UNIDAD 4: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

4.1 RECTAS EN TRES DIMENSIONES

La distancia entre 2 puntos y las coordenadas del punto medio en el sistema de coordenadas en 3 dimensiones es una extensión del sistema de coordenadas en 2 dimensiones, así:

Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Punto Medio

$$Pm = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

De la misma manera, la ecuación canónica de la esfera es una extensión de la ecuación ordinaria de la circunferencia.

Ecuación canónica de la esfera:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, con centro de la esfera (x_0, y_0, z_0) y radio r.

Ejercicio: Hallar la ecuación de la esfera que tiene por extremos de un diámetro los puntos $(2, 3, 4)$ y $(-2, -3, 2)$.

Solución:

Los dos puntos le pertenecen a la esfera, pero como son los extremos de un diámetro, el segmento que une los dos puntos pasa por el centro. Además, el centro es el punto medio de dicho segmento.

$$(x_1, y_1, z_1) = (2, 3, 4) \quad y \quad (x_2, y_2, z_2) = (-2, -3, 2)$$

$$Pm = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

$$Pm = (\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{3 + (-3)}{2}, \frac{4 + 2}{2})$$

$$Pm = (0, 0, 3) \; coordenadas \; del \; centro \; de \; la \; esfera$$

Solamente falta determinar el radio de la esfera. Éste se puede determinar como la distancia entre el centro de la esfera y un punto cualquiera de la esfera. Si se toma el punto de la esfera $(2, 3, 4)$ (uno de los puntos que se da), entonces:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$r^2 = d^2((0,0,3),(2,3,4)) = (2-0)^2 + (3-0)^2 + (4-3)^2$$

$$r^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2$$

$$r^2 = 14$$

Luego, la ecuación ordinaria de la esfera es:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$$

Ecuaciones de la recta en tres dimensiones:

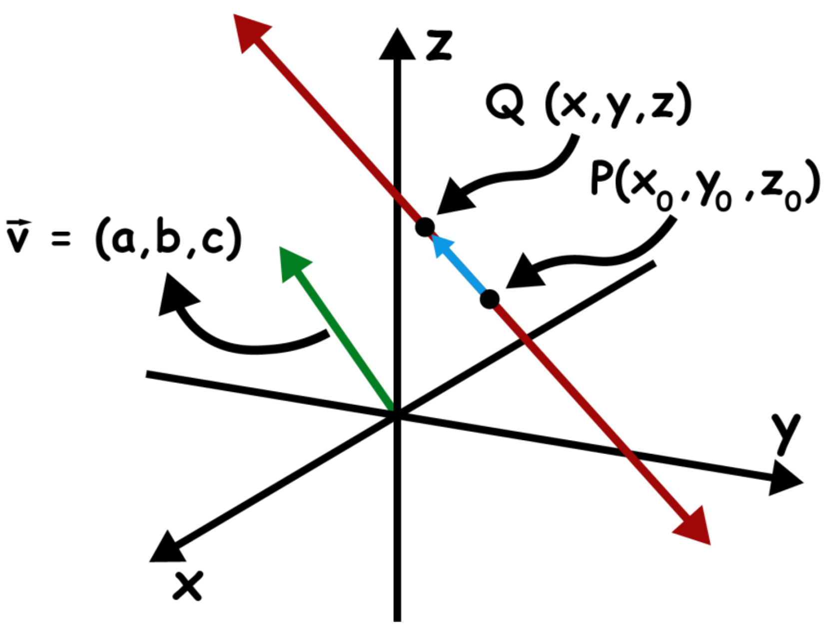


Figura 1

Sean $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x,y,z)$ puntos de la recta **L**, $\vec{v} = \langle a,b,c \rangle$ un vector paralelo a la recta: Note que según la gráfica anterior, el vector $v^{\rightarrow} = \langle a,b,c \rangle$ también es paralelo al vector $\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0 \rangle$. Como $\vec{v} || \overrightarrow{PQ}$, se puede escribir lo siguiente: $\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}$, con **t** escalar o parámetro.

O de otra forma:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = t\langle a, b, c\rangle$$

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = \langle at, bt, ct\rangle$$

Donde se obtiene por igualdad de vectores:

$$x - x_0 = at, y - y_0 = bt, z - z_0 = ct$$

De aquí se obtiene las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = x_0 + at \quad (1)$$
$$y = y_0 + bt \quad (2)$$
$$z = z_0 + ct \quad (3)$$

NOTA: *Al vector $\vec{v} = \langle a, b, c\rangle$ se le llama vector de dirección de la recta **L**. Los valores a, b, c son llamados números directores de **L**.*

De las ecuaciones paramétricas de la recta, si a, b, c son diferentes de cero, pues despejando **t** en cada una de las ecuaciones se obtienen las ecuaciones simétricas de la recta:

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \qquad t = \frac{y - y_0}{b}, \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

Es decir:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (4)$$

Ejemplo: Obtener las ecuaciones paramétricas y la ecuación simétrica de la recta ***L*** que pasa por el punto $(1, 3, 5)$ y que es paralela a $\vec{v} = \langle 3, -2, 4\rangle$.

