UNIDAD VI: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO INTEGRAL)

6.1 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS RECTANGULARES

En la unidad anterior vimos como derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Emplearemos un procedimiento similar para integrar funciones de varias variables. Así, por ejemplo, si conocemos que $f_x(x,y) = 3x^2y$, entonces considerando a la variable "y" constante, podemos integrar respecto a x, así:

$f(x,y) = \int f_x(x,y)dx$
$= \int 3x^2ydx$, manteniendo la variable "y" constante
$= y\int 3x^2dx$
$= yx^3 + c(y)$
$f(x,y) = yx^3 + c(y)$

Podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar expresiones como la siguiente:

$$\int_2^{y^2} 3x^2ydx = y\int_2^{y^2} 3x^2dx = y\left[x^3\right]_2^{y^2}$$
$$= y\left[(y^2)^3 - (2)^3\right]$$
$$= y^7 - 8y$$

Observación: no hay que perder de vista respecto a que variable integramos

$$\int_{-1}^{x} 6x^2 y\,dy = 6x^2 \int_{-1}^{x} y\,dy$$
$$= 6x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{x}$$
$$= 6x^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right]$$
$$= 6x^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{6x^4}{2} - \frac{6x^2}{2}$$
$$\int_{-1}^{x} 6x^2 y\,dy = 3x^4 - 3x^2$$

De manera similar se puede integrar con respecto a y, manteniendo x constante.

Todo lo anterior lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_x(x,y)dx = f(x,y)\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} = f(g_2(y),y) - f(g_1(y),y)$$
$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)dy = f(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))$$

Notas:

1) **La variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración.**
2) **Si integramos respecto a una variable, el resultado nos da una expresión en términos de la otra variable y por lo tanto podemos integrar este resultado con respecto a la otra variable.**
3) **Todas las propiedades de la integral vistas en la matemática II se aplican en la integral múltiple**

Ejemplo:

Evaluar $\int_0^3 \left[\int_{x^2}^{4x-3} (2+x)\, dy \right] dx$

Solución

$$\int_0^3 \left[\int_{x^2}^{4x-3} (2+x)\, dy \right] dx = \int_0^3 \left[2y + xy\right]_{x^2}^{4x-3} dx \quad (\text{la variable "y" es la que evaluaremos})$$

$$= \int_0^3 \left\{ \left[2(4x-3) + x(4x-3)\right] - \left[2(x^2) + x(x^2)\right] \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left[8x - 6 + 4x^2 - 3x - 2x^2 - x^3\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[5x - 6 + 2x^2 - x^3\right] dx$$

$$= \left[5\frac{x^2}{2} - 6x + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$= \left[5\frac{(3)^2}{2} - 6(3) + 2\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^4}{4}\right] - \left[5\frac{(0)^2}{2} - 6(0) + 2\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{45}{2} - 18 + 18 - \frac{81}{4}\right]$$

$$= \frac{9}{4}$$

La integral del ejemplo anterior es una **integral iterada** (doble). Las integrales iteradas dobles se escriben en general de las siguientes dos formas:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \quad y \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

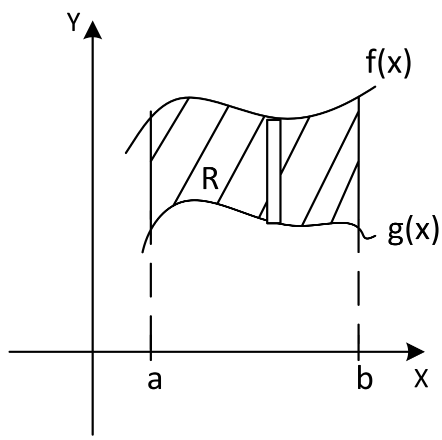
NOTA: El orden en el que se empieza a integrar es de la integral más interna.

Para efectuar $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$ no es necesario escribir dicha integral como $\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$, ya que convenimos en integrar respecto a la variable "y", que es la integral más interna.

