1. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES CON ALGUNOS TÉRMINOS FRACCIONARIOS CON VARIABLE EN EL DENOMINADOR

Algunos ejemplos de este tipo de inecuaciones son:

$$4 \geq \frac{2}{x+1} \qquad \frac{1}{x} < 5 \qquad \frac{2}{x} + x \geq \frac{x}{x+1}$$

Una forma de resolver estas inecuaciones es proceder de la siguiente manera:

1. Se trasladan todos los términos a un solo miembro de la desigualdad.
2. Se suman o se restan las fracciones para transformarlas (el símbolo de la desigualdad puede ser también transformado).
3. Se factoriza (si es posible) el numerador y el denominador.
4. Luego se encuentran las raíces de cada uno de los factores, tanto del numerador como del denominador.
5. Posteriormente se construye un cuadro de variación.

Observaciones:

- *En el conjunto solución hay que excluir los valores que hacen cero el denominador.*
- *Si al resolver este tipo de inecuaciones, ejecutamos bien los 5 pasos anteriores no hay espacio para equivocarnos.*

Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{3}{x} \leq 2$

Solución:

$$\frac{3}{x} \leq 2$$

Notemos que: x puede tomar valores positivos y negativos.
Si trasladamos a multiplicar la x al miembro derecho habrá que considerar los dos casos, es decir, primero suponiendo que x es positivo y después suponiendo que x es negativo.
Resolver la desigualdad de esta manera es un poco complicado.

Por esta razón, lo mejor es seguir los pasos que se dieron al inicio.

$\frac{3}{x} \leq 2$	*Trasladar todo a un solo miembro de la inecuación.*
$\frac{3}{x} - 2 \leq 0$	*Hacer una sola fracción, es decir, en este caso es efectuando la resta.*
$\frac{3-2x}{x} \leq 0$	*Factorizar donde se pueda. En este caso ya está listo.*
Numerador $\frac{3-2x}{x}$ Denominador	*Encontrar las raíces de los factores, es decir, los valores que hacen cero cada factor.*
$3 - 2x = 0 \rightarrow 3 = 2x$ $\frac{3}{2} = x$	*Encontremos el valor que hace cero al numerador.*
$x = 0$	*Encontremos el valor que hace cero al denominador.*
(cuadro de variación abajo)	*Construir el cuadro de variación.*

	-∞ a 0	0 a 3/2	3/2 a +∞
3 - 2x	+	+	-
x	-	+	+
$\frac{3-2x}{x}$	-	+	-

Resolver $\frac{3}{x} \leq 2$ equivale a resolver $\frac{3-2x}{x} \leq 0$ y según el cuadro de variación, este cociente es menor que cero o negativo en:

$\boldsymbol{C.S} = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Observación: *Aunque el símbolo de la desigualdad es $\leq$, que nos indica que el cociente es menor o es igual a cero, hay que quitar los elementos que hacen "cero" el denominador.*

Ejemplo: Resolver $x \geq \frac{2}{x+1}$

Solución:

$x \geq \frac{2}{x+1}$	*Trasladar todo a un solo miembro.*

$$x-\frac{2}{x+1}\geq 0$$

$$\frac{x(x+1)-2}{x+1}\geq 0$$

Efectuar la suma o resta de fracciones.

$$\frac{x^2+x-2}{x+1}\geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}\geq 0$$

Factorizar donde se pueda.

$$x+2=0 \qquad x-1=0 \qquad x+1=0$$
$$x=-2 \qquad x=1 \qquad x=-1$$

Encontrar las raíces de los factores

	-∞ a -2	-2 a -1	-1 a 1	1 a +∞
x + 2	-	+	+	+
x - 1	-	-	-	+
x + 1	-	-	+	+
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)}$	-	+	-	+

Construir un cuadro de variación

$$C.S = [-2,-1[\cup[1,+\infty[$$

Como la expresión es mayor o igual que cero el **-1** hace cero el denominador por eso no se coloca en la solución, obsérvese que en **-1** está abierto el intervalo.

2. FUNCIONES

Una función $\boldsymbol{f}$ desde un conjunto **A** hacia un conjunto **B** es una regla que asigna a cada uno de los elementos, simbolizados por **"x"**, en el conjunto **A** y un elemento único **"y"** en **B**. El conjunto **A** se llama dominio de $\boldsymbol{f}$. El conjunto de elementos correspondiente **"y"** en **B** se denomina contradominio, recorrido o rango de $\boldsymbol{f}$.

