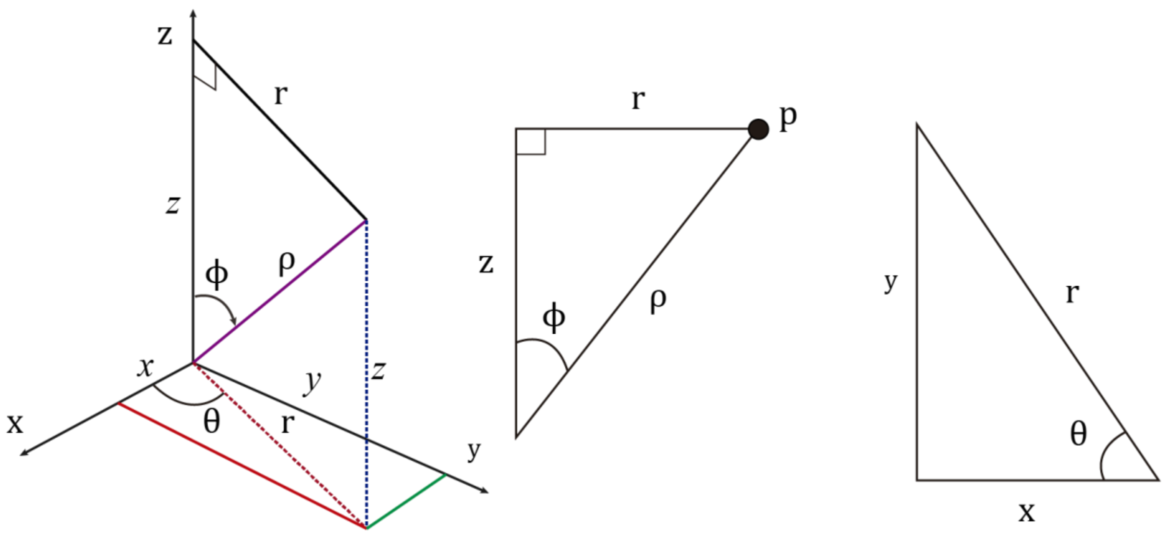
1. ALGUNOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

1.4 CONVERSIÓN DE PUNTOS O ECUACIONES DE UN SISTEMA DE COORDENADAS A OTRO SISTEMA



Para convertir coordenadas cilíndricas a rectangulares se aplica lo siguiente

$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{y = r\,sen\,\theta}$, $\boldsymbol{z = z}$

Para convertir coordenadas rectangulares a cilíndricas

$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$, $\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$, $\boldsymbol{z = z}$

Esféricas a rectangulares

$x = \boldsymbol{\rho sen\phi cos\theta}$, $y = \boldsymbol{\rho sen\phi sen\theta}$, $z = \boldsymbol{\rho cos\phi}$

Rectangulares a esféricas

$\boldsymbol{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{tan(\theta) = \frac{y}{x}}$, $\boldsymbol{cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$

Esféricas a cilíndricas $(\boldsymbol{r \geq 0})$

$\boldsymbol{r^2 = \rho^2 sen^2\phi}$, $\boldsymbol{\theta = \theta}$, $\boldsymbol{z = \rho cos\phi}$

$\boldsymbol{r = \rho sen\phi}$

Cilíndricas a esféricas

$\boldsymbol{\rho = \sqrt{r^2 + z^2}}$, $\boldsymbol{\theta = \theta}$, $\boldsymbol{\phi = arcos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)}$

Ejemplo 3: Convertir el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

Solución

$\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 1, z = 3}$

En coordenadas cilíndricas un punto se representa por $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$

Con $\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$ y $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

Luego,

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\boldsymbol{r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}} \qquad \boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)}$$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

Por lo tanto el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ que está en coordenadas rectangulares, en coordenadas cilíndricas se representa por $\boldsymbol{\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3\right)}$.

Ejemplo 4: Convertir el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ de coordenadas rectangulares a esféricas.

Solución

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \boldsymbol{\phi = cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}$$

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} \qquad \boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)} \qquad \boldsymbol{\phi = cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)}$$

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{11} \approx 3.3166} \qquad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}} \textit{ radianes} \qquad \boldsymbol{\phi \approx 0.4405}$$

Por lo tanto el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ que está en coordenadas rectangulares, en coordenadas esféricas se representa por $\boldsymbol{\left(\sqrt{11}, \frac{\pi}{4}, \phi \approx 0.4405\right)}$.

Ejemplo 5: Escribir la ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2z^2 = 0}$ en coordenadas cilíndricas. Simplificar

Solución

Recordemos que $\boldsymbol{x = rcos\theta}$, $\boldsymbol{y = rsen\theta}$, $\boldsymbol{z = z}$

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$$
$$(rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 - 3z^2 = 0$$
$$r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta - 3z^2 = 0$$
$$r^2[cos^2\theta + sen^2\theta] - 3z^2 = 0$$
$$r^2 - 3z^2 = 0$$
$$3z^2 = r^2$$

Otra forma más fácil….

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} - 3z^2 = 0$$
$$r^2 - 3z^2 = 0$$
$$r^2 = 3z^2$$

Ejemplo 6: Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para $z = r^2sen^2\theta$

$$z = r^2sen^2\theta$$
$$z = (\underbrace{rsen\theta}_{y})^2$$
$$z = y^2$$

Ejemplo 7: convertir la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ de coordenadas rectangulares a esféricas.

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\rho^2} = 4 \underbrace{x}_{\rho sen\phi cos\theta}$$
$$\rho^2 = 4\rho sen\phi cos\theta$$
$$\rho^2 - 4\rho sen\phi cos\theta = 0$$
$$\rho(\rho - 4sen\phi cos\theta) = 0$$
$$\rho = 0 \quad \text{ó} \quad \rho - 4sen\phi cos\theta = 0$$
$$\rho = 4sen\phi cos\theta$$

Ejemplo 8: convertir la ecuación $\rho = 5$ de coordenadas esféricas a rectangulares.

$\rho = 5$

$\rho^2 = 25$, se han elevado ambos lados al cuadrado

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Ejemplo 9: convertir la ecuación $\rho = 4cos(\phi)$ de coordenadas esféricas a rectangulares

Una forma…

$\rho = 4cos(\phi)$

$\rho\rho = 4\rho cos(\phi)$

$\rho^2 = 4\rho cos(\phi)$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$