
$$x = 2 + 2t$$
$$y = 2 - 4t$$
$$z = 3 - 4t$$

La ecuación simétrica de la recta es

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{-4}$$

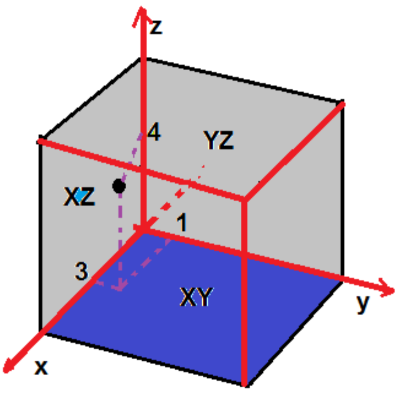
Nota: En lugar del vector $\vec{V} = \langle 2, -4, -4 \rangle$ puede utilizarse, por ejemplo, $\langle 1, -2, -2 \rangle$ o también $\langle -1, 2, 2 \rangle$, $\langle -2, 4, 4 \rangle$, etc.

Ejercicio: Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos xz y yz y que pasa por el punto (3,1,4)

Solución

Como siempre, la dificultad es la determinación del vector director, ya que el punto que le pertenece a la recta es (3,1,4).

Por este punto pasan una infinidad de rectas, pero nos piden aquella que sea paralela al plano XZ y también al plano YZ, es decir



Según la figura anterior, decir paralela a los planos XZ y YZ, equivale a que la recta sea perpendicular al plano XY, por lo tanto, un vector director es cualquier vector paralelo al eje z. Tomemos, por ejemplo, el vector $\langle 0, 0, 1 \rangle$ como vector director de la recta (podemos tomar un vector cuyas componentes en "x" y en "y" sean ceros y cualquier número diferente de cero en la componente en "z") .

Las ecuaciones paramétricas son:

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$
$x = 3 + 0t$
$y = 1 + 0t$
$z = 4 + 1t$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 4 + t \end{aligned}\right\}$$

Planos en tres dimensiones

Para conocer una recta en el espacio necesitamos un punto de la recta y un vector de dirección.

Para determinar un plano se necesita conocer un punto cualquiera del plano y un vector perpendicular a dicho plano.

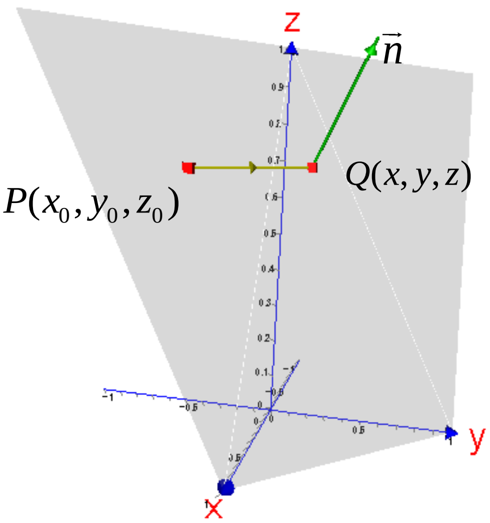


Figura 3

Sean $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x, y, z)$ puntos del plano y $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ un vector perpendicular al plano **(vector normal)**.

$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$

Como $\vec{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son perpendiculares, su producto escalar es cero, es decir, $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 0$

O sea que

$\langle a, b, c \rangle . \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ **(5)** Ecuación canónica del plano

Luego efectuando las operaciones en la ecuación anterior, obtenemos:

$$ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (6\ ) \qquad \text{Ecuación general del plano, donde } d=-ax_0-by_0-cz_0$$

Ejercicio:

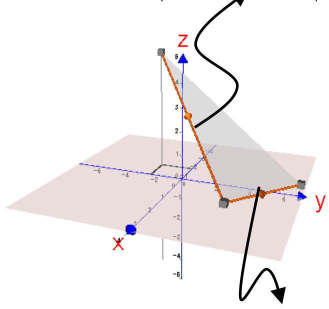
Obtener la ecuación general del plano que contiene los puntos

(3, 4,1), (1, 7,1) y (-1,-2,5)

Solución:

Para poder aplicar (5) necesitamos un punto del plano (en este caso se proporcionan tres) y un vector normal al plano, el cual en este caso no se conoce. Sin embargo, recordemos que el producto vectorial nos proporciona un vector normal al plano que forman los vectores involucrados. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores que van del punto *(3,4,1)* a los puntos *(-1,-2,5)* y *(1,7,1)* como se muestra en la figura. Por lo tanto

$$\vec{u}=\langle -1-3,-2-4,5-1\rangle=\langle -4,-6,4\rangle$$



$$\vec{v}=\langle 1-3,7-4,1-1\rangle=\langle -2,3,0\rangle$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix}=12i+8j+24k=\langle a,b,c\rangle$$

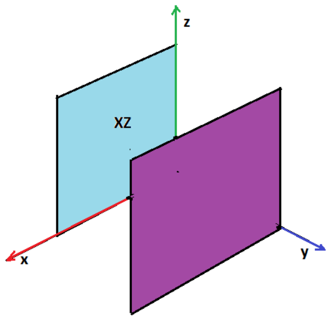
así que $\vec{N}=\langle 18,8,24\rangle$ y por lo tanto (5) obtenemos

$$P_o=(3,4,1)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$12(x-3)+8(y-4)+24(z-1)=0$$
$$12x-36+8y-32+24z-24=0$$
$$12x+8y+24z-36-32-24=0$$
$$12x+8y+24z-92=0 \quad ; \quad \text{Esta ecuación ya es una respuesta válida}$$
$$3x+2y+6z-23=0 \text{ ; Hemos divido entre 4 toda la ecuación.}$$

Ejercicio: Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (3,-4,2) y es paralelo al plano xz

Solución



Notemos, que según la figura, que un plano paralelo al plano XZ es perpendicular al eje "y", por lo tanto, podemos escoger como vector normal o perpendicular al plano, un vector de la forma $\vec{n}=\langle 0,a,0\rangle$, donde el valor de a puede ser cualquier real distinto de cero

Si tomamos $\vec{n}=\langle 0,5,0\rangle$ y p(3,-4,2)

La ecuación canónica del plano es

$$0(x-3)+5(y-(-4))+0(z-2)=0$$
$$5(y+4)=0$$

La ecuación general es

$$y+4=\frac{0}{5}$$
$$y+4=0$$

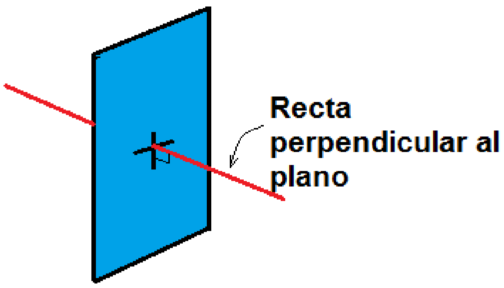
o también

$$y=-4$$

Notemos que cualquier plano paralelo al plano XZ tendrá como ecuación $y=a$, donde a es la segunda componente del punto por donde pasa o que le pertenece al plano. Se puede generalizar, que un plano paralelo al plano YZ, tendrá por ecuación x=a y paralelo a XY z=a.

Ejercicio: Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (2,-3,1) y es perpendicular a la recta $\frac{2x-3}{2}=2-y=\frac{z+5}{5}$

Solución



Tenemos el punto que le pertenece al plano, nos falta el vector normal a dicho plano. Dado que la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta también es perpendicular al plano y por eso podemos ocuparlo para encontrar la ecuación general del plano.

$$\frac{2x-3}{2}=2-y=\frac{z+5}{5}$$

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2}=-(y-2)=\frac{z+5}{5}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{1}=-(y-2)=\frac{z+5}{5}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{5}$$

El vector director de la recta es $\vec{v}=\langle 1,-1,5\rangle$ y éste es el vector normal o perpendicular al plano.

$p(2,-3,1)$

$$a(x-x_o)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad \text{Ecuación canónica}$$
$$1(x-2)-1(y-(-3))+5(z-1)=0$$
$$(x-2)-(y+3)+5(z-1)=0$$
$$x-2-y-3+5z-5=0$$
$$x-y+5z-10=0 \quad \text{Ecuación general del plano}$$

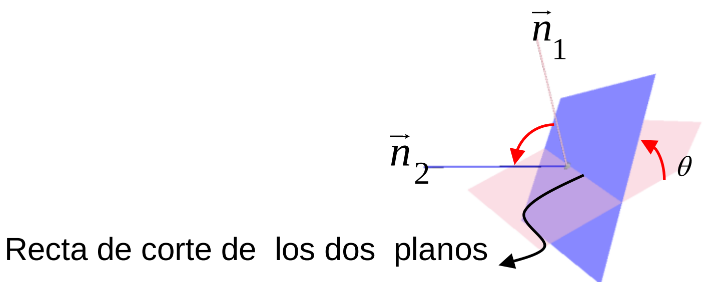
Observaciones:

- Dos planos distintos en el espacio **o son paralelos o se cortan en una recta**
- Si los planos se cortan, el ángulo entre ellos lo da el ángulo que forman sus vectores normales, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ y si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son los vectores normales de los planos, entonces: $\cos(\theta)=\frac{\left|\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2\right|}{\left\|\vec{n}_1\right\|\left\|\vec{n}_2\right\|}$

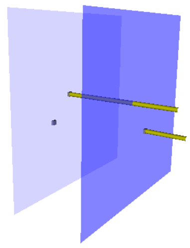
Observemos que :

i) Los planos son perpendiculares si $\vec{n}_1\,\vec{n}_2=0$

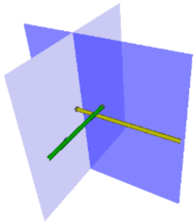
ii) Los planos son paralelos si $\vec{n}_1$ es un múltiplo escalar de $\vec{n}_2$, es decir, $\vec{n}_1=k\vec{n}_2$ con $k\neq 0$



Planos paralelos

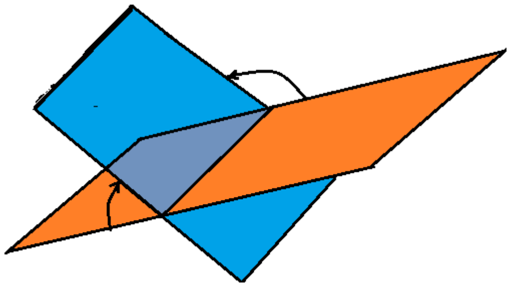


Planos perpendiculares



OBSERVACIÓN

Cuando dos planos se cortan, en realidad existen dos ángulos entre ellos. Uno de los ángulos es menor que otro. El valor absoluto del producto escalar de los dos vectores normales, que aparece en el numerador de la fórmula, nos garantiza que encontraremos el ángulo menor.



