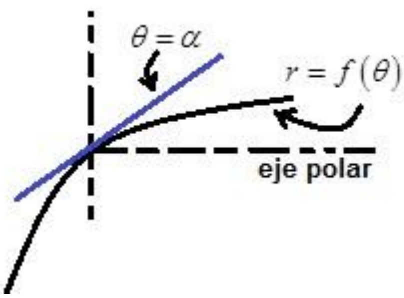
UNIDAD II: COORDENADAS POLARES

2.5 RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha) = 0 \; y \; f'(\alpha) \neq 0$, entonces la recta $\theta = \alpha$ es tangente en el polo a la gráfica $r = f(\theta)$.



En otras palabras para que una recta $\theta = \alpha$ sea una recta tangente en el polo tiene que hacer cero la ecuación polar (la gráfica debe pasar por el polo) y ser distinto de cero al evaluar $\theta = \alpha$ en la derivada de la ecuación polar. Por ejemplo, la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ es una recta tangente al polo de la gráfica de $r(\theta) = 2Cos(\theta)$, o simplemente $r = 2Cos(\theta)$.

En efecto,

$$r = 2Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r = 2(0)$$

$$r = 0$$

Es decir que $\theta = \frac{\pi}{2}$ hace "cero" la ecuación polar
Además, $r(\theta) = 2Cos(\theta)$, entonces la derivada es $r'(\theta) = -2Sen(\theta)$

Ahora si se evalúa $\theta = \frac{\pi}{2}$ en la derivada debe de dar distinto de cero. En efecto:

$$r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \neq 0$$

Procedimiento para determinar las tangentes en el polo de una ecuación polar.

Paso 1: Se hace $r = 0$ para determinar los valores que hacen "cero" la ecuación polar. (posibles tangentes al polo).

Paso 2: Se sustituye los valores encontrados en el paso anterior en $r' = f'(\theta)$ y si dan valores distintos de cero entonces los valores encontrados en el paso anterior, son tangentes al polo.

Ejemplo:

Determinar las tangentes al polo de $r = 2Sen(\theta)$ ***Solución:***

Se hace $r = 0$, entonces:

$$2Sen(\theta) = 0$$

$$Sen(\theta) = \frac{0}{2}$$

$$Sen(\theta) = 0$$

Ahora se analiza para qué valores de ángulos θ el seno es cero, y puede verse que es para $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$, $\theta = -\pi$, $\theta = -2\pi$, etcétera, siendo la misma recta.

Entonces $\theta = 0$ es la única posible tangente al polo.

$$r = 2Sen(\theta)$$

$$r' = 2Cos(\theta)$$

Evaluando $\theta = 0$ en $r'(\theta) = 2Cos(\theta)$

$$r'(0) = 2Cos(0) = 2 \neq 0$$

Por lo tanto, $\theta = 0$ es tangente en el polo de $r = 2Sen(\theta)$

Ejemplo:

Encontrar las rectas tangentes en el polo de $r = 2Sen(3\theta)$ ***Solución:***

Primero se hace $r = 0$, entonces:

$$2Sen(3\theta) = 0$$

$$Sen(3\theta) = \frac{0}{2} = 0$$

$$Sen(3\theta) = 0$$

Para que el seno de un ángulo sea cero, éste tiene que medir 0, π, 2π, 3π, 4π, etc. O también negativos. Pero para este problema el ángulo es 3θ, o sea que:

$$3\theta = 0$$

$$3\theta = \pi$$

$$3\theta = 2\pi$$

$$3\theta = 3\pi$$

$$3\theta = 4\pi$$

Y así sucesivamente. Lo mismo es con los negativos. Luego se despeja θ en cada caso para obtener las posibles tangentes al polo

$$3\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$3\theta = \pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$3\theta = 2\pi \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$3\theta = 3\pi \rightarrow \theta = \pi$$

$$3\theta = 4\pi \rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Se observa que a partir de la recta $\theta = \pi$, se repiten. Ya que la recta $\theta = \pi$ es la misma recta que $\theta = 0$ y la recta $\theta = \frac{4}{3}\pi$ es la misma recta que $\theta = -\frac{\pi}{3}$, etc.

Entonces, las posibles tangentes al polo solamente son $\boldsymbol{\theta = 0}$, $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ y $\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

Segundo, hay que ver que cada uno de estos 3 valores evaluados en la derivada de r resulte distinto de cero

$$r = 2Sen(3\theta)$$

$$r' = 6Cos(3\theta)$$

Para $\theta = 0$

$$r' = 6Cos[3(0)]$$

$$r' = 6Cos(0) = 6(1)$$

$$r' = 6 \neq 0$$

Luego la recta $\boldsymbol{\theta = 0}$ (eje polar) es tangente al polo

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$r'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6Cos\left[3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$r' = 6Cos(\pi) = 6(-1)$$

$$r' = -6 \neq 0$$

Luego la recta $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ es tangente al polo también

Para $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$r'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6Cos\left[3\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$r' = 6Cos(2\pi) = 6(1)$$

$$r' = 6 \neq 0$$

Luego la recta $\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ es tangente al polo también

Por lo tanto las rectas $\boldsymbol{\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}}$ y $\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ son tangentes al polo de la gráfica de $\boldsymbol{r = 2Sen(3\theta)}$