UNIDAD VI: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO INTEGRAL)

6.4 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Si una región sólida D tiene un eje de simetría en uno de los ejes coordenados, las integrales triples son más fáciles de evaluar empleando coordenadas cilíndricas.

La forma iterada de la integral triple en coordenadas cilíndricas es:

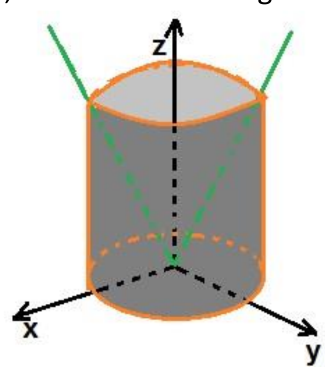
$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)}\int_{g1(rcos\theta,rsen\theta)}^{g2(rcos\theta,rsen\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta, z)rdzdrd\theta$$

Ejemplo:

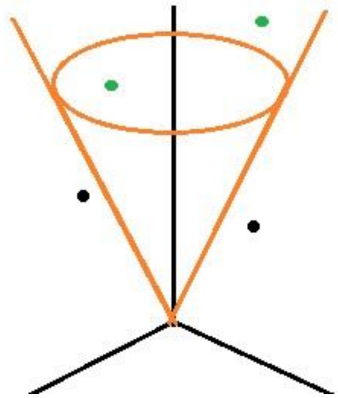
Evaluar $\iiint_Q x^2 dV$, donde Q es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano xy $(z = 0)$ y debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solución:

Un Bosquejo rápido, sin medidas, se muestra en la figura.

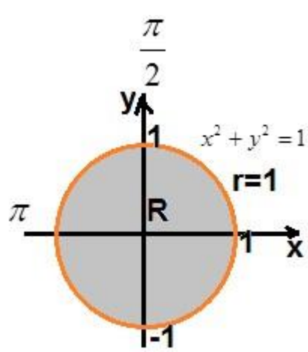


Notemos que el cilindro, cuya curva generatriz es una circunferencia y cuyas rectas directrices son paralelas al eje "z" se intersectan con el cono. Otra observación importante es que nos interesa del cono solamente la parte de arriba del plano xy. Con respecto al cono, un punto el espacio tridimensional, puede estar abajo del cono, arriba del cono (dentro del cono) o en el cono. Tal como se muestra en la figura siguiente.



Los puntos verdes están arriba de cono (dentro) los dos puntos negros están abajo del cono. Recordando que el cono es infinito.

Luego el sólido está formado por todo el contorno alrededor del cono. Otra observación importante es



Dado que la base del sólido en una circunferencia completa de radio 1, la variación del ángulo es de 0 a 2π y la variación del radio es de 0 a la circunferencia ($r = 1$).

La integral en rectangulares es

$$\iiint_Q x^2 dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{2x^2+2y^2} x^2 dz dy dx$$

En cilíndricas es:

$$\iiint_Q x^2 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_0^{2r^2} [rCos(\theta)]^2 r dz dr d\theta$$

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido formado por $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $r \leq z \leq 2$

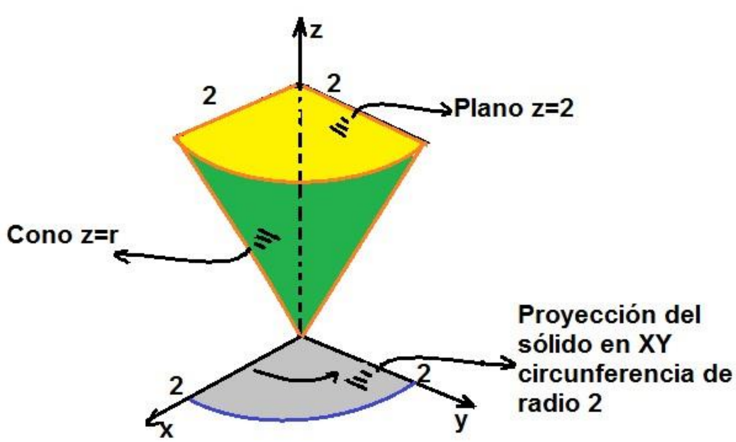
Solución

$r \leq z$ $\qquad$ $z \leq 2$

$r = z$ $\qquad$ $z = 2$ (plano paralelo al plano xy)

