DESIGUALDADES

Una desigualdad es un enunciado de la forma $a<b$

La cual se lee respectivamente, a es menor que b o también que b es mayor que a.

Podemos decir que en dicho enunciado el símbolo < la "abertura" señala a la expresión mayor y la "punta" a la expresión menor.

Por ejemplo 5>3 se lee 5 es mayor que 3 o que 3 es menor que 5.
-1< 6 se lee -1 es menor que 6 o que 6 es mayor que -1

También una desigualdad puede tener la forma $a \le b$, la cual se lee a es menor ó igual que b o también que b es mayor o igual que a. Este enunciado es cierto si se cumple una de las dos condiciones: que a sea menor que b o que sean iguales.

Ejemplo:
El enunciado $4 \le 7$ es cierto, ya que se cumple que 4 es menor que 7
El enunciado $4 \ge 7$ es falso, ya que no se cumple que 4 sea mayor que 7, ni que 4 sea igual a 7.
El enunciado $3 \le 3$ es cierto, ya que se cumple que 3 es igual a 3, aunque no se cumple que $3<3$

El enunciado $a \le c \le b$ es equivalente a que $a \le c$ y a la vez que $c \le b$

$$a \le c \le b \Leftrightarrow a \le c \quad y \quad c \le b$$

Aunque algunas veces la expresión $a \le c \le b$ es más comprensible si se lee del centro hacia los lados, es decir, c es mayor o igual que a y que c sea menor o igual que b (***significa que el valor de*** c ***debe de estar entre*** a ***y*** b***, incluyendo dichos valores****).*

Ejemplo:
El enunciado $1 \le 4 \le 3$ es falso
El enunciado $-3 \le 0 < 5$ es cierto
El enunciado $1 \le 3 < 3$ es falso, sin embargo $1 \le 3 \le 3$ es cierto

INTERVALOS

Un intervalo es un conjunto denso de números reales y se representa por medio de corchetes

Un conjunto se dice que es denso si entre dos números cualesquiera existe otro número que pertenece al conjunto.

Clases de intervalos

1. Intervalo cerrado $[a,b]$. también puede escribirse como $\{x \in \mathbb{R} / a \le x \le b\}$ gráficamente

2. Intervalo abierto $]a,b[$ también puede escribirse en notación de conjunto como $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$. Gráficamente

3. i) Intervalo semicerrado a la izquierda $[a,b[$ también puede escribirse en notación de conjunto como $\{x \in \mathbb{R} / a \le x < b\}$. Gráficamente

   ii) Intervalo semicerrado a la derecha $]a,b]$ también puede escribirse en notación de conjunto como $\{x \in \mathbb{R} / a < x \le b\}$. Gráficamente

4. intervalos al infinito

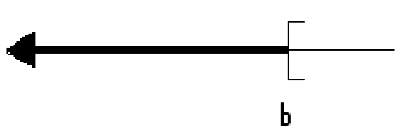
   i) intervalo $[a,+\infty[$, $\{x \in \mathbb{R} / x \ge a\}$
   ii) intervalo $]-\infty,b]$, $\{x \in \mathbb{R} / x \le b\}$
   iii) intervalo $]-\infty,b[$, $\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
   iv) intervalo $]a,+\infty[$, $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

Cuyas graficas respectivamente son:

i)

ii)

iii)



iv)

ALGUNAS OPERACIONES CON INTERVALOS

Con los intervalos pueden efectuarse las operaciones siguientes:

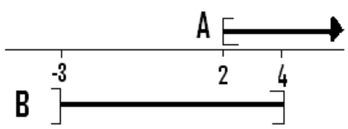
i) $AUB = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \text{ ó } x \in B\}$

ii) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$

Ejemplo 1:

Dados $A = [2, +\infty[$ y $B =]-3, 4]$ efectuar las operaciones AUB, $A \cap B$.

Solución



Respuestas

$AUB =]-3, +\infty[$

$A \cap B = [2, 4]$

Ejercicio 1:

Dados $A = [0, 6[$ y $B = [-6, 4]$, efectuar las operaciones AUB, $A \cap B$.

RESOLUCION DE INECUACIONES LINEALES

Estas desigualdades son aquellas que tienen la forma $ax + b \leq 0$ en la cual a y b son constantes. (El símbolo de desigualdad puede ser $\leq, \ \geq, \ <$ o $>$)

Para resolver desigualdades utilizamos las propiedades siguientes:

1. $A \le B \iff A + C \le B + C$ (NOTA: Hacer ejemplos con números)
2. $A \le B \iff A - C \le B - C$
3. si $C > 0$ y $A \le B$ entonces $CA \le CB$
4. si $C < 0$ y $A \le B$ entonces $CA \ge CB$

Ejemplo 2: Resolver $2x < 6x - 2$

Solución

$2x < 6x - 2$

$2x - 6x < 6x - 2 - 6x$ restamos a ambos miembros $6x$

$-4x < -2$

$\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) > \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)$ multiplicamos a ambos miembros por $-\frac{1}{4}$, por lo que invertimos la direccion de la desigualdad (según lo indica la prop. 4)

$x > \frac{1}{2}$

En forma de intervalo la solución es $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

De forma análoga a las ecuaciones, las desigualdades pueden resolverse con la única diferencia que cuando un número negativo esta multiplicando (o dividiendo) y pasa a dividir (o a multiplicar) la desigualdad se invierte.

