UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS

Asignatura: Matemática III
Ciclo: I / 2019

GUIA DE DISCUSIÓN No 5
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CALCULO INTEGRAL)

I. INTEGRALES DOBLES

En los ejercicios del 1 al 4 evaluar la integral propuesta

1) $\displaystyle\int_{y}^{2y} \frac{y}{x-x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{o}^{y^2} \left(xy+2x-x^2+x^3-4y^2x^4\right)dx$

2) $\displaystyle\int_{1}^{x^2} \left(x\ln(y)\right)dy$

4) $\displaystyle\int_{x}^{\pi/2} \cos^2(y)sen^2(y)dy$

Dibujar la región de integración para cada integral iterada y en seguida, cambiar el orden de integración y comprobar que ambos órdenes llevan al mismo resultado.

5) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} x\,y\,dxdy$

6) $\displaystyle\int_{o}^{1}\int_{o}^{x^2} \left(x+2y\right)dydx$

7) $\displaystyle\int_{3}^{5}\int_{x^2-6x+12}^{3+\sqrt{8x-24}} dydx$

8) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$

9) $\displaystyle\int_R\int (x^3y^2)dA$ donde $R=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 0\le x\le 2, -x\le y\le x\right\}$

10) $\displaystyle\int_R\int (2xy+y^3)dA$ donde $R=\left\{(x,y)\in R^2 \,/ -1\le x\le 2, 0\le y\le 2\right\}$

11) $\displaystyle\int_{o}^{2}\int_{o}^{x^2} \left(x+3\right)dydx$

12) $\displaystyle\int_{o}^{1}\int_{o}^{2x} \left(x+2y\right)dydx$

13) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{\ln(y)}^{y^2+1} dxdy$

14) $\displaystyle\int_{o}^{2}\int_{x^2}^{2x} dy\,dx$

Hallar el valor de las integrales siguientes

15) $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dydx$

16) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 sen(y^3) dydx$

17) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{Sen(y)}{y} dydx$

18) $\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{x}} \frac{3}{4+y^3} dydx$

19) $\int_0^{\frac{1}{16}} \int_{y^{0.25}}^{0.5} \cos(16\pi x^5)\, dx\, dy$

20) $\int_0^2 \int_{0.5y}^{y} \frac{y}{x^2+y^2} dx\, dy + \int_2^4 \int_{0.5y}^{2} \frac{y}{x^2+y^2} dx\, dy$

Usar integrales dobles para calcular el área de la región limitada por las graficas cuyas ecuaciones se dan.

21) $y = x^2 - 9$; $y = 9 - x^2$

22) $2x - 3y = 0$, $x + y = 5$, $y = 0$

23) $y = x^2$; $x = y^2$

24) $x = y^2, y - x = 3,$ $y = -3$, $y = 2$

25) $x = y^2, x = 2y - y^2$

26) $y = e^x$, $y = \sqrt{x-1}$, $y = 1$, $y = 2$

27) $y = \sqrt{x-1}$, $6 - x = (y-1)^2$, $x + y = 1, y \geq 0$

28) $y = x^2$; $y = 2 - x$, $y = 0$

29) $x = -y^2$; $y = x + 2$

30) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; $x = -6$; $x = 6$; $y \geq 0$

31) $y = |x-4|$, $y = -x^2 + 8x - 10$

32) $y = x$, $xy = 8$, $|x| = 4$

33) $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, $y = x^2 - 2$

34) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$, $y = 0$

En los ejercicios del 35 al 40 calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

35) $z = 0$, $z = x$, $y = 0$, $y = x$, $x = 0$, $x = 5$

36) $z = 0$, $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $y = x$ en el primer octante

37) $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4,$ en el primer octante. Utilizar el orden $dydx$

38) $z = \ln(x)$, $z = 0$, $x = 1,$ $x = 4$, $y = 2,$ $y = 6$

39) $z = 6 - x - y$, $z = 0$, $x = 4 - y^2$, $y = 1$, $x = 0$

40) $x^2 + z^2 = 1,$ $y^2 + z^2 = 1,$ $z = 0,$ en el primer octante. Utilizar el orden $dydz$

41) El volumen de un sólido viene dado por $V = \int_0^1 \int_0^y \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \int_1^2 \int_0^{2y - y^2} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$.
Escriba la integral que representa el volumen del mismo sólido utilizando el orden $dydx$.

En los ejercicio del 42 al 48 use coordenadas polares para evaluar las siguientes integrales dobles

42) $\int_R \int \left(1 - x^2 - y^2\right) dA$, R: región encerrada por $x^2 + y^2 = 1$

43) $\int_R \int \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dA$, R: región limitada por $x^2 + y^2 = 16$

44) $\int_R \int e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} dA$, R: región encerrada por $x^2 + y^2 = 1$

45) $\int_R \int y dA$, R: región limitada por $x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} - y$

46) $\int_R \int x dA$, R: región acotada por $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{4}$

47) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4 - x^2}}^{\sqrt{4 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

48) $\int_R \int e^{-\left(x^2 + y^2\right)} dA$, R: $x^2 + y^2 \le 4,$ $x \ge 0,$ $y \ge 0$

49) Convertir $\int_0^2 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{1/2}\, dy\, dx$ a una integral doble en coordenadas polares equivalente.