Ejercicio: Dado los planos $2x-3y+4z=1 \quad y \quad x-y-z=5$

a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección

b) Determinar el ángulo entre ellos.

Solución para a)

Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos lo podemos hacer "simultaneando" las dos ecuaciones. Esto lo podemos realizar utilizando Gauss.

$2x-3y+4z=1 \quad y \quad x-y-z=5$

matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{F_2-2F_1\to F_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -9 \end{bmatrix}_{-F_2\to F_2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

ya no podemos seguir, por lo tanto, tenemos un nuevo sistema

$y-6z=9$

$x-y-z=5$

Hacemos $z=t$

$y-6z=9 \to y-6t=9$

$y=9+6t$

sustituyendo estos valores en la segunda ecuación nos resulta

$x-y-z=5$

$x-(9+6t)-t=5$

$x-9-6t-t=5$

$x=5+9+6t+t$

$x=14+7t$

Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los dos planos son

$x=14+7t$

$y=9+6t$

$z=t$

Solución para b)

Sabemos que para encontrar el ángulo entre los dos planos que se cortan utilizamos la fórmula $\cos(\theta)=\dfrac{\left|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2\right|}{\left\|\vec{n}_1\right\|\left\|\vec{n}_2\right\|}$.

Como las ecuaciones son respectivamente $2x-3y+4z=1 \quad y \quad x-y-z=5$

$\vec{n}_1=\langle 2,-3,4\rangle \qquad \vec{n}_2=\langle 1,-1,-1\rangle$

$$\begin{aligned} \left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right| &= \left|\langle 2,-3,4\rangle.\langle 1,-1,-1\rangle\right| \\ &= \left|2(1)+(-3)(-1)+(4)(-1)\right| \\ &= \left|2+3-4\right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\left\|\vec{n}_1\right\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+\left(4\right)^2}=\sqrt{29}$$

$$\left\|\vec{n}_2\right\|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

$$\cos(\theta)=\frac{\left|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2\right|}{\left\|\vec{n}_1\right\|\left\|\vec{n}_2\right\|}=\frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{3}}$$

$\cos(\theta)\approx 0.1072$

$\theta \approx \cos^{-1}(0.1072)$

$\theta \approx 1.4634$

El ángulo entre los dos planos es de 1.4634 radianes

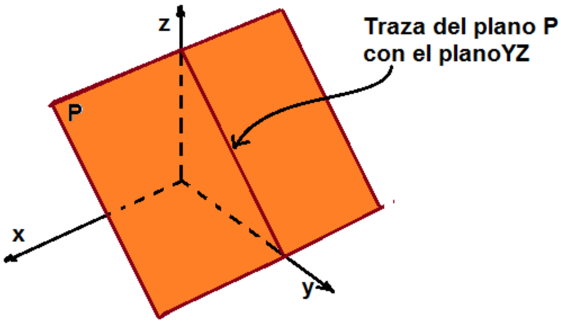
Trazo de planos en el espacio

Para trazar la gráfica de un plano, por lo general debe de encontrarse:

i) las intersecciones con los ejes coordenados x, y, z , y si es necesario

ii) las trazas del plano

Una traza de un plano es la recta de intersección del mismo con un plano coordenado.



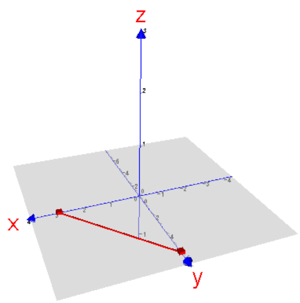
Por ejemplo, para graficar el plano $4x+2y+6z=12$ procedemos de la siguiente manera

Traza en el plano *xy*:

(hacemos *z=0*)

Recta $4x+2y=12$

Esta recta corta al eje x en (3,0,0) y al eje y en (0,6,0). Estos puntos resultan de hacer *y=0* y *x=0*



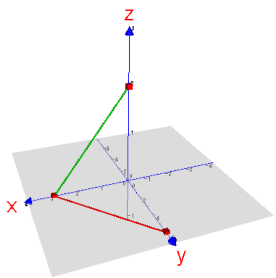
respectivamente en la recta antes mencionada. Esta traza luce como la siguiente

Traza en el plano *xz*:

(hacemos *y=0*)

Recta $4x+6z=12$

Esta recta corta al eje x en (3,0,0) y al eje z en (0,0,2). Estos puntos resultan de hacer *z=0* y *x=0* respectivamente en la recta antes mencionada. Esta



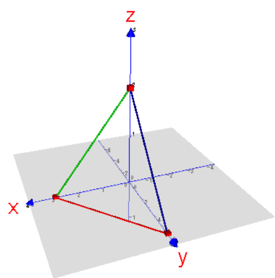
traza, junto con la anterior lucen así

Traza en el plano *yz*:

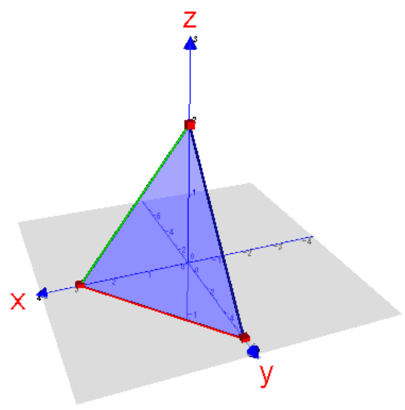
(hacemos *x=0*)

Recta $2y+6z=12$

Esta recta corta al eje y en (0,2,0) y al eje z en (0,0,2). Estos puntos resultan de hacer *z=0* y *y=0* respectivamente en la recta antes mencionada. Esta traza, junto con las dos anteriores lucen así



Finalmente, sombreando la región triangular que se forma en el primer octante obtenemos una representación del plano en este octante



Algunos comentarios adicionales

- ☑ Si en la ecuación de un plano falta una de las variables, entonces el plano es paralelo al eje representado por la variable que falta.
- ☑ Si son dos las variables que faltan en la ecuación de un plano, entonces es paralelo al plano coordenado representado por las variables que faltan.

Observación:

Existe también, la ecuación simétrica del plano

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, siendo a,b,c las intersecciones del plano con los ejes X, Y, Z respectivamente. La ecuación simétrica del plano se puede escribir siempre y cuando los valores a,b,c sean distintos de cero.

Ejercicio: trazar la gráfica de $2x-3y+5z=12$

Determinemos la ecuación simétrica del plano

$2x-3y+5z=12$

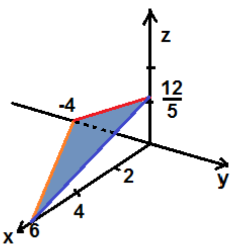
Dividiendo entre 12

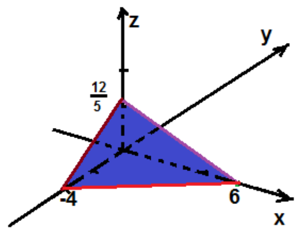
$$\frac{2x}{12}-\frac{3y}{12}+\frac{5z}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{\frac{12}{5}}=1$$

Luego las intersecciones con los ejes x, y , z, son respectivamente $6,-4,\frac{12}{5}$

Por lo tanto, la gráfica del plano $2x-3y+5z=12$ es:



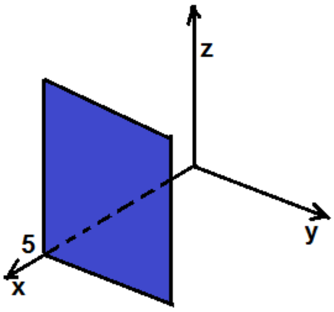


Otra vista, girando los ejes

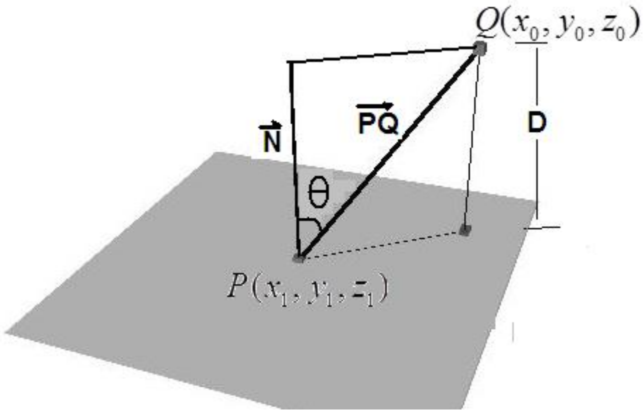
Ejercicio: graficar el plano x=5

Solución

Plano es paralelo al plano YZ e intercepta al eje x en 5



Distancia de un punto a un plano



Teorema

La distancia de un punto Q a un plano (no perteneciente al plano) es

$$D = \left\| proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{N} \right|}{\left\| \overrightarrow{N} \right\|},$$

donde P es un punto cualquiera del plano y $\overrightarrow{N}$ es el vector normal al plano.

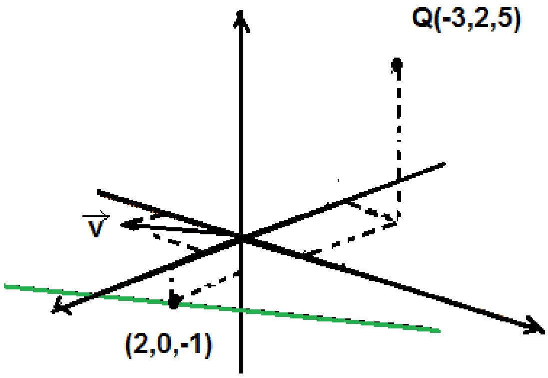
Si $P(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al plano y $Q(x_0, y_0, z_0)$ es un punto externo al plano y $\overrightarrow{N} = \langle a, b, c \rangle$ es el vector normal al plano, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \end{aligned}$$

$$D = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{N} \right|}{\left\| \overrightarrow{N} \right\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{fórmula alternativa}$$

Ejercicio: Encontrar la distancia del punto $(1, -2, 3)$ al plano $2x + 3y - z = 2$



$$2z+3y-z=2 \rightarrow 2z+3y-z-2=0$$
$$D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad Q(1,-2,3) \quad , \quad \vec{N}=\langle 2,3,-1\rangle$$
$$a=2, b=3, c=-1 \quad x_0=1, y_0=-2, z_0=3$$
$$D=\frac{|2(1)+3(-2)+(-1)(3)+(-2)|}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(-1)^2}}$$
$$D=\frac{|2-6-3-2|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$D=\frac{|-9|}{\sqrt{14}}$$
$$D=\frac{9}{\sqrt{14}} \approx 2.4 \quad \text{unidades lineales}$$

Ejercicio: Dadas las dos rectas siguientes en el espacio

$L_1: x=-1+2t \quad ; \quad y=0 \quad ; \quad z=1-t$

$L_2: x=4 \quad ; \quad y=1+r \quad ; \quad z=1+r$

a) Muestre que no son paralelas
b) Probar que no se cortan
c) Encontrar las ecuaciones de los planos paralelos que contienen a cada una de las rectas

Solución

a) El vector director de la recta L1 es $\vec{V}_1=\langle 2,0,-1\rangle$ y el de la recta L2 es $\vec{V}_2=\langle 0,1,1\rangle$

Dichos vectores no son paralelos. Luego, las dos rectas no son paralelas.

b) Veremos que no se cortan.