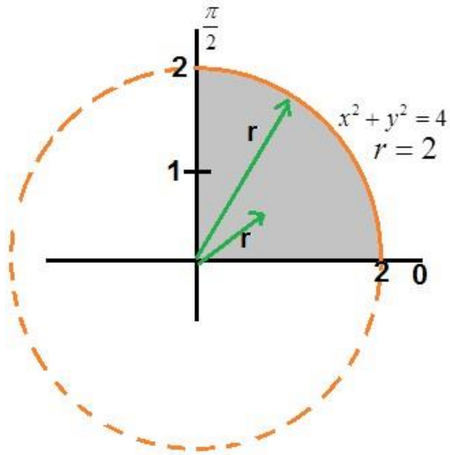
$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$(Mitad de un cono)

Dado que el ángulo máximo es $\frac{\pi}{2}$, se trata de un cono elíptico cortado en $z = 2$ solamente en el primer octante, tal como se muestra en la figura.



La variación del radio la podemos obtener de la proyección del sólido en xy y es una circunferencia de radio 2. En esa proyección se puede ver que el radio varía de $r = 0$ hasta

$r = 2$ (circunferencia de radio 2). Luego $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2$



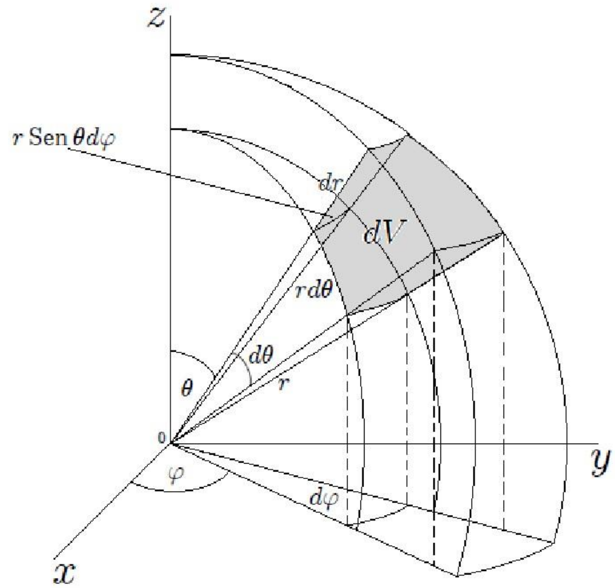
$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_r^2 r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r[z]|_r^2 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r(2-r) dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (2r - r^2) dr d\theta$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{8}{3}\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} d\theta$$

$$V = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{2}{3}\pi\ (u.l.)^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\pi\ (u.l.)^3}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas



Las coordenadas esféricas son especialmente útiles en algunos problemas que involucran esferas. El diferencial de volumen para el sistema de coordenadas esféricas es:

$$dV = \rho^2 Sen\phi d\rho d\theta d\phi$$

Luego

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \iiint_D f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 Sen\phi d\rho d\theta d\phi$$

Ejemplo:

Determine el volumen del sólido ubicado dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y que se encuentra arriba de $x^2 + y^2 = z^2$

Solución

La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, corresponde a la gráfica de una esfera cuyo centro no es $(0,0,0)$ y la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, corresponde a la gráfica de un cono.

