UNIDAD V: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO DIFERENCIAL)

REGLA DE LA CADENA

Teorema: *(regla de la cadena: una sola variable independiente)*
Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$, siendo g y h funciones diferenciables de t, entonces:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo: Siendo $w = x^2y - y^2, \quad x = e^{-t}, \quad y = \cos(t)$, hallar $\frac{dw}{dt}$.
Solución:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (2xy)(-e^{-t}) + (x^2 - 2y)(-sen(t))$$

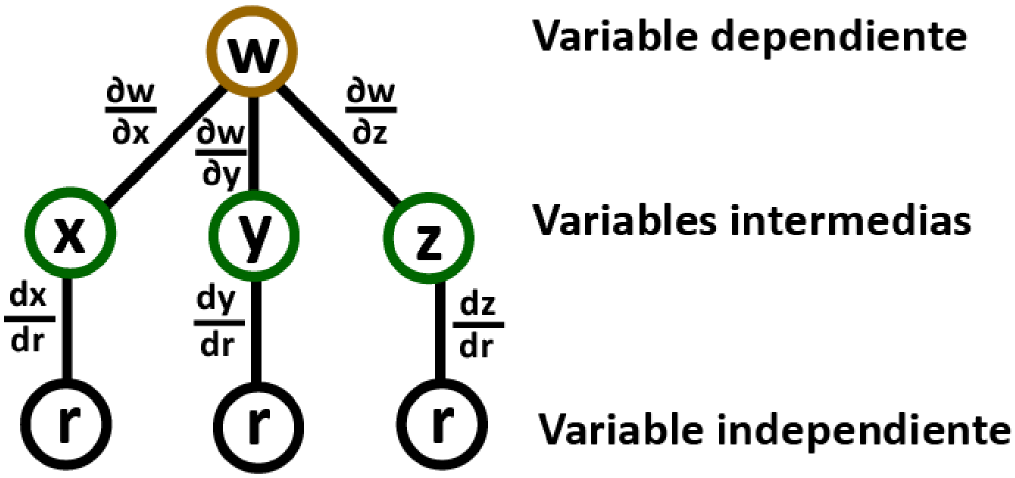
Para variables intermedias $x_1, x_2, \dots, x_n$, que dependen de una sola variable t, siendo $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces se tiene que:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x^2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Por ejemplo, si se tiene que $w = f(x, y, z)$ y, además, $x = g(r), \quad y = h(r), \quad z = i(r)$, entonces:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dr}$$

Esquemáticamente sería:

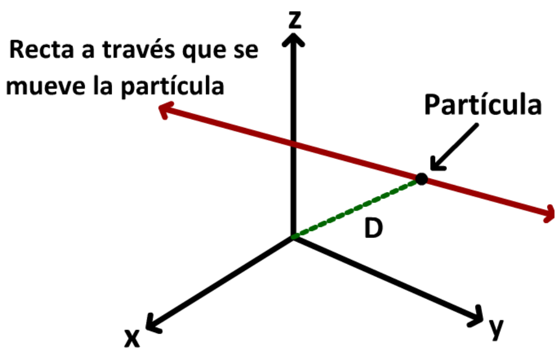


Ejemplo:

Una partícula viaja siguiendo una trayectoria recta dada por las ecuaciones paramétricas siguientes: $\boldsymbol{x = 1 + t}$, $\boldsymbol{y = 2 - t}$, $\boldsymbol{z = 3 + 2t}$. ¿A qué ritmo varía la distancia del origen a la partícula cuándo $\boldsymbol{t = 0}$?

Solución:

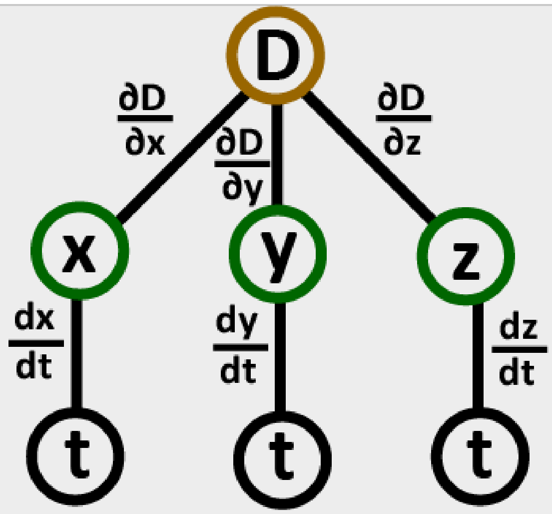
Lo que se pide es la velocidad instantánea de la distancia respecto al origen.