Solución:

En la figura **2** se muestra la gráfica de la recta ***L,*** del vector $\vec{v}$ y del punto indicado

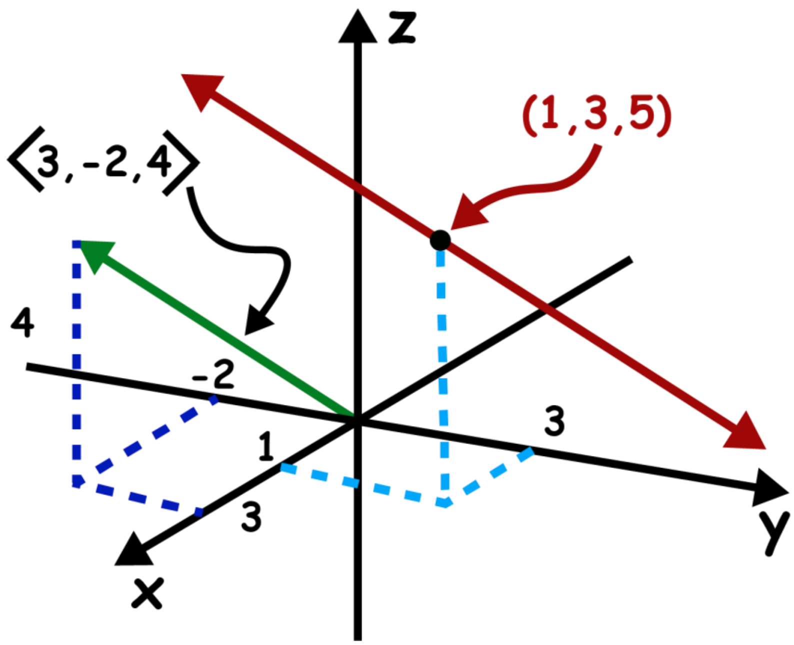


Figura 2

NOTA: *El vector director se ha colocado como un vector de posición, es decir, partiendo del origen. Sin embargo, puede ubicarse partiendo desde cualquier punto del espacio tridimensional.*

Con las coordenadas $\boldsymbol{x_0 = 1}$, $\boldsymbol{y_0 = 3}$, $\boldsymbol{z_0 = 5}$ y los números de dirección $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = -2}$, $\boldsymbol{c = 4}$. De las ecuaciones $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$ $\boldsymbol{y}$ $(\mathbf{3})$, un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta ***L*** es:

$$\boldsymbol{x = 1 + 3t}$$

$$\boldsymbol{y = 3 - 2t}$$

$$\boldsymbol{z = 5 + 4t}$$

Como los números directores son no nulos un conjunto de ecuaciones simétricas es:

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{4}}$$

Ejercicio: Obtener las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos **(2, 2, 3)** y **(4,-2,1).**

Solución:

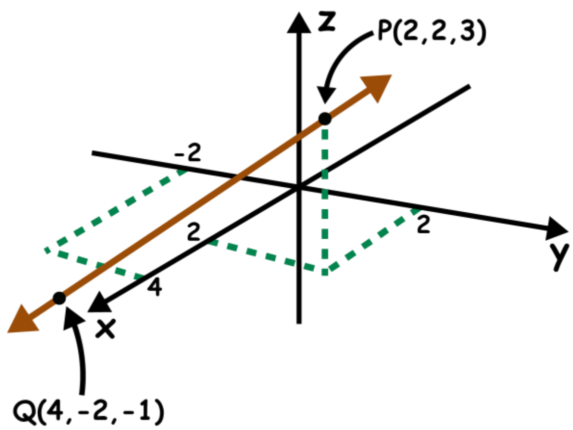


Figura 3

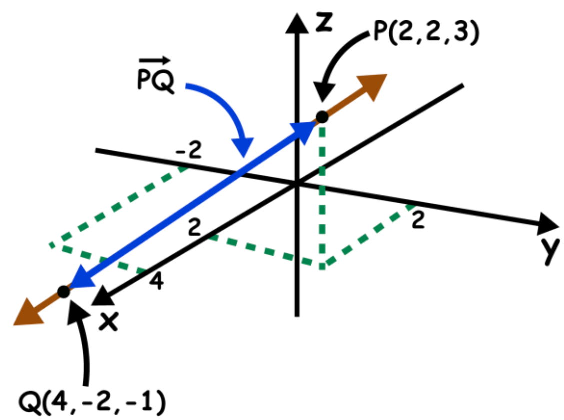


Figura 4

El vector que va del punto **P** hacia el punto **Q**, puede servir de vector director de la recta o cualquier múltiplo o submúltiplo de dicho vector. Recuerde que para obtener las coordenadas de $\boldsymbol{PQ}_{\longrightarrow}$ se resta el punto de llegada **(Q)** menos el de partida **(P)**.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \langle \mathbf{4-2, -2-2, -1-3} \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \langle \mathbf{2, -4, -4} \rangle = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}$$

Entonces, como ya se tiene el vector director, para formar las ecuaciones paramétricas de la recta se necesita un punto que pertenece a la recta y se tienen 2 puntos. Por lo tanto, se puede ocupar cualquiera de los dos puntos.

Tomando $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) = (\mathbf{2, 2, 3})\ \ y\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \mathbf{2, -4, -4} \rangle$, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos **(2, 2, 3)** y **(4,-2,1)** son:

$$\boldsymbol{x = x_0 + at}$$

$$\boldsymbol{y = \ y_0 + bt}$$

$$\boldsymbol{z = \ z_0 + ct}$$

$$x = 2 + 2t$$

$$y = 2 - 4t$$

$$z = 3 - 4t$$

La ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{-4}$$

Nota: En lugar del vector $\vec{v} = \langle 2, -4, -4 \rangle$ *puede utilizarse, por ejemplo,* $\langle 1, -2, -2 \rangle$ *o también* $\langle -1, 2, 2 \rangle$, $\langle -2, 4, 4 \rangle$, *etc.*

Ejercicio: Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos xz y yz y que pasa por el punto **(3,1,4)**.

Solución:

Como siempre, la dificultad es la determinación del vector director, ya que el punto que le pertenece a la recta es (3,1,4).

