

## Fluidos Módulo 2

### Dinámica de los Fluidos

#### Flujo de los fluidos

Se puede estudiar el movimiento de un fluido especificando la densidad  $\rho(x,y,z,t)$  y la velocidad  $v(x,y,z,t)$  en un punto  $(x,y,z,t)$ . De esta forma estudiaremos lo que esta sucediendo en un punto del espacio en un instante determinado y no lo que está ocurriendo a una partícula de flujo determinada. Aun cuando esta descripción del movimiento del fluido enfoca la atención de un punto del espacio más que en una partícula, no podemos evitar seguir a las partículas mismas, cuando menos, durante cortos intervalos de tiempo  $dt$ , puesto que es a las partículas a las que se les aplican las leyes de la mecánica.

Analicemos ahora ciertas características que presenta el flujo de los fluidos.

El flujo de los fluidos puede ser:

- a) de **régimen estable** o **inestable**
- b) **rotacional** o **irrotacional**
- c) **compresible** o **incompresible**
- d) **viscoso** o **no viscoso**

a) Se entiende por flujo de **régimen estable** cuando en cada punto del fluido la velocidad permanece constante a través del tiempo, de tal manera que cada partícula que pasa por ese punto tendrá dicha velocidad. En caso contrario el flujo es de **régimen inestable**.

b) Se entiende por flujo **irrotacional** aquel movimiento de fluido que en cada punto no tiene velocidad angular neta con respecto a ese punto. En caso contrario el flujo se denomina **rotacional**.

c) El flujo de un fluido se considera **incompresible** si su densidad no varía o varía muy poco. En caso contrario se considera **compresible**.

En general se puede considerar que los líquidos son incompresibles.

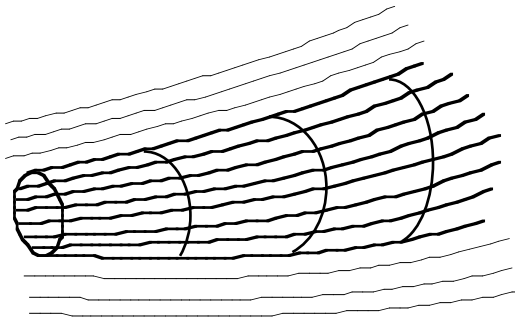
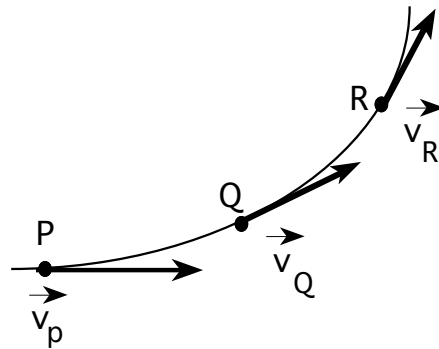
d) La **viscosidad**, en el movimiento de los fluidos, es el fenómeno análogo al rozamiento en el movimiento de los sólidos. La viscosidad introduce

fuerzas tangenciales entre las capas del fluido en movimiento relativo y da lugar a pérdida de energía mecánica.

En el estudio que se realizará de la dinámica de los fluidos se harán simplificaciones en su naturaleza. El estudio se limitará fundamentalmente a fluidos de régimen estable, irrotacional, incompresible y no viscoso. Apesar de lo restringido de este análisis veremos que tiene amplias aplicaciones en la práctica.

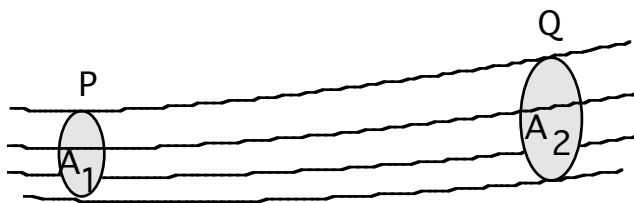
### Líneas de corriente

La trayectoria de una partícula en un fluido determina una línea de corriente. Una línea de corriente es paralela a la velocidad de la partícula en todos los puntos. En un régimen estable cualquier partícula que pase por P se moverá a través de la misma línea de corriente.



En un fluido en régimen estable se entiende por **tubo de flujo** a una región tubular que está formada por un número finito de líneas de corriente que forman un haz.

### Ecuación de continuidad



Consideremos un tubo de flujo delgado como el que se muestra en la fig. Designemos por  $\vec{v}_1$  la velocidad de las partículas en P y por  $\vec{v}_2$  la velocidad de las partículas en Q.

