1. MATRICES Y DETERMINANTES

Hasta el momento se han estudiado conceptos que ahora se utilizarán para calcular determinantes de matrices de orden mayor a uno, mediante el siguiente teorema.

Teorema 1: *Si **A** es una matriz cuadrada de orden **n > 1**, entonces el determinante de **A** se puede obtener multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos resultantes.*

Así, para calcular el determinante de una matriz **A** de orden mayor a uno, lo podemos hacer mediante el uso de cofactores, escogiendo cualquier fila o columna.

Ejemplo 8: Si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, hallar $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ usando cofactores.

Solución:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Se hallará el determinante de la matriz A mediante la columna 1, es decir, se escoge la columna 1. Entonces, se tiene que multiplicar el elemento $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{2}$ por el correspondiente cofactor $\boldsymbol{A_{11}}$, el elemento $\boldsymbol{a_{21}} = \mathbf{4}$ por el correspondiente cofactor $\boldsymbol{A_{21}}$ y por último elemento $\boldsymbol{a_{31}} = \mathbf{0}$ por el correspondiente cofactor $\boldsymbol{A_{31}}$ y luego sumar algebraicamente estos tres productos, es decir, respetando la ley de los signos.

$$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}A_{11}} + \boldsymbol{a_{21}A_{21}} + \boldsymbol{a_{31}A_{31}}$$

Se debe recordar que el cofactor de un elemento, es igual al Menor o es el Menor con signo distinto. Esto depende de la posición del elemento de la matriz a la que se le está obteniendo el cofactor (si la suma de los números que representan la fila y columna del elemento es par o impar). Nótese que en los elementos de la diagonal principal esta suma es siempre positiva. Se puede verificar que *dichos signos de los cofactores van de la siguiente manera:*

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{-1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{1} \end{vmatrix}$$

Entonces la expresión (1) la podemos escribir como:

$| \; |$ $A \; \square \; a_{11} M_{11} \; \square \; a_{21} M_{21} \; \square \; a_{31} M_{31}$

suma es par	*suma es impar*	*suma es par*
(1 1)□	(2 1)□	(3 1)□

$$|A| = 2M_{11} - 4M_{21} + 0M_{31}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix}-5 & 2\\-3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}+6\\-5\end{matrix} - 4\begin{vmatrix}3 & -1\\-3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}-3\\3\end{matrix} + 0M_{31}$$

$$|A| = 2(1) - 4(0) + 0$$

$$|A| = 2$$

El mismo resultado se obtiene si se calcula dicho determinante utilizando cualquier otra columna o cualquier fila. Encuentre el mismo determinante de **A**, escogiendo la columna **2**.

$$|A| = \underbrace{-} \quad \underbrace{(3)} \quad \underbrace{\begin{vmatrix}4 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}0\\4\end{matrix}} + (-5)\begin{vmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}0\\2\end{matrix} - (-3)\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}4\\4\end{matrix}$$

Signo delcofactor Primer

elemento de Menor la

columna 2

$$|A| = -3(4) - 5(2) + 3(8)$$

$$|A| = -12 - 10 + 24$$

$$|A| = 2$$

Si una matriz posee elementos que son ceros, hay que tratar de aprovecharlos a la hora de que requiera calcular el determinante de la matriz, tal como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9: Evaluar $|A| =$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

Conviene resolver por columna 3, ya que hay más ceros en dicha columna. Hay que recordar que cada elemento de la fila o columna que escojamos, lo multiplicaremos por el cofactor correspondiente.

$$A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{0} & 0 \\ 0 & 1 & \overset{-}{0} & -1 \\ 2 & 5 & \overset{+}{-3} & 0 \\ 5 & 0 & \overset{-}{0} & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = +(-3)\, M_{33} = -3 \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{5} & \overset{-}{0} & \overset{+}{3} \end{vmatrix}$$

Este es un determ inante de una nueva matriz. Para calcularlo se escoge cualquier fila o columna.