50) Utilice integrales dobles en coordenadas polares para plantear el volumen del sólido limitado por $z=0$, $z=1$; y la superficie dada por $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

Usar un sistema de coordenadas apropiado para calcular el volumen del sólido indicado.

51) Debajo de $z=9-x^2-y^2$, sobre $z=0$, al exterior de $x^2+y^2=4$

52) Debajo de $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, sobre $z=0$, dentro de $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

53) Interior al hemisferio $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, y al cilindro $x^2+y^2-4x=0$, sobre el plano xy

54) Debajo de $z=6-x-y$, en el primer octante

55) $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, en el primer octante

II. INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS RECTANGULARES

En los ejercicios del 1 al 6, grafique la región de integración y evalúe cada una de las integrales.

1) $\int_0^2 \int_1^3 \int_0^{3^{-x}} dydxdz$

2) $\int_0^{2\pi} \int_2^5 \int_{\cos(x)}^{-\frac{1}{2\pi}x+4} sen(x)\, dzdydx$

3) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x dzdydx$

4) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{4-z} dxdzdy$

5) $\int_1^2 \int_y^4 \int_0^{\ln(x)} y e^z dzdxdy$

6) $\iiint_Q xyz\, dxdydz, \quad Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$

En los ejercicios del 7 al 13 utilizar integrales triples para encontrar el volumen del sólido limitado por las graficas cuyas ecuaciones se dan.

7) $z=\dfrac{x^2}{2}$, $z=\dfrac{x^2}{2}+1$, $y=0$, $y=4$, $x=-2$, $x=2$

8) $x^2+y^2=9$, $x+y+z-6=0$, $z=0$, en el primer octante.

9) $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$, en el primer octante.

10) $z=6-x-y$, $x=4-y^2$, $x=0$, $y=1$, $z=0$, en el primer octante.

11) $x=y^2$, $z=-\dfrac{3}{16}x^2+4$, $x=4$, $y=0$, $z=0$

12) $z=9-x^2$, $y=2-x$, $y=0$, $z=0,\ x\geq 0$

13) $z=xy$, $z=0,$ $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$

Para los ejercicios del 14 – 16, escriba las otras cinco integrales iteradas equivalentes (cambio de orden de integración)

14) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\ dzdxdy$

15) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\ dydzdx$

16) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dzdydx$

17) Escriba las 6 integrales que representan el volumen del sólido limitado por

$z=x+y^2$, arriba del plano $x+z=1$ y debajo de $z=1$. Calcule el volumen.

III. INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

En los ejercicios uno y dos grafique la región de integración y evalúe cada una de las integrales siguientes convirtiéndolas en coordenadas cilíndricas.

1) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$

2) $\displaystyle\iiint_Q xdV$, Q es el sólido limitado por las gráficas de $x = 4y^2 + 4z^2$, $x = 4$

En los ejercicios del 3 al 11 utilice integrales triples en coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas.

3) $x^2 + y^2 = 1$, $z = x$ en el primer octante.

4) $x^2 + y^2 + z = 1$, $z = 0$

5) Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y arriba del cono $x^2 + y^2 = z^2$

6) $y = x^2 + z^2$, $y = 4$ y el semiespacio $z \geq 0$

7) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 5\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$, $z = 10$

8) $y = x^2 + z^2$, $y + x^2 + z^2 = 6$

9) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $z = 0$, $z = 1$

10) Arriba del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y abajo del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

11) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 12 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $z = 8$

12) Sea Q el sólido comprendido entre las gráficas de $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$ e interior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Escriba la integral triple que representa el volumen del sólido en coordenadas cilíndricas.

IV. COORDENADAS ESFÉRICAS

Grafique la región de integración y evalúe cada una de las integrales siguientes.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec(\phi)} \rho^2 sen(\phi) d\rho d\theta d\phi$

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec(\phi)}^{2\cos(\phi)} \rho^2 sen(\phi)\, d\rho d\phi d\theta$

En los ejercicios del 3 al 9 utilice integrales triples en coordenadas esféricas para encontrar el volumen del sólido limitado por las graficas de las ecuaciones dadas.

3) $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

4) $z^2 = 2x^2 + 2y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, primer octante

5) Dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y fuera de $z^2 = x^2 + y^2$

6) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$, $z = 3$

7) $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = -2$, $z = 0$

8) Entre $x^2 + y^2 + z^2 = 4,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, y dentro de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

9) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y arriba del plano $z = 3$

10) Utilizar integrales triples en coordenadas esféricas para plantear el volumen del sólido encerrado por las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ $z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

V. EJERCICIOS VARIOS

Para los ejercicios del 1 al 8, utilizar el método más adecuado para resolver las integrales.

1) $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\;dzdydx$$

2) $$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\;dzdydx$$

3) $$\int_2^4\int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}}\int_0^{\sqrt{4y-y^2-x^2}}dzdxdy$$

4) $$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{1-x^2-y^2}^4 dzdxdy$$

5) $$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dzdydx$$

6) $$\int_0^2\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{\sqrt{x-x^2}}(4z+1)\;dydxdz$$

7) $$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2-y^2}}dzdydx$$

8) $$\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 dzdydx+\int_1^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 dzdydx$$