Simultaneamos las dos ecuaciones para determinar si hay intersección.

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ x=4 \end{array}\right\} -1+2t=4$$
$$2t=4+1$$
$$t=\frac{5}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=1+r \end{array}\right\} 0=1+r$$
$$r=-1$$

Sustituyendo los dos valores en

$z=1-t$

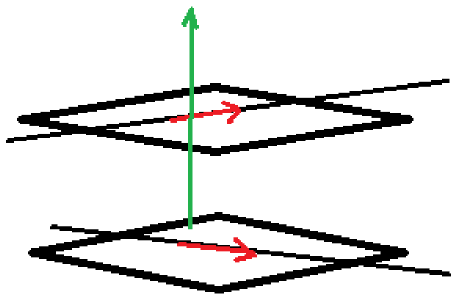
$z=1+r$

Si hay intersección, nos tiene que dar el mismo valor de z

$z = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$ Las rectas no se cortan

$z = 1 + (-1) = 0$

Solución para c)



Para determinar el vector normal de los planos basta con efectuar el producto vectorial de los dos vectores directores de las dos rectas; ya que el vector resultante es perpendicular a los dos vectores y por ende perpendicular a los dos planos paralelos que contiene a cada una de las rectas.

$\vec{V}_1 = \langle 2, 0, -1 \rangle$, $\vec{V}_2 = \langle 0, 1, 1 \rangle$

$\vec{N} = \vec{V}_1 x \vec{V}_2$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{N} = (0+1)i - (2-0)j + (2-0)k$

$\vec{N} = i - 2j + 2k$

$\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

Obtengamos la ecuación canónica de cada plano

$L_1 : x = -1 + 2t \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 1 - t \qquad L_2 : x = 4 \quad ; \quad y = 1 + r \quad ; \quad z = 1 + r$

Punto que le pertenece al plano que contiene a la recta L_1 (-1,0,1) , $\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

Ecuación canónica del plano $(x+1) - 2(y-0) + 2(z-1) = 0$

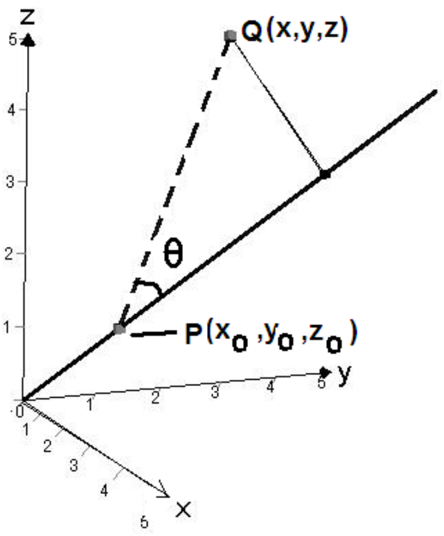
Ecuación general $x + 1 - 2y + 2z - 2 = 0 \rightarrow \quad x - 2y + 2z - 1 = 0$

Punto que le pertenece al plano que contiene a la recta L_2 (4,1,1) , $\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

Ecuación canónica del plano $(x-4) - 2(y-1) + 2(z-1) = 0$

Ecuación general $x - 4 - 2y - 2 + 2z - 2 = 0 \rightarrow \quad x - 2y + 2z - 8 = 0$

Distancia de un punto a una recta en el espacio



La distancia de un punto Q a una recta viene dada por

$D = \dfrac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} \right\|}{\left\| \vec{v} \right\|}$, donde P es un punto cualquiera de la recta y $\vec{v}$ es un vector director de la recta

Ejercicio: hallar la distancia del punto $(-3,2,5)$ a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 2 + t \quad ; \quad y = -2t \quad ; \quad z = -1$

Solución

$$D = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} \right\|}{\left\| \vec{v} \right\|}$$

Ejercicio: Hallar la distancia entre los planos $2x - 3y + 4z = 2 \quad y \quad 4x - 6y + 8z = 5$

Superficies cilíndricas (Cilindros)

Conocemos hasta este momento 2 tipos de superficies y éstas son:

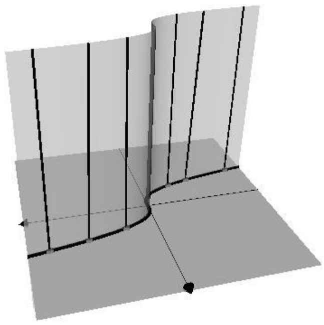
1) La esfera $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

2) Planos $ax+by+cz+d=0$

Un tercer tipo de superficie son las superficies cilíndricas o simplemente cilindros.

Definición:

Sea C una curva en un plano y L una recta no paralela a ese plano. El conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a la curva C se llama **cilindro** de **curva generatriz C**. Cada una de estas rectas se llama recta directriz del cilindro.



Estudiaremos solamente los cilindros cuya curva generatriz está en cualquiera de los tres planos coordenados y las rectas directrices sean perpendiculares a la curva generatriz C (cilindros rectos).

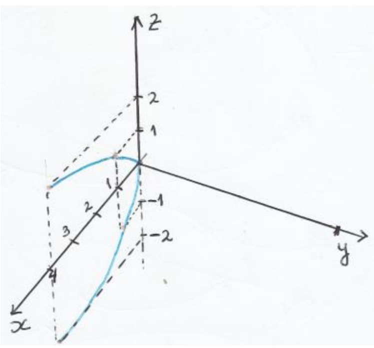
NOTA:

Las superficies cilíndricas o cilindros, que estudiaremos, se caracterizan por que falta una de las variables en la ecuación. Por lo tanto, las variables que aparecen determinan el plano donde se grafica la curva generatriz y también el tipo de curva a graficar. La variable que falta (variable ausente) nos indica la dirección de las rectas directrices.

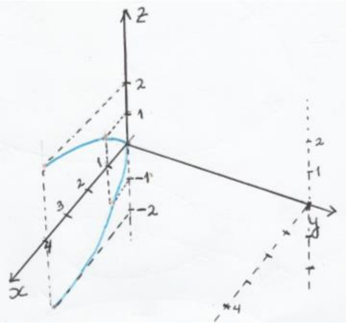
Por ejemplo, el cilindro $x=z^2$, la curva generatriz es una parábola y se grafica parte de ella en el plano xz y las rectas directrices van paralelas a la variable ausente (paralelas al eje "y").

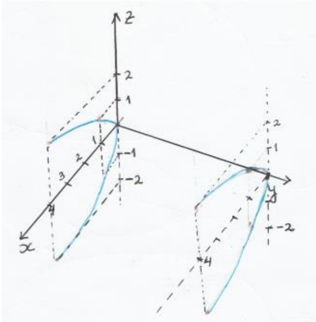
Grafiquemos primero parte de la curva generatriz $x=z^2$

No nos olvidemos de trazar líneas paralelas a los ejes para ubicar puntos

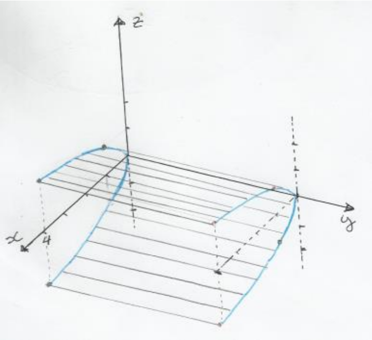


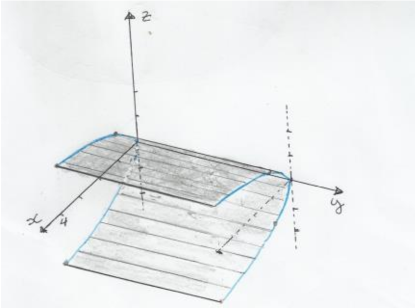
Luego, como las rectas directrices van paralelas al eje de la variable ausente, escogemos un punto donde cortar el cilindro en el eje “y”. En este punto que escogemos hacemos una réplica de los ejes coordenados y graficamos la misma curva generatriz.





Ahora trazamos las rectas directrices





Las superficies cilíndricas son como láminas de formas diferentes en el espacio de tres dimensiones. En el ejemplo anterior, la parábola se extiende a lo largo del eje “y” (tanto positivo como negativo y también se “abre” infinitamente hacia el eje “x”. Solamente hemos graficado una pequeña parte de la superficie cilíndrica.

Ejercicio:

Graficar cada una de las ecuaciones en el espacio tridimensional

a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x = sen(y)\,, 0 \le y \le 2\pi$ c) $z^2 + y^2 = 4$ d) $y = z^2$ e) $z = e^x$

f) $x + y = 4$ g) $3x + 4z = 12$

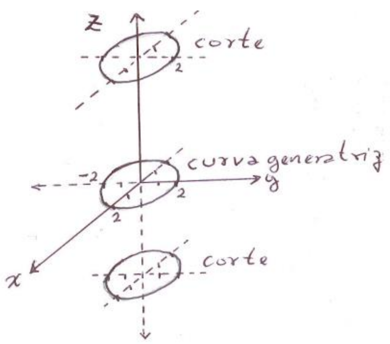
Analicemos primero para cada una de ellas el plano en que se encuentra su curva generatriz y la dirección de las rectas directrices.

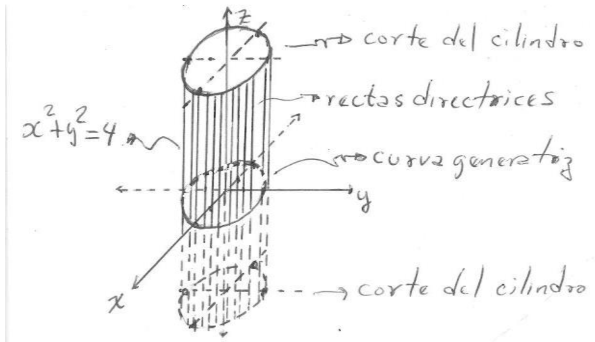
Las gráficas de los literales $a)$, $b)$ y $f)$ tienen la curva generatriz en el plano XY y rectas directrices paralelas al eje Z (la variable ausente). Las de los literales $c)$ y $d)$ tienen la curva generatriz en el plano YZ y las directrices son paralelas al eje x. Por último, las gráficas de las ecuaciones $e)$ y g) poseen la generatriz en el plano xz y directrices paralelas al eje Y.

