UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR MATEMATICA III
FACULTAD DE ING. Y ARQ. CICLO I - 2019
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS

UNIDAD V: Funciones de varias variables (cálculo integral)

En la unidad anterior vimos como derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Emplearemos un procedimiento similar para integrar funciones de varias variables. Así, por ejemplo, si conocemos que $f_x(x,y)=3x^2y$, entonces considerando a la variable " y " constante, podemos integrar respecto a x, así

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int f_x(x,y)dx \\
&= \int 3x^2 y dx \quad \text{, manteniendo la variable " } y \text{ " constante} \\
&= y\int 3x^2 dx \\
&= yx^3 + c(y) \\
f(x,y) &= x^3 y + c(y)
\end{aligned}
$$

Podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar expresiones como la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\int_2^{y^2} 3x^2 y dx &= x^3 y \Big]_2^{y^2} \\
&= (y^2)^3 y - (2)^3 y \qquad \text{no hay que perder de vista respecto a que variable integramos} \\
&= y^7 - 8y
\end{aligned}
$$

De manera similar se puede integrar con respecto a y, manteniendo x constante.
Todo lo anterior lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_x(x,y)dx = f(x,y)\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} = f(g_2(y),y) - f(g_1(y),y)$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)dy = f(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))$$

Notas:

1) **La variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración.**
2) **Si integramos respecto a una variable, el resultado nos da una expresión en términos de la otra variable y por lo tanto podemos integrar este resultado con respecto a la otra variable.**

Ejercicio 1:

Evaluar $\int_0^3 \left[\int_{x^2}^{2x+3} (2+x)\, dy \right] dx$

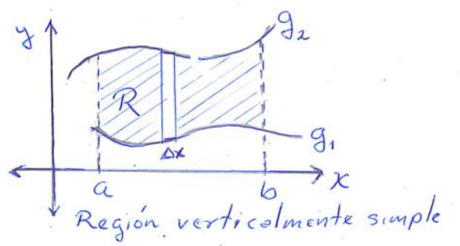
La integral del ejemplo anterior es una **integral iterada** (doble). Las integrales iteradas dobles se escriben en general de las siguientes dos formas:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \quad y \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

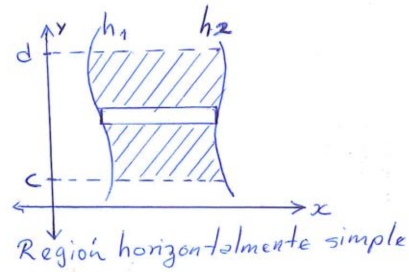
Teorema: (de Fubini)

Sea f continua en una región plana R:

1) Si R está definida por $a \le x \le b \quad y \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$, donde g_1, g_2 son continuas en $[a,b]$, entonces $\int_R \int f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$

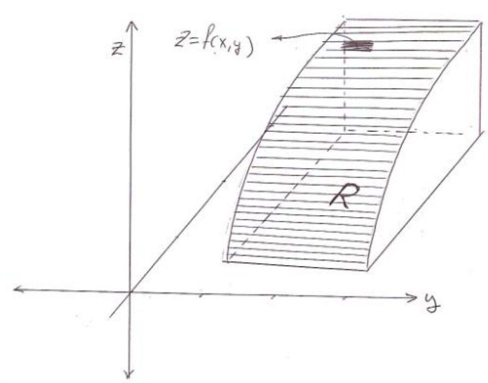


2) Si R está definida por $c \le y \le d \quad y \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)$, donde h_1, h_2 son continuas en $[c,d]$, entonces $\int_R \int f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$



Observaciones: En el teorema anterior

1) Si $f(x,y) = 1$ la evaluación de la integral doble da el valor del área de la región R, en cada caso.
2) Si $f(x,y) > 0$ para todo (x,y) en la región R, la evaluación de la integral doble nos da el volumen del sólido que se forma entre la región R y la gráfica de $z = f(x,y)$



Ejercicio 2:

Graficar el área que representa la integral doble $\int_{-1}^{3}\int_{x^2+1}^{2x+4} dydx$

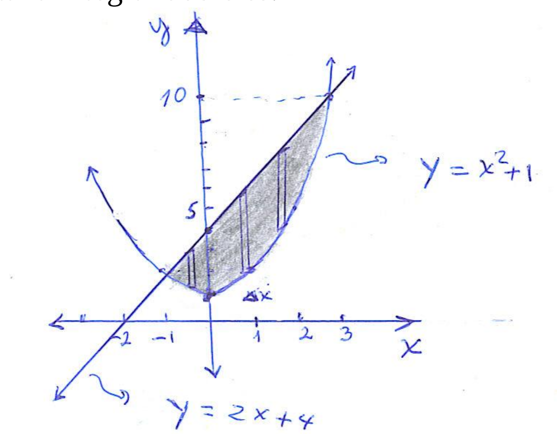
Solución:

Observamos que la variable que se evaluará por último es x, por lo tanto se trata de una región verticalmente simple.

