UNIDAD V: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO DIFERENCIAL)

Ejemplos de funciones de varias variables:

1) El trabajo realizado por una fuerza $\boldsymbol{w = fd}$ (función de dos variables)

2) El volumen de un paralelepípedo $\boldsymbol{v = lwh}$ (función de tres variables)

Notación:

$\boldsymbol{z = f(x, y)}$ $\boldsymbol{f}$ es una función de 2 variables (2 variables independientes: $\boldsymbol{x, y}$)

$\boldsymbol{w = g(x, y, z)}$ $\boldsymbol{g}$ es una función de 3 variables (3 variables independientes: $\boldsymbol{x, y, z}$)

Definición: (función de 2 variables)

Sea **D** un conjunto de pares ordenados. Si a cada par $\boldsymbol{(x, y)}$ de **D** le corresponde un único número real $\boldsymbol{f(x, y)}$, entonces se dice que $\boldsymbol{f}$ es función de $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$. El conjunto **D** es el dominio de $\boldsymbol{f}$ y el correspondiente conjunto de valores $\boldsymbol{f(x, y)}$ es el recorrido o rango de $\boldsymbol{f}$.

OBSERVACIONES:

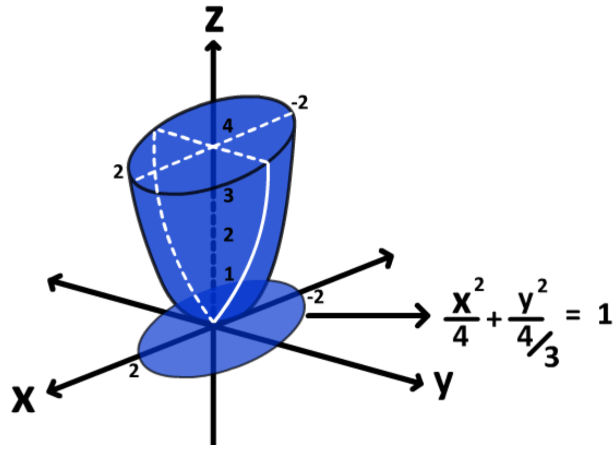
- *De las superficies cuádricas, las únicas funciones son el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico.*
- *El dominio de una función de dos variables puede ser todo el plano XY o una sub región de él.*
- *El dominio de una función de dos variables es la proyección su gráfico en el plano* XY.

Ejemplo:

Dada la función $\boldsymbol{f(x, y) = x^2 + 3y^2}$, hallar el dominio y el recorrido ***Solución:***

La ecuación anterior puede escribirse como $\boldsymbol{z = x^2 + 3y^2}$.

La gráfica que corresponde a esta ecuación es un paraboloide elíptico. Note que si se grafica esta ecuación con corte en $\boldsymbol{z = 4}$ resulta lo siguiente:



En este corte se observa que la proyección del gráfico recortado con el plano XY es la elipse mostrada y el dominio de la función son todos los pares ordenados que están dentro de esa elipse, es decir, $D_f = \left\{(x, y) \in R^2 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \leq 1\right\}$. Pero como este paraboloide se extiende hasta el infinito, la proyección de la gráfica completa **es todo el plano XY**.

Esto lo puede verse fácilmente de la ecuación $z = x^2 + 3y^2$, en donde no hay ninguna restricción para los valores que pueden tomar las variables $x \wedge y$. Por lo tanto, el dominio son todos los pares ordenados (x, y) tal que pertenecen al plano (x, y), **Dominio =** $\{(x, y)/(x, y) \in R^2\}$.

El recorrido o rango de esta función es un número real no negativo, es decir, Recorrido $= \{z/z \in R^+{}_0\}$.

Ejemplo:

Hallar el dominio de las siguientes funciones (graficar el dominio)

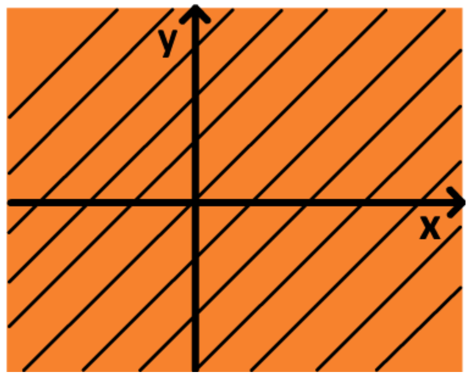
a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $g(x, y) = \frac{2}{x-y}$ c) $h(x, y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x-y}$

Solución para a)

No existe ninguna restricción para las variables independientes $x \wedge y$ en la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Es decir, que puede sustituirse cada una de las variables independientes por cualquier número real (cualquier par ordenado (x, y)) y siempre obtener un valor de z. Por lo tanto, el dominio de esta función es todo el plano XY.

$D_f = \{(x, y) \in R^2\}$

Gráfica del dominio de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.



