3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE MATRICES

3.1 MÉTODO DE GAUSS

Si se tiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, como, por ejemplo

$$3x - y + 2z = 1$$
$$x + 3y - z = -3$$
$$2x - y + z = -1$$

Se puede asociar un arreglo de números al sistema anterior, conocido como **MATRIZ DE COEFICIENTES**, el cual tendrá la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si a la matriz anterior se le agrega la columna de términos independientes, se obtiene la **MATRIZ AUMENTADA**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

NOTA: *Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son EQUIVALENTES cuando las soluciones son iguales.*

Sistema de 3 ecuaciones lineales. Matriz Aumentada.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Si la solución del sistema anterior es UNICA se puede, a través de ***transformaciones de filas*** llegar a un sistema equivalente de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & d & e \\ 0 & 1 & f & g \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array}\right) --\rightarrow \begin{array}{l} x + cy + dz = e \\ y + fz = g \\ z = h \end{array}$$

El cual es más fácil de resolver.

El procedimiento anterior se conoce como **METODO DE GAUSS**, para resolver sistemas de ecuaciones de **n** incógnitas (variables).

TEOREMA PARA TRANSFORMAR LAS FILAS DE UNA <u>MATRIZ AUMENTADA</u>

Se pueden hacer las siguientes operaciones entre filas:

i) *Intercambiar 2 filas cualesquiera.*

ii) *Multiplicar todos los elementos de una fila por el mismo número real **k**, diferente de cero.*

iii) *Sumar a los elementos de una fila, **k** veces los correspondientes elementos de cualquier otra fila (**k** pertenece a los reales y debe ser distinto de cero).* ***iv)*** *Sumar **m** veces una fila a **n** veces otra fila.*

Ejemplo 14: Encontrar la solución del sistema, usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

Solución:

La matriz aumentada relacionada con el sistema de ecuaciones anterior es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El primer paso es convertir en **"uno"** el elemento $a_{11} = 3$, para ello se debe multiplicar cada elemento de la fila **1** por $\frac{1}{3}$, para no alterar el sistema de ecuaciones. Pero en lugar de hacer esto, se puede aprovechar que hay un "uno" en la columna 1, es decir el elemento $a_{21} = 1$ y así se puede intercambiar la fila 2 con la fila 1. Esta operación se representa por $F1 \leftrightarrow F2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) F1 \leftrightarrow F2$$

Luego el nuevo elemento $a_{11} = 1$ servirá para hacer ceros debajo de este elemento a_{11}, llamado elemento pivote, con las siguientes operaciones en fila:

$F_2 - 3F_1 \to F_2$**.** Esta operación permite hacer cero en el elemento a_{21}(toda la fila 2 menos 3 veces la fila 1 y el resultado escribirlo en la fila 2.

$F_3 - 2F_1 \to F_3$**.** Esta operación permite hacer cero en el elemento a_{31}(toda la fila 3 menos 2 veces la fila 1 y el resultado escribirlo en la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad -\frac{1}{10}F2 \to F2$$

$$F_2, \quad F_3 - 2F_1 \to F_3$$

Ahora hay que convertir en **"uno"** el elemento a_{22} y hacer ceros debajo de él (ahora el elemento pivote es el a_{22}). Para ello se puede multiplicar toda la fila 2 por $-\frac{1}{10}$**.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Luego con este nuevo elemento $a_{22} = 1$, se hace cero debajo de él. En este caso mediante la operación en fila $F_3 + 7F_2 \to F_3$, obteniendo una matriz aumentada equivalente a las anteriores**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Se convierte en **"uno"** el elemento a_{33} multiplicando toda la fila **3** por **– 2.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

De esta última matriz aumentada se obtiene el sistema de ecuaciones equivalente al original

$$\begin{aligned} &x + 3y - z = -3 && (1) \\ &y - \frac{1}{2}z = -1 && (2) \\ &z = 4 && (3) \end{aligned}$$

Observe que según la ecuación **(3)**, ya tenemos el valor de la variable **z** y puede sustituirse en la ecuación **(2)** para obtener el valor de $\boldsymbol{y}$, el cual resulta ser $\boldsymbol{y = 1}$. Estos resultados se puedens sustituir en **(1)** para obtener el valor de $\boldsymbol{x = -2}$.

OBSERVACIONES:

1) Si utilizando el método de Gauss se obtiene la matriz aumentada siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & d & f \\ 0 & 1 & e & g \\ 0 & 0 & 0 & h \end{array}\right)$$

Entonces, sí $\boldsymbol{h \neq 0}$ tendremos que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

2) Si utilizando el método de Gauss se obtiene la matriz aumentada siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & d & f \\ 0 & 1 & e & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces el sistema tiene infinito número de soluciones, ya que el sistema en este caso se reduce a dos ecuaciones con 3 variables.

De manera similar puede analizarse sistema de **m** ecuaciones con **n** variables.

Ejemplo: Si en un sistema de 3 ecuaciones con tres variables **x, y, z,** después de efectuar el método de Gauss se obtiene el siguiente resultado:

$$\left(\begin{array}{cc|} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 5 \\ 1 & 2) \end{array}$$

$$\mathbf{0 \quad 0}$$

El nuevo sistema de ecuaciones equivalente es:

$$x + 2y = 5$$

$$y + z = 2$$

El cual no posee solución única.

Solución:

Podemos hacer $z = t$ y se pone las demás variable en términos del parámetro t. Así:

$$y + z = 2$$

$$y + t = 2$$

$$y = 2 - t$$

$$x + 2y = 5$$

$$x + 2(2 - t) = 5$$

$$x + 4 - 2t = 5$$

$$x = 5 - 4 + 2t$$

$$x = 1 + 2t$$

Luego, la solución en términos de **t** es:

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 - t$$
$$z = t$$

Para poder tener una solución particular del sistema, basta con darle valores al parámetro **t** (cualquier número real). Por ejemplo $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$, es una solución del sistema de ecuaciones cuando $\boldsymbol{t = 1}$; $\boldsymbol{x = -1, y = 3}$, $\boldsymbol{z = -1}$ también es otra solución del sistema cuando $\boldsymbol{t = -1}$.