Gráfica de $x^2 + y^2 = 4$

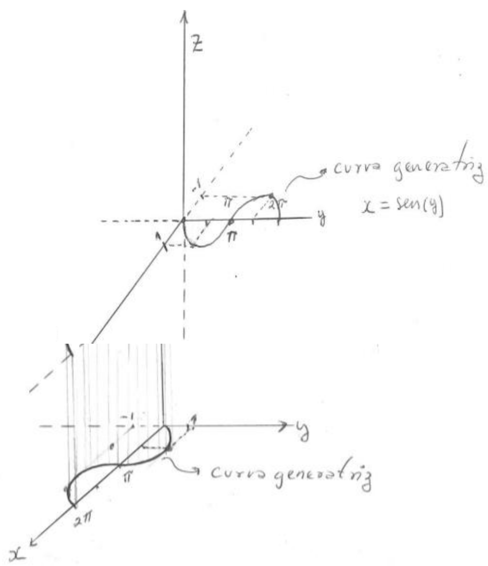
La curva generatriz es una circunferencia de radio 2.

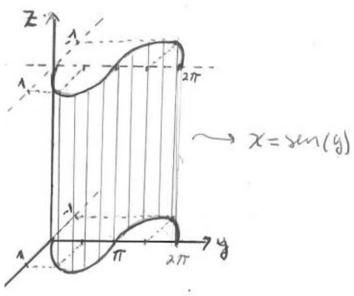
Si las rectas directrices son paralelas al eje Z, significa que la gráfica se extenderá paralela a dicho eje. Entonces podemos hacer cortes del cilindro perpendicular al eje Z, o sea, paralelos al plano XY. Podemos además, graficar solamente la parte de la gráfica sobre el plano XY.

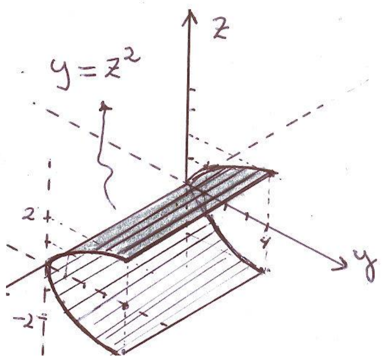




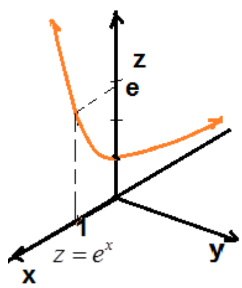
Gráfica de $x = sen(y) \quad ; 0 \le y \le 2\pi$



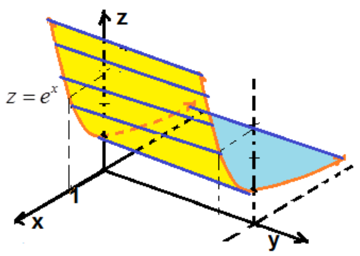




Gráfica del cilindro $z = e^x$



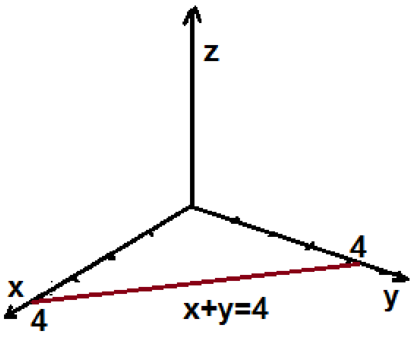
Curva generatriz en XZ

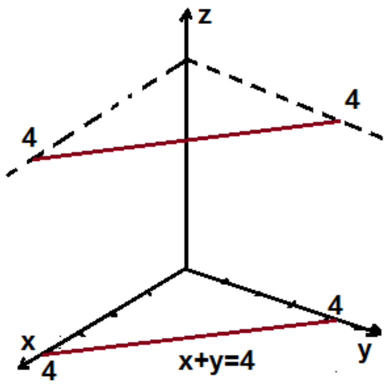


Rectas directrices paralelas al eje "y"

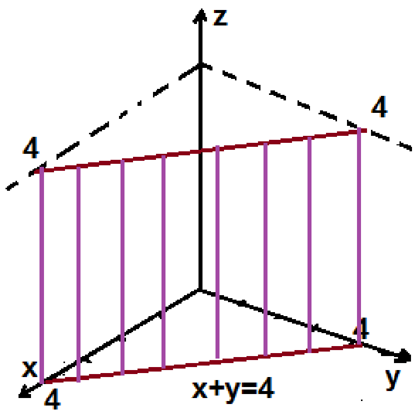
Graficar x+y=4

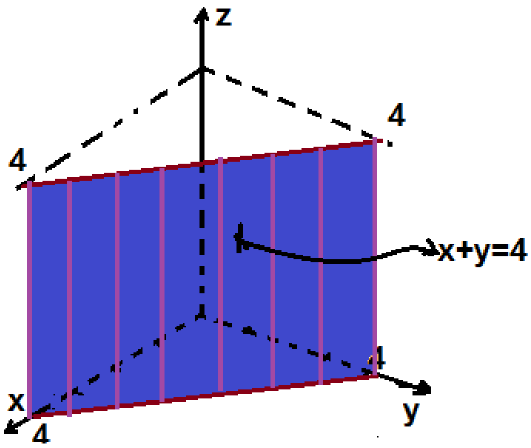
En dos dimensiones es una recta, pero en tres dimensiones es un plano y como cilindro, la curva generatriz se grafica en el plano xy y las rectas directrices son paralelas al eje “z”.





Curva generatriz





Rectas directrices paralelas a “z”

Graficar $3x+4z=12$

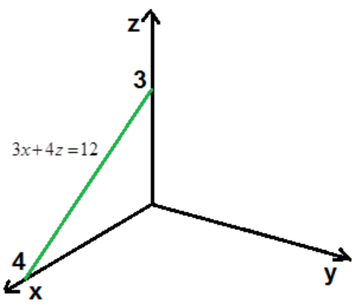
Solución:

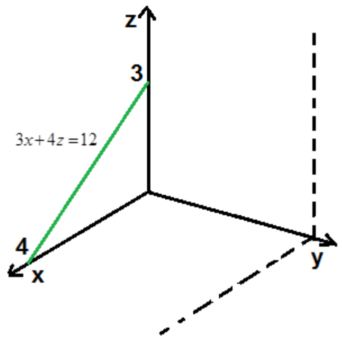
Es otro plano y la curva generatriz es una recta

$$3x+4z=12$$

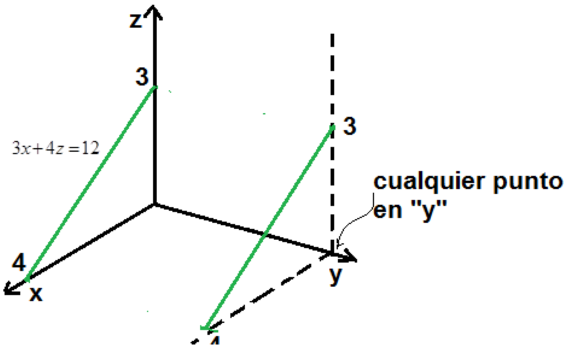
$$\frac{3x}{12}+\frac{4z}{12}=\frac{12}{12}$$

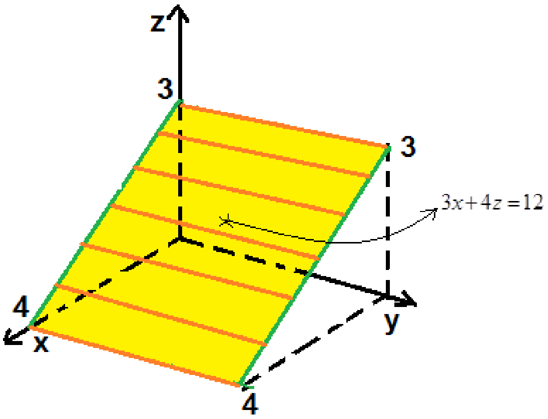
$$\frac{x}{4}+\frac{z}{3}=1$$





Curva generatriz

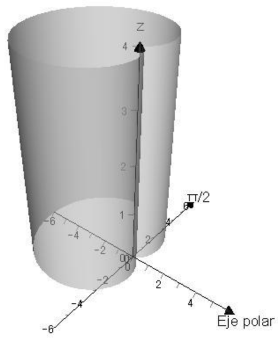




Ejercicio: Trazar la gráfica del cilindro $r = 3 - 3\cos(\theta)$

<u>Solución</u>

Curva generatriz es un cardiode



<u>SUPERFICES CUÁDRICAS</u>

Un cuarto tipo de superficie en el espacio tridimensional son las cuádricas.

Una superficie cuádrica en el espacio es una ecuación de segundo grado de la forma

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ con A , B, C no todos nulos.

Existen 6 superficies cuádricas básicas las cuales son:

1) Elipsoide, 2) hiperboloide de una hoja, 3) hiperboloide de dos hojas, 4) cono elíptico, 5) paraboloide elíptico y 6) paraboloide hiperbólico (silla de montar)

<u>OBSERVACION:</u>

La intersección de una superficie con un plano se llama **traza de la superficie con ese plano**. En particular, las trazas de las superficies con los planos coordenados se obtienen haciendo $x = 0$ (traza con el plano yz), $y = 0$ (traza con el plano xz) y $z = 0$ (traza con el plano xy).

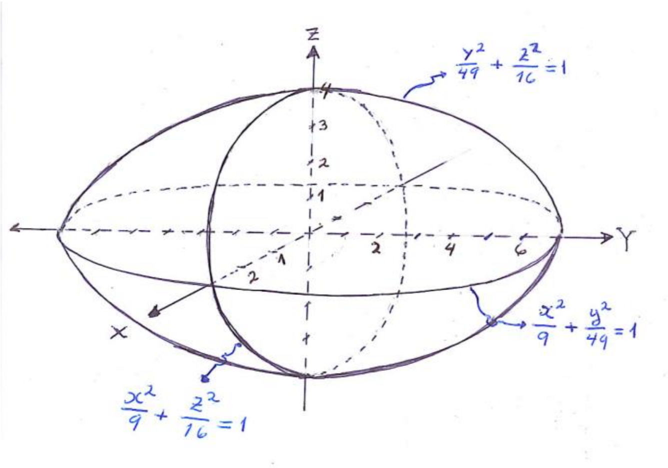
Para el estudio de estas superficies cuádricas utilizaremos la ecuación canónica de cada una de ellas.

1) **Elipsoide:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ con $a,b,c>0$

Observemos que las 3 trazas de esta superficie con los 3 planos coordenados son elipses (o circunferencias).

Ejercicio: Graficar $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{16}=1$

De la ecuación podemos ver que la parte mayor del elipsoide irá sobre el eje Y.