OBSERVACIÓN: *El dominio de la función es la proyección de la gráfica de la función en el plano* ***XY*** *y la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ ó $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico.*

Solución para b)

La función $f(x, y) = \frac{2}{x-y}$

En este caso, el denominador no puede ser cero, es decir, $x - y \neq 0$. Lo que es lo mismo $x \neq y$

Luego, $D_g = \{(x, y) \in R^2 / x \neq y\}$.

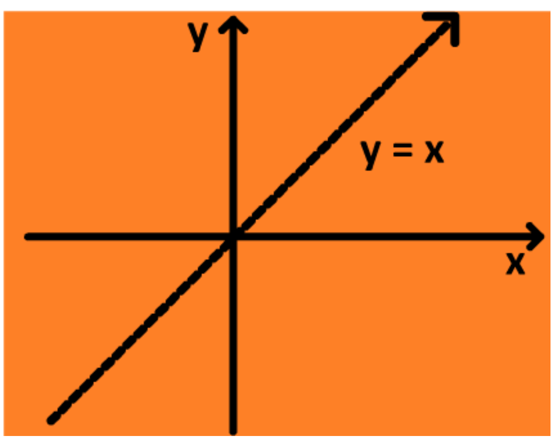


Figura 1

En forma gráfica, el dominio de $g(x, y) = \frac{2}{x-y}$.

$x = y$ en dos dimensiones es una recta.

"El dominio de la función $g(x, y) = \frac{2}{x-y}$ es el plano XY excepto cualquier punto que se encuentre sobre la recta $x = y$ ".

Solución para c)

$$h(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x^2 - 4}$$

Para este caso hay dos restricciones

- Lo que está dentro de la raíz cuadrada tiene que ser positivo o cero
- El denominador no puede ser cero

O sea que:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \ \ \wedge \ \ x^2 - 4 \neq 0$$

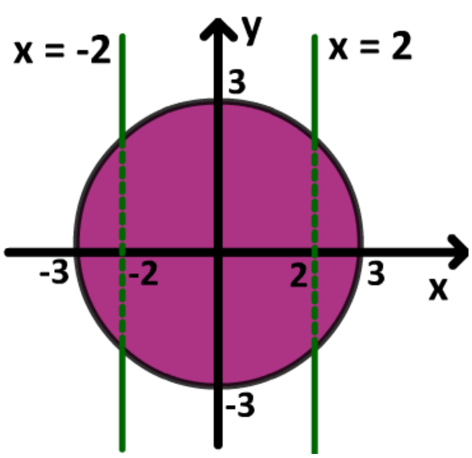
$$\wedge \ \ (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$-x^2 - y^2 \geq -9 \qquad \wedge \ \ x - 2 \neq 0 \ \ \vee \ \ x + 2 \neq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9 \ \ \wedge \ \ x \neq 2 \ \ \vee \ \ x \neq -2$$

$$D_h = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 9 \ \ \wedge \ \ (x \neq 2 \ \ \vee \ \ x \neq -2)\}$$

Gráfica del dominio.



$x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia de radio 3.
$x = 2 \ \ y \ \ x = -2$ Rectas verticales.

Como $x^2 + y^2 \leq 9$, la región que corresponde al plano XY es todos los puntos que están dentro de la circunferencia.

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1) Suma o diferencia
   $$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

2) Producto
   $$(f . g)(x, y) = f(x, y) \bullet g(x, y)$$

3) Cociente
   $$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \ \ g(x, y) \neq 0$$

Función polinomial: Es la que se expresa como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$, donde **c** es un número real, y m y n son enteros no negativos.

Ejemplos:

$$f(x, y) = 5x^3 - 2x^2y + y^3 + 8$$

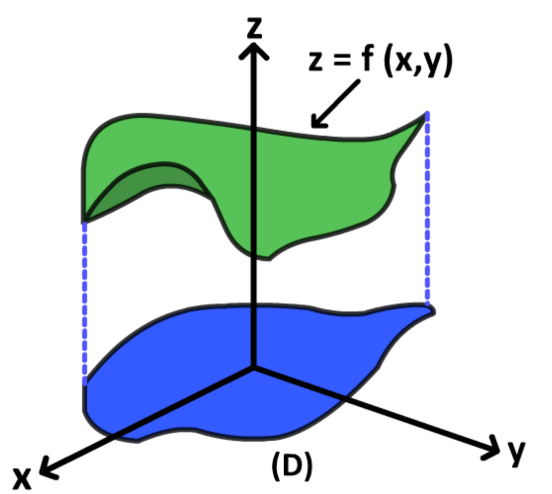
$$g(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + 5y - 4$$

Función racional:

Es el cociente de dos funciones polinómicas

NOTA: *Se usa terminología similar para funciones de más de dos variables.*

Gráfica de una función de dos variables: Es el conjunto de puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ tal que (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una superficie en el espacio R^3.



