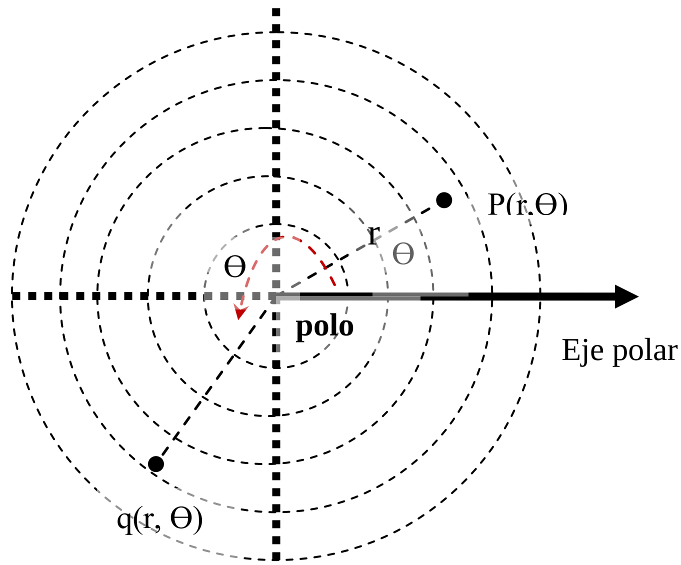
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQ.
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS

MATEMATICA III / Ciclo I - 2019

FOLLETO DE TRABAJO DE LA UNIDAD II : COORDENADAS POLARES

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Plano polar

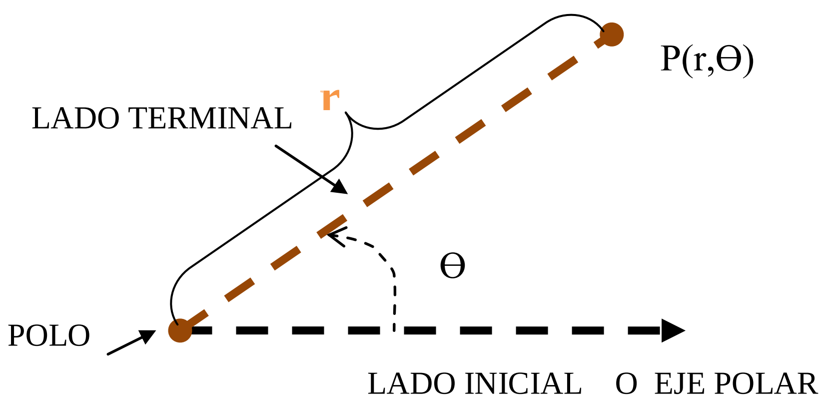


Un punto P se representa por un par de números reales (r,θ).

θ: se mide en radianes

r: distancia

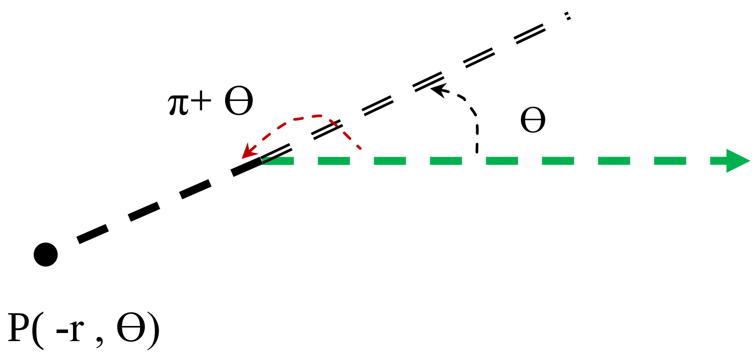
En la práctica, las líneas punteadas (círculos punteados) no se dibujan.



OBSERVACIONES

1) Θ > 0 se mide en el sentido anti -horario
   Θ < 0 se mide en sentido horario

2) Para situar un punto de la forma (- r,ϴ) con r >0, se mide r unidades a lo largo del de la prolongación del lado terminal (ϴ + π)



3) Las coordenadas del polo son (0 , ϴ) , donde ϴ es cualquier ángulo.

<u>Ejercicio 1</u>: Localizar los puntos cuyas coordenadas polares se indican a continuación (en planos polares distintos)

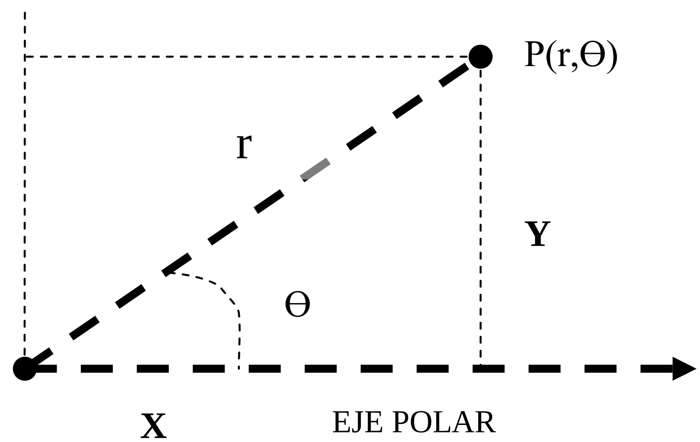
a) (6, $\frac{2\pi}{3}$) b) (3 , $-\frac{\pi}{4}$) c) (-2 , $\frac{7}{4}\pi$) d) $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ e) (4,3)

<u>NOTA:</u> La descripción de un punto en coordenadas polares no tiene representación única.