Ejercicio 2: Resolver $\frac{2}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$

Ejemplo 3: Resolver $2 \le x + 5 < 9$

Solución

$2 \le 2x+5<9$

$2-5 \le 2x+5-5<9-5$ restando 5 a cada miembro

$-3 \le 2x<4$

$\frac{-3}{2} \le \frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$ dividiendo entre 2 cada miembro

$\frac{-3}{2} \le x < 2$

por lo tanto el C.S.$=\left[-\frac{3}{2},2\right[$

O también

$2 \le 2x+5<9$

$2-5 \le 2x<9-5$

$-3 \le 2x<4$

$\frac{-3}{2} \le x < \frac{4}{2}$

por lo tanto el C.S.$=\left[-\frac{3}{2},2\right[$

Ejercicio 3: Resolver $\frac{1}{2}<3-2x \le 3$

RESOLUCION DE INECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA VARIABLE

Para resolver estas desigualdades puede seguirse los pasos siguientes:

1. Se transforma la desigualdad en $ax^2+bx+c \le 0$ $\left(\text{donde } \le \text{ puede ser } \ge, < \text{ ó } >\right)$
2. Se factoriza la parte izquierda
3. Se determina cada una de las raíces de los factores obtenidos en 2)
4. Se construye un cuadro de variación para ver el comportamiento de la expresión ax^2+bx+c en los diferentes intervalos determinados por las raíces de los factores
5. Se concluye en base a los resultados, los cuales están determinados por la ultima fila del cuadro de variación

Ejemplo 4: Resolver $3x^2 \ge \frac{x}{2}+1$

Solución

$3x^2 \geq \frac{x}{2} + 1$

$2\left(3x^2\right) \geq 2\left(\frac{x}{2}\right) + 2(1)$ multiplicando por 2

$6x^2 \geq x + 2$

$6x^2 - x - 2 \geq 0$ pasando todos los terminos diferentes de cero a un solo lado

$(2x+1)(3x-2) \geq 0$ factorizando

Encontrar las raíces de cada factor

$2x+1=0 \qquad 3x-2=0$

$x = -\frac{1}{2} \qquad x = \frac{2}{3}$

	$-\infty$ a -1/2	-1/2 a 2/3	2/3 a $+\infty$
$2x+1$	−	+	+
$3x-2$	−	−	+
$(2x+1)(3x-2)$	+	−	+

El producto de los dos factores es mayor o igual a cero (positivo) en dos intervalos, por lo tanto

C. S.= $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

Ejercicio 4: Resolver $x(6x+1) \leq 2$

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES CON ALGUNOS TÉRMINOS FRACCIONARIOS CON VARIABLE EN EL DENOMINADOR

Para resolver estas inecuaciones se procede de de la siguiente manera:

1. Se trasladan todos los términos a un solo miembro de la desigualdad
2. Se suma o se resta las fracciones transformándola a la forma $\frac{a}{b} < 0$ (puede ser también $\leq,\ \geq,\ \text{ó}\ >$)
3. Se factoriza (si es posible) el numerador y el denominador.
4. Luego se encuentra las raíces de cada uno de los factores, tanto del numerador como del denominador
5. Posteriormente se construye un cuadro de variación, teniendo el cuidado de excluir los valores que hacen cero el denominador

Ejemplo 5: Resolver $x \geq \frac{2}{x+1}$

Solución

$$x \geq \frac{2}{x+1}$$

$$x - \frac{2}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{x(x+1)-2}{x+1} \geq 0 \quad \text{efectuando la diferencia}$$

$$\frac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x+1} \geq 0 \quad \text{factorizando el numerador}$$

encontrar las raíces del numerador y del denominador

$$x+2=0 \qquad x-1=0 \qquad x+1=0$$

$$x=-2 \qquad x=1 \qquad x=-1$$

Construir un cuadro de variación

$+\infty$ **-2** **- 1** **1** **+** ∞

$x+2$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$x+1$	-	-	+	+
$\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$	-	+	-	+

C.S.= $[-2,-1[\cup[1,+\infty[$

Otra forma…….

$$x \geq \frac{2}{x+1}$$
$$0 \geq \frac{2}{x+1} - x$$

Continuarlo…. Tiene que dar el mismo resultado anterior

Ejercicio 5: Resolver $2 \leq \frac{3}{x}$

Ejercicio 6: Resolver $\frac{x-2}{x+1} > \frac{x-1}{x}$