1.1.2 SUMA DE MATRICES

Si dos matrices **A** y **B** poseen el mismo orden **m** x **n**, la suma de ellas es:

$$\boldsymbol{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}}$$

OBSERVACIÓN: *Las matrices se suman elemento a elemento*

Ejemplo 1: Determinar $\boldsymbol{A + B}$ si:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}$$

Solución:

$$\boldsymbol{A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+(-5) \\ -3+2 & 4+(-4) \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{pmatrix} 1+7 & 2-5 \\ -3+2 & 4-4 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

- **i)** A + B = B + A (conmutativa).
- **ii)** A + (B + C) = (A + B) + C (asociativa).

Pero solamente cumplen las propiedades antes descritas si y solo si las Matrices A, B y C son del mismo orden.

1.1.3 RESTA DE MATRICES

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices del mismo orden **m** x **n**, entonces:

$$\boldsymbol{A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{mxn}}$$

Ejemplo 2:

Dadas las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ hallar $\boldsymbol{A-B}$. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A - B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & -6-(-2) \\ 3-3 & 0-(-4) \\ -5-5 & 2-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & -6+2 \\ 3-3 & 0+4 \\ -5-5 & 2-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 4 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$$

1.1.4 PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA MATRIZ

Si $\boldsymbol{k}$ es un número real y $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden **m** x **n**, entonces:

$$kA = k(a_{ij})_{mxn} = (ka_{ij})_{mxn}$$

OBSERVACIÓN: *Al multiplicar un número real por una matriz, el resultado es otra matriz en donde cada elemento queda multiplicado por dicho número real.*

Ejemplo 3: Determinar $-2B$, si $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$-2B = -2\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(4) & -2(-3) \\ -2(2) & -2(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Si k y t son números reales, A y B son matrices del mismo orden, entonces:

- **i.** k (A+B) = kA+kB
- **ii.** (k+t) A= kA+tA
- **iii.** (kt) A = k(tA)

1.1.5 PRODUCTO DE MATRICES

Si $A\ y\ B$ son matrices de orden $m\ x\ n$ y $q\ x\ p$ respectivamente, el producto AB es posible si y sólo si:

$$n = q$$

Es decir, que el número de columnas de la matriz A tiene que ser igual al número de filas de la matriz B.

El resultado de multiplicar A con B (AB) es otra matriz C, donde:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{qj}$$

NOTA: *El orden de la matriz C es $m\ x\ p$.*

Por ejemplo, si una matriz A es de orden $5x4$ y la matriz B es de orden $4x3$ se puede efectuar el producto AB. La matriz resultante del producto AB es del orden $5x3$.

NOTA: *El producto de matrices****No*** *goza de la propiedad conmutativa, pero sí de la asociativa y distributiva, siempre y cuando los productos sean posibles:*

- **i)** A(BD) = (AB)D
- **ii)** A(B+D) =AB+AD
- **iii)** (A+B) D = AD+BD

Ejemplo 4: si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, determinar AB y BA.

Llámese C al resultado de efectuar el producto AB.

Primero observe que la matriz A es de orden $3 \ x \ 2$ y la matriz B es de orden **2** x **4**, es decir que AB es posible realizarlo y será una matriz C de orden **3** x **4**. Además, BA no es posible realizarlo (**B** es de orden **2** x **4** y **A** es de orden **3** x **2**).

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (-2 \ x - 3) + (1 \ x \ 4) = 10$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = (-2 \ x \ 1) + (1 \ x - 1) = -3$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = (-2 \ x \ 2) + (1 \ x - 6) = -10$$

$$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} = (-2 \ x \ 1) + (1 \ x \ 3) = 1$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (3 \ x - 3) + (-4 \ x \ 4) = -25$$

$$c_{22} = (3 \ x \ 1) + (-4 \ x - 1) = 7$$

$$c_{23} = (3 \ x \ 2) + (-4 \ x - 6) = 30$$

$$c_{24} = (3 \ x \ 1) + (-4 \ x \ 3) = -9$$

De la misma manera: $c_{31} = 14$, $c_{32} = -3$, $c_{33} = -26$ y $c_{34} = 17$.

Entonces:

$$AB = C = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -10 & 1 \\ -25 & 7 & 30 & -9 \\ 14 & -3 & -26 & 17 \end{pmatrix}$$ es de orden 3x4

Una manera más simple de efectuar el producto de matrices es el siguiente.
Si el producto **AB** es posible, coloque la matriz de la izquierda del producto (**A**) y la matriz de la derecha del producto (**B**), tal como se muestra en el siguiente cuadro:

En la parte media de las dos matrices se coloca

B \ A					
		-3	1	2	1
		4	-1	-6	3
-2	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
3	-4	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
22	55	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}

*los elementos de la matriz resultante **C.** Luego para obtener el elemento C_{11}, se utiliza la fila **1** de la matriz **A** con la columna **1** de la matriz **B**. Para obtener el elemento C_{12} se utiliza la fila **1** dela matriz **A** con la columna **2**, etc.*

OBSERVACIÓN: *se puede ir calculando los elementos de **C** en cualquier orden. Por ejemplo, si se quiere obtener el elemento C_{24}, se utiliza los elementos dela fila **2** de **A** y los de la columna **4** de la matriz **B**.*

Ejercicio: Continuar con el llenado de la siguiente tabla.

B \ A					
		-3	1	2	1
		4	-1	-6	3
-2	1	(-2) (-3) + (1) (4) = **10**			
3	-4	(3) (-3) + (-4) (4) =**-25**		(3)(2) +(-4) (-6) =**30**	
2	5	**14**	**(2)**(1) +**(5)** (-1) =**-3**	**-26**	**17**

Con la práctica, no es necesario colocar tanto detalle……. se sugiere seguir llenando las casillas que faltan.

1.1.6 INVERSA DE UNA MATRIZ

Definiciones preliminares:

Matriz cuadrada: es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas.

OBSERVACIÓN: *El orden de una matriz cuadrada de n filas y n columnas (**n** x **n**) se puede expresar solamente diciendo que es de orden **n**.*

Por ejemplo, una matriz de 2 filas y 2 columnas se dice que es de orden 2.

 Diagonal principal de una matriz cuadrada A: es el conjunto de elementos definidos por $\boldsymbol{a_{ij}}$ donde **i = j**.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal de la matriz cuadra **A**: son $\boldsymbol{a_{11} = 1}$, $\boldsymbol{a_{22} = 5}$, $\boldsymbol{a_{33} = 3}$

Matriz transpuesta: La traspuesta de la matriz **A** se denota por $\boldsymbol{A^t}$

Si $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, entonces $\boldsymbol{A^t} = (\boldsymbol{a_{ji}})$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C^t} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Nótese que las filas de **C** pasan a ser las columnas de $\boldsymbol{C^t}$.

Matriz identidad (I): es aquella ***matriz cuadrada*** cuyos elementos de la diagonal principal son "unos" y el resto de elementos son "ceros".

Ejemplos de matrices identidad:

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{2\,x\,2}} \quad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3\,x\,3}}$$

Propiedad: El resultado del producto de una matriz cuadrada cualquiera **A**, por la matriz identidad $\boldsymbol{I}$ del mismo orden de **A**, es la matriz **A**. Es decir: $\boldsymbol{AI = A}$ y $\boldsymbol{IA = A}$.

MATRIZ INVERSA

Si **A**, **B** e **I** son matrices cuadradas de orden **"n"** y se cumple que **AB = I** y **BA = I**, entonces se dice que **B** es la matriz inversa de **A** y viceversa.

Notación: La inversa de una matriz **A** se denota por $\mathbf{A^{-1}}$.