Tenemos que un fluido en un tiempo  $\Delta t$  recorre una distancia  $\Delta l$  donde

$$\Delta l = v \Delta t$$

Tenemos entonces que por el área transversal  $A_1$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pasa un volumen  $\Delta V$  de fluido

$$\Delta V = A_1 \Delta l = A_1 v_1 \Delta t$$

por lo tanto la masa de fluido  $\Delta m_1$  que atraviesa dicha área está dada por

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

se debe considerar el intervalo de tiempo  $\Delta t$  suficientemente pequeño para que la velocidad y el área no varíen de forma apreciable.

Tenemos entonces que la cantidad de masa que atraviesa el área  $A_1$  por unidad de tiempo está dada por

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1$$

De igual manera para el área  $A_2$

$$\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2$$

Si en el tubo de flujo no hay fuentes ni sumideros en los que se pueda crear o destruir fluidos, entonces el flujo de fluido que pasa por P debe ser igual al que pasa por Q, tenemos entonces que  $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

$$\rho A v = cte \quad \text{Ecuación de continuidad} \quad (9T)$$

Si se trata de un líquido incompresible  $\rho_1 = \rho_2$  en ese caso podemos escribir la ecuación de continuidad como

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = cte \quad (10T)$$

De donde podemos ver que **la velocidad de un fluido incompresible de régimen estable varía en relación inversa al área de la sección transversal, por lo cual la velocidad será mayor en la parte angosta del tubo.**

Apliquemos la expresión (10T) al tubo de flujo que estamos analizando

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \quad A_1 < A_2 \quad v_1 > v_2$$

Este efecto se puede observar en los rápidos de los ríos. En las partes en las cuales el cauce del río es muy angosto las aguas se deslizan con bastante velocidad, en cambio en las partes que el cauce es muy ancho se forman verdaderas lagunas con una baja velocidad de la corriente.

En este caso tenemos que la velocidad del fluido disminuye desde P a Q, por lo cual debe existir una fuerza que actúe sobre las partículas de fluido y que desacelere su movimiento. Lo cual puede ser debido a una diferencia de presión o a la acción de la gravedad. Si tenemos un tubo horizontal la fuerza gravitacional no cambia por lo tanto este efecto sólo puede deberse a una diferencia de presión.

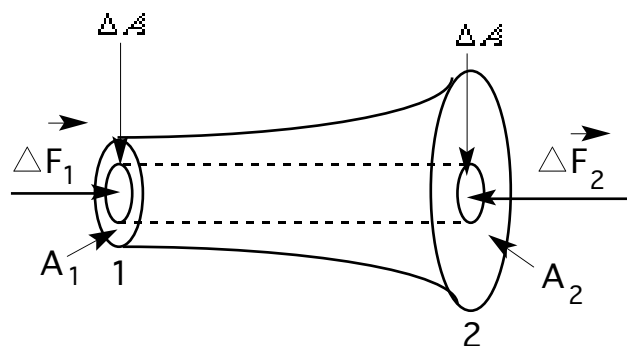
Analicemos un tubo de flujo horizontal como se muestra en la fig.

Puesto que  $A_2 > A_1$  entonces  $v_1 > v_2$  de acuerdo a la ecuación (10T).

Por lo cual  $\Delta F_2 > \Delta F_1$  para que el fluido desacelere desde  $1 \rightarrow 2$ .

Considerando que  $\Delta F = p\Delta A$  tenemos entonces que  $p_2 > p_1$

Podemos entonces concluir que en un flujo horizontal de régimen estable la presión es máxima donde la velocidad es mínima.



### Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli se deduce de las leyes fundamentales de la mecánica Newtoniana. Se deduce del teorema del trabajo y la energía, porque esencialmente es un enunciado del teorema del trabajo y la energía para el flujo de los fluidos.

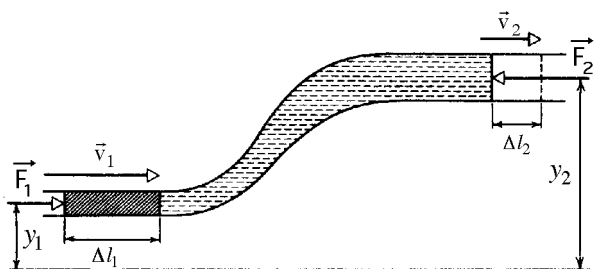


Fig. a)

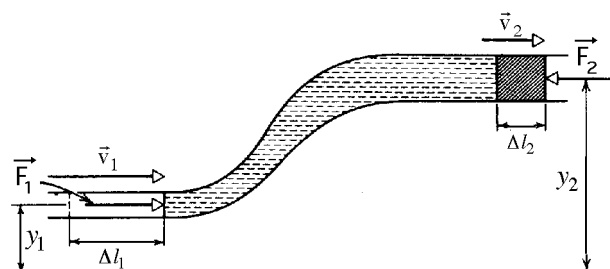


Fig. b)

Analizaremos el flujo de un fluido que tiene las siguientes características, es: no viscoso, de régimen estable e incompresible y se desplaza por una tubería como se muestra en las fig. a) y b). Esta tubería está compuesta por dos tramos horizontales de distinta área unidos por un tramo inclinado.