De la definición podemos decir, que la regla que asigna (o regla de asignación) es una fórmula o ecuación matemática, por ejemplo:

$$i)\ \boldsymbol{y = 2x} \quad ii)\ \boldsymbol{y = \sqrt{x+2}} \quad iii)\ \boldsymbol{c = 0.05k + 10} \quad iv)\ \boldsymbol{p = e^{-2t}}$$

La expresión $\boldsymbol{y} = \pm\sqrt{\boldsymbol{x}}$ no es función, ya que a todo elemento de los reales positivos le asigna 2 valores

NOTA: *Estudiaremos solamente funciones reales de variable real. Es decir, funciones en donde el dominio son todos los reales o un intervalo.*

2.1 VALOR DE UNA FUNCIÓN

Sea $\boldsymbol{f}$ una función, el número $\boldsymbol{y}$ del contradominio o rango que corresponde a un número $\boldsymbol{x}$ escogido en el dominio es el valor de la función para un elemento $\boldsymbol{x}$ en **A**, o la imagen de $\boldsymbol{x}$ en **B**; y se denota por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Este símbolo se lee "$\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{x}$" o "$\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$" y se expresa $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

El valor de **"y"** depende de la elección de **"x"**, por lo que se le denomina variable dependiente; a **"x"** se le llama variable independiente.

Una forma de representar una función es la siguiente:

$$\begin{array}{l} f: R \longrightarrow \\ \quad x \longmapsto y = f(x) \end{array}$$

Así, por ejemplo

$$\begin{array}{l} c: [0, +\infty] \longrightarrow R \\ \qquad k \longmapsto c(k) = 2K \end{array}$$

Donde se entiende que esta función **C**, le asigna a todo número real "$\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{0}$" un valor "$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{2k}$" en R

Es decir, a cada uno de los elementos del intervalo, simbolizados por **k**, le asignamos un valor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{k})$ igual al doble de los valores de **k**.

Ejemplos:

$si\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},\quad entonces\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$
$si\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0.5},\ entonces\ \ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{0.5}) = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{0.5}) = \boldsymbol{1}.El\ valor\ de\ la\ función\ cuando\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0.5}\ es\ 2$
$si\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{2},\ entonces\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{4}.El\ valor\ de\ la\ función\ cuando\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{2}\ es\ 4$
$si\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{6},\ \ entonces\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{6}) = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{6}) = \boldsymbol{12}$

Otros ejemplos de funciones:

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2x} - \boldsymbol{5}$

   Algunos valores de $\boldsymbol{f}$. Cuando $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{3}$

$$\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{3}) = (-\boldsymbol{3})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2}(-\boldsymbol{3}) - \boldsymbol{5}$$

$$= \boldsymbol{9} - \boldsymbol{6} - \boldsymbol{5}$$

$$= -\boldsymbol{2}$$

Es decir, que cuando $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{3}$, el valor de la función es – $\boldsymbol{2}.$

Cuando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{5}$$

$$= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} - \boldsymbol{5}$$

$$= -\boldsymbol{5}$$

Es decir, que cuando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$ el valor de la función es $-\boldsymbol{5}.$

2) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0.05k} + \boldsymbol{10}$, donde
   T: tarifa en dólares (variable dependiente)
   k: consumo mensual en Kilowatt/hora (variable independiente)
   La tarifa T depende del consumo mensual k.

3) Si A: área de un triángulo en cm^2

b: base de un triángulo en cm

h: altura de un triángulo en cm

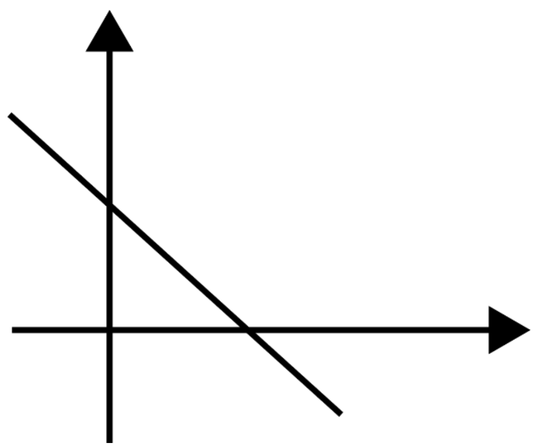
$$\boldsymbol{A(b,h)=\frac{bh}{2}}$$

Esta regla de asignación corresponde a una función de 2 variables independientes (El área depende de la base b y de la altura h).

