UNIDAD V: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO DIFERENCIAL)

DERIVADA DIRECCIONAL Y EL GRADIENTE

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se define la derivada direccional

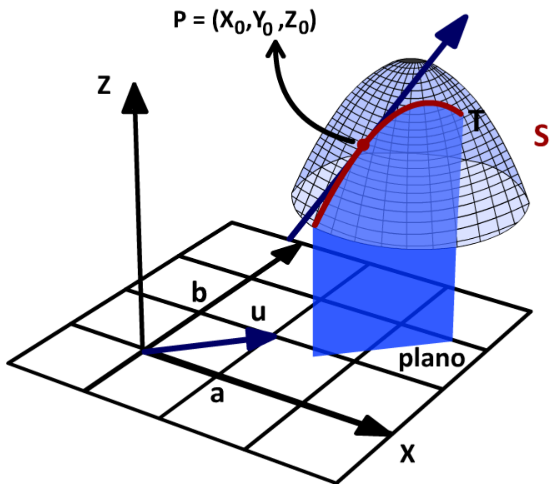


Figura 1

> ***Definición:***
>
> Sea $\boldsymbol{f}$ una función de dos variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, y sea $\vec{\boldsymbol{u}} = \cos(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{j}$ un vector unitario. Entonces la derivada direccional de $\boldsymbol{f}$ en la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$, que se denota $\boldsymbol{D_{\vec{u}}f}$ es:
>
> $$\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\,cos(\theta), y + t\,sen(\theta)) - f(x,y)}{t}}$$

> ***Teorema:***
>
> *Si $\boldsymbol{f(x,y)}$ tiene derivadas parciales continuas $\boldsymbol{f_x, f_y}$, entonces la derivada direccional de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{(x,y)}$ en la dirección del vector unitario $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{cos(\theta)\, i + sen(\theta) j}$ es:*
>
> $$\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\,cos(\theta) + f_y(x,y) sen(\theta)}$$

Casos particulares:

1) Si $\boldsymbol{\theta = 0}$, $\quad \boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x,y) = f_x(x,y)}$

2) Si $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$, $\quad \boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x,y) = f_y(x,y)}$

Note que la derivada direccional es una nueva función de “x” y “y”. Esta derivada direccional se puede evaluar en $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ y resultará la pendiente de la recta tangente en $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ en la dirección del vector $\boldsymbol{u}$.

Ejemplo: Hallar la derivada direccional de $\boldsymbol{f(x,y)=4-x^2-y^2}$ en el punto $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ en dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}}=\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{j}$.

Solución:

Primero se verifica que el vector es unitario:

$$|\vec{\boldsymbol{u}}|=\sqrt{\mathbf{cos}^2\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)+\boldsymbol{sen}^2\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)},\quad \boldsymbol{ya\ que}\ \mathbf{cos}^2(\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{sen}^2(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{1}$$

$$|\vec{\boldsymbol{u}}|=\mathbf{1}$$

$$\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\qquad \boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\mathbf{2}\boldsymbol{x}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)-\mathbf{2}\boldsymbol{y}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{x}\sqrt{\mathbf{3}}-\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})=-(\mathbf{1})\sqrt{\mathbf{3}}-(\mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1})=-\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}$$

OBSERVACIÓN: *Si el vector* $\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{ai}+\boldsymbol{bj}$ *es unitario, la derivada direccional de* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ (\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ *es* $\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}$.

Ejemplo: Hallar la derivada direccional de la superficie $\boldsymbol{f(x,y)=4x^2+5y^2}$ en dirección de $\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$.

$$|\vec{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{2}+\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{25}}+\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{25}}}=\mathbf{1}\quad \boldsymbol{El\ vector\ es\ unitario}$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{8}\boldsymbol{x})\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}+(\mathbf{10}\boldsymbol{y})\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$$

$$\boldsymbol{D}_{\vec{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}-\mathbf{8}\boldsymbol{y}$$

EL GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE 2 VARIABLES

Definición:
Sea $z = f(x, y)$ una función de x e y tal que f_x, f_y existen. Entonces el gradiente de la función f, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$

Ejemplo:
Hallar el gradiente de $f(x, y) = x \ln y + x^2 y$ en el punto $(2, 1)$.

$$f_x(x, y) = \ln(y) + 2xy$$

$$f_y(x, y) = \frac{x}{y} + x^2$$

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$

$$\nabla f(x, y) = [\ln(y) + 2xy]i + [\frac{x}{y} + x^2]\, j$$

$$\nabla f(2, 1) = [\ln(1) + 2(2)(1)]i + [\frac{2}{1} + (2)^2]\, j$$

$$\nabla f(2, 1) = [0 + 4]i + [2 + 4]j$$

$$\nabla f(2, 1) = 4i + 6j$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Teorema:
Sea f derivable en el punto (x, y)

