UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS

**Materia: Matemática III**
**Ciclo: I / 2019**

# GUÍA Nº 3

## I. Rectas y planos en 3 dimensiones

1) Calcule la distancia entre los puntos $P(4,-3,2)$ y $Q(-2,3,5)$ y el punto medio del segmento de la recta que une a $P$ y a $Q$.

2) La distancia del punto $P(x,y,z)$ al origen es $d_1$, y su distancia a su punto $A(0,0,3)$ es $d_2$. Hállese el lugar geométrico del punto $P$ si $d_1 = 2d_2$.

3) Determine si los puntos dados se encuentran en una línea recta:
   **a)** $A(5,1,3)$, $B(7,9,-1)$, $C(1,-15,11)$
   **b)** $K(0,3,-4)$, $L(1,2,-2)$, $M(3,0,1)$

4) Obtenga la ecuación canónica de la esfera cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $A(5,-9,7)$ y $B(-2,3,3)$.

5) Hallar la ecuación general de la esfera que es concéntrica con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$, y tiene radio 3.

6) Hallar la ecuación general de la esfera con centro $(1,2,3)$ y tangente al plano xz. Además, determinar el punto de tangencia sobre dicho plano.

**Obtenga las ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta que satisfaga las condiciones dadas.**

7) Pasa por el punto $(5,3,2)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v} = \langle 3, 2, -2 \rangle$

8) Pasa por los puntos $(-1, 2, 3)$ y $(5,-1,1)$.

*9)* Pasa por el punto $(4,-3,6)$ y es paralela al eje $x$.

10) Pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela al plano $xy$ y al plano $yz$

11) Pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\dfrac{x-10}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$ en su intersección.

12) Pasa por el punto $(2,0,1)$ y es perpendicular a las rectas que tienen números directores $\langle 1, 0, 2 \rangle$ y $\langle 0, 2, 1 \rangle$

13) Obtener las ecuaciones simétricas de la recta que es paralela al vector $\vec{V} = \langle 2, -1, 8 \rangle$ y que pasa por el punto de intersección de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z-2$ con el plano $yz$

14) Obtener la ecuación del plano que contenga al punto $P(1,3,2)$ y que tenga como vector normal al vector $\vec{N} = \langle 2, -1, 5 \rangle$

15) Obtener la ecuación del plano que contenga a los puntos $(-2,2,0)$; $(-2,3,2)$ y $(1,2,2)$ de dos maneras.

16) Obtenga la ecuación del plano que contiene al punto $(-1,3,4)$ y es paralelo al plano $xz$.

17) Obtenga la ecuación del plano que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-3,-3,6)$ y $(4,-2,5)$ y que contenga al punto $(4,-2,3)$.

18) Obtenga la ecuación del plano que es perpendicular al plano $x+3y-z-7=0$ y que contenga a los puntos $(2,0,5)$ y $(0,2,-1)$.

19) Obtenga la ecuación del plano que contiene al punto $(-1,2,1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x+y-z-2=0$ y $2x-y+3z-1=0$

20) Hallar la ecuación del plano que tiene el punto $(2,1,1)$ y es perpendicular al plano $yz$. Además, forma un ángulo de medida en radianes igual a $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ con el plano $2x-y+2z-3=0$

21) Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = 4+3t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 3-4t \\ z = -2-6t \end{cases}$$

22) Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(6,2,4)$ y a la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-3}{7}$.

23) Dos planos paralelos $\wp_1$ y $\wp_2$ equidistan del punto $(3,2,-1)$. Si la ecuación de uno de los planos es $2x-y+2z+4=0$, determine la ecuación del otro plano.

24) En los siguientes ejercicios determine si los planos son paralelos o se cortan. Si se cortan calcule el ángulo de corte.