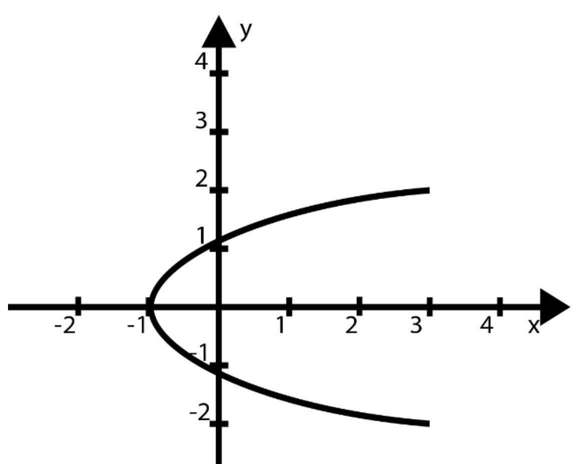
NOTA: *En esta asignatura trabajaremos solamente con funciones de una sola variable independiente.*

La gráfica de una función *f* es el conjunto de puntos $\{(x,y)\ /y=f(x), x\ en\ el\ dominio\ de\ f\}$ **en el plano cartesiano,** como consecuencia de la definición, una función se caracteriza geométricamente por el hecho de que toda recta vertical que corta su gráfica lo hace exactamente en un punto. (Criterio de la recta vertical)

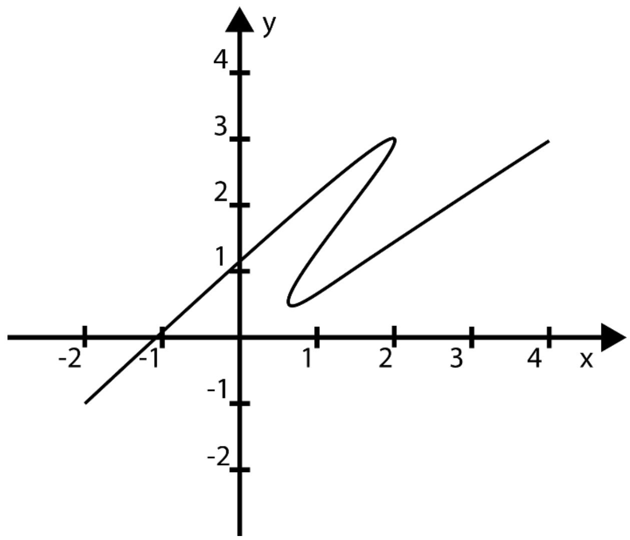
a)



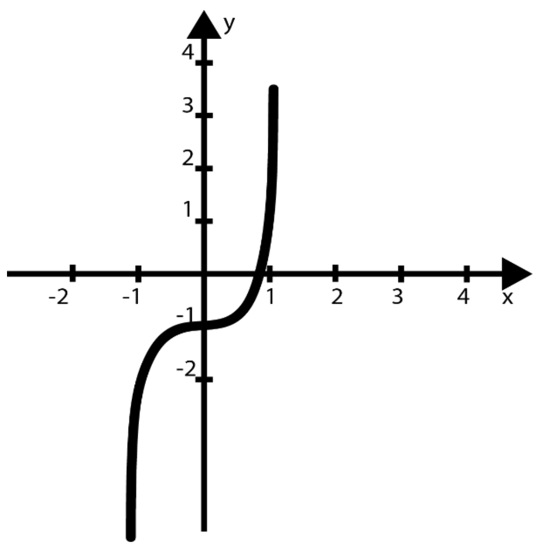
b)



c)

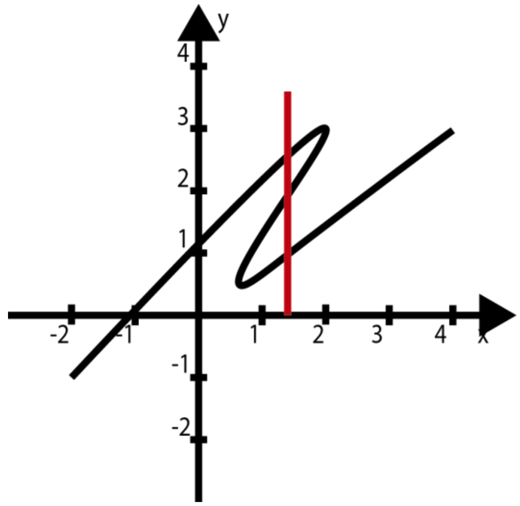


d)



Las gráficas ***a*** y ***d*** representan funciones ya que al trazar líneas verticales éstas cortan al gráfico en un solo punto; mientras que los gráficos ***b*** y ***c*** no representan funciones ya que al trazar líneas verticales algunas de ellas cortan al gráfico en más de un punto.

En algunas partes las rectas verticales cortan la gráfica en tres puntos.