Se estudiará la porción de fluido, que aparece sombreada en la fig. a), al moverse desde la posición indicada en esa fig. a la posición indicada en la fig. b)

Consideraremos como sistema a la porción de fluido que se desplaza desde la posición 1 a la posición 2.

Tenemos que en el lado izquierdo, del tubo de flujo que estamos analizando, actúa una fuerza  $\vec{F}_1$  sobre el área  $A_1$  lo cual produce una presión  $p_1$ ; de igual manera sobre el extremo derecho actúa una fuerza  $\vec{F}_2$  sobre el área  $A_2$  lo cual produce una presión  $p_2$ .

Sobre el fluido que estamos analizando actúan las fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y la fuerza gravitacional. Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza resultante está dado por

$$W_R = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + W_{\vec{F}_g} \quad (11T)$$

Calculemos cada uno de estos trabajos

$$W_{\vec{F}_1} = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 = F_1 \Delta l_1 = p_1 A_1 \Delta l_1 \quad (12T)$$

$$W_{\vec{F}_2} = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = -F_2 \Delta l_2 = -p_2 A_2 \Delta l_2 \quad (13T)$$

Tenemos que la fuerza gravitacional no realiza trabajo en los desplazamientos horizontales por lo cual

$$W_{\vec{F}_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = -mg \Delta y = -mg(y_2 - y_1) \quad (14T)$$

Remplazando las expresiones (12T), (13T) y (14T) en (11T) tenemos

$$W_R = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg(y_2 - y_1) \quad (15T)$$

Puesto que hemos considerado que el fluido es incompresible

$$V_1 = V_2 = V \quad \text{y} \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

tenemos entonces que

$$A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2 = \frac{m}{\rho}$$

Remplazando esta expresión en (15T) tenemos

$$W_R = (p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) \quad (16T)$$

Recordemos el Teorema del trabajo y la energía: ***El trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio de energía cinética del sistema.***

Por lo tanto la expresión (16T) podemos escribirla como

$$(p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Agrupando las variables de las posiciones 1 y 2 y simplificando la masa tenemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + g\rho y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + g\rho y_2 \quad (17T)$$

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a puntos cualesquiera en el tubo podemos escribir esta expresión como

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + g\rho y = cte \quad (18T)$$

Esta ecuación recibe el nombre de **Ecuación de Bernoulli** para el flujo de régimen estable, no viscoso e incompresible.

La ecuación de Bernoulli señala que la suma de la presión ( $p$ ), la energía cinética por unidad de volumen ( $\frac{1}{2}\rho v^2$ ) y la energía gravitacional por unidad de volumen ( $g\rho y$ ) tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente.

En la ecuación **Ecuación de Bernoulli** la presión  $p + \rho gy$ , que existe cuando  $v = 0$ , recibe el nombre de *presión estática* y el término  $\frac{1}{2}\rho v^2$  recibe el nombre de *presión dinámica*.

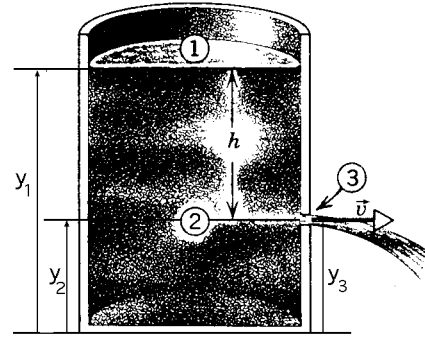
## Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad

### 1) Ley de Torricelli

La figura muestra un líquido que está saliendo por un orificio en un gran tanque a una profundidad  $h$  bajo el nivel del agua.

Se puede demostrar que la velocidad de salida del líquido está dada por:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (19T)$$



Esta expresión es conocida como la **Ley de Torricelli**.

Para demostrar la expresión (19T) se aplica la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que une los puntos 1, 2 y 3

En primer lugar aplicaremos la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (20T)$$

Puesto que la superficie del líquido en el tanque es mucho mayor que el área del orificio de salida, la velocidad con la cual desciende la superficie del líquido es muy pequeña. Por lo tanto podemos considerar que la superficie del líquido está en reposo  $v_1 = 0$