a) $4x-2y-2z=6$ y $z=2x-y-3$

b) $x-2y+z=2$ y $x+3y-2z=0$

c) $3x+y-z=2$ y $2x-3y+z=-1$

**Grafique los siguientes planos**

**25)** $x+y+z=1$

26) $x+y+z=3$

27) $2x+y+z=4$

28) $x-y+z-1=0$

29) $x+y-z-1=0$

30) $x-3y\ =0$

31) $3x+2y=5$

32) $3x+2z=5$

33) $3y+2z=5$

34) $x=6$

35) $y=3$

36) $z=-\dfrac{7}{2}$

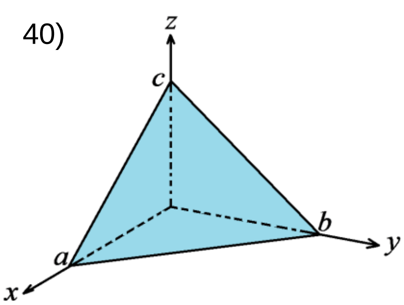
37) $z=0$

38) $2y-z=0$

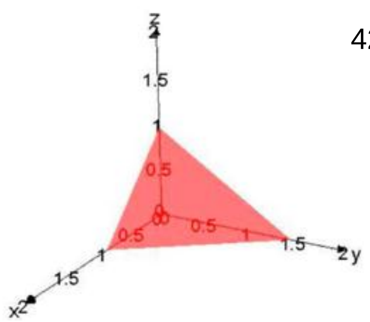
39) $y=0$

**Deduzca las ecuaciones de los siguientes planos**

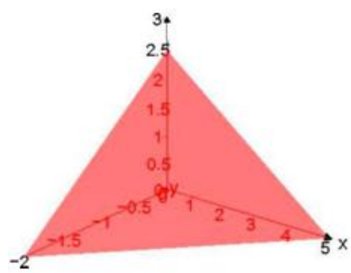
40)




41)




42)




**En los siguientes 3  ejercicios calcule la distancia del punto a la recta**

43) $(1,2,3),\ x-2=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{5}$

44) $(1,5,-2),\ \dfrac{x+2}{4}=1-z,\ y=3$

45) $(0,0,0),\ x+2=21-3y=2z-8$

46) Obtenga la ecuación simétrica para la recta de intersección de los planos $2x-y-z=4$ y $3x-2y+z=0$. Determine además, el ángulo entre los planos.

47) Determine el punto de intersección (si existe) del plano $x+y+z=1$ y la recta $x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$. Determine además si la recta está contenida en el plano.

48) Determine el punto de intersección (si existe) del plano $z = 1 - 2x + y$ y la recta $\frac{x-1}{2} = z,\ y = -1$. Determine además si la recta está contenida en el plano.

49) Demostrar que la recta $x + 1 = \frac{y-6}{-2} = z$ está en el plano $3x + y - z = 3$

50) Calcule la distancia del punto $(1,1,1)$ a la recta que se obtiene de la intersección de los planos $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

51) Determine la distancia del plano $2x + y + z - 5 = 0$ al punto $(2,8,4)$

52) Determine la distancia perpendicular entre el par de planos paralelos $4x - 8y - z + 9 = 0$ y $2x - 4y - \frac{1}{2}z - 3 = 0$

53) Calcule la distancia perpendicular entre el par de rectas oblicuas $x - 1 = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{2}$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{15} = \frac{z+2}{6}$

**En los ejercicios siguientes determine si el par de rectas son paralelas, oblicuas o se cortan. Además, si se cortan, encuentre el punto de intersección.**

54) $L_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{1-z}{3}$ ; $L_2 : x - 2 = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$

55) $L_1 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{4}$ ; $L_2 : x = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$

56) $L_1 : x = -6t;\ y = 1 + 9t;\ z = -3t$ ; $L_2 : x = 1 + 2s;\ y = 4 - 3s;\ z = s$

57) Suponga que dos aviones describen trayectorias de vuelo mediante las ecuaciones paramétricas

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 + s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$$

Describa la forma de las trayectorias. Determine si las trayectorias se intersecan y si los aviones colisionan.

## II. Superficies cilíndricas

**Hacer un bosquejo de los siguientes cilindros**

58) $x^2 + z^2 = 4$

59) $z = 6 - y^2$

60) $z = \sqrt{x}$

61) $z - e^{-x} = 0$

62) $4x^2 + 9y^2 = 36$

63) $z - sin\, y = 0$

64) $z - e^{y} = 0$

65) $y^2 + z - 4 = 0$

66) $yz = 1$

67) $2 = x + y^2$

68) $r = 1 - cos\,\theta$

69) $z = \ln(y)$

70) $z = \cos(x),\ 0 \le x \le 2\pi$

71) $r = 3cos\,\theta$

72) $x - y = 2$

73) $y^2 - z^2 = 4$

74) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

75) $y = x^3$

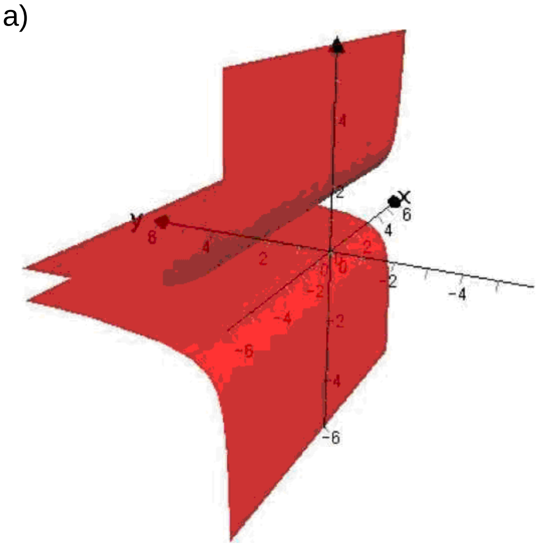
**Identifique los siguientes cilindros con las ecuaciones  dadas.**