2.2 TIPOS DE FUNCIONES

2.2.1 FUNCIÓN POLINÓMICA

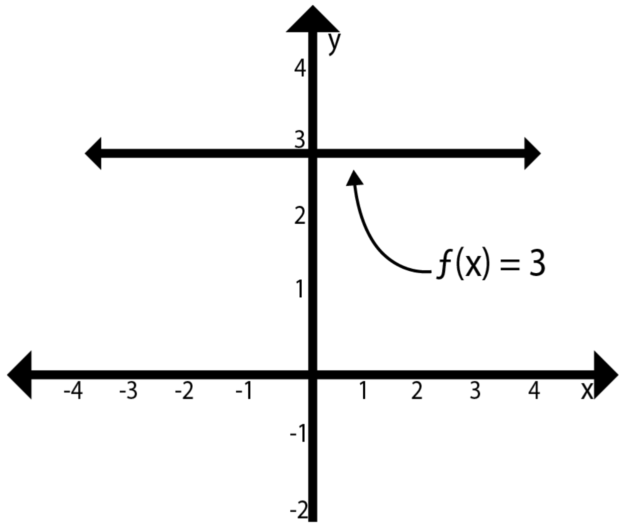
Si una función tiene la forma $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$ en donde n es un entero no negativo, se dice que $\boldsymbol{f}$ es una función polinómica de grado n. Los números $\boldsymbol{a_i, i = 0, \ldots, n}$, llamados coeficientes, son números reales.

El dominio de una función polinómica es el conjunto de todos los números reales.
Un ejemplo de una función polinómica de grado 5 es:
$\boldsymbol{g(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 7}$
Notemos que en el ejemplo anterior $\boldsymbol{a_5 = 3}$, $\boldsymbol{a_4 = 0}$, $\boldsymbol{a_3 = 2}$, $\boldsymbol{a_2 = -1}$, y $\boldsymbol{a_0 = 7}$
Algunos casos particulares de funciones polinómicas

$\boldsymbol{f(x) = a_0}$, **Función constante** **(polinomio de grado cero)**

Notemos que la gráfica de esta función constante es una recta horizontal, que pasa por el valor de $\boldsymbol{y = a_0}$

Ejemplos:
$\boldsymbol{f(x) = 3}$, En este caso particular, a cada elemento del dominio se le asigna siempre el valor de **3.**



$y = h(x) = -2$, no importa cuánto valga x, el valor de y siempre será **-2**

Ejercicio: Grafique la función $h(x) = -2$

$f(x) = a_1x + a_0 , a_1 \neq 0$ **Función Lineal(polinomio de grado uno)**

La gráfica de una función lineal o polinomio de grado uno es una línea recta, que tiene pendiente a_1 y cuyo intercepto con el eje **"y"** es a_0 **(Esta es la ecuación de la recta conocida por "ecuación pendiente-intercepto"**

Ejemplos:

$i)\ f(x) = 2x - 6, \quad ii)\ g(t) = 3t + 5, \quad iii)\ h(k) = -7k$

Así, por ejemplo, la pendiente de las funciones lineales anteriores, son respectivamente: $m = 2, \quad m = 3 \quad y \quad m = -7$ y el intercepto con el eje **"y"** son respectivamente **b=** $-$**6, b= 5 y b= 0**.

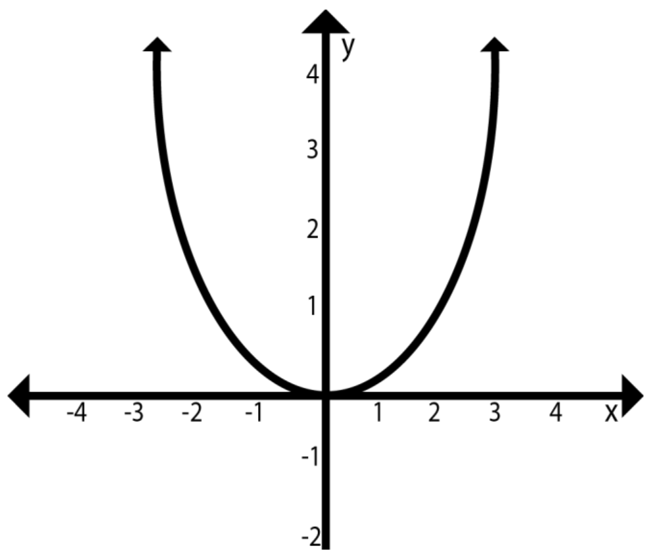
Recordemos que para graficar una línea recta bastan dos puntos de la gráfica para la función.

