1.1.7 DETERMINANTES

A toda ***matriz cuadrada* "A"**, se le asocia un número llamado determinante de **A**.
Simbología: $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ o $|\boldsymbol{A}|$, el cual no hay que confundirlo con el valor absoluto de un número real.

Si **A** es una matriz de orden **1**: $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{11}})$, entonces $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}}$.

Si **A** es de orden **2**: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$.

Ejemplo 5: Hallar $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$, siendo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Solución:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = (\mathbf{2})(\mathbf{2}) - \mathbf{8}(\mathbf{1}) = \mathbf{4} - \mathbf{8} = -\mathbf{4}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -\mathbf{4}$$

OBSERVACIÓN: $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} -\mathbf{8} \\ \mathbf{4} \end{matrix} = -\mathbf{4}$

Al producto que va hacia arriba se le cambia de signo y al producto hacia abajo no se le cambia de signo y luego esos dos valores se suma o restan, según el caso.

Para matrices cuadradas de orden 3 o mayor, se definirá la siguiente terminología:

Menor: Si **A** es una matriz de orden **3**, el menor $\boldsymbol{M_{ij}}$ de un elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ es el determinante de la matriz de orden **2** que se obtiene al omitir la fila **i** y la columna **j**. Así, por ejemplo:

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$, hallar $\boldsymbol{M_{32}}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$$

Ejemplo 6: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, hallar el menor correspondiente a $a_{23} = 3$.

Solución:

M_{23} es el determinante de la matriz que se obtiene de omitir la fila 2 y columna 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix} = 11$$

Cofactor: El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} se define como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \textit{es decir} \quad A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & si \quad i+j \quad es\ par \\ -M_{ij}, & si \quad i+j \quad es\ impar \end{cases}$$

Así, por ejemplo, el cofactor A_{32} correspondiente al elemento a_{32} de una matriz de **A** de orden **3** es:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

$$= -M_{32}$$

Ejemplo 7: Dada la matriz $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, hallar los cofactores $\boldsymbol{B_{33}}$ y $\boldsymbol{B_{21}}$

Solución:

$$\boldsymbol{B_{33}} = (-1)^{3+3}\boldsymbol{M_{33}} = (-1)^{6}\boldsymbol{M_{33}} = \boldsymbol{M_{33}}$$

$$\boldsymbol{B_{33}} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 \\ 10 \end{matrix} = 6 \qquad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ \hline -1 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{B_{21}} = (-1)^{2+1}\boldsymbol{M_{21}} = (-1)^{3}\boldsymbol{M_{21}} = -\boldsymbol{M_{21}}$$

$$\boldsymbol{B_{21}} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 9 \\ 7 \end{matrix} = -16 \qquad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 1 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{-5} & \cancel{6} \\ -1 & -3 & 7 \end{array}\right)$$