2) Hiperboloide de una hoja

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}_{\substack{\text{Hiperboloide de una hoja}\\ \text{eje del hiperboloide corresponde a la}\\ \text{variable cuyo coeficiente es negativo}}}$$

Para identificar el hiperboloide de una hoja lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: *<u>Son 2 hipérbolas y una elipse (la "cintura" del hiperboloide)</u>*

Para graficar esta superficie cuádrica utilizaremos tres elementos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide
b) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio

c) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

Ejercicio: **Graficar** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-z^2=1$

Solución

a) Identificamos que el eje del hiperboloide es el eje z

b) Hacemos cortes perpendiculares al eje z (paralelos al plano xy): Escogemos cortes, por ejemplo, en $z=2,\ z=0,\ z=-2$

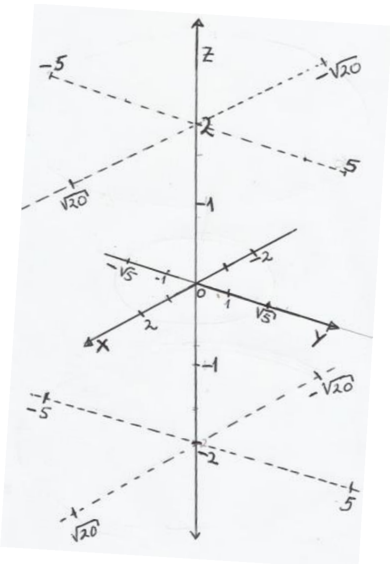
$Si \quad z=2$, entonces

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-(2)^2=1$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=5$$
$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$$

Si $z=-2$, notemos que nos da el mismo resultado anterior, es decir una elipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$

Si $z=0$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$, es otra elipse (en el plano xy)

c)

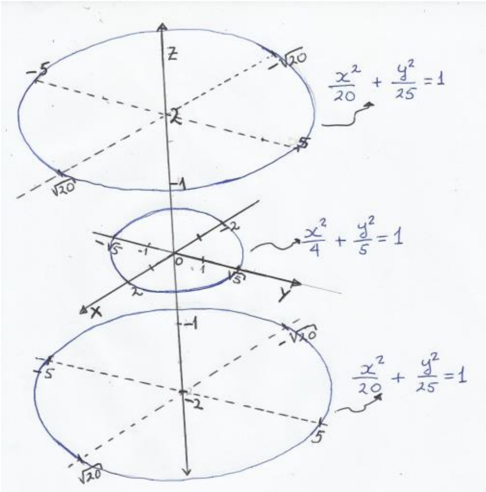


Corte en z=2

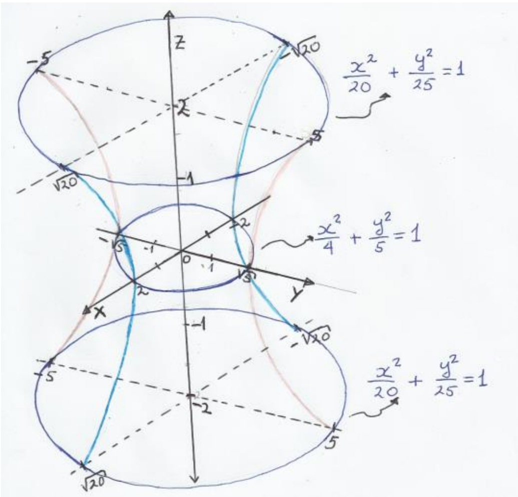
Corte en z=0 (plano XY)

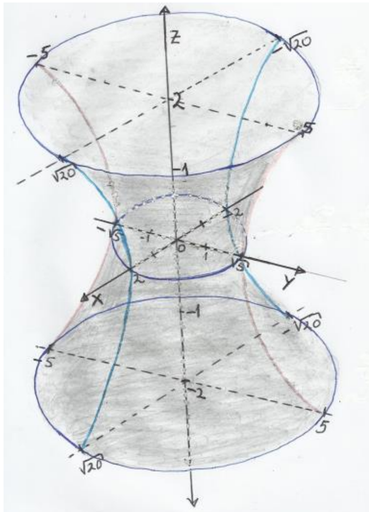
Corte en z=-2

Para que la figura quede mejor, le hemos dado una escala mayor al eje “z” (2.5 cm por unidad). A los ejes “x” y “y” (también a los cortes en z=2 y z=2) 1 cm por unidad.



Los tres “cortes” son elipses





Unimos las elipses con hipérbolas .

Opcional: darle retoques al gusto .

Observación importante

Es bueno recordar que todas las gráficas cuádricas son huecas (no son sólidas). Sin embargo, nos servirán junto a los planos y superficies cilíndricas a formar figuras sólidas.

3) Hiperboloide de dos hojas

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma

$$\underbrace{\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}_{\substack{\text{Hiperboloide de dos hojas}\\ \text{eje del hiperboloide corresponde a la}\\ \text{variable cuyo coeficiente es positivo}}}$$

Para identificar el hiperboloide de dos hojas lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: <u>Dos hipérbolas y no existe traza con el plano coordenado perpendicular al eje del hiperboloide.</u>

Para graficar esta superficie cuádrica utilizaremos cuatro elementos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide
b) Identificar los vértices del hiperboloide de dos hojas
c) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio
d) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

Ejercicio : Graficar $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$

<u>Solución</u>

Este hiperboloide es de la forma $\frac{y^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$

a) El eje del hiperboloide es el eje y .

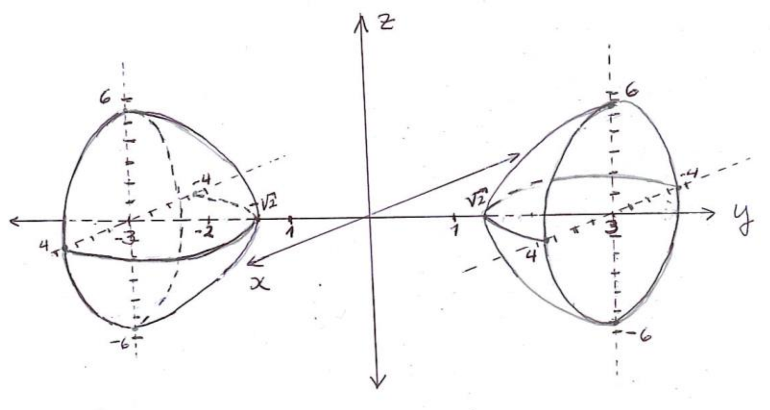
b) Los vértices del hiperboloide se ubican en su eje, y vienen dados por la raíz cuadrada del denominador del término positivo. Para este caso $c=\pm\sqrt{2}$

c) Hacer cortes perpendiculares al eje del hiperboloide, por ejemplo en $y=\pm 3$

$$\frac{(\pm 3)^2}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=3.5 \qquad \acute{o} \qquad \frac{x^2}{14}+\frac{z^2}{31.5}=1$$

d) Graficar, uniendo estos cortes con hipérbolas



4) Cono Elíptico

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad ó \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

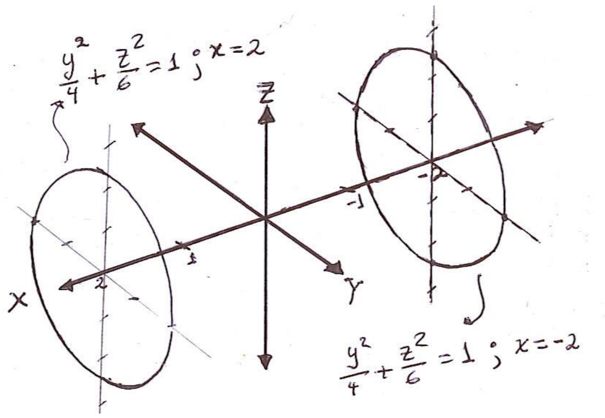
- Para identificar el cono elíptico lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: *<u>Las trazas con los planos coordenados son rectas que pasan por el origen y el punto (0,0)</u>*

Después de identificada el tipo de gráfica, mediante las trazas, continuamos con lo sigte:

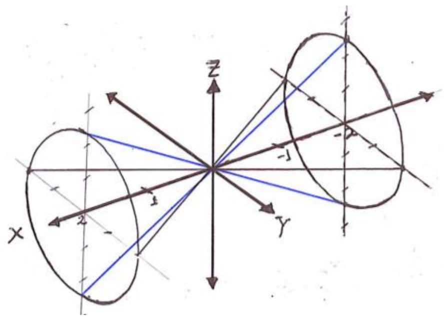
a) Identificamos el eje del cono (la variable del término de diferente signo)
b) Hacemos los cortes perpendiculares al eje del cono y los graficamos en el espacio.(estos cortes son elipses)
c) Unimos estos cortes con rectas que pasan por el origen

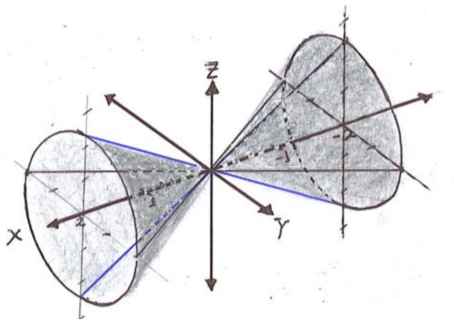
<u>Ejercicio</u>: Graficar $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=0$

a) El eje del cono es el eje x
b) Escogemos 2 cortes perpendiculares al eje x, es decir paralelos al plano yz. Por ejemplo $x=\pm 2$.



c) Unimos cortes mediante rectas (las trazas con los planos coordenados) pasando por el origen.





5) Paraboloide elíptico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide tienen la forma $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

- Para identificar el paraboloide elíptico vemos que las trazas con los planos coordenados son parábolas abiertas en el mismo sentido (que pasan por el origen) y el punto (0,0). Recordemos que estas trazas las obtenemos haciendo $x=0, y=0, z=0$.

- El eje del paraboloide es la variable del término de primer grado
- Los cortes perpendiculares al eje del paraboloide son elipses (hacemos un solo corte)
- Unimos el corte con parábolas que pasan por el origen.

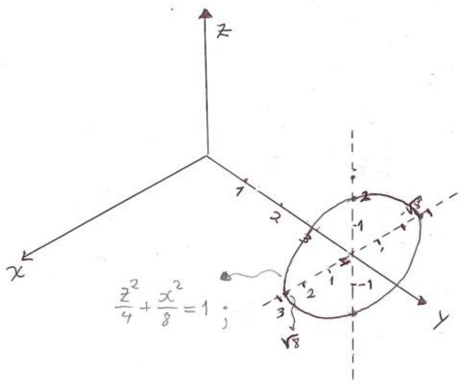
Ejercicio 23: Graficar $y = z^2 + \frac{x^2}{2}$

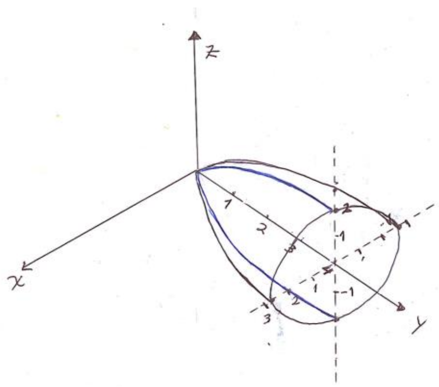
Solución

- Es un paraboloide elíptico con eje en " y"
- Podemos escoger hacer corte en $y = 4$ (por ejemplo)

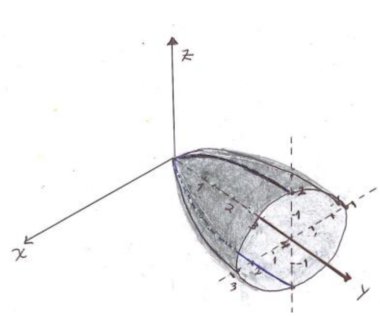
$4 = z^2 + \frac{x^2}{2} \rightarrow 1 = \frac{z^2}{4} + \frac{x^2}{8}$ esta es la elipse que hay que graficar en y = 4.