Distancia del origen a la partícula

$$D = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Velocidad instantánea de la distancia anterior

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial D}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial D}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Como $x = 1 + t$, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$y = 2 - t, \ \ entonces\ \frac{dy}{dt} = -1$$

$$z = 3 + 2t, \ \ entonces\ \frac{dz}{dt} = 2$$

Por lo tanto,
$$\frac{dD}{dt}=\frac{\partial D}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial D}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial D}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(1)+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(-1)+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(2)$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{t=0}=?$$

Como $x=1+t,\ \ y=2-t,\ \ z=3+2t$; entonces, si $t=0,\ \ x=1,\ \ y=2,\ \ z=3$.

$$\frac{dD}{dt}=\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}\right)(5)=\frac{5}{\sqrt{11}}$$

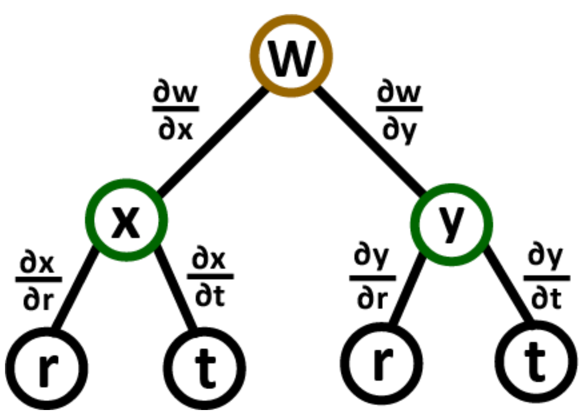
La distancia de la partícula al origen varía a la razón de $\frac{5}{\sqrt{11}}$ unidades lineales / segundo, cuando $t=0$.

Teorema: *(regla de la cadena: dos variables independientes)*
Sea $w=f(x,y)$, *donde* f *es una función diferenciable de* x *e* y. *Si* $x=g(s,t)$ *e* $y=h(s,t)$ *son tales que las primeras parciales* $\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial t}$ *existen todas, entonces* $\frac{\partial w}{\partial s}$ *y* $\frac{\partial w}{\partial t}$ *existen y están dadas por:*

1) $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$
2) $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Ejemplo: Usar la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ siendo $w=4xy,\ \ x=r^2-t^3,\ \ y=\frac{t}{r}$.
Además, evaluar dichas derivadas parciales para $r=2$ y $t=3$.

Solución:



$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial w}{\partial r}=(4y)(2r)+(4x)\left(-\frac{t}{r^2}\right)$$
$$\frac{\partial w}{\partial r}=8ry-\frac{4xt}{r^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (4y)(-3t^2) + (4x)\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -12yt^2 + \frac{4x}{r}$$

Se pide evaluar las dos derivadas parciales para $r = 2 \;\; y \;\; t = 3.$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 8ry - \frac{4xt}{r^2} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -12yt^2 + \frac{4x}{r}$$

Cuando $r = 2 \;\; y \;\; t = 3$

$$x = r^2 - t^3 \rightarrow x = 2^2 - 3^3 = -23$$

$$y = \frac{t}{r} \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Evaluando las derivadas parciales.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 8ry - \frac{4xt}{r^2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=2\\t=3}} = 8(2)\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{4(-23)(3)}{(2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=2\\t=3}} = 24 + 69 = 93$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -12yt^2 + \frac{4x}{r}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{\substack{r=2\\t=3}} = -12\left(\frac{3}{2}\right)(3)^2 + \frac{4(-23)}{2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{\substack{r=2\\t=3}} = -162 - 46 = -208$$

NOTA: *Se puede obtener las derivadas parciales sin necesidad* $\frac{\partial w}{\partial r}$ *y* $\frac{\partial w}{\partial t}$ *de utilizar la regla de la cadena, sustituyendo las expresiones de las variables intermedias en* $w = xy$*. Resultaría una función* w *en términos de* r *y* t*, desapareciendo las variables intermedias (variables* ***x, y****).*