Teorema: (De Fubini)

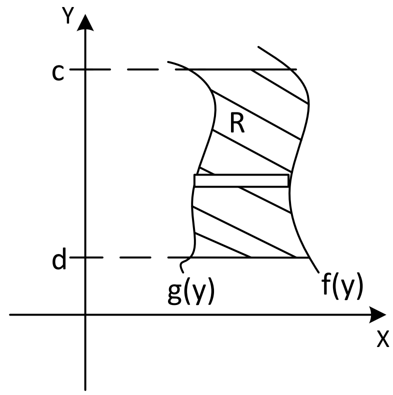
Sea $f(x,y)$ continua en una región plana R:

1) Si R está definida por $a \le x \le b \quad y \quad f(x) \le y \le g(x)$, donde f, g son continuas en $[a,b]$, entonces $\int_R \int f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)dydx$



La última variable respecto a la que hay a integrar es "x". El diferencial de área es vertical.

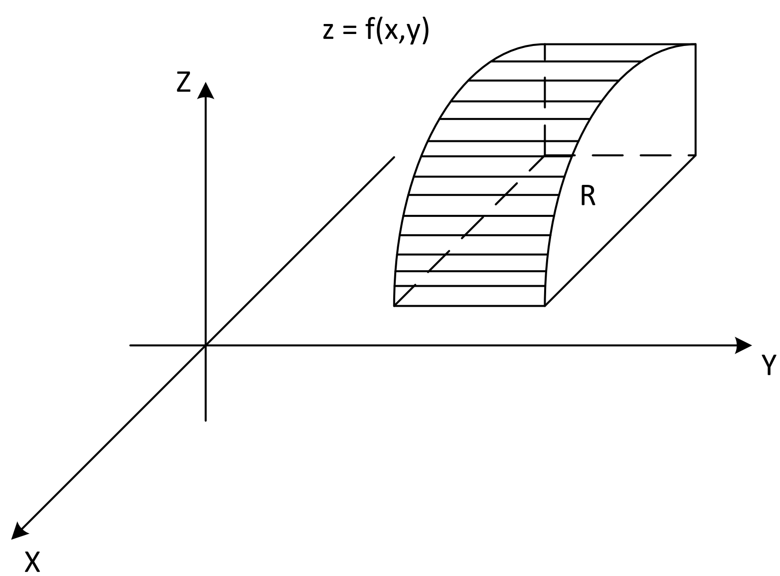
2) Si R está definida por $c \le y \le d \quad y \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)$, donde h_1, h_2 son continuas en $[c,d]$, entonces $\int_R \int f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$



La última variable respecto a la que hay a integrar es "y". El diferencial de área es horizontal.

Observaciones: En el teorema anterior

1) Si $f(x,y)=1$ la evaluación de la integral doble da el valor del área de la región R, en cada caso.
2) Si $f(x,y)>0$ para todo (x,y) en la región R, la evaluación de la integral doble nos da el volumen del sólido que se forma entre la región R y la gráfica de $z=f(x,y)$
3) Toda región se puede expresar ya sea en verticalmente simple o en horizontalmente simple



En esta gráfica la región R es el rectángulo

Ejemplo:

Graficar el área que representa la integral doble $\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1} dydx$

Solución:

Como $f(x,y)=1$, realmente dicha integral representa el área de la región R, que está dada por los 4 límites de integración.

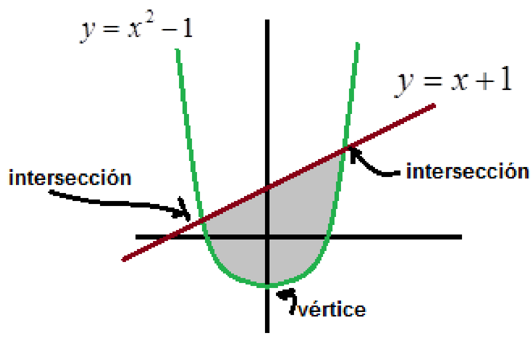
Observamos que la variable que se evaluará por último es x, por lo tanto se trata de una región verticalmente simple.

La variable "x" varía desde $x=-1$ hasta $x=2$ (dos rectas verticales)

La variable "y" varía desde $y=x^2-1$ hasta $y=x+1$. La gráfica que representa la ecuación $y=x^2-1$ es una parábola abierta hacia arriba desplazada una unidad hacia abajo.

La gráfica que corresponde a la ecuación $y=x+1$ es una recta $y=x^2-1$

Luego un bosquejo el área que representa la integral doble es:



Para elaborar la región de manera exacta, es necesario determinar las intersecciones ente las dos gráficas y el vértice de la parábola.