Por este punto pasan una infinidad de rectas, pero se pide aquella que sea paralela al plano **XZ** y también al plano **YZ**, es decir:

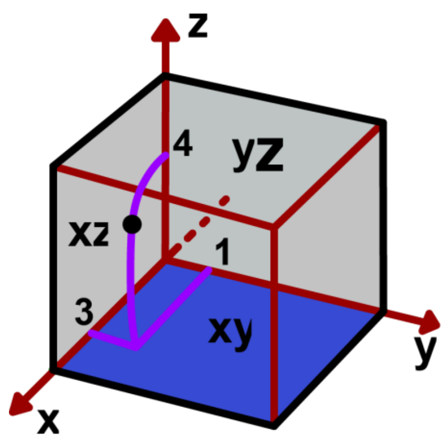


Figura 5

Según la figura anterior, decir paralela a los planos **XZ** y **YZ**, equivale a que la recta sea perpendicular al plano **XY**, por lo tanto, un vector director es cualquier vector paralelo al eje **Z**.

Por ejemplo, el vector $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ como vector director de la recta (puede tomarse un vector cuyas componentes en **“x”** y en **“y”** sean ceros y cualquier número diferente de cero en la componente en **“z”**).

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\boldsymbol{x = x_0 + at}$$

$$\boldsymbol{y = y_0 + bt}$$

$$\boldsymbol{z = z_0 + ct}$$

$$\boldsymbol{x = 3 + 0t}$$

$$\boldsymbol{y = 1 + 0t}$$

$$\boldsymbol{z = 4 + 1t}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = 4 + t} \end{array}\right\}$$

4.2 PLANOS EN TRES DIMENSIONES

Para conocer una recta en el espacio se necesita un punto de la recta y un vector de dirección. Para determinar un plano se necesita conocer un punto cualquiera del plano y un vector perpendicular a dicho plano.

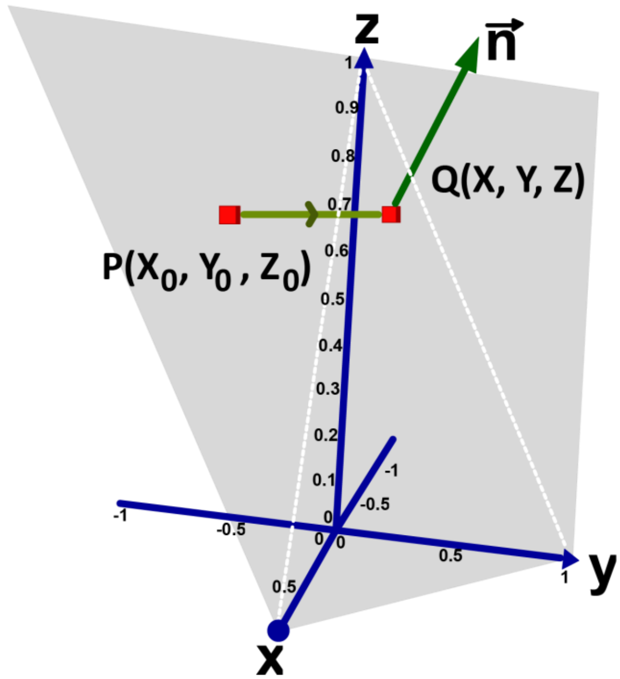


Figura 6

Sean $P(x_0,\ y_0,\ z_0)\ \ y\ \ Q(x,y,z)$ puntos del plano y $\vec{n} = \langle a,b,c\rangle$ un vector perpendicular al plano **(vector normal)**.

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$$

Como $\vec{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son perpendiculares, su producto escalar es cero, es decir, $\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$
O sea que:

$$\langle a,b,c\rangle \bullet \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(5)} \quad \text{Ecuación canónica del plano}$$

Luego efectuando las operaciones en la ecuación anterior, se obtiene:

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \textbf{(6)} \quad \text{Ecuación general del plano, donde } d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Ejercicio:
Obtener la ecuación general del plano que contiene los puntos $(3,4,1), (1,7,1)\ y\ (-1,-2,5)$
Solución:

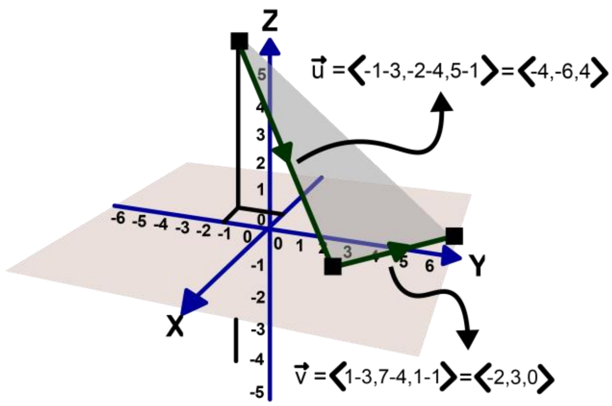


Figura 7

Para poder aplicar la ecuación (5) se necesita un punto del plano (en este caso se proporcionan tres) y un vector normal al plano, el cual en este caso no se conoce. Sin embargo, recuerde que el producto vectorial proporciona un vector normal al plano que forman los vectores involucrados. Sean $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ los vectores que van del punto ***(3,4,1)*** a los puntos ***(-1,-2,5)*** y ***(1,7,1)*** como se muestra en la figura. Por lo tanto

$$\vec{v}x\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 12i + 8j + 24k = \langle a, b, c \rangle$$

Así que $\vec{N} = \langle 12, 8, 24 \rangle$ y conociendo $P_0 = (3, 4, 1)$ se obtiene:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$	
$12(x - 3) + 8(y - 4) + 24(z - 1) = 0$	
$12x - 36 + 8y - 32 + 24z - 24 = 0$	
$12x + 8y + 24z - 36 - 32 - 24 = 0$	
$12x + 8y + 24z - 92 = 0$	Esta ecuación ya es una respuesta válida.
$3x + 2y + 6z - 23 = 0$	Se ha divido entre 4 toda la ecuación.