Se escoge la fila 3

$$|A| = -3\left\{+5 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0M_{32} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$|A| = -3\{5[(-2)(-1) - (1)(0)] + 3[(1)(1) - (0)(-2)]\}$$

$$|A| = -3[5(2) + 3(1)]$$

$$|A| = -39$$

Teorema 2: *Si todos los elementos de una fila (o columna) de una matriz cuadrada A son ceros, entonces **|A| = 0**.*

1.1 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Sea **A** una matriz cuadrada de orden **n**:

1) Si la matriz **B** se obtiene al intercambiar 2 filas (o dos columnas) de **A**, entonces **|B| = |A|.**

2) Si **B** se obtiene al multiplicar por un número real **k** cada elemento de una fila (o columna) de **A**, entonces $|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{k}|\boldsymbol{A}|$.
3) Si **B** se obtiene al sumarle a cualquier fila (o columna) de **A**, **k** veces otra de sus filas (o columnas), donde **k** es cualquier número real, entonces **|B| = |A|.** (el valor de **k** puede ser un entero positivo o negativo)
4) Si dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada son idénticas, entonces **|A| = 0.**

NOTA: *Observar que las propiedades anteriores son exclusivas para el determinante de una matriz. Por ejemplo, en una matriz cualquiera* ***no*** *se puede intercambiar ninguna fila o columna.*

Ejemplo para la propiedad 1: (se hace por facilidad con un determinante de orden 2).

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Notemos que en la matriz **B** hemos intercambiado las filas de la matriz **A**.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 \\ 10 \end{matrix} = 7$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -10 \\ 3 \end{matrix} = -7$$

O sea que, si en un determinante intercambio dos filas o dos columnas, para que no se altere el resultado hay que multiplicar por “menos uno” dicho determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 \\ 10 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -10 \\ 3 \end{matrix}$$

$$7 = -(-7)$$

$$7 = 7$$

Ejemplo para la propiedad 2:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2(6) & 1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3} \quad \mathbf{5} \qquad\qquad \mathbf{3(6)} \quad \mathbf{5} \qquad\qquad \mathbf{18} \quad \mathbf{5}$$

$$|A| = |^{\mathbf{2}} \quad \mathbf{1}\,|^{-\mathbf{3}} = \mathbf{7} \qquad |B| = |^{\mathbf{12}} \quad \mathbf{1}\,|^{-\mathbf{18}} = \mathbf{42} = \mathbf{6(7)}$$

$$\mathbf{3} \quad \mathbf{5}\ \mathbf{10} \qquad\qquad \mathbf{18} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{60}$$

Otra forma de aplicar la propiedad 2 es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{1} \\ \mathbf{18} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2(6)} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3(6)} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{6} \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{vmatrix}_{\mathbf{10}}^{-\mathbf{3}}$$

Extremos el 6 de la primera columna y el determinante se mantiene.

$$= \mathbf{6(7)} = \mathbf{42}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{12} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{4} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

Extraemos 4 de la primera columna.

$$= \mathbf{4\ (2)} \begin{vmatrix} \overset{+}{\mathbf{1}} & \overset{-}{\mathbf{1}} & \overset{+}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \overset{-}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \overset{+}{\mathbf{0}} \end{vmatrix}$$

Extraemos 2 de la segunda fila

$$= \mathbf{4\ (2)} \left(\mathbf{-2} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix}_{1}^{-3} \right)$$

Escogemos la tercera columna (Es donde hay más ceros).

$$= \mathbf{4(2)(-2)(-2)}$$

$$= \mathbf{32}$$

Ejemplo para la propiedad 3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ 10 \end{matrix} = 7$$

Haremos la operación Fila 1 más -4 veces la Fila 2 y colocaremos el resultado en la Fila 1 (la fila 2 no cambia).

$$\boldsymbol{F1} + (-\boldsymbol{4})\ \boldsymbol{F2} \rightarrow \boldsymbol{F1}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -19 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 57 \\ -50 \end{matrix} = 7$$

Vemos que el resultado del determinante no se altera.