Determinemos el centro y el radio de la esfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$$

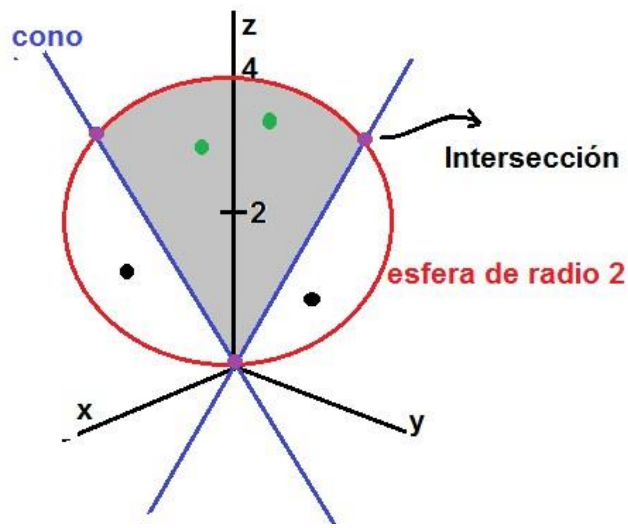
$$x^2 + y^2 + (z^2 - 4z + 4) - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

Esfera de radio 2 y centro en $(0{,}0{,}2)$

Hagamos un bosquejo rápido del sólido



Los puntos de color negro, en la figura, están dentro de la esfera y debajo del cono. Nos interesa los puntos que están dentro de la esfera y arriba del cono (esa es la región sombreada de gris.

Para determinar los límites de integración, debemos graficar bien el sólido y para ello necesitamos la intersección entre el cono y la esfera (qué figura se forma y en qué valor de z se debe graficar).

Intersección de las dos figuras

$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y $x^2 + y^2 = z^2$

Emplearemos el método de sustitución

$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ sustituyendo la ecuación del cono en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

$$z^2 + z^2 = 4z$$

$$2z^2 = 4z$$

$$2z^2 - 4z = 0$$

$$2z(z - 2) = 0$$

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 2$$

Es decir, que la esfera y el cono cortan en $z = 0$ y a la altura de $z = 2$ (este es el centro de la esfera $(0,0,2)$)

Ahora determinemos que figura resulta del corte en $z = 2$ Podemos utilizar, ya sea la esfera o el cono.

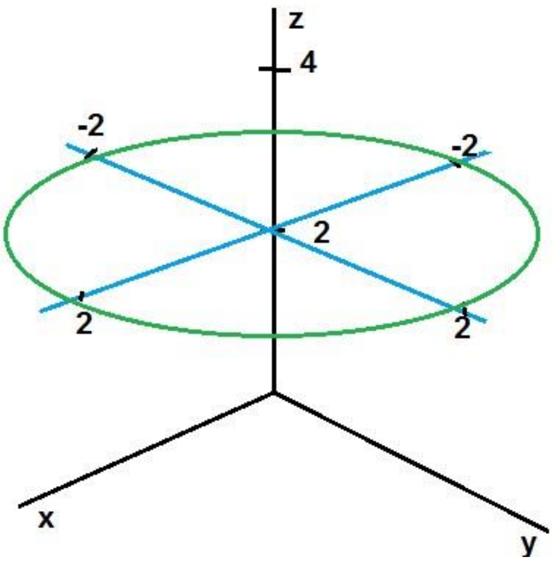
Cono $x^2 + y^2 = z^2$, si $z = 2$ entonces