Ejercicio: Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto **(3,-4,2)** y es paralelo al plano xz.

Solución:

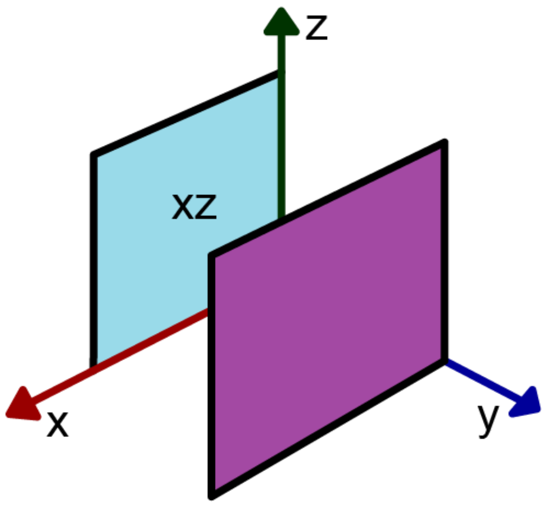


Figura 8

Note que, según la figura, un plano paralelo al plano **XZ** es perpendicular al eje **"y"**, por lo tanto, se puede escoger como vector normal o perpendicular al plano, un vector de la forma $\vec{\boldsymbol{n}} = \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{a}, \mathbf{0} \rangle$, donde el valor de $\boldsymbol{a}$ puede ser cualquier real distinto de cero.

Si se toma $\vec{\boldsymbol{n}} = \langle \mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{0} \rangle \ \boldsymbol{y} \ \boldsymbol{p}(\mathbf{3}, -\mathbf{4}, \mathbf{2})$

La ecuación canónica del plano es:

$$\mathbf{0}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) + \mathbf{5}(\boldsymbol{y} - (-\mathbf{4})) + \mathbf{0}(\boldsymbol{z} - \mathbf{2}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{5}(\boldsymbol{y} + \mathbf{4}) = \mathbf{0}$$

La ecuación general es:

$$\boldsymbol{y} + \mathbf{4} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{5}}$$

$$\boldsymbol{y} + \mathbf{4} = \mathbf{0}$$

O también

$$\boldsymbol{y} = -\mathbf{4}$$

*Note que cualquier plano paralelo al plano **XZ** tendrá como ecuación $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$, donde $\boldsymbol{a}$ es la segunda componente del punto por donde pasa o que le pertenece al plano. Se puede generalizar, que un plano paralelo al plano **YZ**, tendrá por ecuación $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ y paralelo a **XY*** $\boldsymbol{z} =$

Ejemplo: Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto **(2,-3,1)** y es perpendicular a la recta $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2} - \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{z} + \mathbf{5}}{\mathbf{5}}$.

Solución:

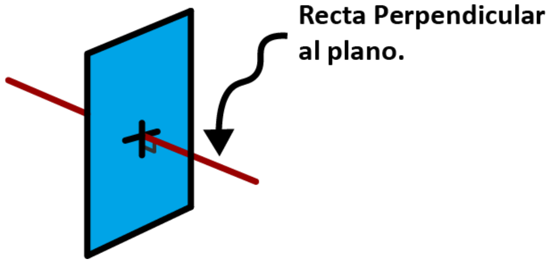


Figura 9

Se tiene el punto que le pertenece al plano, falta el vector normal a dicho plano. Dado que la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta también es perpendicular al plano y por eso p uede ocuparse para encontrar la ecuación general del plano.

$$\frac{2x-3}{2} = 2 - y = \frac{z+5}{5}$$

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2} = -(y-2) = \frac{z+5}{5}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{1} = -(y-2) = \frac{z+5}{5}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{5}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{5} \rangle$ y éste es el vector normal o perpendicular al plano. $\boldsymbol{p(2, -3, 1)}$.

Ecuación canónica.

$$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

$$\boldsymbol{1(x-2) - 1(y-(-3)) + 5(z-1) = 0}$$

$$\boldsymbol{(x-2) - (y+3) + 5(z-1) = 0}$$

$$\boldsymbol{x - 2 - y - 3 + 5z - 5 = 0}$$

Ecuación general del plano.

$$\boldsymbol{x - y + 5z - 10 = 0}$$

Ejemplo: Dado los planos $\boldsymbol{2x - 3y + 4z = 1}$ y $\boldsymbol{x - y - z = 5}$. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos se pueden obtener "simultaneando" las dos ecuaciones. Esto se puede realizar utilizando Gauss.

$$\mathbf{2x - 3y + 4z = 1 \quad y \quad x - y - z = 5}$$

Matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -9 \end{bmatrix}_{-F_2 \rightarrow F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Ya no se puede seguir, por lo tanto, se tiene un nuevo sistema.

$$y - 6z = 9$$
$$x - y - z = 5$$

Haciendo $z = t$

$$y - 6z = 9 \rightarrow y - 6t = 9$$
$$y = 9 + 6t$$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación resulta:

$$x - y - z = 5$$
$$x - (9 + 6t) - t = 5$$
$$x - 9 - 6t - t = 5$$
$$x = 5 + 9 + 6t + t \; x$$
$$= 14 + 7t$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los dos planos son:

$$x = 14 + 7t$$
$$y = 9 + 6t$$
$$z = t$$

<u>Trazo de planos en el espacio</u>

Para trazar la gráfica de un plano, por lo general debe de encontrarse:

i) las intersecciones con los ejes coordenados **x, y, z,** y si es necesario **ii)** las trazas del plano.

Una traza de un plano es la recta de intersección del mismo con un plano coordenado.