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0;\ a_2 \neq 0$ ***Función Cuadrática*** ***(polinomio de grado dos)***

Ejemplos:
$f(x) = 6x^2 + 2,\quad c(x) = x^2,\quad h(t) = -t^2 + 3t - 1$

La gráfica de esta función es la llamada parábola

Gráfica de $C(x) = x^2$



2.2.2 FUNCIÓN RACIONAL

Una función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en donde **P** y **Q** son funciones polinómicas, se denomina Función Racional.
El dominio de la función racional consiste en el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los que **Q(x)** es igual a cero. Ejemplos:

$f(x) = \frac{3}{2x-3}$ $\qquad g(x) = \frac{6x+1}{5x^3-2}$ $\qquad T(s) = \frac{3s^3-5s+1}{s^4-2}$

2.2.3 FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función f recibe el nombre de función algebraica si puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíz) a partir de polinomios. Automáticamente, cualquier función racional es una función algebraica.
Ejemplos:

$$i)\ f(x) = \sqrt{x^2+2} \quad ii)\ f(x) = \frac{6x+1}{5x^3-2} \quad iii)\ h(x) = \frac{x^4+9x^2}{x-\sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

Observación: *El ejemplo ii) es también función racional (cociente de dos funciones polinómicas)*

NOTA: *Toda función racional es algebraica.*

2.2.4 FUNCIONES TRANSCENDENTALES

Son aquellas que no son algebraicas, como las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
(Las estudiaremos más adelante...)

$\boldsymbol{f(x) = 3^x} \qquad \boldsymbol{g(x) = 5\log_2(x)} \qquad \boldsymbol{h(x) = -2\sin(3x)}$

2.2.5 FUNCIONES SECCIONADAS

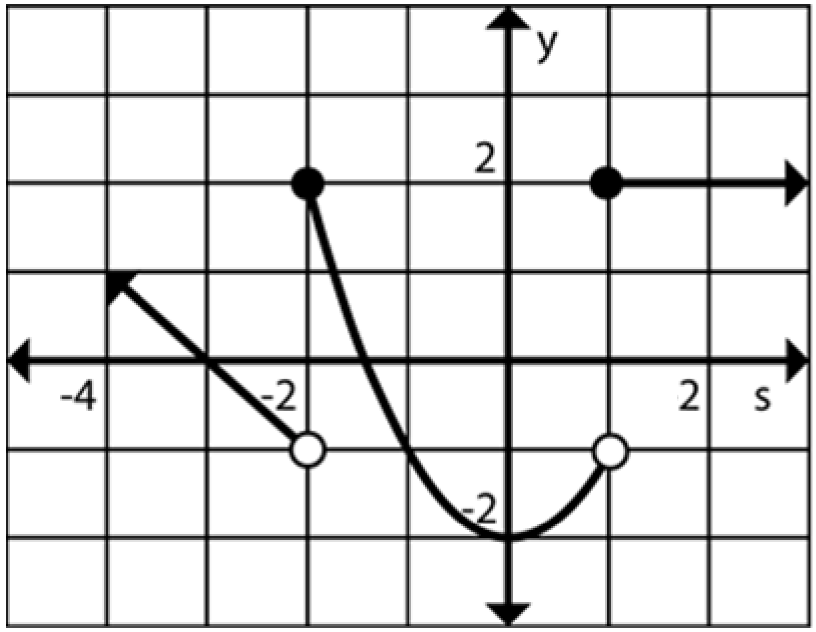
Una función $\boldsymbol{f}$ recibe el nombre de función seccionada si está definida por secciones; en donde cada sección tiene su regla de asignación y su dominio. Es decir, que cada sección es una función con su propio dominio.

Ejemplo:

$a)\ \boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{1-x} & \boldsymbol{si\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{si\ x > 1} \end{cases} \quad b)\ \boldsymbol{c(s)} = \begin{cases} \boldsymbol{-s-3} & , \boldsymbol{s < -2} \\ \boldsymbol{s^2-2} & , \boldsymbol{-2 \leq s < 3} \\ \boldsymbol{2} & , \boldsymbol{s \geq 2} \end{cases} \quad c)\ \boldsymbol{h(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\sin(x)}, & \boldsymbol{x \leq 0} \\ \boldsymbol{2^x} & , \boldsymbol{x > 0} \end{cases}$

En el literal a) la función f, posee dos secciones
En el literal b) la función c, posee tres secciones

La gráfica de la función del literal b) es la siguiente:



NOTA: *Las funciones seccionadas, se dan con frecuencia en la vida cotidiana. Por ejemplo, la tarifa eléctrica, la tarifa de impuesto sobre la renta, etc.*