Ejercicio 2: Verificar que $(4,\frac{\pi}{3})$, $(-4,-\frac{2}{3}\pi)$, $(-4,\frac{4}{3}\pi)$ representan en mismo punto.

En general:

CONVERSIÓN DE COORDENADAS POLARES A COORDENADAS RECTANGULARES y VICEVERSA



De la gráfica anterior podemos relacionar las coordenadas polares mediante las fórmulas siguientes:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r sen(\theta)$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejercicio 3:

a) Convertir $(-2, 4)$ de coordenadas polares a cartesianas.

Solución

$(r,\theta) = (-2,4) \quad \rightarrow (x, y) = ?$

b) Convertir $\left(-4\ ,\ \frac{5}{3}\pi\right)$ **de coordenadas polares a cartesianas**

c) Dado que $\left(-1\ ,\ -\sqrt{3}\right)$ **representa un punto en coordenadas rectangulares, hallar tres representaciones en polares de dicho punto**

<u>Solución</u>

d) Convertir (-2,2) de coordenadas rectangulares a polares

e) Trazar la curva cuya ecuación polar es $r = 3\cos(\theta)$

NOTA: El objetivo principal de este ejercicio es aprender a ubicar puntos en el plano polar

θ	**0**	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r										

ECUACIONES POLARES Y ECUACIONES RECTANGULARES

<u>Ejercicio 4</u>:

a) Convertir la ecuación rectangular a la forma polar $x^2 + y^2 - 16x + 8y = 0$, escribir r en función de θ

<u>Solución</u>

b) Convertir la ecuación rectangular a la forma polar $x^2 - 2y - 1 = 0$, escribir r en función de θ

Solución

c) Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - y = \sqrt{16\left(x^2 + y^2\right)}$

Solución

d) Encontrar una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada

$i)\quad r^2 sen(2\theta) = 16$ $\qquad ii)\quad r^2 = 4\cos(2\theta)$

$iii)\quad r = \dfrac{6}{2 - 3sen\left(\theta\right)}$

SIMETRIA

Existe una similitud entre la simetría en coordenadas rectangulares y las polares. En las gráficas polares se puede haber simetría con respecto a el eje polar, a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ y también con respecto al polo (al eje x , el eje y , el origen , respectivamente)

Teorema: (Criterio de simetría en coordenadas polares)
La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto a lo siguiente, si la sustitución indicada produce una ecuación equivalente

1. La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$: sustituir (r,θ) por $(r,\pi-\theta)$ $ó$ $(-r,-\theta)$
2. Eje polar: sustituir (r,θ) por $(r,-\theta)$ $ó$ $(-r,\pi-\theta)$
3. El polo: sustituir (r,θ) por $(r,\pi+\theta)$ $ó$ $(-r,\theta)$

Sin embargo, es de hacer notar que las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias para garantizar la simetría indicada.

Un llamado "criterio rápido de simetría", es el que puede resumirse de la siguiente manera:

1) La gráfica de $r = f(sen(\theta))$ es simétrica respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) La gráfica de $r = f(\cos(\theta))$ es simétrica respecto al eje polar.

Puede ocurrir que algunas gráficas polares no cumplan con tal criterio rápido de simetría y sea necesario entonces apoyarse en el teorema.

RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha)=0 \quad y \quad f'(\alpha)\neq 0$, entonces la recta $\theta=\alpha$ es tangente en el polo a la gráfica $r = f(\theta)$

Ejercicio 5: **Encontrar las tangentes en el polo de** $r=2\cos(\theta)$

Solución

Ejercicio 6: **Encontrar las rectas tangentes en el polo de** $r=2-4sen(\theta)$

Solución

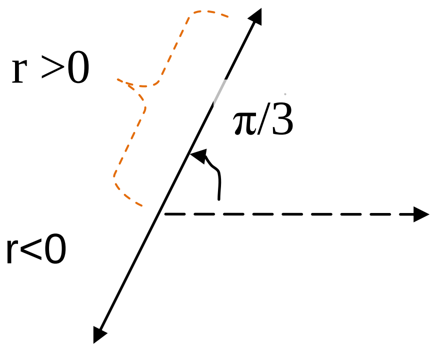
GRAFICAS DE ECUACIONES POLARES

RECTAS

Elaborar las gráficas de las ecuaciones siguientes

$a) \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$

Solución



$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x$$

$b) \quad r = \sec(\theta)$

Solución

En este caso conviene primero convertir a una ecuación en coordenadas rectangulares