Intersecciones

Igualando las dos ecuaciones se tiene:

$$y = x^2 - 1 \quad , y = x + 1$$
$$x^2 - 1 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 - 1 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \;\; ó \;\; x = -1$$

Estos son los valores de “x” de los puntos de intersección. Debemos determinar ahora los valores de “y”. Sustituimos los valores de “x” encontrados ya sea en la parábola $y = x^2 - 1$ o en la recta $y = x + 1$.

Para $x = 2$

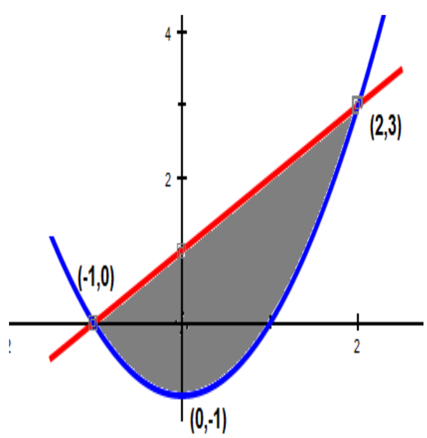
$$y = x + 1 \rightarrow y = 2 + 1 = 3, \text{ punto de intersección } (2,3)$$

Para $x = -1$

$$y = x + 1 \rightarrow y = -1 + 1 = 0, \text{ punto de intersección } (-1,0)$$

Vértice de la parábola

$$y = x^2 - 1$$
$$y + 1 = x^2$$
$$y + 1 = (x-0)^2 \quad vértice\ (0,-1)$$



Ejemplo:

Dada la integral iterada doble $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$, graficar el área que representa dicha integral.

Solución

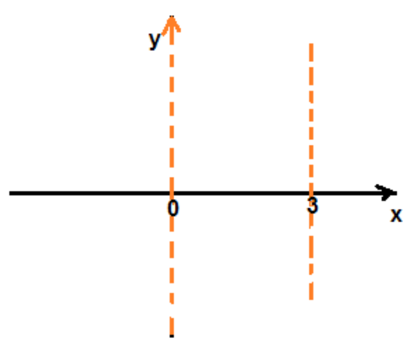
La región de integración lo determinan los 4 límites de integración

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$$

La variación de "x": $0 \le x \le 3$

Es decir desde la recta x=0 hasta la recta vertical $x = 3$

Esto nos da la pauta en decir que la región de integración se encuentra entre estas dos rectas verticales.



La variación de "y": $0 \le y \le \sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$

Es decir desde la recta y = 0 (eje x) hasta la gráfica de $y = \sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$ **.**

Lo que hay que hacer es determinar, ¿qué tipo de gráfica corresponde a esta ecuación?

$$y = \sqrt{6 - \frac{2}{3}x^2}$$

$$y^2 = \left(\sqrt{6 - \frac{2}{3}x^2}\right)^2$$

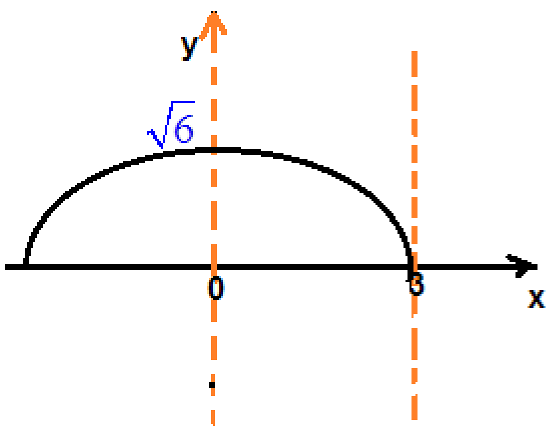
$$y^2 = 6 - \frac{2}{3}x^2$$

$\frac{2}{3}x^2 + y^2 = 6$ multiplicando por 3 se tiene

$$2x^2 + 3y^2 = 18$$

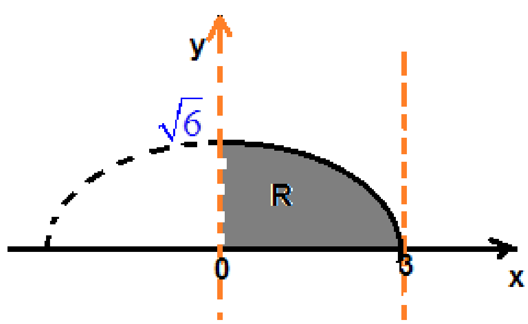
$$\frac{2x^2}{18} + \frac{3y^2}{18} = \frac{18}{18}$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ Elipse, pero solamente la mitad



