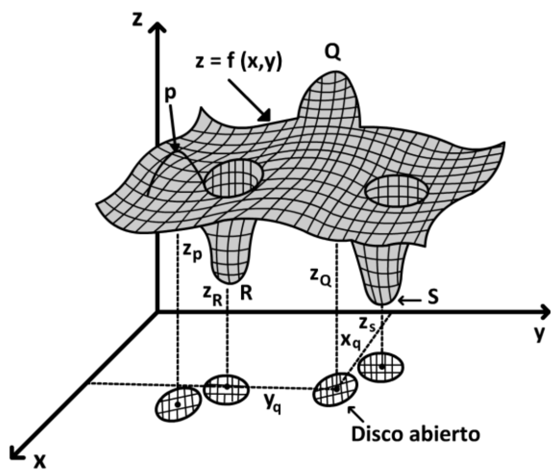
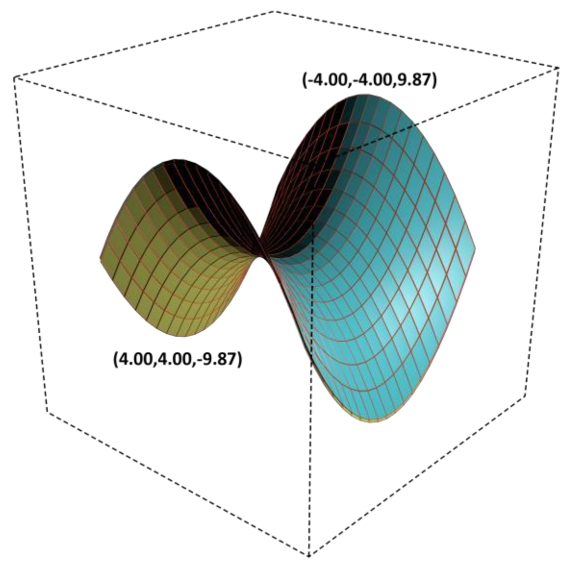
UNIDAD V: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO DIFERENCIAL)

EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES (MÁXIMOS Y MÍNIMOS)

Extremos absolutos y extremos relativos.





OBSERVACIONES:

a) *Una región en el plano xy es cerrada si contiene todos sus puntos frontera*
b) *Una región en el plano xy es acotada si es una subregión de un disco cerrado plano.*

Teorema: *(del valor extremo)*
Sea f una función continua de dos variables x e y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.
1) Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.
2) Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea $\boldsymbol{f}$ una función definida en una región $\boldsymbol{R}$ conteniendo el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ es un mínimo relativo de $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.
2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ es un máximo relativo de $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

para todo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en un disco abierto que contiene a $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Definición de puntos críticos

Sea $\boldsymbol{f}$ definida en una región abierta $\boldsymbol{R}$ que contiene $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$. El punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ es un punto crítico de $\boldsymbol{f}$ si se satisface una de las condiciones siguientes:

1) $\boldsymbol{f_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{f_y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$
2) $\boldsymbol{f_x}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{f_y}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \quad \textit{no existen}$

Teorema:
Si $\boldsymbol{f}$ tiene un extremo relativo en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ en una región abierta $\boldsymbol{R}$, entonces $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ es un punto crítico de $\boldsymbol{f}$.

Teorema:
Sea $\boldsymbol{f}$ una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ para el cual $\boldsymbol{f_x}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = \boldsymbol{0} \quad y \quad \boldsymbol{f_y}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = \boldsymbol{0}$. Note que $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ constituye un punto crítico.

Para determinar los extremos relativos de $\boldsymbol{f}$, considerar la cantidad:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f_{xx}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\, \boldsymbol{f_{yy}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) - [\boldsymbol{f_{xy}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})]^{\boldsymbol{2}}.$$

1) Si $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{f_{xx}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) > \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{f}$ tiene un mínimo relativo en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.
2) Si $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{f_{xx}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) < \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{f}$ tiene un máximo relativo en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.
3) Si $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{0}$, entonces $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}))$ es un punto de silla.
4) Si $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

Ejemplo:

a) Hallar los extremos relativos de $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.

b) Hallar los extremos relativos de $f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$.