La variable x varía desde $x=-1$ hasta $x=3$

La variable y varía desde $y=x^2+1$ (parábola) hasta $y=2x+4$ (recta)

Luego el área que representa la integral doble es:



Ejercicio 3:

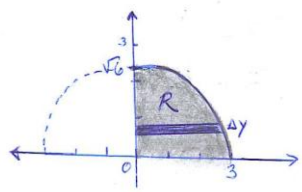
Dada la integral iterada doble $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} (\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2})dydx$

a) Graficar la región R de integración
b) Graficar el volumen que representa dicha integral doble

Solución

Cambio de orden de integración

Toda integral doble puede efectuarse utilizando los dos órdenes de integración, es decir usando la región verticalmente simple o la región horizontalmente simple.
Utilicemos en el ejemplo3 el orden horizontalmente simple.
La región R de integración es la misma, pero ahora los valores constantes son en la variable Y



y varía de 0 a $\sqrt{6}$, y la variable x varía de la recta $x=0$ (el eje Y) a la curva $x=\sqrt{9-\frac{3}{2}y^2}$. Esta ecuación resulta de despejar la variable x de $y=\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$.

Luego la integral anterior utilizando la región horizontalmente simple es equivalente a

$$\int_0^{\sqrt{6}}\int_0^{\sqrt{9-3/2y^2}}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}\right)dxdy$$

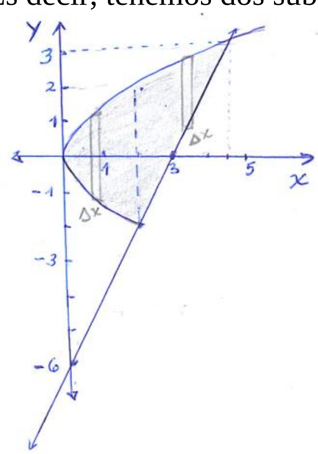
Nota: el resultado de la evaluación de la integral es el mismo.

Ejercicio 4:

Utilizar una integral doble para calcular el área encerrada entre la parábola $y^2=2x$ y la recta $y=2x-6$.

Solución:

A continuación mostramos el área que se encuentra entre las dos curvas y notemos que si resolvemos el problema mediante región verticalmente simple, nos resultan dos integrales dobles. Es decir, tenemos dos sub-regiones y por lo tanto suma de dos integrales dobles.



Encontremos los puntos de intersección igualando las dos ecuaciones

$$\frac{y^2}{2}=3+\frac{y}{2} \qquad y^2=6+y \qquad y^2-y-6=0$$

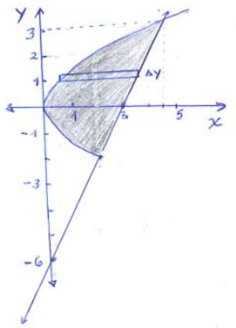
Resolviendo la cuadrática obtenemos $y=-2 \wedge y=3$. Sustituyendo estos valores en $y=2x-6$, obtenemos que los puntos de intersección son $(2,-2)$ y $(4.5,3)$.

En la primera sub región x varía desde 0 hasta 2 , la variable y varía de $y=-\sqrt{2x}$ hasta $y=\sqrt{2x}$.

La segunda sub región x varía desde 2 hasta 4.5, la variable y varía desde la recta $y=2x-6$ hasta la parábola $y=\sqrt{2x}$

El área sería $\int_0^2\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}dydx+\int_2^{4.5}\int_{2x-6}^{\sqrt{2x}}dydx$.

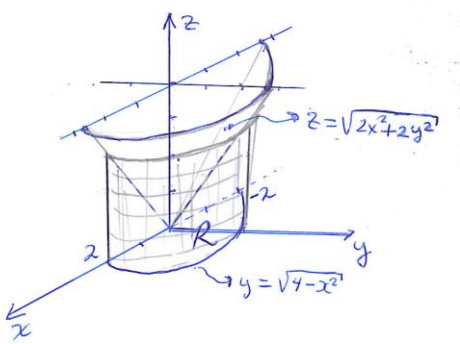
En cambio si la resolvemos mediante región horizontalmente simple, notamos que solamente ocupamos una sola región, es decir, una sola integral doble.