2.2.6 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

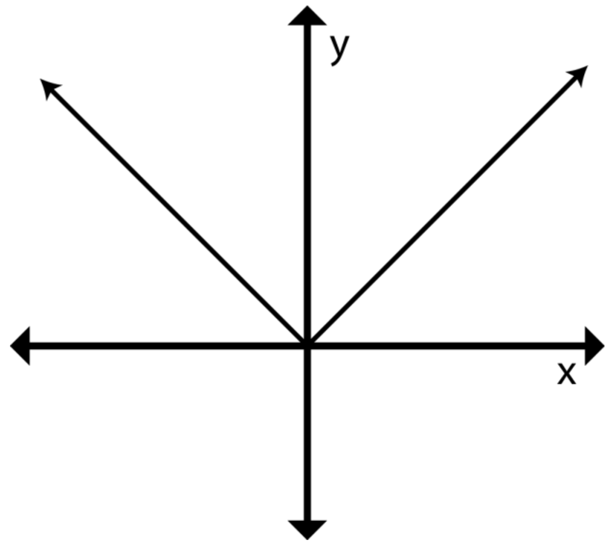
El valor absoluto de un número real $\boldsymbol{a}$ se define por $|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{0} \end{cases}$

Por lo tanto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{0} \end{cases}$

<u>Observemos que es un ejemplo de función seccionada</u>

Gráfica de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$

$$\boldsymbol{D}_{|\boldsymbol{x}|} = \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{R}_{|\boldsymbol{x}|} = [\boldsymbol{0}, +\infty[$$



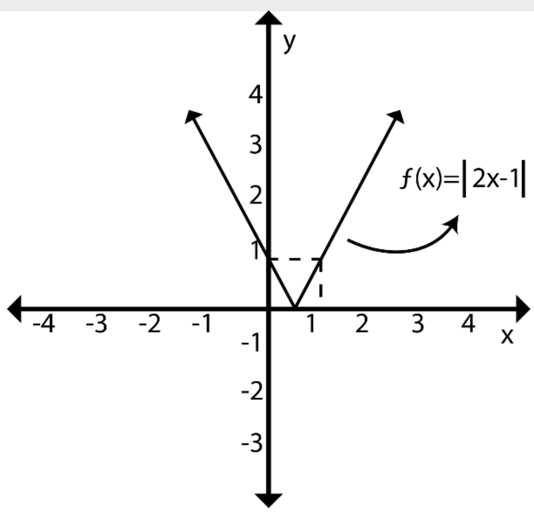
Ejemplo: Reescribir la función Valor Absoluto $f(x) = |2x - 1|$ como una función seccionada y graficarla.

Solución:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si \quad 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & si \quad 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x \geq 1/2 \\ -(2x-1) & si \quad x < 1/2 \end{cases}$$

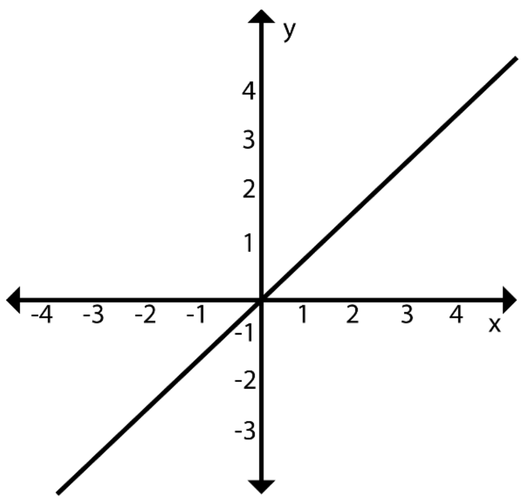
Resolviendo desigualdades



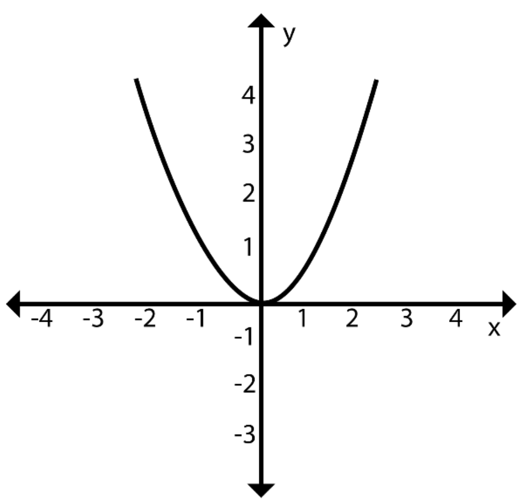
Graficando la función

Ejercicio: Reescribir la función Valor Absoluto $f(x) = |x - 1| - 2$ como una función seccionada y graficarla.