Después, unir esta elipse con parábolas que pasan por el origen (trazas con los planos coordenados)





Por último se le pueden dar los retoques o efectos que mejoren la presentación de la gráfica. (Todo esto se puede hacer de una sola vez en un sistema de coordenadas, si se hace a lápiz).



6) Paraboloide hiperbólico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide hiperbólico tienen la forma $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

-Para identificar el Paraboloide hiperbólico lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: *parábolas abiertas en "sentido contrario",y la trazas con el plano coordenado perpendicular al eje de la variable lineal son rectas.*

Una manera de trazar la gráfica es la siguiente: (suponiendo que la ecuación es de la forma $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$)

a) Sabemos que el eje de la figura es el eje "z". En la parte inferior haremos el corte en $z=-1$ y la parte superior la graficaremos hasta $z=1$.

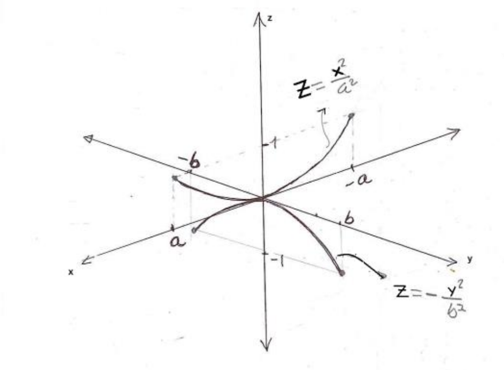
b) Encontramos las trazas con los planos coordenados que son parábolas y las graficamos en el espacio (una es parábola abierta hacia arriba y la otra hacia abajo. Podemos decirlo así ya que hemos escogido que el eje "z").

Traza con el plano xz: $z=\frac{x^2}{a^2}$ Traza con el plano yz: $z=-\frac{y^2}{b^2}$

Para graficar estas parábolas utilizaremos los valores

$z=1 \Rightarrow x=\pm a$ para el primer caso

$z=-1 \Rightarrow y=\pm b$ para la otra parábola



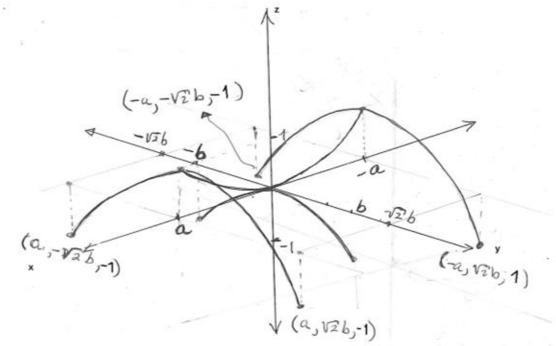
c) Haremos cortes también en los extremos de la parábola "abierta hacia arriba" y estos cortes son parábolas (cada corte es la parábola abierta hacia abajo pero trasladada). Los corte serán en $x=\pm a$. Esto se debe a que la ecuación de la parábola en estos cortes es :

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \quad haciendo \quad x=\pm a$$

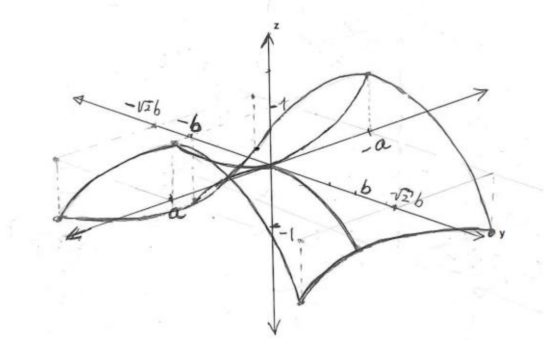
$$z=\frac{a^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad o \quad sea \quad z-1=-\frac{y^2}{b^2}$$

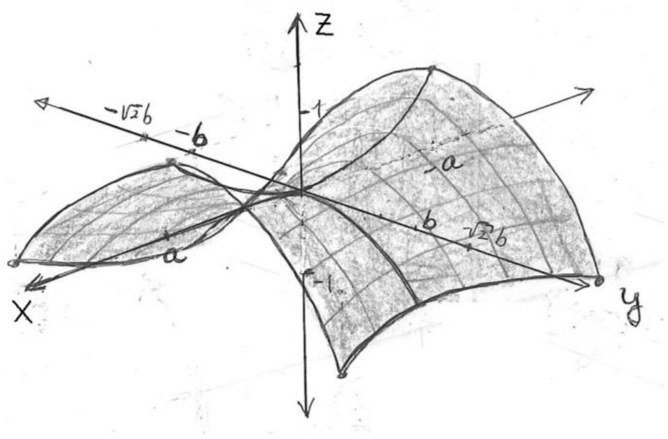
Esta última ecuación es la misma parábola $z=-\dfrac{y^2}{b^2}$ pero trasladada, es decir con vértice $(\pm a,0,1)$.

Como las parábolas abiertas hacia abajo las queremos graficar hasta $z=-1$, para la parábola del corte de la izquierda utilizamos los puntos $(a,\sqrt{2}\,b,-1)\ y\ (a,-\sqrt{2}\,b,-1)$ y para la parábola del corte de la derecha utilizamos los puntos $(-a,\sqrt{2}\,b,-1)\ y\ (-a,-\sqrt{2}\,b,-1)$.



Por último se unen estas parábolas con hipérbolas en la parte de abajo (corte en $x=-1$)





Un proceso similar se utilizará para cuando el paraboloide hiperbólico tenga el eje en otro eje coordenado.

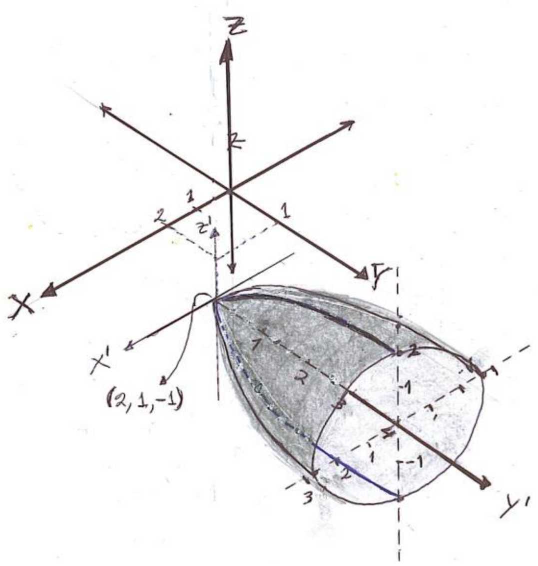
Gráficas de cuádricas desplazadas.

Ejercicio: Graficar $y-1=\dfrac{(z+1)^2}{2}+\dfrac{(x-2)^2}{4}$

Solución

Podemos observar que la gráfica de $y-1=\frac{(z+1)^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{4}$ es idéntica a la gráfica de $y=\frac{z^2}{2}+\frac{x^2}{4}$, pero trasladada en x, dos unidades en el sentido positivo, una unidad en el sentido positivo de y, mientras que una unidad en el sentido negativo de z.

Construyendo el sistema $x'y'z'$ cuyo origen es el punto $(2,1,-1)$ puede escribirse la ecuación en este nuevo sistema como $y'=\frac{(z')^2}{2}+\frac{(x')^2}{4}$, cuya gráfica se haría de forma igual a los procesos de los ejemplos anteriores en este nuevo sistema.



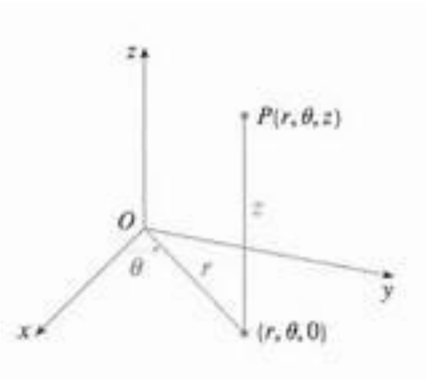
Ejercicio: Identificar la gráfica correspondiente a cada ecuación:

1) $x^2+4y^2=4+2z^2$
2) $z^2+y^2=3-x^2$
3) $3y^2-12z-4x^2=0$
4) $x^2-y^2=4+z^2$
5) $3x^2-5y^2=15z^2$
6) $x^2+y^2+z=5$
7) $9x^2-18y^2+4z^2+18x+108y-16z-101=0$
8) $3x^2-3y^2-2z^2-12x+24y+12z-54=0$

Otros sistemas de coordenadas en tres dimensiones

Coordenadas cilíndricas

Este sistema de coordenadas es una extensión de las coordenadas polares para tres dimensiones. La representación en coordenadas cilíndricas de un punto P es (r,θ,z) , donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde el plano polar hasta P. Gráficamente



Ejercicio: ubicar en un sistema de coordenadas cilíndricas el punto $\left(5,\frac{3\pi}{4},6\right)$

Para convertir coordenadas cilíndricas a rectangulares empleamos las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = rsen\theta \qquad z = z$$

Para convertir coordenadas rectangulares a cilíndricas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejercicio: Escribir la ecuación $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$ **en coordenadas cilíndricas**

Ejercicio: **Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para** $z = r^2 sen^2\theta$**.**

Coordenadas esféricas

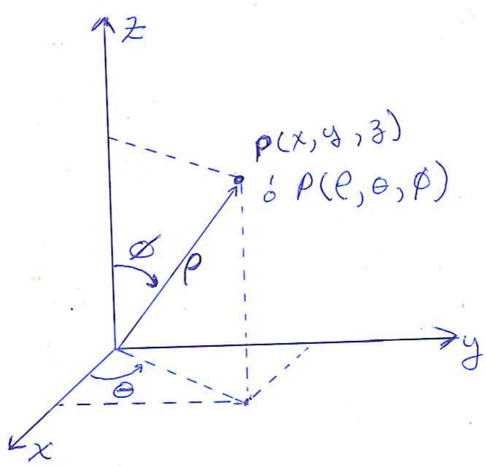
Las coordenadas esféricas de un punto P se definen mediante la tríada ordenada (ρ,θ,ϕ).