$$x^2 + y^2 = (2)^2$$

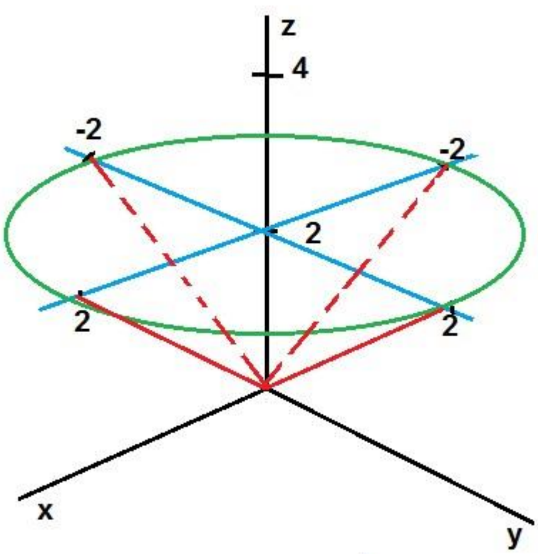
$$x^2 + y^2 = 4$$

La figura que vamos a graficar en $z = 2$, es una circunferencia de radio 2

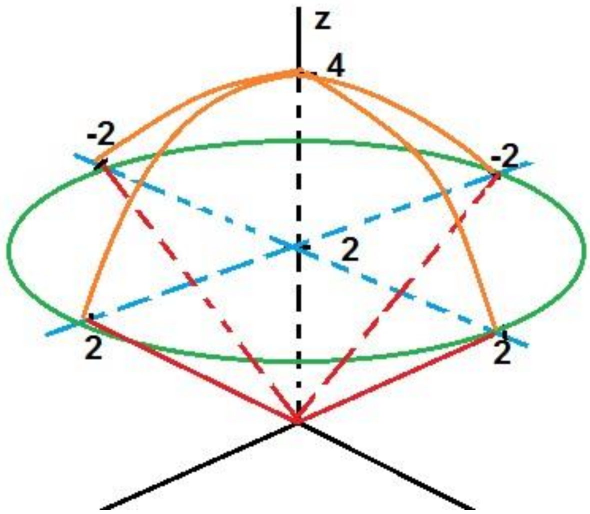
Intersección entre las dos gráficas



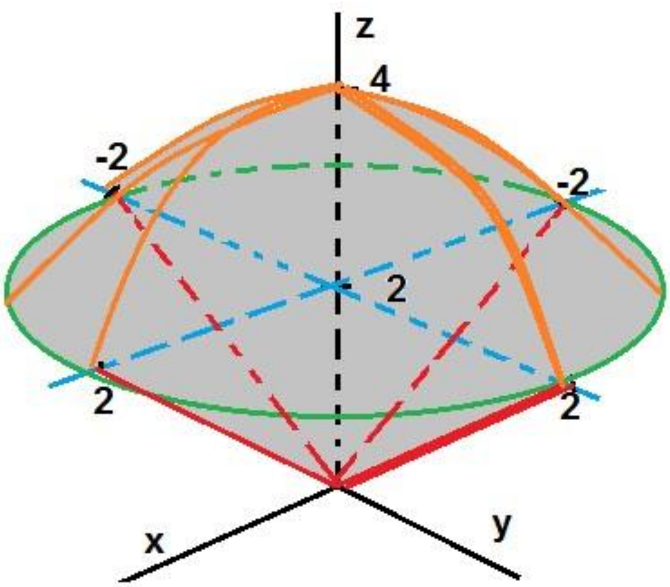
Las líneas de color rojo son trazas del cono hasta la intersección.

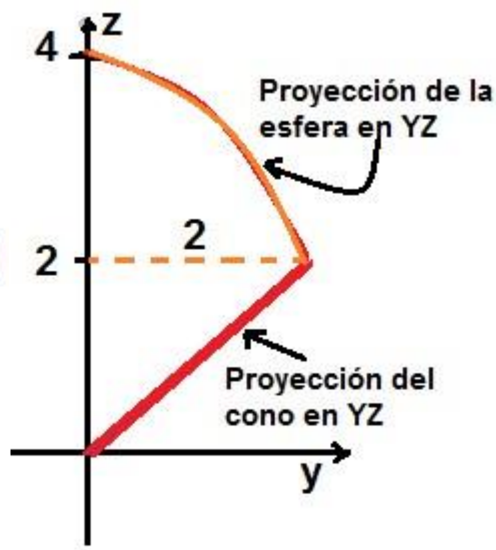


Las curvas de color naranja son las trazas de la esfera hasta la intersección



Notemos que el sólido que se forma, en este caso, parece un "sorbete" y la proyección de este sólido en el plano yz se muestra a la derecha del sólido. Dicha proyección nos será útil para la determinar la variación del ángulo ϕ y el valor de ρ, en el sistema de coordenadas esféricas (la misma proyección puede servir para las coordenadas cilíndricas). También observemos, que si la proyección del sólido en el plano yz la hacemos girar alrededor del eje z se nos forma el sólido. Es decir, que la proyección está bien construida.