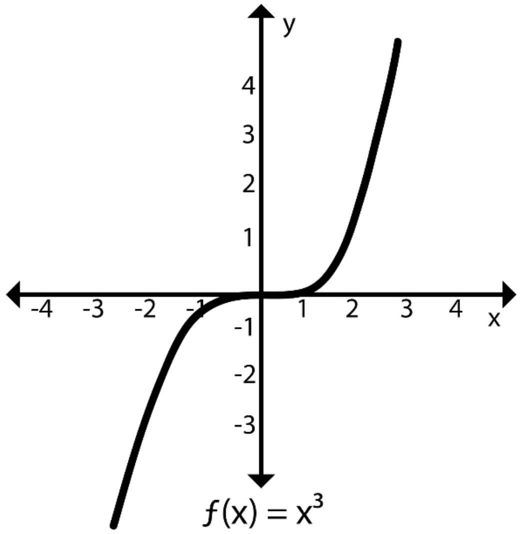
Algunas gráficas de funciones básicas



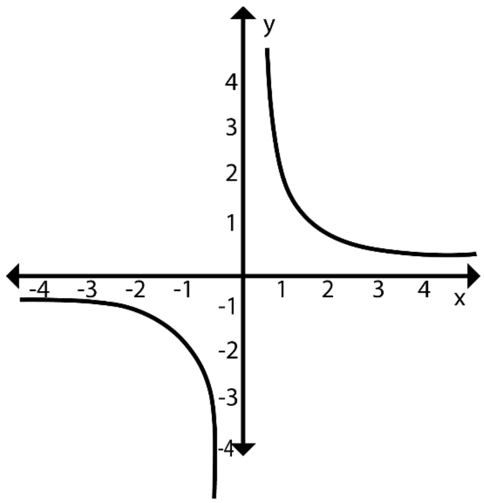
$f(x) = x$



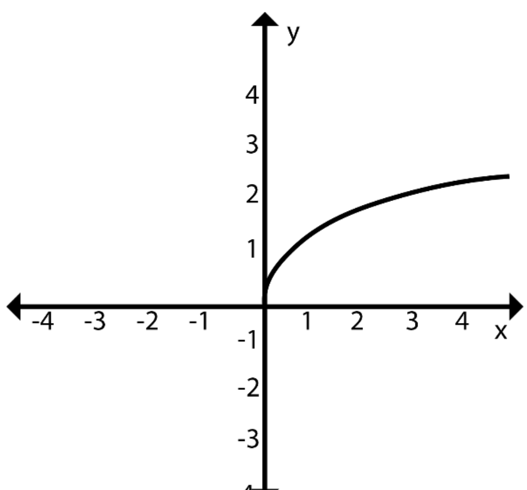
$f(x) = x^2$



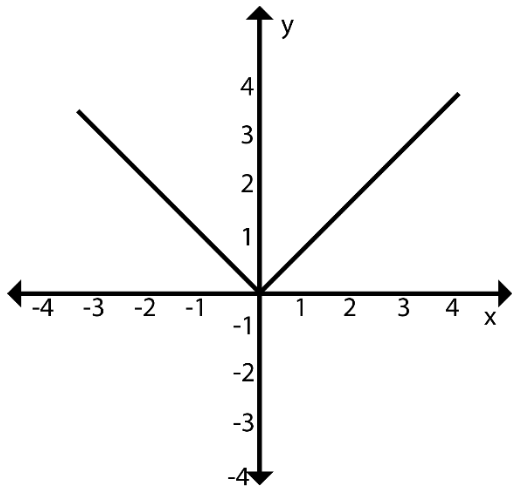
$f(x) = x^3$



$f(x) = 1/x$



$f(X)=\sqrt{x}$



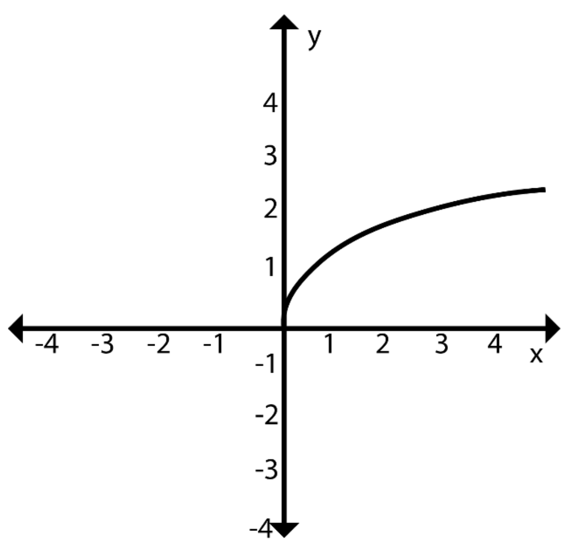
$f(x) = |x|$

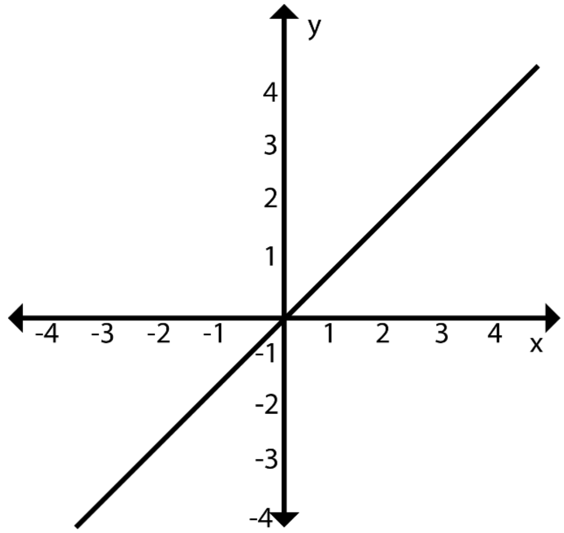
2.2.7 FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE

Una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ se dice que **<u>es creciente</u>** en un intervalo, si para cualquier elemento $\boldsymbol{x_1}\ y\ \boldsymbol{x_2}$ del intervalo, se tiene que: $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1}$ implica que $\boldsymbol{f(x_2)} > \boldsymbol{f(x_1)}$

Gráficamente podemos decir que cuando nos desplazamos a la derecha **(x se mueve a la derecha)** la gráfica asciende. En otras palabras, si los valores de la variable independiente **"x"** aumentan los valores de **"y"** (variable dependiente) también aumentan