Donde:

ρ: es la distancia orientada desde P hasta el origen, $\rho \geq 0$

θ : es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas con $r \geq 0$

ϕ: es el ángulo entre el eje Z positivo y el segmento de recta OP. $0 \leq \phi \leq \pi$



Para convertir de un sistema al otro, se utiliza lo siguiente:

Esféricas a rectangulares

$$x = \rho sen\phi \cos\theta, \quad y = \rho sen\phi sen\theta, \quad z = \rho \cos\phi$$

Rectangulares a esféricas

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Esféricas a cilíndricas $(r \geq 0)$

$r^2 = \rho^2 sen^2\phi \qquad \theta = \theta \qquad z = \rho\cos\phi$

Cilíndricas a esféricas

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

Ejercicio: convertir la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ **de coordenadas rectangulares a esféricas.**

Ejercicio: convertir la ecuación $\rho = 5$ **de coordenadas esféricas a rectangulares.**

Ejercicio: convertir la ecuación $\rho = 4\cos(\phi)$ **de coordenadas esféricas a rectangulares**

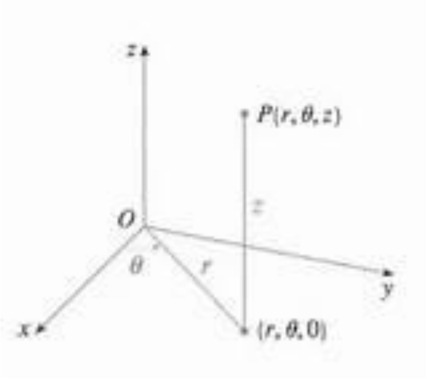
Ejercicio: convertir la ecuación $z = 4r\cos(\theta)$ **de coordenadas cilíndricas a rectangulares.**

Ejercicio: convertir la ecuación $\phi = \frac{3\pi}{4}$ **de coordenadas esféricas a rectangulares**

Otros sistemas de coordenadas en tres dimensiones

Coordenadas cilíndricas

Este sistema de coordenadas es una extensión de las coordenadas polares para tres dimensiones. La representación en coordenadas cilíndricas de un punto P es (r,θ,z) , donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde el plano polar hasta P. Gráficamente



Ejercicio: ubicar en un sistema de coordenadas cilíndricas el punto $\left(5,\dfrac{3\pi}{4},6\right)$

Para convertir coordenadas cilíndricas a rectangulares empleamos las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = rsen\theta \qquad z = z$$

Para convertir coordenadas rectangulares a cilíndricas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejercicio: Escribir la ecuación $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$ **en coordenadas cilíndricas**

Ejercicio: **Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para** $z = r^2 sen^2\theta$**.**

Coordenadas esféricas

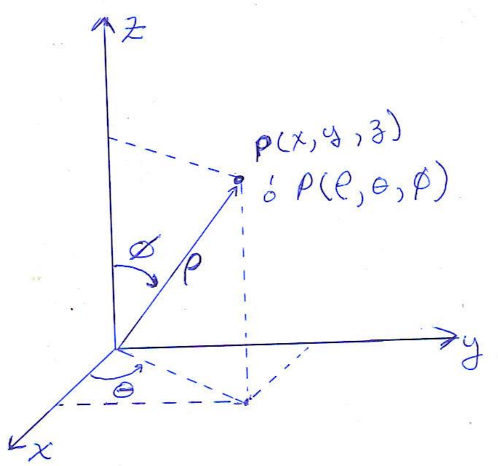
Las coordenadas esféricas de un punto P se definen mediante la tríada ordenada (ρ,θ,ϕ).

Donde:

ρ: es la distancia orientada desde P hasta el origen, $\rho \geq 0$

θ : es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas con $r \geq 0$

ϕ: es el ángulo entre el eje Z positivo y el segmento de recta OP. $0 \leq \phi \leq \pi$



Para convertir de un sistema al otro, se utiliza lo siguiente:

Esféricas a rectangulares

$$x = \rho sen\phi \cos\theta, \quad y = \rho sen\phi sen\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

Rectangulares a esféricas

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Esféricas a cilíndricas $(r \geq 0)$

$r^2 = \rho^2 sen^2\phi \qquad \theta = \theta \qquad z = \rho\cos\phi$

Cilíndricas a esféricas

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

Ejercicio: convertir la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ **de coordenadas rectangulares a esféricas.**

Ejercicio: convertir la ecuación $\rho = 5$ **de coordenadas esféricas a rectangulares.**

Ejercicio: convertir la ecuación $\rho = 4\cos(\phi)$ **de coordenadas esféricas a rectangulares**

Ejercicio: convertir la ecuación $z = 4r\cos(\theta)$ **de coordenadas cilíndricas a rectangulares.**

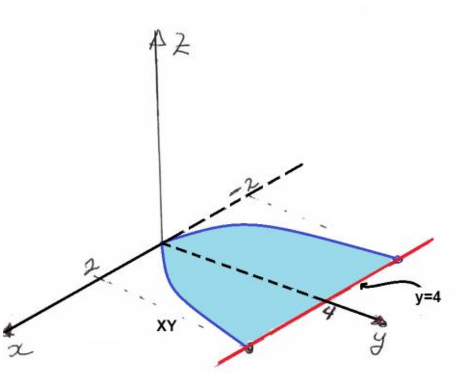
Ejercicio: convertir la ecuación $\phi = \frac{3\pi}{4}$ **de coordenadas esféricas a rectangulares**

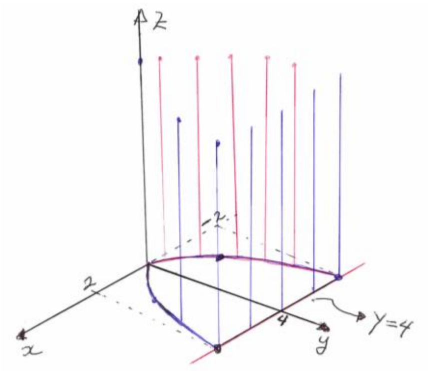
Gráfica de sólidos

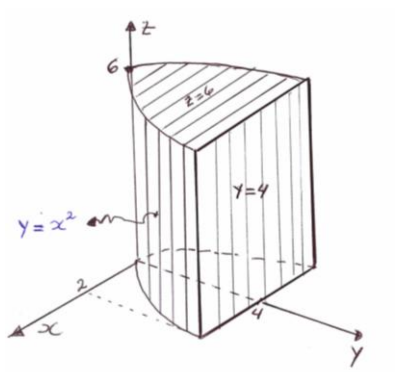
Un sólido es una superficie cerrada que, en la mayoría de las veces, resulta de la intersección de varias superficies.

Sea el cilindro $y = x^2$. Por si solo, no representa ningún sólido, pues recordemos que los cilindros son como láminas en el espacio de tres dimensiones. Además, este cilindro se extiende en forma infinita en dirección del eje "z" positivo y negativo. También se tiene que la curva generatriz, que es una parábola, también se abre hacia el eje "y" positivo en forma infinita. En conclusión no se forma ninguna figura cerrada.

Pero, si este cilindro lo limitamos con z=0 (el plano XY), z=6 (plano paralelo al plano XY) y y=4 (plano paralelo al plano XZ), se nos forma un sólido.







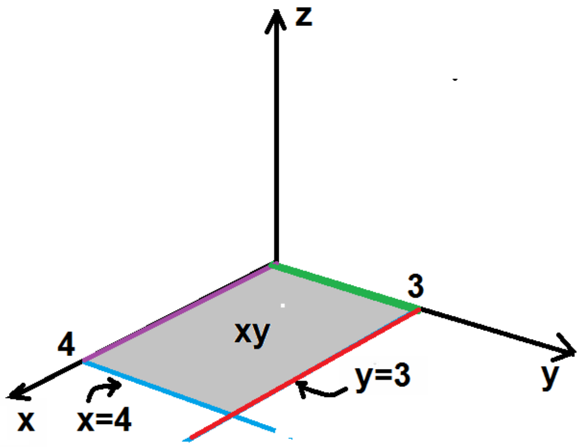
Ejercicio: Graficar el sólido limitado por las gráficas de $3x+4y+12z-36=0$, $x=4$, $y=3$. **Primer octante**.

Solución

Al decir que es un sólido en el primer octante, significa que nos interesa solamente la parte donde x , y , z son positivos.

Las tres ecuaciones que se nos da son planos.

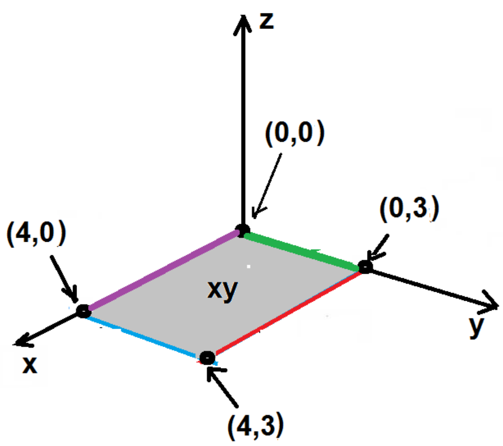
Preparemos la base del sólido, es decir, la región cerrada en el plano xy. En este momento pensemos en dos dimensiones lo que significa, por ejemplo, y=4 en tres dimensiones es un plano, pero en dos, es una recta paralela al eje “x”. De igual manera, x=4 en tres dimensiones es un plano, pero en dos es una recta paralela al eje ”y”.



Región cerrada limitada por z=o, x=4, y=3

(z=0 es el plano XY)

La parte de arriba del sólido (la tapadera) es parte del plano $3x+4y+12z-36=0$. Sin embargo, no graficaremos el plano tal como lo hicimos cuando aprendimos a trazar un plano de este tipo. Lo que haremos es determinar, para algunos puntos claves de esta región, cuanto es la altura z que le corresponde a cada punto en el plano $3x+4y+12z-36=0$.