NOTA: *El dominio D es la proyección de la superficie* $z = f(x, y)$ *sobre el plano* XY.

Ejemplo: Elaborar la gráfica de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4}$ y encontrar el dominio y recorrido.

Solución:

$$f(x,y) = -\sqrt{x^2+2y^2-4}$$

$$z = -\sqrt{x^2+2y^2-4}$$

$$(z)^2 = \left(-\sqrt{x^2+2y^2-4}\right)^2$$

$$z^2 = x^2+2y^2-4$$

$$z^2 - x^2 - 2y^2 = -4$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 4$$

Esta última ecuación corresponde a una gráfica de una figura cuádrica. Para identificarla, se encuentran las trazas:

Traza con el plano XY $(z=0)$.

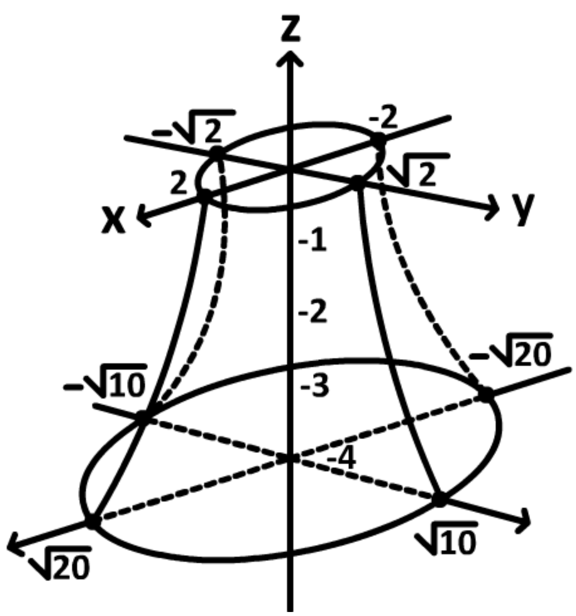
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ **Elipse**

Las otras 2 trazas son hipérbolas.

, $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$ 2 2 $\frac{y}{4}-\frac{z}{4}=1$

La gráfica de $z=-\sqrt{x^2+2y^2-4}$ es un hiperboloide de una hoja. Si embargo, solamente es la parte del plano XY hacia abajo (esto se debe al signo menos antes de la raíz cuadrada. Es decir, que z solamente toma valores negativos). Por esta razón el rango o recorrido es:
$R_f =]-\infty, 0]$.

Graficando una parte de este hiperboloide de una hoja, se corta en $z=-4$



$z=0$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

$z=-4$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{(-4)^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{16}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1+4$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=5$$

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$$

2 2

$$\frac{x}{(\sqrt{20})^2}+\frac{y}{(\sqrt{10})^2}=1$$

Ejemplo: Elaborar la gráfica de $z=4-x^2-y^2$. Hallar dominio y recorrido.

Solución:

En este caso las trazas son:

Traza en el plano XY $(z=0)$.

$$z=4-x^2-y^2$$

$$0=4-x^2-y^2$$

Circunferencia de radio 2

$$x^2+y^2=4$$

Traza en XZ $(y=0)$

$$z=4-x^2-y^2$$

$$z=4-x^2$$

Parábola abierta hacia abajo y empezando en $z=4$ $(v\acute{e}rtice)$

Traza en YZ $(x=0)$

$$z=4-x^2-y^2$$

$$z=4-y^2$$

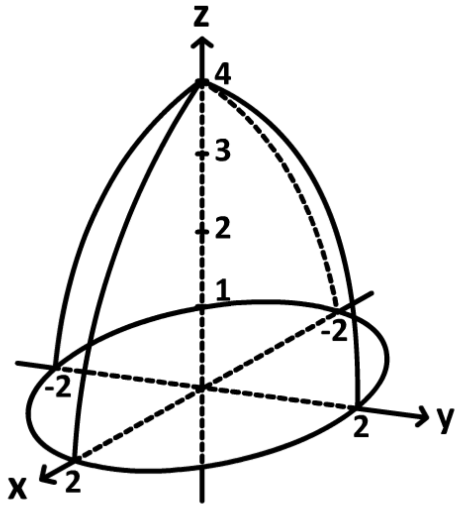
Parábola abierta hacia abajo y empezando en $z=4$ $(v\acute{e}rtice)$

$$z-4=-y^2$$

La gráfica de $z=4-x^2-y^2$ es un paraboloide elíptico invertido y desplazado 4 unidades hacia arriba.

NOTA: *Si solamente la ecuación fuera $z=-x^2-y^2$ sería un paraboloide con vértice en (0,0,0) y abierto hacia la parte negativa del eje "z".*

Gráfica


z
4
3
2
1
-2
-2
2
y
x
2