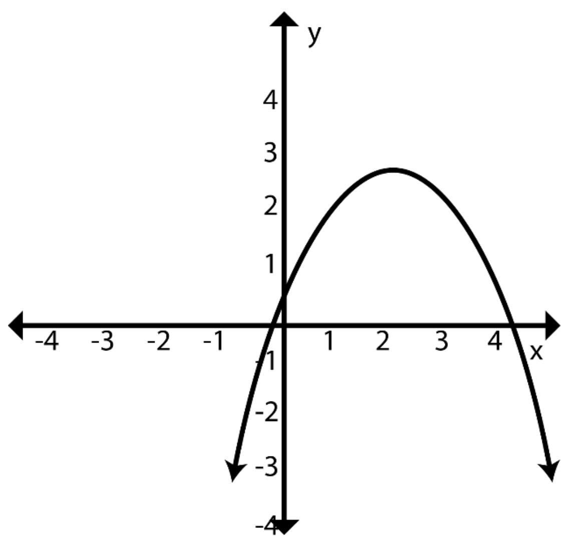
Ejemplos:

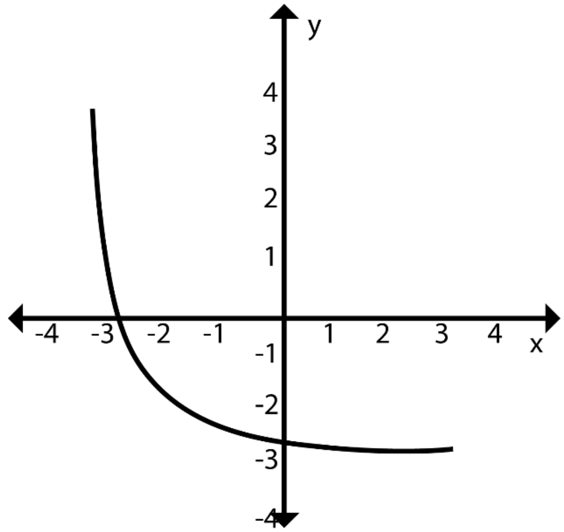




Una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ se dice que **<u>es decreciente</u>** en un intervalo, si para cualquier elemento $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ del intervalo, se tiene que: $\boldsymbol{x_2 > x_1}$ implica que $\boldsymbol{f(x_2) < f(x_1)}$
Gráficamente podemos decir que cuando nos desplazamos a la derecha **(x se mueve a la derecha)** la gráfica desciende. En otras palabras, si los valores de la variable independiente **"x"** aumentan los valores de **"y"** (variable dependiente) disminuyen

Ejemplos:





En estos últimos ejemplos, la primera función es creciente en el intervalo de $]-\infty, \mathbf{2}[$ y decreciente en el intervalo de $]\mathbf{2}, +\infty[$