76) $r = \sqrt{\theta}$

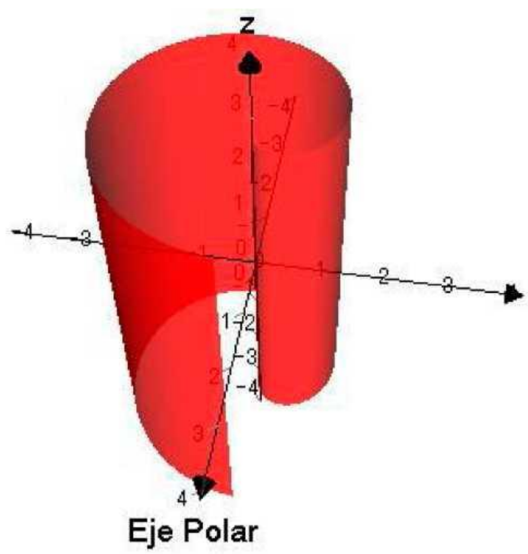
77) $z = ln\, x$

78) $r = 2\theta + cos\theta$

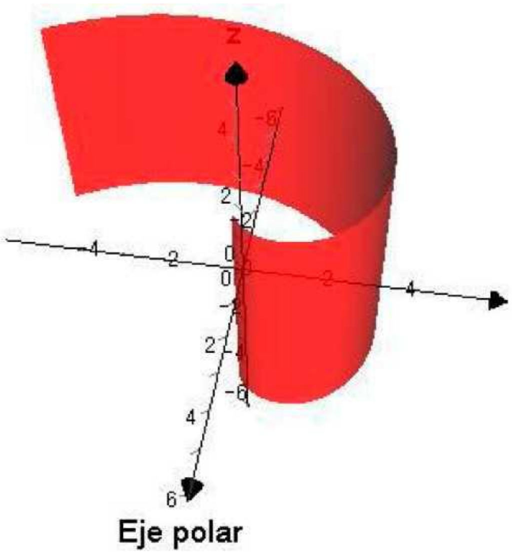
a)



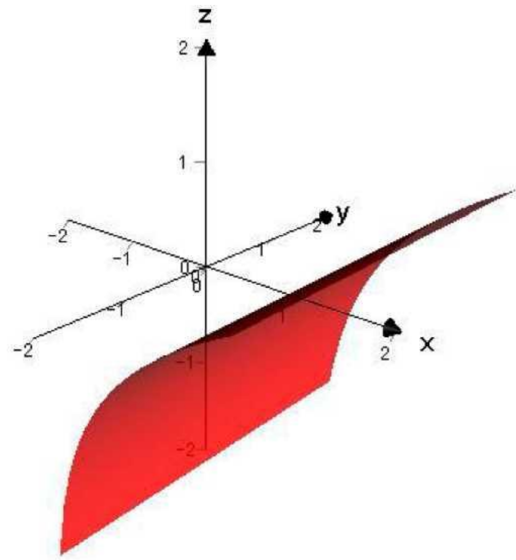
b)



c)




d)




## III. Superficies cuádricas

Haga la gráfica de la ecuación dada

79) $36x^2+4y^2+9z^2=36$

80) $y^2-4x^2-z^2=0$

81) $x^2-y^2+z^2=1$

82) $-4x^2+y^2-z^2=4$

83) $4x^2+y^2+z=16$

84) $4x^2-y^2-z=0$

85) $z=\sqrt{x^2+4y^2}$

86) $x^2+4y^2+16z^2=16, \quad z\geq 0$

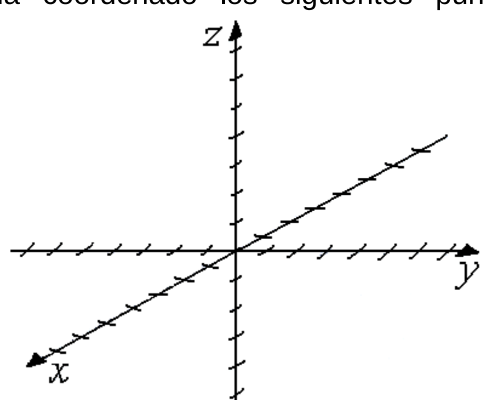
87) $(x-1)^2+\left(y-2\right)^2-z=4$

88) $z^2-4z-4x^2+24x-y^2+8y-48=0$

## IV. Otros sistemas de coordenadas en tres dimensiones

1) Represente en el mismo sistema coordenado los siguientes puntos expresados en coordenadas cartesianas.

