UNIDAD II: COORDENADAS POLARES

2.3 ECUACIONES POLARES Y ECUACIONES RECTANGULARES

Ejemplo:

Convertir la ecuación rectangular $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ a la forma polar, y además, escribir r en función de θ.

Solución:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$

Sustituyendo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = rCos(\theta)$$

$$y = rSen(\theta)$$

Entonces:

$$r^2 + 4rCos(\theta) - 2rSen(\theta) = 0$$

Factorizando:

$$r[r + 4Cos(\theta) - 2Sen(\theta)] = 0$$

$$r = 0 \text{ ó } r + 4Cos(\theta) - 2Sen(\theta) = 0$$

$$r = 0 \text{ es el polo}$$

$$r = -4Cos(\theta) + 2Sen(\theta)$$

Observe que la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ corresponde a una circunferencia, en coordenadas cartesianas y su equivalente en el sistema polar es $r = -4Cos(\theta) + 2Sen(\theta)$. Más adelante se estudiará este tipo de circunferencias.

Ejemplo:

Convertir la ecuación rectangular $y^2 - 4x - 4 = 0$ a la forma polar, escribir r en función de θ

Solución:

$$y^2 - 4x - 4 = 0$$

$$[rSen(\theta)]^2 - 4rCos(\theta) - 4 = 0$$

$$r^2Sen^2(\theta) - 4rCos(\theta) - 4 = 0$$

Hasta acá ya se ha convertido la ecuación cartesiana a polar, pero hay que escribir r en función de θ. Por lo tanto:

$$r^2Sen^2(\theta) - 4rCos(\theta) - 4 = 0$$

Es lo mismo que

$$Sen^2(\theta)r^2 - 4rCos(\theta) - 4 = 0$$

$ar^2 + br + c = 0$ Donde:

$a = Sen^2(\theta)$

$b = -4Cos(\theta)$

$c = -4$

Resolviendo para r:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-[-4Cos(\theta)] \pm \sqrt{[-4\cos(\theta)]^2 - 4[Sen^2(\theta)](-4)}}{2Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{4Cos(\theta) \pm \sqrt{16\cos^2(\theta) + 16Sen^2(\theta)}}{2Sen^2(\theta)}$$

Luego, utilizando factorización e identidades trigonométricas

$$r = \frac{4Cos(\theta) \pm \sqrt{16[\cos^2(\theta) + Sen^2(\theta)]}}{2Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{4Cos(\theta) \pm \sqrt{16}}{2Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{4Cos(\theta) \pm 4}{2Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{4[Cos(\theta) \pm 1]}{2Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{2[Cos(\theta) \pm 1]}{Sen^2(\theta)}$$

Se puede seguir simplificando. Utilizando identidades trigonométricas y factorización

$$r = \frac{2[Cos(\theta) \pm 1]}{Sen^2(\theta)}$$

$$r = \frac{2[Cos(\theta) \pm 1]}{1 - Cos^2(\theta)}$$

Si se toma el signo positivo en el numerador:

Si se toma el signo negativo en el numerador:

$$r_1 = \frac{2[Cos(\theta) + 1]}{1 - Cos^2(\theta)} \qquad r_2 = \frac{2[Cos(\theta) - 1]}{1 - Cos^2(\theta)}$$

$$r_1 = \frac{2[Cos(\theta) + 1]}{[1 - Cos(\theta)][1 + Cos(\theta)]} \qquad r_2 = \frac{2[Cos(\theta) - 1]}{[1 - Cos(\theta)][1 + Cos(\theta)]}$$

$$r_1 = \frac{2}{[1 - Cos(\theta)]}$$

$$r_2 = \frac{-2[1 - Cos(\theta)]}{[1 - Cos(\theta)][1 + Cos(\theta)]}$$

$$r_2 = \frac{-2}{[1 + Cos(\theta)]}$$

Ejemplo:

Encontrar una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2Sen(2\theta)$ $= 16$.

Solución:

$$r^2Sen(2\theta) = 16$$

$$r^2 2Sen(\theta)Cos(\theta) = 16$$

$$[rSen(\theta)][rCos(\theta)] = \frac{16}{2}$$

$$[y][x] = 8$$

$$y = \frac{8}{x}$$

2.4 SIMETRIA

Existe una similitud entre la simetría en coordenadas rectangulares y polares. En las gráficas polares se puede dar simetría con respecto a el eje polar, la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ y también con respecto al polo (al eje x, el eje y, el origen, respectivamente).

Geométricamente se puede decir que si hay simetría con respecto al eje polar éste divide en partes iguales la gráfica. De igual manera, si hay simetría con respecto a $\theta = \frac{\pi}{2}$, esta recta divide en dos partes iguales la gráfica.

Teorema: (Criterio de simetría en coordenadas polares)

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto a lo siguiente, si la sustitución indicada produce una ecuación equivalente

1. La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ ó $(-r, -\theta)$
2. Eje polar: sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ ó $(-r, \pi - \theta)$
3. El polo: sustituir (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ ó $(-r, \theta)$

Sin embargo, es de hacer notar que las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias para garantizar la simetría indicada.

Un llamado "criterio rápido de simetría", es el que puede resumirse de la siguiente manera:

1) La gráfica de $r = f(Sen(\theta))$ es simétrica respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) La gráfica de $r = f(Cos(\theta))$ es simétrica respecto al eje polar.

Este criterio es el que se utilizará durante el curso, pues por lo general se trabajará con gráficas que se identificaran fácilmente. Por ejemplo, la gráfica que corresponde a la ecuación polar $r = 3\text{Cos}(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar ya que está escrita en la forma $r = f(Cos(\theta))$, es decir, que r está en términos de la función trigonométrica coseno.

Puede ocurrir que algunas gráficas polares no cumplan con tal criterio rápido de simetría y sea necesario entonces apoyarse en el teorema.