Solución para a)

Determinando los puntos críticos de $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.

$$f_x(x,y) = 4x + 2y + 2$$

$$f_y(x,y) = 2x + 2y$$

$$f_x(x,y) = 4x + 2y + 2 = 0 \rightarrow 2x + y + 1 = 0 \quad \boldsymbol{Se\ ha\ dividido\ entre\ 2}$$

$$f_y(x,y) = 2x + 2y = 0 \rightarrow x + y = 0$$

$$2x + y + 1 = 0$$

$$x + y = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores resulta:

$$x = -1 \quad \wedge \quad y = 1$$

El único punto crítico es $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

Ahora se calcula el valor de **"d"** que le corresponde a este punto crítico para determinar si en él ocurre un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

$$d = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

$$f_{xx}(x,y) = 4, \quad f_{yy}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 2$$

$$d = f_{xx}(-1,1) f_{yy}(-1,1) - [f_{xy}(-1,1)]^2$$

$$d = 4(2) - [2]^2$$

$$d = 8 - 4$$

$d = 4 > 0 \ \wedge \ \boldsymbol{como} \ \ f_{xx}(-1,1) > 0$ entonces en $(-1, 1)$ ocurre un mínimo relativo.

El mínimo relativo es:

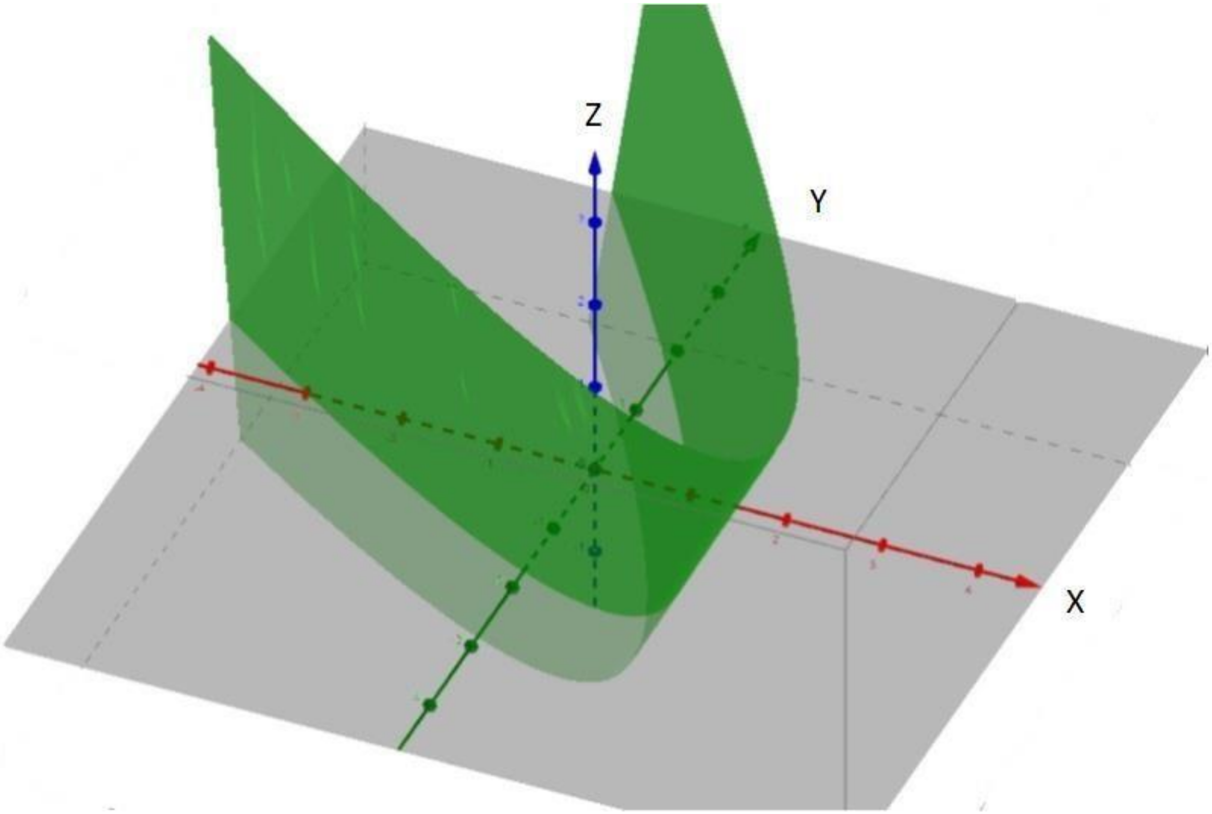
$$f(x,y) = z = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$$

$$f(-1,1) = z = 2(-1)^2 + 2(-1)(1) + (1)^2 + 2(-1) - 3$$

$$z = 2 - 2 + 1 - 2 - 3$$

$$z = -4$$

A continuación, se muestra la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3.}$



Solución para b)

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$$

Se determinan los puntos críticos.