Ejemplo 11: Aplicar propiedades para facilitar el cálculo del determinante de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

En la propiedad 3 de los determinantes, se estudió que a toda una fila (columna) se le puede sumar o restar **k** veces otra fila (columna) y el determinante no cambia su valor.

Se puede aprovechar dicha propiedad para hacer ceros en algunos elementos para facilitar el cálculo del determinante.

Solución:

NOTA: *Es muy ventajoso el tener un elemento que sea "uno" en una posición, ya que éste se utiliza para hacer ceros ya sea debajo de él o a la par de dicho elemento.*

Cuando se hace ceros arriba o debajo de un elemento se hacen operaciones en fila y cuando hace ceros a la izquierda o a la derecha de un elemento se hacen operaciones en columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Debajo del uno marcado con un hexágono se harán ceros, es decir en los elementos marcados por un óvalo. Las operaciones que se haran son:

$$\mathbf{F3 + 2F1 \to F3}$$

$$\mathbf{F4 + (-3)}\boldsymbol{F1 \to F4}$$

Nótese que la fila 1 no cambiará y que las filas 3 y 4 sí cambiarán. Además, en las posiciones marcadas con óvalos se convertirán en ceros. Dichas operaciones se pueden efectuar mentalmente o hacer lo siguiente:

$$\begin{array}{rrrrrl}
\boldsymbol{F3}: & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \\
\mathbf{2}\boldsymbol{F1}: & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \\
\hline
 & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \leftarrow \text{Nueva fila 3} \\
\boldsymbol{F4}: & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \\
\mathbf{-3}\boldsymbol{F1}: & \mathbf{-6} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-9} & \\
\hline
 & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \leftarrow \text{Nueva fila 4}
\end{array}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \end{vmatrix}$$

Obviamente, para calcular este determinante se elige la columna 3, ya que es la que posee más ceros. En este caso se reduce a:

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & 3 \\ 3 & 5 & \overset{-}{0} & -2 \\ 4 & -1 & \overset{+}{0} & 6 \\ -2 & 6 & \overset{-}{0} & -4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Para calcular el **nuevo** determinante de orden 3, se tienen 3 opciones:

a) Se puede seguir aplicando operaciones ya sea en fila o columna para hacer ceros en algunas posiciones.
b) Aplicar el teorema 1 (escoger una fila o columna…).

c) Utilizar el método de Sarrus que se estudiará a continuación.

Se usa la opción a):

$$|A| = +1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Se hace cero a la par del -1 encerrado en un hexágono, para ello tenemos que hacer operaciones en columna. **C1 + 4C2 → C1 y C3 + 6C2 → C3**

$$|A| = +1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

C1	4C2	Nueva Columna 1	C3	6C2	Nueva Columna 3
3	20	23	-2	30	28
4	-4	0	6	-6	0
-2	24	-22	-4	36	-32

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{23} & 5 & 28 \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{0} \\ 22 & 6 & 32 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 23 & 28 \\ 22 & 32 \end{vmatrix}^{-616}_{836} = -120$$

1.2 MÉTODO DE SARRUS

OBSERVACIÓN: *Para calcular el determinante de matrices de orden 3 (* ***únicamente****), se puede utilizar también el método de Sarrus. Este método consiste en agregar las columnas uno y dos a la derecha del determinante y efectuar las operaciones que se indican en el esquema siguiente.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego el determinante de la matriz **A** es el resultado de la siguiente operación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Otra forma de ver el método de Sarrus es que los productos hacia abajo se colocan con el mismo signo y los productos hacia arriba se les cambia de signo y luego se suman los seis productos en forma algebraica.

Ejemplo 12: Encontrar el determinante de la matriz.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{-42} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{56}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix}$$

$$\mathbf{14} \quad \mathbf{-12} \quad \mathbf{-56}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{14 - 12 - 56 - 42 + 4 + 56 = -36}$$