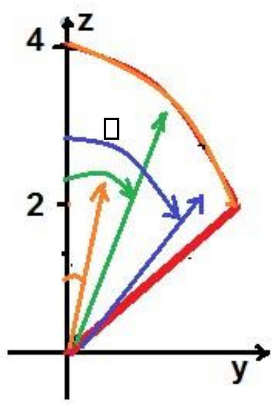


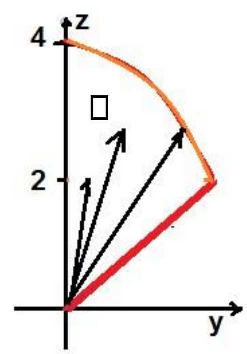
Determinemos los límites de integración

El ángulo θ es el mismo de las coordenadas cilíndricas. Es este caso, al girar la proyección alrededor del eje z el ángulo necesario de giro para generar completamente el sólido es 2π. Por lo tanto la variación θ es:

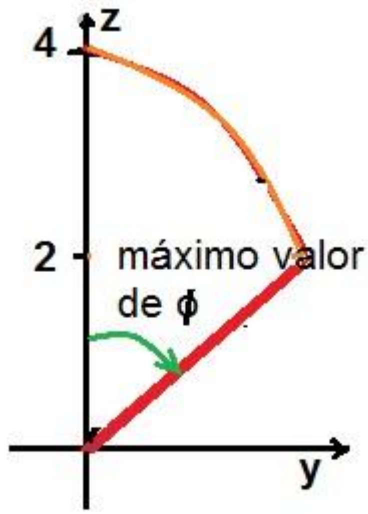
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

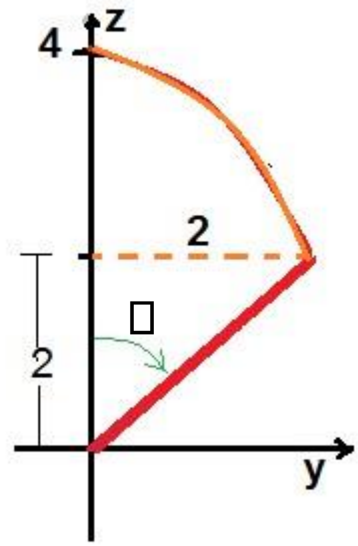
El ángulo ϕ, recordemos que se mide desde la parte positiva del eje z hasta ρ, recordemos que es la distancia del origen hasta un punto tridimensional. Observemos la proyección con varios valores de ρ.





Así que, el ángulo ϕ varía desde 0 hasta el cono y el valor de ρ varía desde 0 hasta la esfera. Pero la ecuación de la esfera y el cono están dados en coordenadas rectangulares, hay que convertirlos a esféricas. La conversión del cono a esféricas no es necesaria. Es más fácil hacer lo siguiente:





$$Tan(\phi) = \frac{2}{2}$$

$$Tan(\phi) = 1$$

$$\phi = Tan^{-1}(1)$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

Recordemos que la intersección de las dos gráficas se da en $z = 2$ y la curva que se forma es una circunferencia de radio 2.

La ecuación de la esfera en rectangulares es $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$. Vamos a convertirla en coordenadas esféricas.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

$$\rho^2 = 4\rho Cos(\phi)$$
$$\rho^2 - 4\rho Cos(\phi) = 0$$

$$\rho[\rho - 4Cos(\phi)] = 0$$

$$\rho - 4Cos(\phi) = 0$$

$$\rho = 4Cos(\phi)$$

Luego, la variación de θ, $\phi\ y\ \rho$ es:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \rho \leq 4Cos(\phi)$$

Así que, el volumen del sólido en el sistema de coordenadas esféricas es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4Cos(\phi)} \rho^2 Sen(\rho) d\rho d\phi d\theta$$

Ejemplo*:*

Convertir la integral $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$ al sistema de coordenadas esféricas.

Esta integral es difícil de evaluar utilizando coordenadas rectangulares, pero se vuelve fácil si cambiamos a coordenadas esféricas.