Entonces considerando que  $v_1 = 0$  y  $y_1 - y_2 = h$  tenemos

$$p_1 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (21T)$$

Aplicaremos ahora la ecuación de Bernoulli a los puntos 2 y 3

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g y_3 \quad (22T)$$

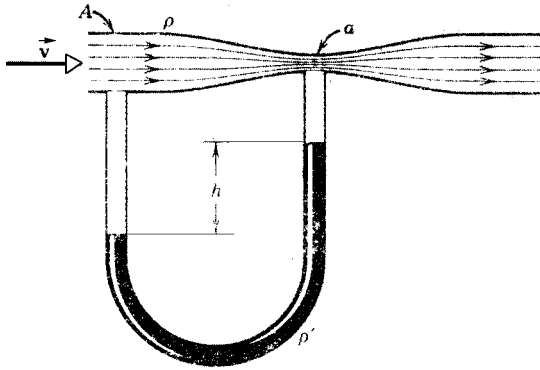
Puesto que  $y_2 = y_3$  tenemos

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \quad (23T)$$

Remplazando (23T) en (21T) y teniendo en cuenta que  $p_1 = p_3 = p_{at}$  y  $v_3 = v$  se tiene

$$v = \sqrt{2gh} \quad (24T)$$

## 2) Medidor de Venturi



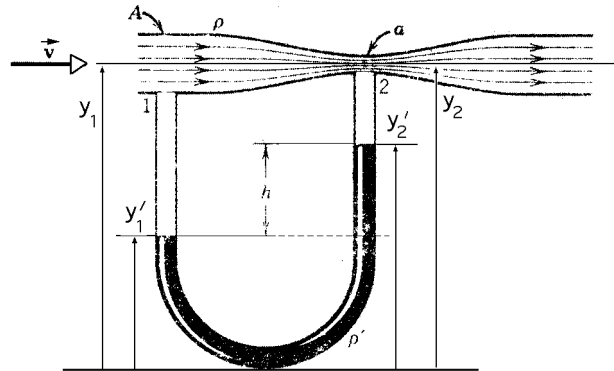
El medidor de Venturi se usa para medir la velocidad de flujo de un fluido.

Consta de un tubo que tiene dos diámetros diferentes y por el cual se desplaza un fluido. A dicho tubo se conecta un manómetro como se muestra en la fig.

Para determinar la velocidad  $v$  del fluido podemos aplicar la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad a los puntos 1 y 2 que se muestran en la fig.

Sean  $y_1$  y  $y_2$  las coordenadas verticales del fluido en esas posiciones.

Sean  $y'_1$  y  $y'_2$  las coordenadas del nivel del líquido en el manómetro.



Considerando  $v = v_1$  tenemos por Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Podemos escribir esta expresión como

$$p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \rho g(y_2 - y_1) \quad (25T)$$

Aplicando a los mismos puntos la ecuación de continuidad tenemos



$$\rho A v_1 = \rho a v_2 \quad \text{y por lo tanto} \quad v_2 = \frac{A}{a} v_1 \quad (26T)$$

Remplazando (26T) en (25T) y considerando que  $y_1 = y_2$  tenemos

$$p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{A^2}{a^2}\right) = 0 \quad (27T)$$

Llamemos  $p'_1$  a la presión en la rama a izquierda del manómetro y  $p'_2$  a la presión en la rama derecha.

Tenemos que las presiones  $p'_1$  y  $p_1$  y las presiones  $p'_2$  y  $p_2$  están relacionadas como

$$p'_1 = p_1 + \rho g(y_1 - y'_1)$$

$$p'_2 = p_2 + \rho g(y_2 - y'_2)$$

Por otra parte tenemos que las presiones  $p'_1$  y  $p'_2$  en las ramas del manómetro están relacionadas como

$$p'_1 = p'_2 + \rho' gh$$

Remplazando estas expresiones en (27T) tenemos

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{A^2}{a^2}\right) = gh(\rho - \rho')$$

Considerando que  $v = v_1$  tenemos que la velocidad del fluido está dada por

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}} \quad (28T)$$

### 3) Fuerza ascensional dinámica

Se llama **fuerza ascensional dinámica** a la fuerza que obra sobre un cuerpo debido a su movimiento a través de un fluido. Esta fuerza aparece por ejemplo: en el ala de un avión en movimiento, en una pelota de fútbol o béisbol que va girando.

Se debe distinguir la fuerza *ascensional dinámica* de la *fuerza ascensional estática*. La fuerza **ascensional estática** es la fuerza de flotación que obra

sobre un objeto como consecuencia del principio de Arquímedes. Esta fuerza aparece por ejemplo en un globo de aire, en un cuerpo que flota en el agua.

Para explicar el origen de la fuerza ascensional dinámica, analicemos las situaciones físicas planteadas en las fig. a) y b). Para realizar este análisis es más conveniente examinar la situación tomando como marco de referencia aquél en el cual la pelota se encuentra en reposo y es el aire el que se mueve con respecto a ella. Esto se puede conseguir en un túnel de aire.