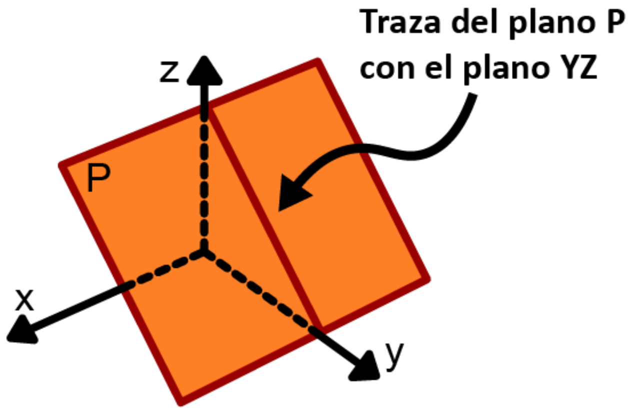
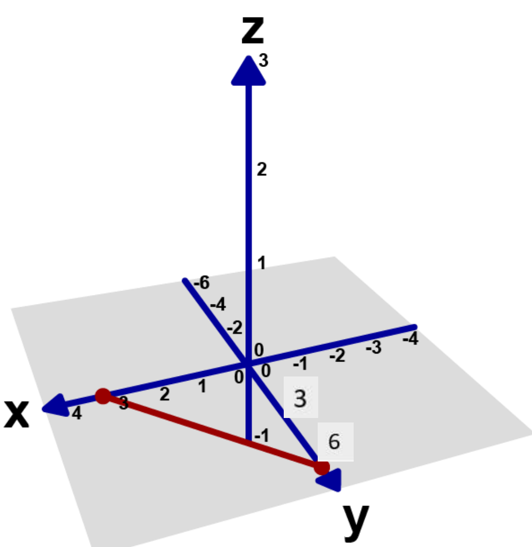


Figura 10

Por ejemplo, para graficar el plano $\mathbf{4x + 2y + 6z = 12}$ se procede de la siguiente manera:



Traza en el plano xy:

(Haciendo **z=0**)

Recta $\mathbf{4x + 2y = 12}$

Esta recta corta al **eje "x"** en (3,0,0) y al **eje "y"** en (0,6,0).

Estos puntos resultan de hacer $\mathbf{y = 0}$ y $\mathbf{x = 0}$ respectivamente en la recta antes mencionada. Esta traza luce como la figura de la izquierda.

Figura 11

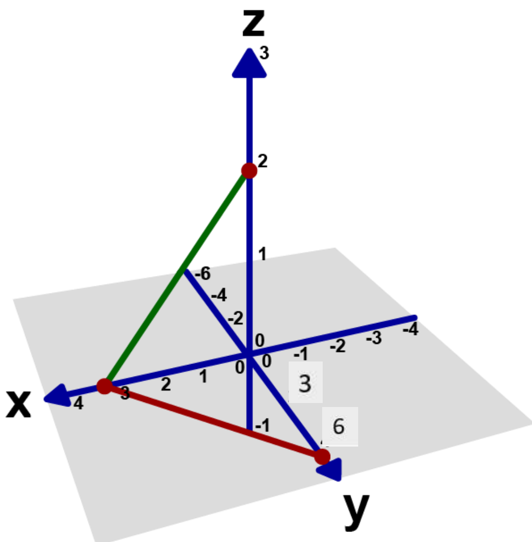


Figura 12

Traza en el plano xz:

(Haciendo **y=0**)

Recta $\mathbf{4x + 6z = 12}$

Esta recta corta al **eje “x”** en (3,0,0) y al **eje** “z” en (0,0,2).

Estos puntos resultan de hacer $\mathbf{z = 0}$ y $\mathbf{x = 0}$ respectivamente en la recta antes mencionada. Esta traza, junto con la anterior lucen, así como en la figura de la izquierda.

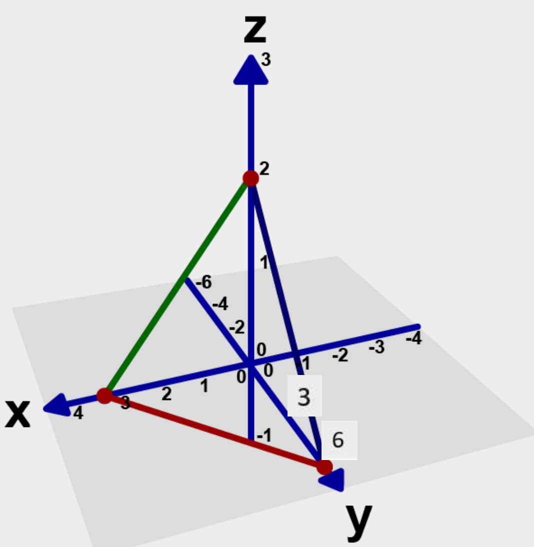


Figura 13

Traza en el plano yz:

(Haciendo $\mathbf{x = 0}$)

Recta $\mathbf{2y + 6z = 12}$

Esta recta corta al**eje “y”** en (0,2,0) y al**eje “z”** en (0,0,2).

Estos puntos resultan de hacer $\mathbf{z = 0}$ y $\mathbf{y = 0}$ respectivamente en la recta antes mencionada. Esta traza, junto con las dos anteriores lucen, así como la figura de la izquierda.

Finalmente, sombreando la región triangular que se forma en el primer octante se obtiene una representación del plano en este octante.