$$f_x(x,y) = 2xy - 4x$$

$$f_y(x,y) = y^2 + x^2 - 4y$$

$$2xy - 4x = 0 \qquad (1)$$

$$y^2 + x^2 - 4y = 0 \qquad (2)$$

Se debe encontrar valores de **"x"** y **"y"** que hagan cero ambas derivadas simultáneamente. Factorizando y simplificando la primera ecuación resulta:

$$2xy - 4x = 0 \qquad (1)$$

$$2x(y-2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{ó} \quad y - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 2$$

Sustituyendo estos dos valores en la ecuación (2) obtenemos:

Si $x = 0$

$$y^2 + x^2 - 4y = 0$$

$$y^2+(0)^2-4y=0$$
$$y^2-4y=0$$
$$y(y-4)=0$$
$$y=0 \quad \text{ó} \quad y=4$$

Puntos críticos:

$$(0,0) \quad y \quad (0,4)$$

Si $y=2$

$$y^2+x^2-4y=0$$
$$(2)^2+x^2-4(2)=0$$
$$x^2-4=0$$
$$(x+2)(x-2)=0$$
$$x=-2 \quad \text{ó} \quad x=2$$

Puntos críticos:

$$(-2,2) \quad y \quad (2,2)$$

Resultan 4 puntos críticos. Hay que calcular el valor de **"d"** para cada punto crítico

$$d=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2,$$
$$f_{xx}(x,y)=2y-4,\quad f_{yy}(x,y)=2y-4,\quad f_{xy}(x,y)=2x$$
$$d=(2y-4)(2y-4)-[2x]^2$$

Para el punto crítico (0,0)

$$d=(2(0)-4)(2(0)-4)-[2(0)]^2$$

$$d=(-4)(-4)$$
$$d=16>0 \quad f_{xx}(0,0)<0$$

En **(0,0)** ocurre un máximo relativo. El máximo relativo es:

$$z=f(x,y)=\frac{1}{3}y^3+x^2y-2x^2-2y^2+6$$
$$z=f(0,0)=\frac{1}{3}(0)^3+(0)^2(0)-2(0)^2-2(0)^2+6=6$$

Máximo relativo $z=6$

Para $(0,4)$

$$d=(2y-4)(2y-4)-[2x]^2$$
$$d=(2(4)-4)(2(4)-4)-[2(0)]^2$$
$$d=(4)(4)$$
$$d=16>0 \quad f_{xx}(0,4)=4>0$$

En $(\mathbf{0}, \mathbf{4})$ ocurre un mínimo relativo. El mínimo relativo es:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$$

$$z = f(0, 4) = \frac{1}{3}(4)^3 + (0)^2(4) - 2(0)^2 - 2(4)^2 + 6 = -\frac{14}{3}$$

Mínimo relativo $z = -14/3$

Para el punto crítico $(-2, 2)$

$$d = (2(2) - 4)(2(2) - 4) - [2(-2)]^2$$

$$d = -16 < 0$$

En $(\mathbf{0}, \mathbf{4})$ ocurre un punto de silla. El punto de silla es: $(-2, 2, f(-2, 2))$

$$f(-2, 2) = \frac{1}{3}(2)^3 + (-2)^2(2) - 2(-2)^2 - 2(2)^2 + 6$$

$$= \frac{8}{3} + 8 - 8 - 8 + 6$$

$$= \frac{8}{3} - 2$$

$$= \frac{2}{3}$$

Punto de silla $(-2, 2, \frac{2}{3})$

Para el punto crítico $(2, 2)$

$$d = (2y - 4)(2y - 4) - [2x]^2$$

$$d = (2(2) - 4)(2(2) - 4) - [2(2)]^2$$

$$d = -16$$

$$d = -16 > 0$$

En $(2, 2)$ ocurre un punto de silla. El punto de silla es $(2, 2, f(2, 2))$

$$f(2, 2) = \frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2(2) - 2(2)^2 - 2(2)^2 + 6$$