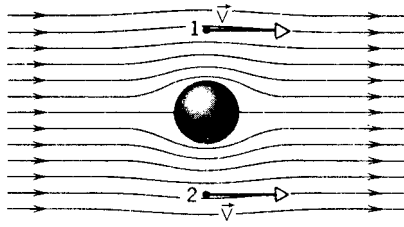


Fig. a)

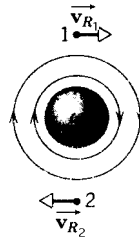


Fig. b)

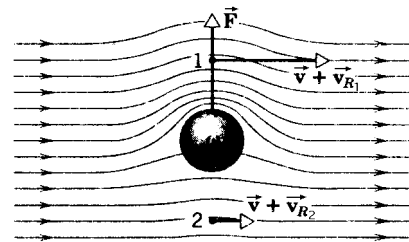


Fig. c)

**Fig. a)** En ella se muestra una pelota de béisbol que se mueve hacia la izquierda, por lo tanto el aire que rodea la pelota se desplaza con respecto a ésta hacia la derecha, teniendo una velocidad  $\vec{v}$  en los puntos 1 y 2 que quedan sobre y bajo ella.

**Fig. b)** Se muestra una pelota que gira en sentido horario, puesto que la pelota no es perfectamente lisa ella arrastra algo de aire consigo en el mismo sentido, por lo tanto la velocidad del aire en las posiciones 1 y 2 está dada  $\vec{v}_{R1}$  y  $\vec{v}_{R2}$  que se muestran en la fig. b).

**Fig. c)** Se muestra la superposición de ambos movimientos. En ella podemos ver que la velocidad del fluido en el punto 1 es mayor que la velocidad en el punto 2.

Apliquemos la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 de la fig. c

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Considerando que la densidad del aire y la separación entre los puntos 1 y 2 es pequeña tenemos

$$\frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) = p_2 - p_1$$

Puesto que  $v_1 > v_2$  entonces tenemos que  $p_2 > p_1$

La presión del aire en la parte inferior de la pelota es mayor que en la parte superior.

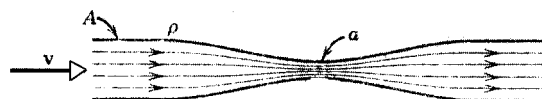
Recordando que  $F = pA$  tenemos entonces que  $F_2 > F_1$  donde la fuerza  $\vec{F}_1$  actúa sobre la pelota empujándola hacia abajo y la fuerza  $\vec{F}_2$  actúa empujándola hacia arriba. Resultando entonces una fuerza ascendente que apunta hacia arriba.

## Problemas

### Problema 1 (H-18-7, N 23)

Considérese el tubo de Venturi de la figura. Sea  $A$  igual a  $5a$ . Supóngase que la presión en  $A$  es de  $2.0 \text{ atm}$ . a) Calcular los valores de

$v$  en  $A$  y de  $v'$  en "a" para los cuales la presión  $p'$  en "a" es igual a cero.  
b) Calcular el gasto correspondiente si el diámetro en  $A$  es de  $5.0 \text{ cm}$ . El fenómeno que ocurre en "a" cuando  $p'$  se reduce casi a cero se llama cavitación. El agua se vaporiza en pequeñas burbujas.



### Datos

$$\begin{aligned} A &= 5a \\ v &= v_A = ? \\ v' &= v_a = ? \end{aligned}$$

$$p_A = 2.0 \text{ atm} = 2.0(1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2)$$

$$\begin{aligned} p &= p_a = 0 \\ d_A &= 5.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Solución

a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli y la de continuidad a los puntos  $A$  y  $a$ .

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \quad (1-P1)$$

$$\rho A v_A = \rho a v_a \quad (2-P1)$$

De la ecuación (2-P1) tenemos entonces

$$v_A = \frac{v_a}{5} \quad (3-P1)$$

Remplazando (3-P1) en (1-P1) tenemos

$$p_A = \frac{1}{2} \rho v_a^2 \left(1 - \frac{1}{25}\right) = \rho v_a^2 \frac{12}{25}$$

de donde obtenemos

$$v_a = \sqrt{\frac{25 p_A}{12 \rho}}$$

Remplazando los valores numéricos se tiene

$$v_a = \left[ \frac{(25)(2.0) \left(1.013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}\right)}{12 \left(1.000 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}\right)} \right]^{1/2} = 20.5 \, m/s \quad (4-P1)$$

Remplazando (4-P1) en (3-P1) tenemos

$$v_A = \frac{v_a}{5} = \frac{20.5}{5} \, m/s = 4.1 \, m/s$$

b) Cálculo del Gasto

Gasto (G) es el volumen de agua que atraviesa un área transversal por segundo

$$G = \frac{dV}{dt} \quad (5-P1)$$

Si consideramos que en un segundo el fluido se desplaza una distancia  $x$ , tenemos entonces que  $V = Ax$ .