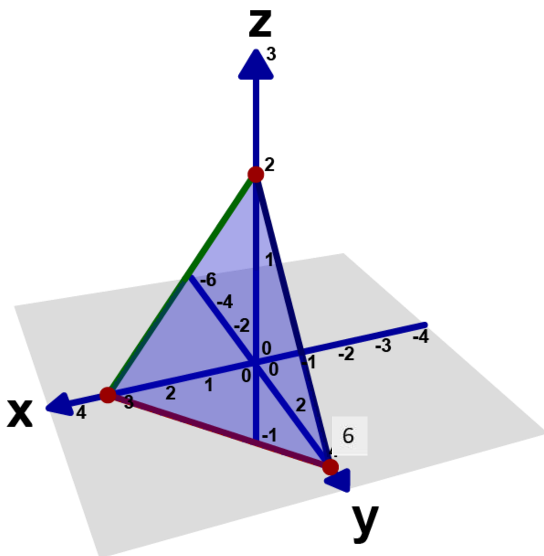


Figura 14

Algunos comentarios adicionales

- Si en la ecuación de un plano falta una de las variables, entonces el plano es paralelo al eje representado por la variable que falta.

- Si son dos las variables que faltan en la ecuación de un plano, entonces es paralelo al plano coordenado representado por las variables que faltan.

OBSERVACIÓN: *Existe también, la ecuación simétrica del plano* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mathbf{1}$, *siendo* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *las intersecciones del plano con los ejes* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ *respectivamente. La ecuación simétrica del plano se puede escribir siempre y cuando los valores* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *sean distintos de cero.*

Ejercicio: Trazar la gráfica de $\mathbf{2x-3y+5z=12}$. Determine la ecuación simétrica del plano $\mathbf{2x-3y+5z=12.}$

Solución:

Dividiendo entre 12

$$\frac{2x}{12}-\frac{3y}{12}+\frac{5z}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{4}+\frac{5z}{12}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{\frac{12}{5}}=1$$

Luego las intersecciones con los ejes $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},$ son respectivamente:

$$6,-4,\frac{12}{5}$$

Por lo tanto, la gráfica del plano $\mathbf{2x-3y+5z=12}$ es:

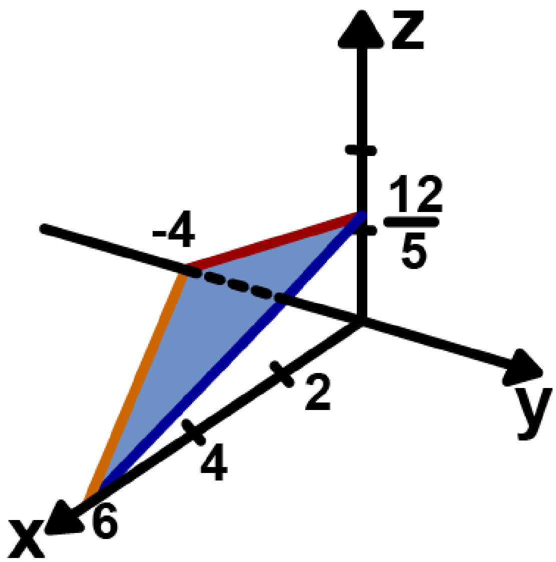


Figura 15

Otra vista, girando los ejes

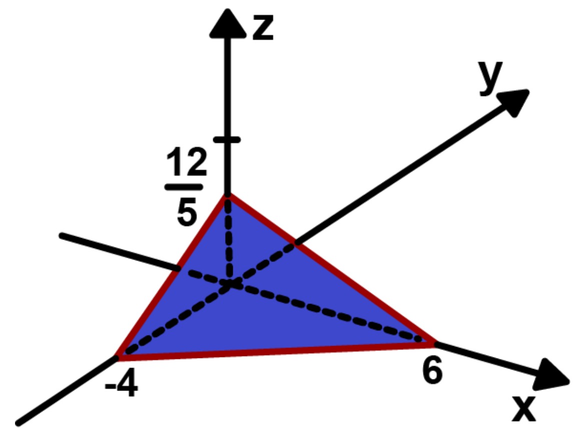


Figura 16

Ejercicio: **Graficar el plano $x = 5$.**

Solución:

El plano es paralelo al plano YZ e intercepta al eje x en 5.

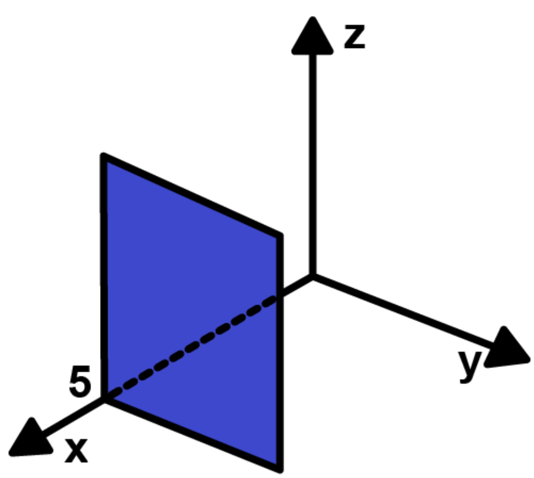


Figura 17

4.3 DISTANCIAS

Distancia de un punto a un plano

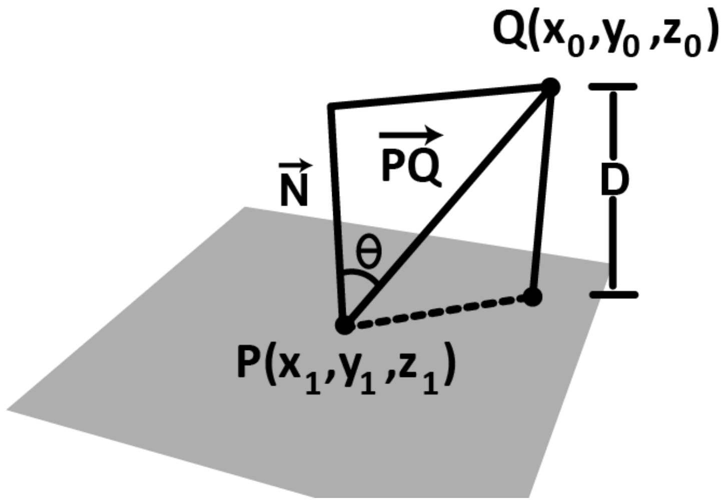


Figura 18

Teorema:

La distancia de un punto $\boldsymbol{Q}$ (no perteneciente al plano) a un plano es: $\boldsymbol{D} = \left\|proy_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\right\| = \frac{|\overrightarrow{PQ}\bullet\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$

,

Donde $\boldsymbol{P}$ es un punto cualquiera del plano y $\vec{N}$ es el vector normal al plano.