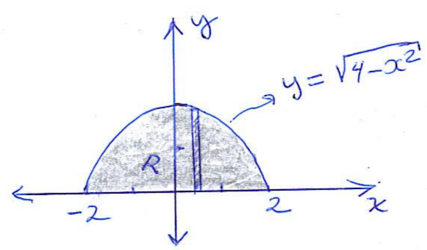


Ejercicio 5: Utilizar una integral doble para hallar el volumen generado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$ y $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$, primer y segundo octante.

Solución

El sólido que genera las gráficas de las dos ecuaciones (un cilindro circular recto y el cono elíptico) es el siguiente:





Luego la representación del volumen del sólido mediante una integral doble es:

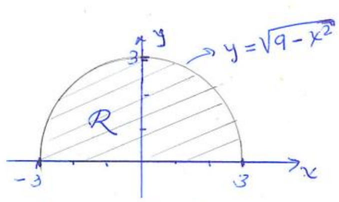
$$V = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{2x^2 + 2y^2}\, dydx$$

Integrales dobles en coordenadas polares

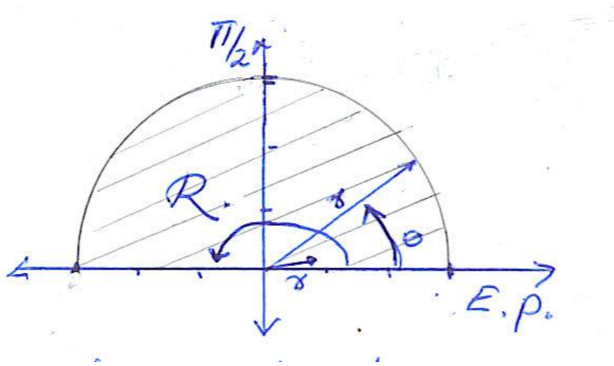
Algunas integrales dobles son mucho más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Recordemos que las coordenadas polares de un punto (r,θ) están relacionadas con las coordenadas rectangulares del punto (x,y), mediante

$$x = r\cos(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$y = rsen(\theta) \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Por ejemplo escribir en polares las siguientes regiones rectangulares



$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le \sqrt{9-x^2}\}$



Notemos que dentro de la región R, el menor r que podemos obtener es $r=0$ y el mayor valor es $r=3$. En cuanto al ángulo el menor es $\theta=0$ y el mayor ángulo es $\theta=\pi$. Luego la región R en polares es $R=\{(r,\theta)/0\le r\le 3 \ \wedge \ 0\le\theta\le\pi\}$

Teorema: (Cambio de variable a la forma polar)
Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x,y)=(r\cos\theta, r\,sen\theta)$ que satisfacen las condiciones $0\le g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, donde $0\le(\beta-\alpha)\le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha,\beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,sen\theta)rdrd\theta$$

NOTA:
Si $z=f(x,y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema anterior puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R.

Ejercicio 6: Evaluar la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^3\sqrt{9-r^2}\,rdrd\theta$ y graficar la región de integración

Ejercicio 7: Cambiar la integral cartesiana a una integral polar equivalente $\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

Ejercicio 8: Evaluar la integral $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dydx$. Además, graficar la región de integración.

Integrales triples

Definición:
Si f es continua en una región sólida Q, la integral triple de f sobre Q se define como:

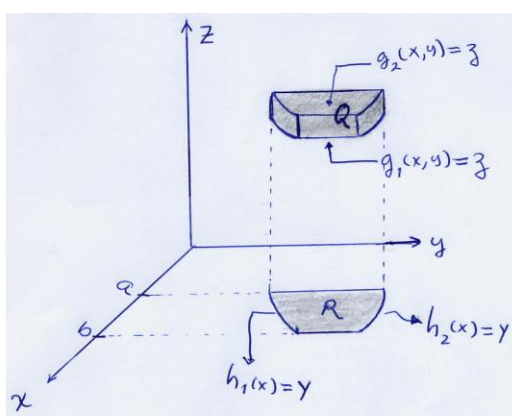
$$\iiint_Q f(x,y,z)dv = \underset{\|\Delta\|\to 0}{Lim} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

Siempre que este límite exista. El volumen de la región Q viene dado por :

$$V_Q = \iiint_Q dv$$

Teorema: (Evaluación de integrales iteradas)
Sea f continua en una región sólida Q definida por $a \le x \le b,\ h_1(x) \le y \le h_2(x),\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y),$ donde h_1, h_2, g_1, g_2, son funciones continuas , entonces:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$



Además del orden $dzdydx$, puede utilizarse los órdenes $dxdydz,\quad dydxdz,\quad dzdxdy,\quad dxdzdy,\quad dydzdx$.