Remplazando esta expresión en (5-P1) tenemos

$$G = \frac{dV}{dt} = A \frac{dx}{dt} = A v_A = \pi R_A^2 v_A = \pi \frac{d_A^2}{4} v_A$$

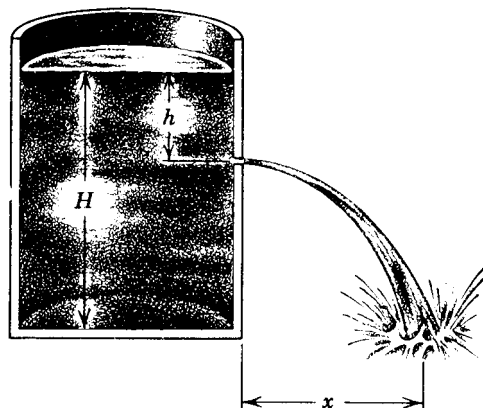
$$G = \pi \frac{d_A^2}{4} v_A = \frac{\pi (5.0 \times 10^{-2} \, m)^2}{4} (4.1 \, m/s) = 8.1 \times 10^{-3} \, m^3/s$$

**Problema 2 (H-18-11, N 8)**

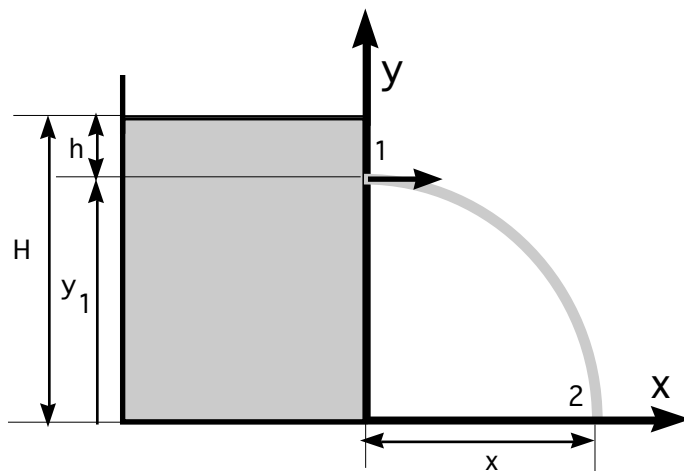
Un tanque está lleno de agua hasta una altura  $H$ . Tiene un orificio en una de sus paredes a una profundidad  $h$  bajo la superficie del agua.

a) Encontrar la distancia  $x$  a partir del pie de la pared, a cual el chorro llega al piso.

b) ¿Podría hacerse un orificio a otra profundidad de manera que este segundo chorro tuviera el mismo alcance? Si es así, ¿a qué profundidad?

**Solución**

a) Hagamos una representación esquemática de la fig. que aparece en el planteamiento del problema y ubiquemos en ella un sistema de coordenadas como se muestra en la siguiente figura.



$$y_1 = H - h$$

$$x_1 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$x_2 = x$$

$$v_{1y} = 0$$

$$v_{1x} = v$$

Apliquemos las ecuaciones de la cinemática a los puntos 1 y 2

$$x_2 = x_1 + v_{1x}t \quad (1-P2)$$

$$y_2 = y_1 + v_{1y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2-P2)$$

Remplazando en estas expresiones las coordenadas correspondiente tenemos

$$x = vt \quad (3-P2)$$

$$\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = t \quad (4-P2)$$

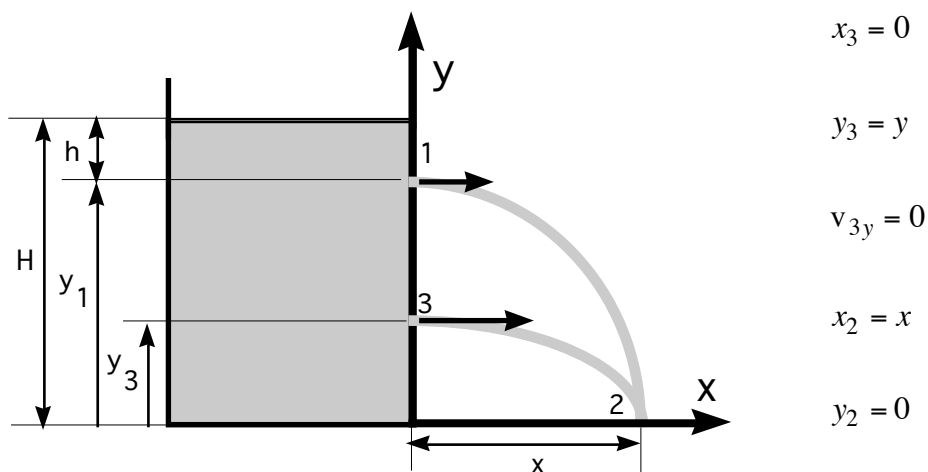
Tenemos por la Ley de Torricelli (24T) que

$$v = \sqrt{2gh} \quad (5-P2)$$

Remplazando (4-P2) y (5-P2) en (3-P2) tenemos

$$x = 2\sqrt{h(H-h)}$$

b) Supongamos que existe otro punto que tiene el mismo alcance  $x$ . Este punto corresponde al punto 3 en la siguiente fig.