Si $\boldsymbol{P}(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al plano, $\boldsymbol{Q}(x_0, y_0, z_0)$ es un punto externo al plano y $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ es el vector normal al plano, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ Fórmula alternativa.

Ejemplo*:* Encontrar la distancia del punto $(-3, 2, 5)$ al plano $2x + 3y - z = 2$.

Solución:

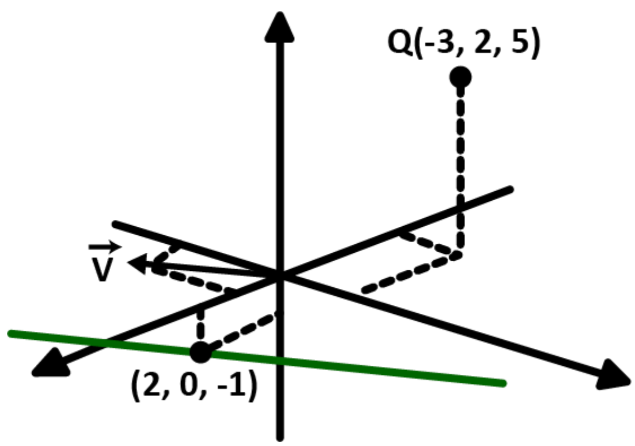


Figura 19

$$2x + 3y - z = 2 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y - z - 2 = 0$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad Q(-3, 2, 5), \quad \vec{N} = \langle 2, 3, -1 \rangle$$

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -1 \quad d = -2 \quad x_0 = -3, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 5$$

$$D = \frac{|2(-3) + 3(2) + (-1)(5) + (-2)|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}}$$

$$D = \frac{|-6+6-5-2|}{\sqrt{4+9+1}}$$

$$D = \frac{|-7|}{\sqrt{14}}$$

$$D = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{49}{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \approx 1.87\ \textit{Unidades lineales}$$

Ejemplo: Dadas las dos rectas siguientes en el espacio

$$L_1: x = -1 + 2t; \quad y = 0; \quad z = 1 - t$$
$$L_2: x = 4; \quad y = 1 + r; \quad z = 1 + r$$

a) Muestre que no son paralelas

b) Probar que no se cortan

c) Encontrar las ecuaciones de los planos paralelos que contienen a cada una de las rectas ***Solución:***

a) El vector director de la recta L_1 es $\vec{V}_1 = \langle 2,\ 0,\ -1 \rangle$ y el de la recta L_2 es $\vec{V}_2 = \langle 0, 1, 1 \rangle$ Dichos vectores no son paralelos. Luego, las dos rectas no son paralelas.

b) Se observa que no se cortan.

Simultaneando las dos ecuaciones para determinar si hay intersección.

$$\left.\begin{matrix} x = -1 + 2t \\ x = 4 \end{matrix}\right\} -1 + 2t = 4$$

$$2t = 4 + 1$$

$$t = \frac{5}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ y = 1 + r \end{matrix}\right\} 0 = 1 + r$$

$$r = -1$$

Sustituyendo los dos valores en:

$$z = 1 - t$$
$$z = 1 + r$$

Si hay intersección, tiene que dar el mismo valor de z:

$$z = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$z = 1 + (-1) = 0$$

Las rectas no se cortan

Solución para el literal c)

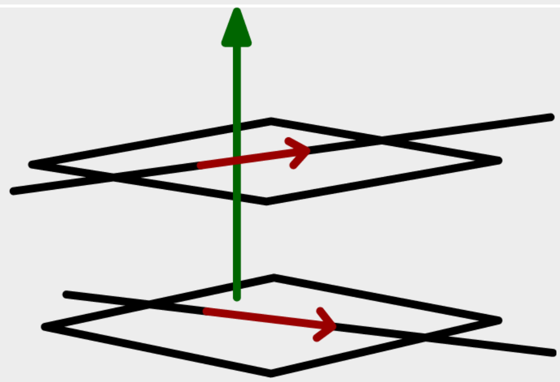


Figura 20

Para determinar el vector normal de los planos basta con efectuar el producto vectorial de los dos vectores directores de las dos rectas; ya que el vector resultante es perpendicular a los dos vectores y por ende perpendicular a los dos planos paralelos que contiene a cada una de las rectas.

$$\overrightarrow{V_1} = \langle 2, 0, -1 \rangle, \quad \vec{V}_2 = \langle 0, 1, 1 \rangle$$

$$\vec{N} = i - 2j + 2k$$

$$\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$$

Obteniendo la ecuación canónica de cada plano

$$\vec{N} = \vec{V}_1 x \vec{V}_2$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (0 + 1)i - (2 - 0)j + (2 - 0)k$$

$$L_1: x = -1 + 2t; \quad y = 0; \quad z = 1 - t \qquad L_2: x = 4; \quad y = 1 + r; \quad z = 1 + r$$

Punto que le pertenece al plano que contiene a la recta L_1 $(-1, 0, 1)$, $\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

Ecuación canónica del plano $(x + 1) - 2(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

Ecuación general $x + 1 - 2y + 2z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 2z - 1 = 0$

Punto que le pertenece al plano que contiene a la recta $L_2(4, 1, 1)$, $\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

Ecuación canónica del plano $(x - 4) - 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$

Ecuación general $x - 4 - 2y - 2 + 2z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 2z - 8 = 0$

Distancia de un punto a una recta en el espacio.