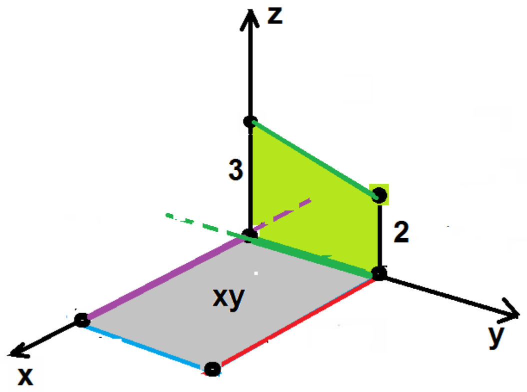


Para el punto (0,0): x=0 , y=0

$$3x+4y+12z-36=0$$
$$3(0)+4(0)+12z-36=0$$
$$12z=36$$
$$z=\frac{36}{12}$$
$$z=3$$

Para el punto (0,3): x=0, y=3

$$3x+4y+12z-36=0$$
$$3(0)+4(3)+12z-36=0$$
$$12+12z=36$$
$$12z=36-12$$
$$12z=24$$
$$z=\frac{24}{12}=2$$



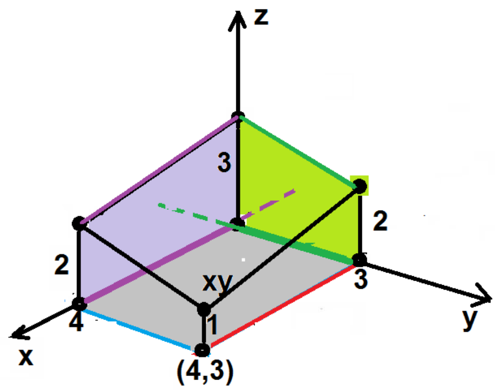
Es de notar que como todas las ecuaciones son planos, las intersecciones entre planos son rectas.

Ya construimos una pared vertical, que corresponde a esa porción del eje "y" de color verde (porción de x=0) cuyos puntos suben y "topan" en el plano $3x+4y+12z-36=0$.

Hacemos lo mismo para la parte del eje x (coloreado de morado)

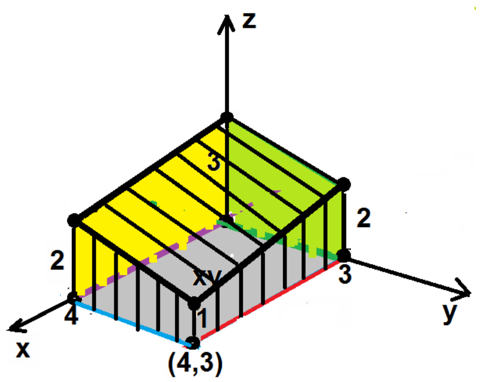
Punto (4,0):

$$3x+4y+12z-36=0$$
$$3(4)+4(0)+12z-36=0$$
$$12+12z=36$$
$$12z=36-12$$
$$12z=24$$
$$z=2$$



Para el punto (4,3):

$$3x+4y+12z-36=0$$
$$3(4)+4(3)+12z-36=0$$
$$12+12+12z=36$$
$$12z=36-24$$
$$12z=12$$
$$z=1$$



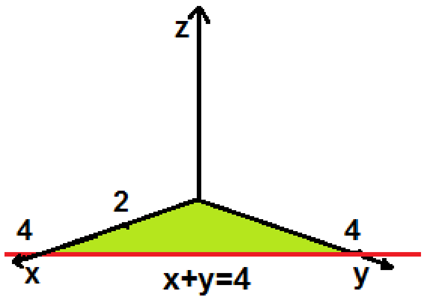
Ejercicio: graficar el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $x+y=4,$, $z=4-x^2$. Primer octante.

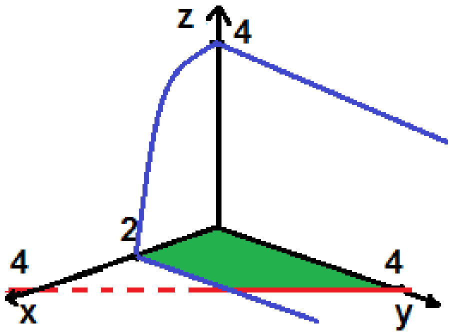
Solución

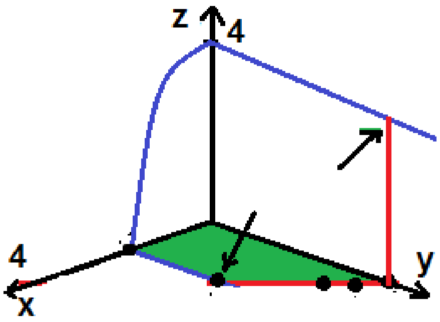
Primero identifiquemos el tipo de gráfica que corresponde a cada una de las ecuaciones.

$x + y = 4$ en dos dimensiones es una recta y en tres en un plano

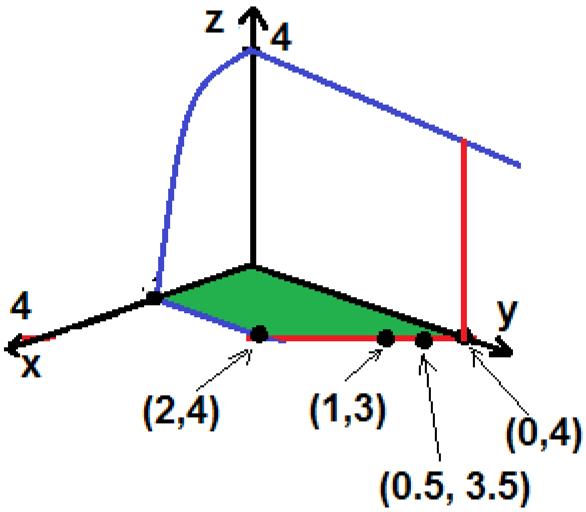
$z = 4 - x^2$ superficie cilíndrica cuya curva generatriz se grafica en el plano XZ y las rectas directrices van paralelas al eje "y".



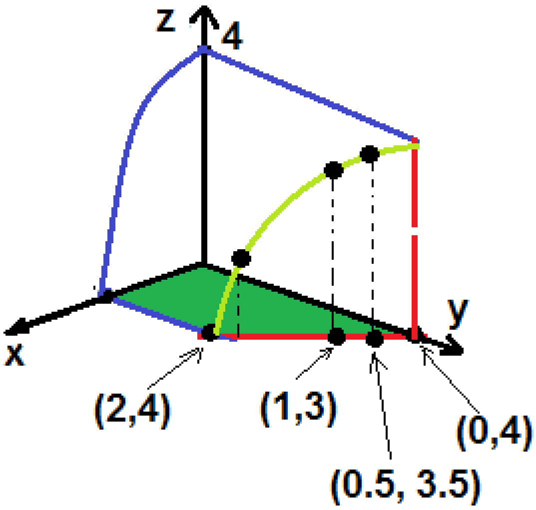


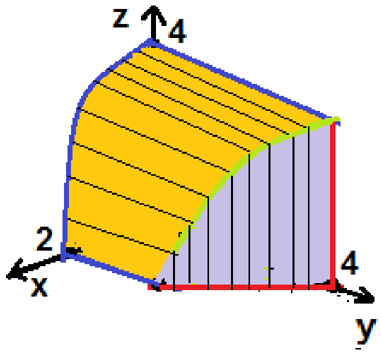


Acá señalamos los puntos donde se interseca el plano $x + y = 4$ y la superficie cilíndrica $z = 4 - x^2$

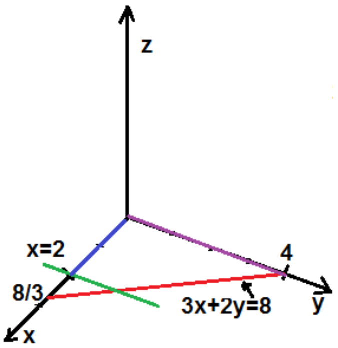


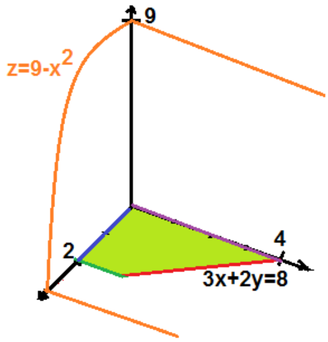
Tomamos algunos puntos, para determinar las alturas de cada uno de ellos. Es decir los valores de z que le corresponde a cada uno de ellos en el cilindro $z = 4 - x^2$

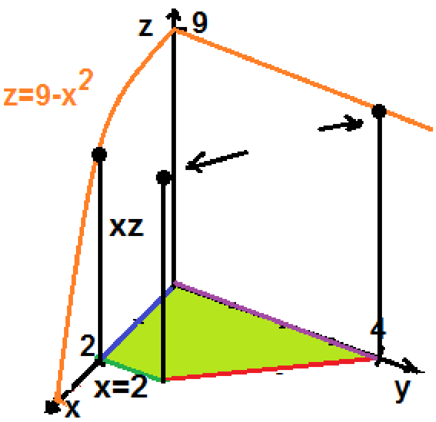




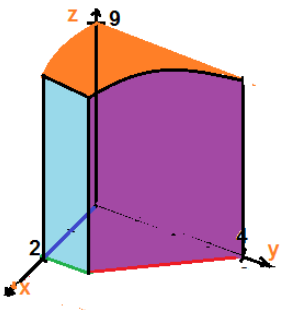
Ejercicio: graficar el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $3x+2y=8$, $x=2$, $z=9-x^2$. Primer octante.

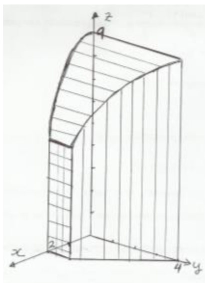






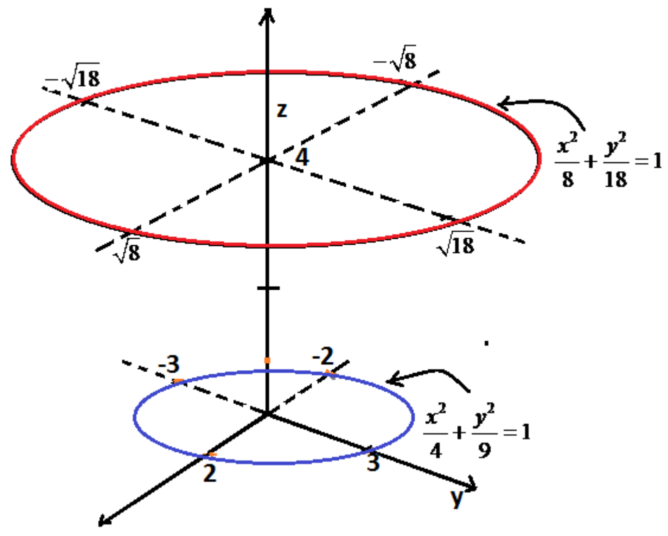
A veces, no es necesario determinar exactamente la altura z de algunos puntos de la base del sólido. Por ejemplo, para unir los dos puntos señalados en la figura, trazamos una línea que lleve la misma tendencia del cilindro que está de color naranja.





Sólido graficado a escala

Ejercicio: Graficar el sólido limitado por las gráficas de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, z=0 y z=4



Intersección de Z=4 y el hiperboloide es una elipse

Intersección de Z=0 y el hiperboloide es también una elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1 \quad ; \quad z=4$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(4)^2}{16}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{16}{16}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1+1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2$$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=2 \rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{18}\right)^2}=1$$