$$x_3 = 0$$

$$y_3 = y$$

$$v_{3y} = 0$$

$$x_2 = x$$

$$y_2 = 0$$

Apliquemos las ecuaciones (1-P2) y (2-P2) a los puntos 3 y 2

$$x_2 = x_3 + v_{3x}t \quad y_2 = y_3 + v_{3y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Remplazando en estas expresiones las coordenadas correspondiente tenemos

$$x = v_{3x}t \quad (6-P2)$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_3}{g}} \quad (7-P2)$$

Tenemos por la Ley de Torricelli (24T) que

$$v_{3x} = \sqrt{2g(H - y_3)} \quad (8-P2)$$

y del punto a) de este mismo problema conocemos que

$$x = 2\sqrt{h(H - h)} \quad (9-P2)$$

Remplazando las expresiones (7-P2), (8-P2) y (9-P2) en (6-P2) tenemos

$$y_3^2 - Hy_3 + h(H - h) = 0$$

$$y_3 = \frac{+H \pm \sqrt{H^2 - 4h(H - h)}}{2} = \frac{H \pm (H - 2h)}{2} = \begin{cases} h \\ H - h \end{cases}$$

Tenemos entonces que existen dos puntos para los cuales el alcance horizontal es el mismo.

$$y = h, \quad H - h$$

### **Problema 3 (H-18-13, N 20)**

Calcular la velocidad  $v_o$  de salida de un líquido de una abertura en un tanque, tomando en cuenta la velocidad  $v$  de la superficie del líquido, como sigue:

a) Demostrar, mediante la ecuación de Bernoulli, que:

$$v_o^2 = v^2 + 2gh$$

siendo  $v$  la velocidad de la superficie libre.

b) Considerar después el conjunto como si fuera un gran tubo de flujo y obtener  $v / v_o$  de la ecuación de continuidad, de manera que:

$$v_o = \sqrt{2gh / [1 - (A_o / A)^2]}$$

siendo  $A$  la sección transversal del tubo en la superficie y  $A_o$  la sección transversal del tubo en el orificio.

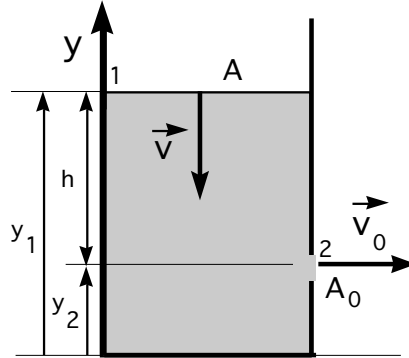
c) Demostrar entonces que si el orificio es pequeño comparado con el área de la superficie

$$v_o \cong \sqrt{2gh} \left[ 1 + \frac{1}{2} (A_o / A)^2 \right]$$

### Solución

Representemos en la fig. de la derecha la situación física planteada en el enunciado del problema.

Consideremos que la superficie del líquido está en la posición 1 y el orificio de salida en la posición 2



a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_o^2 + \rho g y_2 \quad (1-P3)$$

Puesto que  $p_1 = p_2 = p_{atm}$  y  $y_1 - y_2 = h$  tenemos a partir de (1-P3)

$$v_o^2 = v^2 + 2gh \quad (2-P3)$$

b) Aplicando la ecuación de continuidad tenemos

$$\rho A v = \rho A_o v_o \quad v = \frac{A_o}{A} v_o \quad (3-P3)$$

reemplazando (3-P3) en (2-P3) tenemos

$$v_o = \sqrt{2gh / (1 - A_o^2 / A^2)} \quad (4-P3)$$

c) Aproximemos la expresión (4-P3)

$$v_o = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - A_o^2 / A^2}} \quad \text{si} \quad \frac{A_o}{A} \ll 1$$

utilizando el desarrollo en serie de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots$$

Tenemos

$$v_o \approx \sqrt{2gh} \left[ 1 + \frac{1}{2} (A_o / A)^2 \right]$$



**Nota:** Algunos desarrollos en serie de Taylor, se pueden consultar en el *Tomo I Resnick pag. 891 "Desarrollo de algunas series"*. Estos desarrollos son válidos para  $-1 < x < 1$ . También los hemos incluido al final de este módulo en un Anexo.