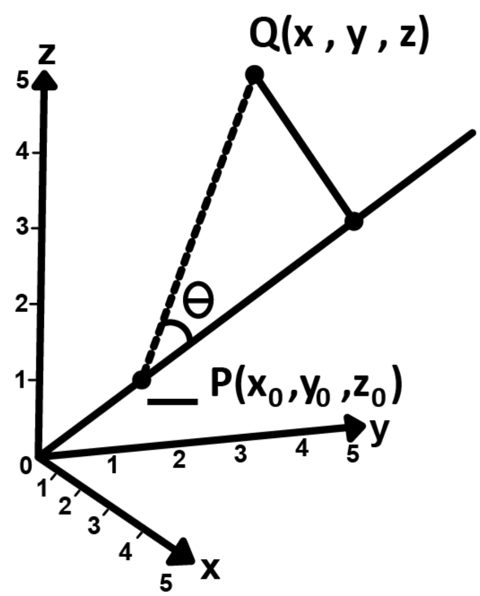


Figura 21

La distancia de un punto $\boldsymbol{Q}$ a una recta viene dada por $D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \, x \, \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$, donde $\boldsymbol{P}$ es un punto cualquiera de la recta y $\vec{v}$ es un vector director de la recta.

Ejemplo: Hallar la distancia del punto $(-3, 2, 5)$ a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 2 + t; \quad y = -2t; \quad z = -1$.

Solución:

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Sean $Q(-3,\ 2,\ 5)$ y $\vec{v} = \langle 1, -2, 0\rangle$ **.** Tome un punto de la recta. Esto se puede hacer, dándole un valor al parámetro t**,** por ejemplo**,** $t = 0$ **.**

$$x = 2 + t; \quad y = -2t; \quad z = -1$$
$$x = 2 + 0; \quad y = -2(0); \quad z = -1$$

$$\rightarrow P(2, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v} = \langle -3 - 2, 2 - 0, 5 - (-1)\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -5, 2, 6\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12i + 6j + 8k$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v}\| = \sqrt{(12)^2 + (6)^2 + (8)^2}$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v}\| = \sqrt{244} = 15.62$$

Vector director de la recta:

$$\vec{v} = \langle 1, -2, 0\rangle$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$$

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\ x\ \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{244}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{244}{5}} \quad \textit{Unidades lineales}$$

Ángulo entre planos

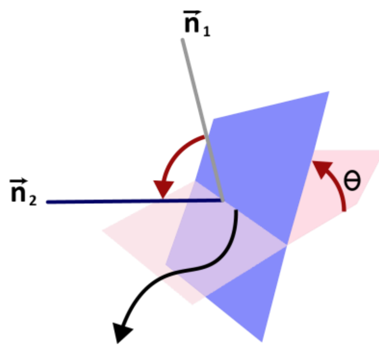
OBSERVACIONES:

- *Dos planos distintos en el espacio* ***son paralelos o se cortan en una recta***
- *Si los planos se cortan, el ángulo entre ellos lo da el ángulo que forman sus vectores normales, con* $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ *y si* $\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{2}}$ *son los vectores normales de los planos, entonces:* $\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{|\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{2}}|}{\|\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}}\|\|\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{2}}\|}$

Observe que:

i) Los planos son perpendiculares si $\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}_{2} = \mathbf{0}$.

ii) Los planos son paralelos si $\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}}$ es un múltiplo escalar de $\vec{\boldsymbol{n}}_{2}$, es decir, $\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{n}}_{2}$ con $\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$.



Planos paralelos **Planos perpendiculares**

> ***OBSERVACIÓN:*** *Cuando dos planos se cortan, en realidad existen dos ángulos entre ellos. Uno de los ángulos es menor que otro. El valor absoluto del producto escalar de los dos vectores normales, que aparece en el numerador de la fórmula, garantiza que se encontrará el ángulo menor.*

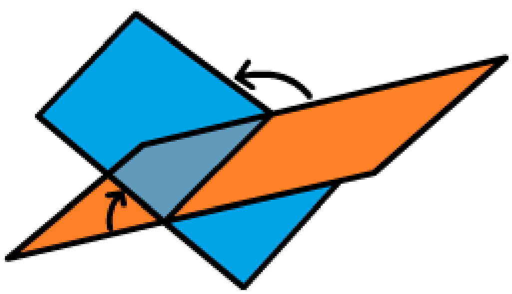


Figura 22

Ejemplo*:* Encontrar el ángulo que forman los planos $\boldsymbol{2x-3y+4z=1} \quad y \quad \boldsymbol{x-y-z=5}$.
Se sabe que para encontrar el ángulo entre los dos planos que se cortan se utiliza la fórmula $\cos(\boldsymbol{\theta})=\frac{|\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$.

Solución:
Como las ecuaciones son respectivamente $\boldsymbol{2x-3y+4z=1} \quad y \quad \boldsymbol{x-y-z=5}$.

$$\vec{n}_1=\langle 2,-3,4\rangle \qquad \vec{n}_2=\langle 1,-1,-1\rangle$$

$$|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2| = |\langle 2, -3, 4\rangle \bullet \langle 1, -1, -1\rangle|$$

$$= |2(1) + (-3)(-1) + (4)(-1)|$$
$$= |2 + 3 - 4|$$
$$= 1$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{3}}$$

$$\cos(\theta) \approx 0.1072$$
$$\theta \approx \cos^{-1}(0.1072)$$
$$\theta \approx 1.4634$$

El ángulo entre los dos planos es de 1.4634 radianes, equivalente en grados a 83.85°