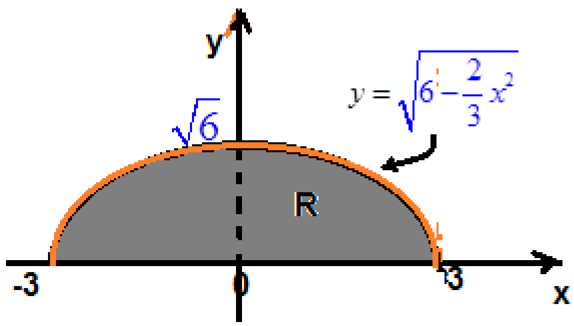
Para que sea la elipse completa, debería de expresarse como $y = \pm\sqrt{6 - \frac{2}{3}x^2}$

Luego la región de integración es la que se muestra a continuación

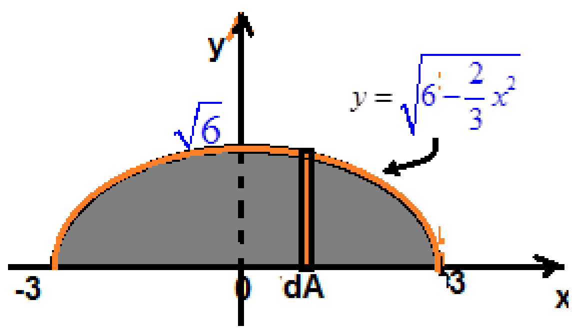


Ejemplo:

¿cómo son los límites de integración si la región es la mostrada a continuación?



Solución



Para x:

$$-3 \leq x \leq 3$$

Para y:

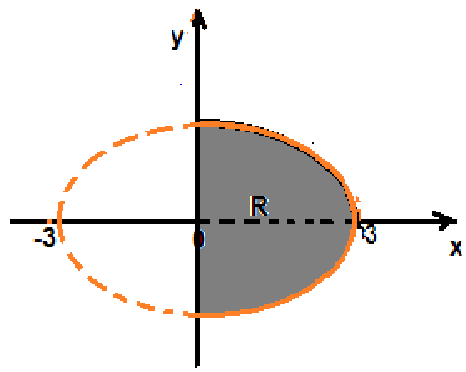
$$0 \leq y \leq \sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$$

La integral que representa el área sombreada es $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$

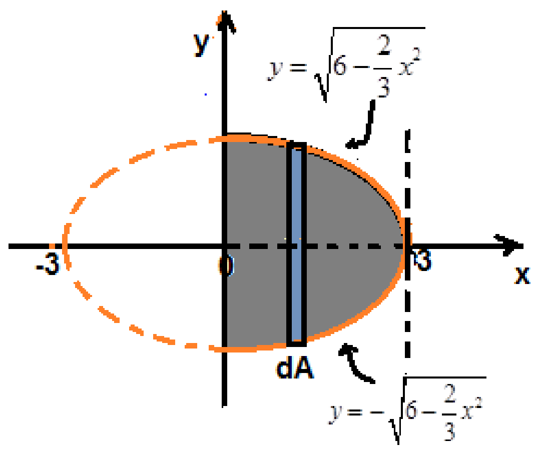
Observemos que el diferencial de área es de diferente tamaño dentro de la región y dependerá de la elipse, por eso que los límites de integración en "y" son: el inferior desde y = 0 (el eje "x") y el límite superior la función (elipse). La parte de abajo del diferencial de área topa en el eje "x" (y=0) y la parte superior de dicho diferencial en la elipse.

Ejemplo:

¿Cuáles son los límites de integración si la región es la mostrada a continuación, siendo la misma elipse de los dos ejercicios anteriores?