Observaciones:

- En el orden de integración $dx\,dydz$ R: proyección en plano YZ

R

- La última variable a integrar es z (los límites de integración son constantes)

$$a \le z \le b$$
$$h_1(z) \le y \le h_2(z)$$
$$g_1(y,z) \le x \le g_2(y,z)$$

<u>Ejercicio</u> 9: Calcular la integral triple $\int_2^3 \int_1^2 \int_1^4 xyzdzdydx$

<u>Ejercicio</u> 10: Calcular la integral triple $\int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{1+y} \int_0^{1+y-x} ydzdxdy$ y graficar la región de integración Q.

Ejercicio 11: Obtener el volumen del sólido formado en el primer octante, limitado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$. Hacer adicionalmente el planteamiento de otro orden de integración

Solución:

Ejercicio 12: Usar una integral triple para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas $y = 4 - x^2 - z^2$ y el plano XZ.

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Si una región sólida Q tiene un eje de simetría en uno de los ejes coordenados, las integrales triples son más fáciles de evaluar empleando coordenadas cilíndricas.

La forma iterada de la integral triple en coordenadas cilíndricas es:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{g_1(r\cos\theta, rsen\theta)}^{g_2(r\cos\theta, rsen\theta)} f(r\cos\theta, rsen\theta, z)\; r\, dzdrd\theta$$

$$V_Q = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{g_1(r\cos\theta, rsen\theta)}^{g_2(r\cos\theta, rsen\theta)} r\, dzdrd\theta$$

Ejercicio 13: Evaluar $\iiint_Q x^2 dV$, donde Q es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano z=0 y debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solución :

Ejercicio 14: Calcular el volumen del sólido formado por $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ $\quad y \quad$ $r \le z \le 2$

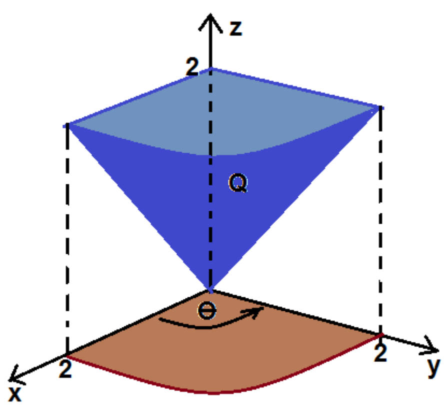
Solución

$r \le z$ $\quad \vdots \quad$ $z \le 2$

$r = z$ $\quad$ $z = 2 \quad (plano)$

$\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad (mitad \quad de \quad un \quad cono)$

como el ángulo máximo es $\dfrac{\pi}{2}$, se trata de la cuarta parte de un cono elíptico cortado en z = 2.

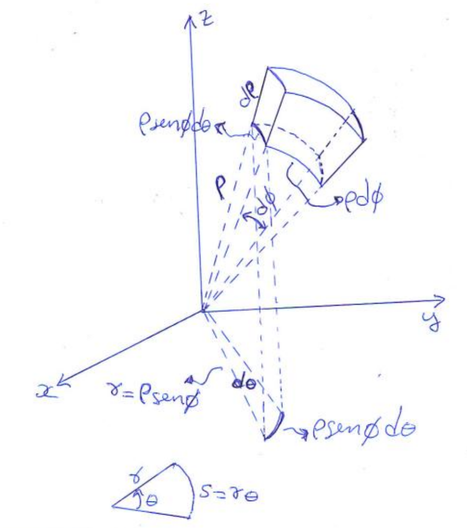


$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_r^2 r dz dr d\theta = \frac{2}{3}\pi \quad (u.l)^3$$

Ejercicio 15: **G**raficar el sólido cuyo volumen está dado por la integral $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \int_r^3 r dz dr d\theta$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son especialmente útiles en algunos problemas que involucran esferas



$$dV = \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$$

Luego

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \iiint_Q f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$$

Ejercicio 16: Determine el volumen del sólido ubicado dentro de $x^2+y^2+z^2=4z$ y que se encuentra arriba de $x^2+y^2=z^2$

Ejercicio 17: Evaluar la integral $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

Esta integral es difícil de evaluar utilizando coordenadas rectangulares, pero se vuelve fácil si cambiamos a coordenadas esféricas.

La expresión a integrar $z\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \underbrace{\rho\cos\phi}_{z} \quad \underbrace{\rho}_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en coordenadas esféricas