a. ( 3, 5, - 4)  b. ( 0, 3, 4 )
c. ( -5, 0, 5 )  d. ( 0, 0, 3 )
e. ( -5, -3, -4)  f. ( -3, -4, -6 )



2) Transforme las siguientes coordenadas cartesianas a cilíndricas.

a) $(2, 2, 3)$ b) $(4\sqrt{3}, -4, 6)$

c) $(-5, -4, 5)$ d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -4\right)$

e) $(-\pi, \sqrt{3}\pi, -4)$ f) $(-3.5, -4.2, 3)$

3) Transforme las siguientes coordenadas cartesianas a esféricas

a) $(2, -2\sqrt{3}, 4)$ b) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

c) $(3, 0, 0)$ d) $(-5, 0, 0)$

e) $(2, 2, 4\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

4) Transforme las siguientes coordenadas esféricas a cartesianas.

a) $\left(8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ b) $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\left(9, \frac{\pi}{4}, \pi\right)$ d) $\left(5, -\frac{\pi}{4}, 0\right)$

e) $\left(2, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$ f) $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

5) Transforme las siguientes coordenadas cilíndricas a cartesianas

a) $\left(6, \frac{\pi}{6}, -2\right)$ b) $\left(4, \frac{4\pi}{3}, -8\right)$ c) $\left(5, \frac{7\pi}{6}, 3\right)$

d) $(1, 1, 1)$ e) $\left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ f) $\left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}, 2\right)$

6) Cambie las siguientes coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas.

a) $\left(1,\frac{\pi}{2},1\right)$  b) $\left(-2,\frac{\pi}{4},2\right)$

En los siguientes ejercicios obtenga una ecuación equivalente en coordenadas cilíndricas

7) $x^2+y^2+4z^2=16$

8) $x^2+y^2=2y$

9) $z^2=10-y^2$

10) $x^2+y^2+z^2-3z=0$

11) $2x^2-z^2=2$

12) $x=5$

13) $x^2+y^2=9$

14) $x^2+y^2=4z$

15) $x^2+y^2=z^2$

En los siguientes ejercicios obtenga una ecuación equivalente en coordenadas cartesianas.

16) $r=\sqrt{16-z^2}$

17) $\theta=\frac{\pi}{3}$

18) $r^2+z^2=4$

19) $z-r^2=0$

20) $z=r^2\cos\theta$

Obtenga una ecuación equivalente en coordenadas esféricas.

21) $z=5$

22) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

23) $z=x^2-y^2$

24) $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}$

25) $x^2+y^2=2y$

26) $x^2+y^2+4z^2=10$

27) $x^2+y^2-2z^2=0$

28) $x^2-y^2-z^2=1$

29) $r^2+2z^2=4$

30) $x^2+y^2=9$

Obtenga una ecuación equivalente en coordenadas cartesianas.

31) $\phi=\frac{\pi}{6}$

32) $\rho=2\sec(\phi)$

33) $\rho=\operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)$

34) $\rho=2\cos(\phi)$

35) $\rho\operatorname{sen}^2(\phi)=\cos(\phi)$

36) $\rho=5$

37) $\rho\operatorname{sen}(\phi)=1$

## V. Gráfica de sólidos

**Grafique el sólido limitado por**

1) $z=4-x^2,\ y+z=5$ en el primer octante

2) $y+z=1,\ x=0,\ z=0$ y el cilindro $y=\sqrt{x}$

3) $2y+z=8,\ y=x,\ x=z=0$ y el cilindro $z=4-x^2$

4) $z=x^2+y^2,\ x+y=2,\ x=y=z=0$

5) $x^2+y^2=2,\ z^2+x^2=2$ primer octante

6) $x=1,\ y+z=1,\ y=\sqrt{x},\ z=y=0$

7) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=4-x^2-y^2$

8) $x^2+y^2=1, x+z=2, z=0$