Solución



La "x" varía desde la recta x=0 hasta la recta x=3: $0 \le x \le 3$

La "y" varía desde $y=-\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$ hasta $y=\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$: $-\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2} \le y \le \sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$

Por lo tanto, la integral doble que representa el área de la región sombreada es:

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}}^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$$

NOTA: Si el área de la región de integración se divide en partes iguales, se puede utilizar simetría. Así, por ejemplo, el problema anterior, utilizando simetría se puede plantear como:

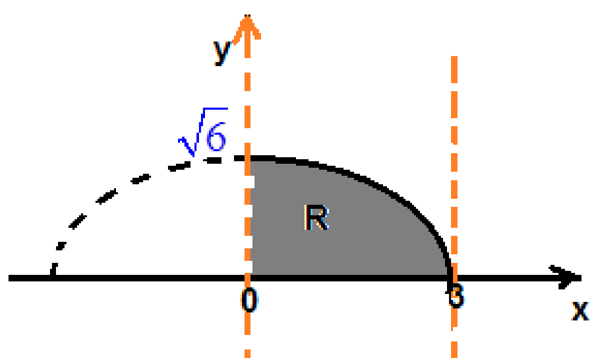
$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}}^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx = 2\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$$

Puesto que el eje "x" divide en dos regiones iguales la región sombreada.

Cambio de orden de integración

Toda integral doble puede plantearse utilizando los dos órdenes de integración, es decir usando la región verticalmente simple o la región horizontalmente simple.

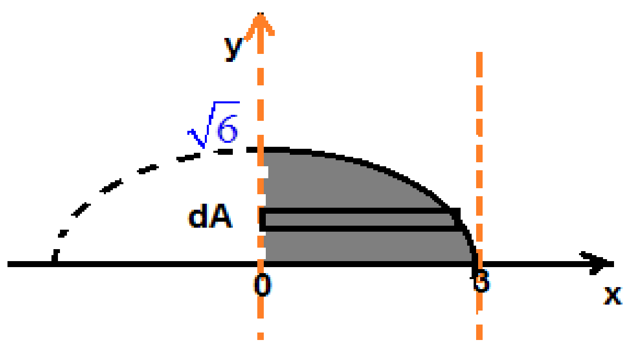
Cambiemos el orden de integración en la integral $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}} dydx$.



Cambiar el orden de integración significa, en este caso, utilizar una región horizontalmente simple. Además, cambiar al orden de integración con región horizontalmente simple la región es la misma solo que los valores constantes son en la variable Y.

y varía de 0 a $\sqrt{6}$, y la variable x varía de la recta $x=0$ (el eje Y) a la curva $x=\sqrt{9-\frac{3}{2}y^2}$

Esta ecuación resulta de despejar la variable x de $y=\sqrt{6-\frac{2}{3}x^2}$



Luego la integral anterior utilizando la región horizontalmente simple es equivalente a

$$\int_0^{\sqrt{6}}\int_0^{\sqrt{9-3/2y^2}} dxdy$$

Nota: El resultado de la evaluación de la integral es el mismo.

Observaciones:

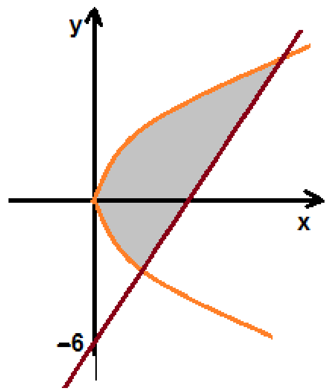
- Cuando se nos pide determinar ya sea el área de una región o el volumen de un sólido, hay que ver si se puede aplicar simetría.
- La región de integración se puede escoger como verticalmente simple o como horizontalmente simple, la que mejor convenga.

Ejemplo:

Utilizar una integral doble para calcular el área encerrada entre la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $y = 2x - 6$.

Solución:

A continuación, mostramos el área que se encuentra entre las dos curvas y notemos que, si resolvemos el problema mediante región verticalmente simple, nos resultan dos integrales dobles. Es decir, tenemos dos sub-regiones y por lo tanto suma de dos integrales dobles.



Encontremos los puntos de intersección igualando las dos ecuaciones

$$\frac{y^2}{2} = 3 + \frac{y}{2} \qquad y^2 = 6 + y \qquad y^2 - y - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos $y = 2 \;\wedge\; y = -3$. Sustituyendo estos valores en $y = 2x - 6$, obtenemos que los puntos de intersección son $(4,2)$ y $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$.

En la primera sub región "x" varía desde 0 hasta $\frac{3}{2}$, la variable "y" varía de $y = -\sqrt{2x}$ hasta $y = \sqrt{2x}$.