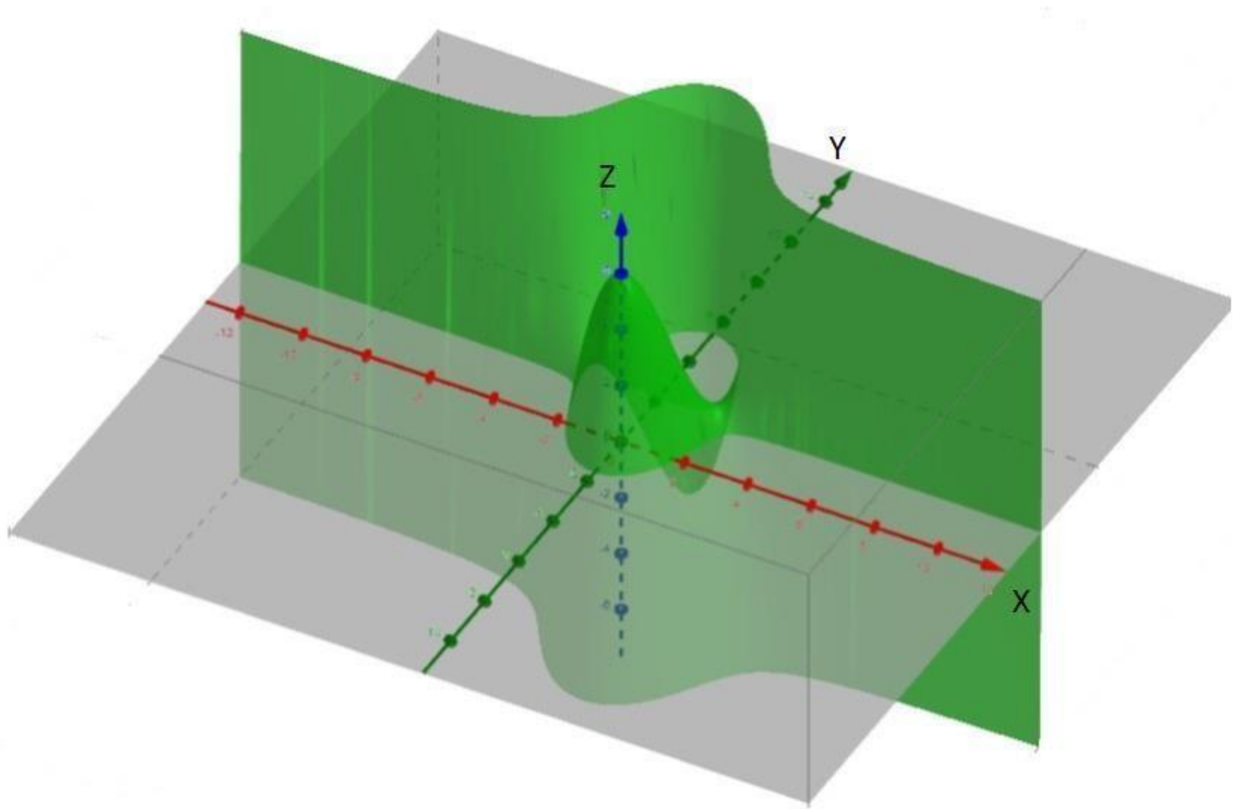
$$= \frac{8}{3} + 8 - 8 - 8 + 6$$

$$= \frac{8}{3} - 2$$

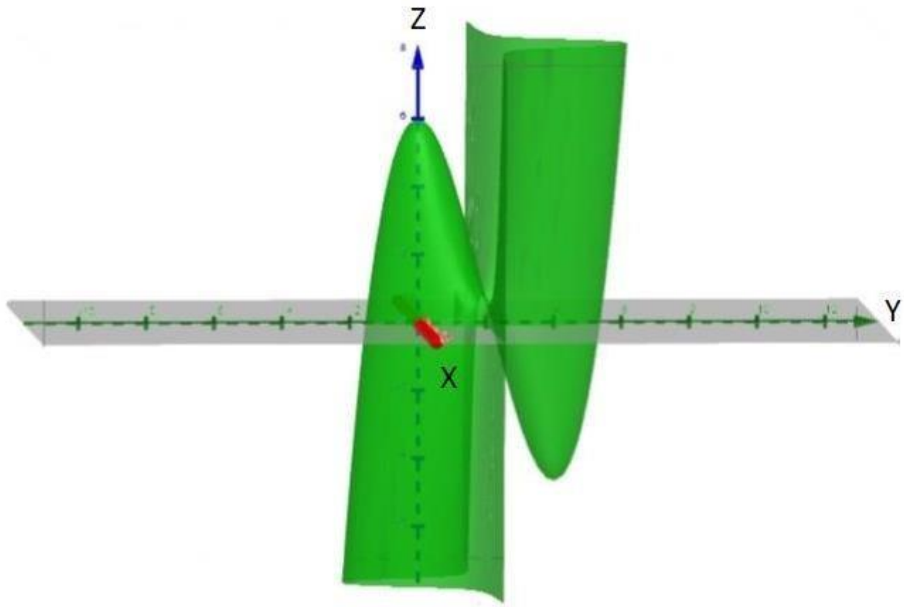
$$= \frac{2}{3}$$

Punto de silla $(2, 2, \frac{2}{3})$

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$



Otra vista...


Z
Y
X