La expresión a integrar (integrando) $z\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho Cos(\phi)\rho$ en coordenadas esféricas.

Grafiquemos el sólido

$$-3 \leq x \leq 3$$

Proyección del sólido en el plano xy

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$$

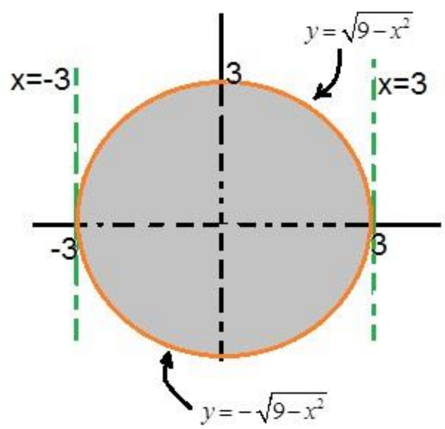
$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9-x^2}$$

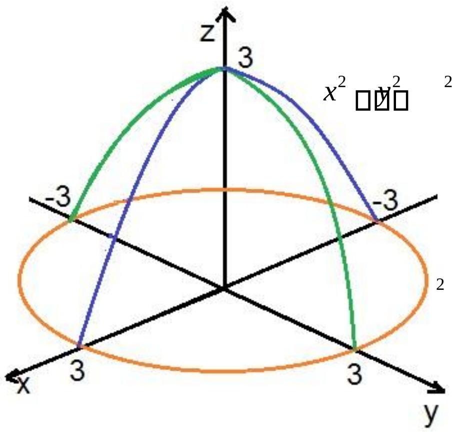
Circunferencia de radio 3

La siguiente figura es la proyección del sólido en el plano xy. Dado que es toda la circunferencia el ángulo θ varía de 0 a 2π.



Los límites de integración en z son $0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$. Comienza en $z=0$ (plano xy) hasta $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, que es una esfera de radio 3.

Como z comienza a variar de cero, significa que la proyección en el plano xy es también la "tapadera" inferior del sólido y la esfera de radio 3 es la "tapadera" superior del sólido.



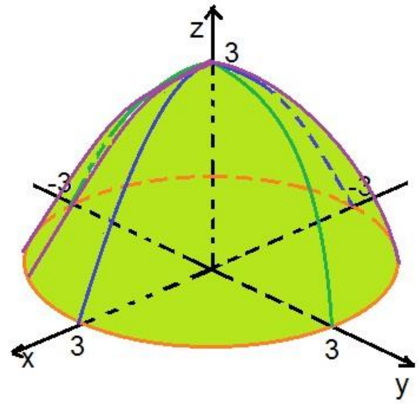
z 9

x^2 y^2 2

2 9

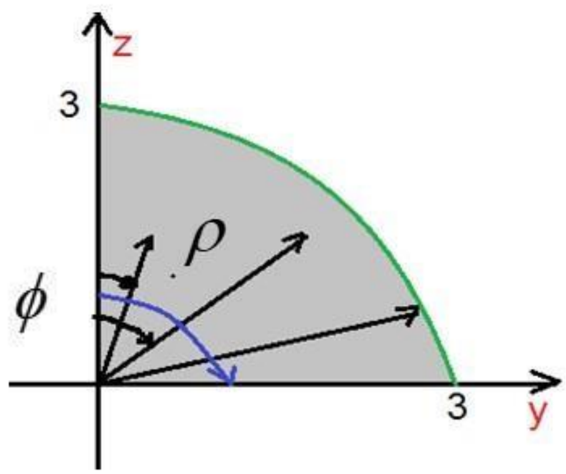
x

y



La variación de ϕ es de cero a $\frac{\pi}{2}$

La variación de ρ es de cero a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es decir $\rho = 3$



Proyección del sólido en yz

Luego, resumiendo, la variación de θ, ρ y ϕ es:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \rho \leq 3$$

Por lo tanto la integral $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$ convertida al sistema de coordenadas esféricas es:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} \rho Cos(\phi)\rho\rho^2 Sen(\rho)d\rho d\phi d\theta$$