La segunda sub región "x" varía desde $\frac{3}{2}$ hasta 4, la variable "y" varía desde la recta $y = 2x - 6$ hasta la parábola $y = \sqrt{2x}$ .El área sería:

$$\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dydx + \int_{3/2}^{4}\int_{2x-6}^{\sqrt{2x}} dydx \,.$$

En cambio, si la resolvemos mediante región horizontalmente simple, notamos que solamente ocupamos una sola región, es decir, una sola integral doble.

Los valores constantes son en "y": $-3 \le y \le 2$

La variación en "x" es desde la función de la izquierda (parábola) hasta la función de la derecha (recta)

$$\sqrt{2x} \le x \le 2x - 6$$

Pero así no se debe de escribir, las ecuaciones de la parábola y de la recta; tienen que escribirse en términos de la variable "y".

$$y = \sqrt{2x} \qquad\qquad y = 2x - 6$$

$$(y)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \qquad\qquad y + 6 = 2x$$

$$y^2 = 2x \qquad\qquad \frac{y+6}{2} = x$$

$$\frac{y^2}{2} = x \qquad\qquad \frac{y}{2} + 3 = x$$

$$\frac{y^2}{2} \le x \le \frac{y}{2} + 3$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es:

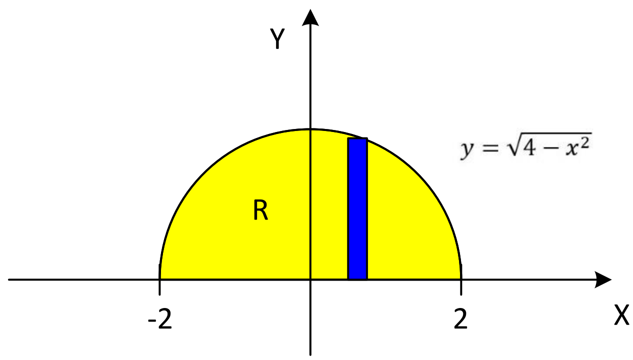
A= $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y}{2}+3} dxdy$

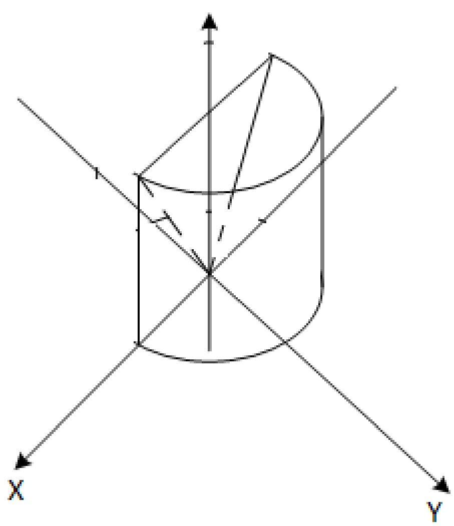
Ejercicio:

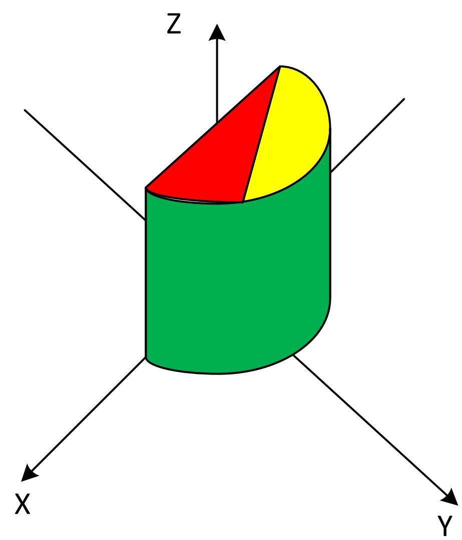
Utilizar una integral doble para hallar el volumen generado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$ y $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$, primer y segundo octante.

Solución

El sólido que genera las gráficas de las dos ecuaciones (un cilindro circular recto y el cono elíptico) es el siguiente:







Luego la representación del volumen del sólido mediante una integral doble es:

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{2x^2 + 2y^2}\, dy dx$$

Esta integral es más fácil de evaluar en otro sistema de coordenadas (polares). La resolveremos más adelante.