1. *Si $\nabla f(x, y) = 0$, entonces $D_{\vec{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\vec{u}$.*
2. *La dirección de mayor incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.*
3. *La dirección de menor incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\vec{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.*

OBSERVACIÓN: El vector gradiente se puede extender a funciones de 3 variables:

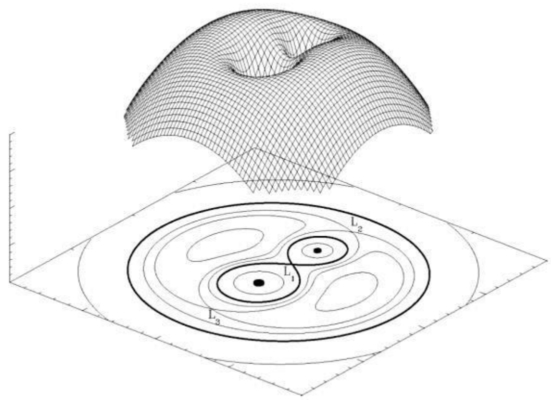
$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k$$

CURVAS DE NIVEL

Si $z = (x, y)$, $f(x, y) = c$ donde c es cualquier constante, representa lo que se llama curva de nivel. Al conjunto de curvas de nivel se le llama mapa de contorno.

Si $z = f(x, y)$ representa la presión atmosférica, el conjunto de curvas de nivel $f(x, y) = c$ se llama mapa climático y las curvas de nivel de igual presión se llama isobaras. Si $z = f(x, y)$

representa la temperatura, el conjunto de curvas de nivel $\boldsymbol{f\,(x, y) = c}$ se llama mapa climático y las curvas de nivel de igual temperatura se llama isotermas. Los mapas de contorno se usan regularmente para representar regiones de la superficie de la tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama mapa topográfico.



Teorema:

Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y $\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) \neq 0}$, entonces $\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0)}$ es normal a la curva de nivel que pasa por $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Teorema:

i) *Si la ecuación $\boldsymbol{f(x, y) = 0}$ define a $\boldsymbol{y}$ de manera i mplícita como función derivable de $\boldsymbol{x}$, entonces:* $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$, $\boldsymbol{f_y(x, y) \neq 0}$.

ii) *Si la ecuación $\boldsymbol{f(x, y, z) = 0}$ define a $\boldsymbol{z}$ de manera implícita como función derivable de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, entonces:* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$, $\boldsymbol{f_z(x, y, z) \neq 0}$

El teorema anterior se puede extender a más de tres variables

i) Si la ecuación $\boldsymbol{f(w, x, y, z) = 0}$ define a $\boldsymbol{w}$ de manera implícita como función derivable de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{z}$, entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{f_x(w,x,y,z)}{f_w(w,x,y,z)} \quad \boldsymbol{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{f_y(w,x,y,z)}{f_w(w,x,y,z)}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{f_z(w,x,y,z)}{f_w(w,x,y,z)}, \quad \boldsymbol{f_w(w, x, y, z) \neq 0}$$

Ejemplo:

Utilizar derivación implícita para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, teniendo $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + 12yw = 10 + 4w^2}$

Solución:

$$\boldsymbol{f(w,x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 12yw - 10 - 4w^2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_w} = -\frac{2x}{12y - 8w} = \frac{2x}{8w - 12y}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_w} = -\frac{2y + 12w}{12y - 8w} = \frac{2y + 12w}{8w - 12y}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_w} = -\frac{2z}{12y - 8w} = \frac{2z}{8w - 12y}}$$

Ejemplo:

Determinar $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial r}$, siendo $\boldsymbol{rt^3 + t^2\cos(v) = 5 + 4v^3 + e^{5r}}$.

Solución:

$$\boldsymbol{f(r,t,v) = rt^3 + t^2\cos(v) - 5 - 4v^3 - e^{5r} = 0}$$

Se pide determinar $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial r}$ por lo que la variable dependiente es $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{r}$ son las variables independientes.

$$\boldsymbol{\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{f_t}{f_v} = -\frac{3t^2r + 2t\cos(v)}{-t^2 sen(v) - 12v^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{f_r}{f_v} = -\frac{t^3 - 5e^{5r}}{-t^2 sen(v) - 12v^2}}$$