#### Problema 4 (H-18-15)

Una corriente de aire pasa horizontalmente al lado de una ala de avión de área  $3.34 \text{ m}^2$  y que pesa  $2400 \text{ N}$ . La velocidad sobre el ala es de  $61 \text{ m/s}$  y bajo ella, de  $45.67 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la fuerza ascensional dinámica sobre el ala? ¿Cuál es la fuerza neta sobre ella?

Considere la densidad del aire  $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$

#### Solución

Datos:

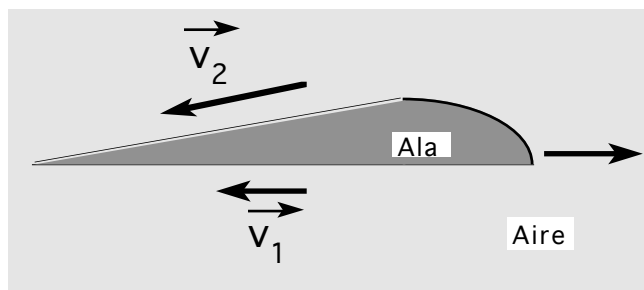
$$A = 3.34 \text{ m}^2$$

$$W = 2400 \text{ N}$$

$$v_2 = 61 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 45.67 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$$



La fig. representa un corte transversal del ala de un avión que se mueve hacia la derecha, por lo tanto el aire que rodea el ala tiene con respecto a ella las velocidades  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  que se indican.

Apliquemos, al aire que se mueve por la parte inferior y superior del ala, la ecuación de Bernoulli. Consideremos el espesor del ala despreciable.

Tenemos

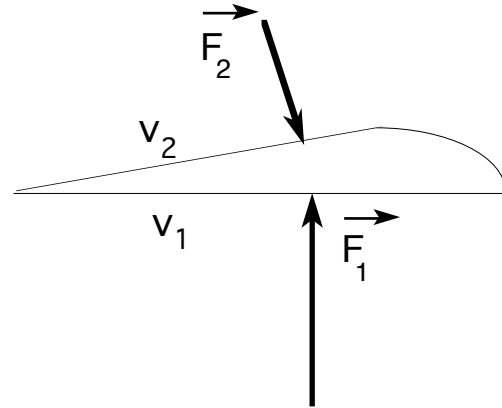
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2 \quad (1-P4)$$

Puesto que la velocidad  $v_1 < v_2$  entonces  $p_1 > p_2$

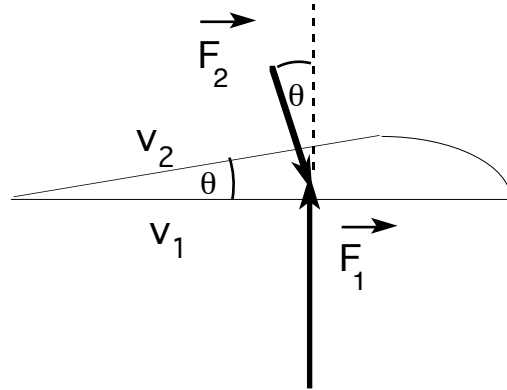
Tenemos que las presiones en la parte superior e inferior del ala son producidas por fuerzas perpendiculares a dichas superficies como se muestra en la fig.



Si el espesor del ala es despreciable entonces el ángulo  $\theta$  del ala es pequeño por lo tanto

$$F_2 \cos \theta \approx F_2$$

y el área de la parte superior e inferior del ala son aproximadamente iguales.



Podemos entonces escribir la ecuación (1-P4) como

$$\frac{1}{2} A \rho (v_2^2 - v_1^2) = F_1 - F_2 = F_{asc}$$

Donde  $F_{asc}$  es la fuerza ascensional dinámica producida por el aire.

Remplazando los valores numéricos tenemos

$$F_{asc} = \frac{1}{2} (3.34 m^2) \left( 1.3 \frac{kg}{m^3} \right) \left[ \left( 61 \frac{m}{s} \right)^2 - \left( 45.67 \frac{m}{s} \right)^2 \right] = 3.55 \times 10^3 N$$

Tenemos finalmente que la fuerza neta que actúa sobre el ala, está dada por

$$F_N \approx F_{asc} - W = 1.15 \times 10^3 N$$

## Bibliografía

Halliday D. y Resnick R. -	Física	Parte I
Tipler P. A.	Física	Tomo I
Serway R. A. y Beichner R. J.	Física	Tomo I
Wilson J. D.	Física	
Hewitt P. G.	Conceptos de Física	
Máximo A. y Alvarenga B.	Física General.	
Tippens P. E.	Física. Conceptos y Aplicaciones	

## Anexo

### *Serie de Taylor*

Estos desarrollos son válidos para  $-1 < x < 1$

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots$$

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots \quad (x^2 > y^2)$$