CIRCUNFERENCIAS

- Circunferencias con centro en el polo $(r = a)$ **con** $a \neq 0$

$r = a$

$\sqrt{x^2 + y^2} = a$

$x^2 + y^2 = a^2$

Ejemplo: Hacer un esbozo de la gráfica de la ecuación polar $r = 3$

En este caso no importa cuanto vale el ángulo θ, el valor de r siempre tomará el valor de 4 unidades (recordemos que r se mide desde el polo).

- Circunferencias que pasan por el polo y cuyo eje de simetría es el eje polar o la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

Estas ecuaciones son de la forma $r = a\cos(\theta) \quad o \quad r = asen(\theta)$

Verifiquemos que la gráfica de $r = asen(\theta)$ es una circunferencia de diámetro a U.L.

$$r = asen(\theta)$$
$$r^2 = arsen(\theta)$$
$$x^2 + y^2 = ay$$
$$x^2 + y^2 - ay = 0$$
$$x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$
$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

Circunferencia con centro en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{a}{2}$

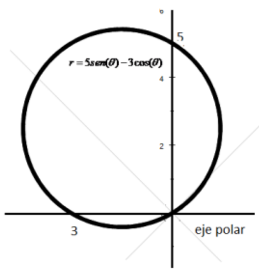
$$r = a\cos(\theta)$$

Ejercicio 7:

Graficar las siguientes ecuaciones polares $i)\ r = 2\cos(\theta) \qquad ii)\ r = -3sen(\theta)$

- Circunferencias que pasan por el polo y cuyo eje de simetría <u>no es</u> el eje polar ni la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$**.**

Estas circunferencia son de la forma $r = a\cos(\theta) + bsen(\theta)$, con $a \quad y \quad b \neq 0$



En este caso, para graficar solamente necesitamos ubicar el centro de la circunferencia, el cual podemos deducir sus coordenadas así:

$$r = a\cos(\theta) + bsen(\theta)$$
$$r^2 = ar\cos(\theta) + brsen(\theta)$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

Completando cuadrados llegamos a la ecuación canónica de la circunferencia:

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ de donde podemos ver que el centro es $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

<u>Ejercicio 8</u>: Graficar en coordenadas polares $r = 2\cos(\theta) - 4sen(\theta)$

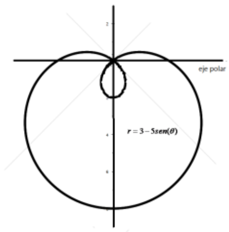
<u>Ejercicio 9</u>: Graficar en coordenadas polares $r = -3sen(\theta) - 5\cos(\theta)$

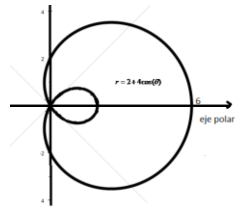
CARACOLES

Son de la forma $r = a \pm b\cos(\theta)$ o $r = a \pm bsen(\theta)$ con $a > 0$ $, b > 0$

Existen 4 clases de caracoles que dependen de los valores de a y b, así:

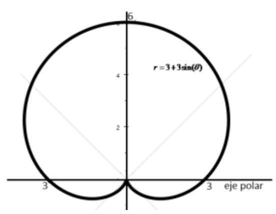
1) Si $\dfrac{a}{b} < 1$ entonces la gráfica es un caracol con lazo interior



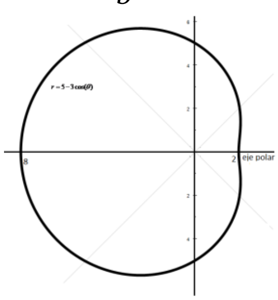


Observación: El caracol con lazo es el único caracol que posee tangente al polo y son dos

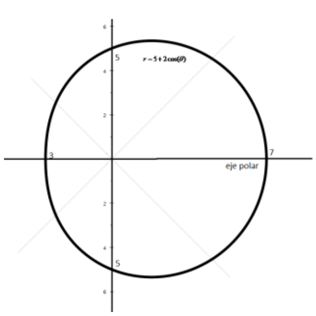
2) Si $\dfrac{a}{b} = 1$ entonces la gráfica es un caracol llamado cardiode



3) $1 < \dfrac{a}{b} < 2$, caracol con hoyuelo



4) $\dfrac{a}{b} \geq 2$, la gráfica es un caracol convexo



Ejercicio 10: **Dada la ecuación polar** $r = 2 - 4\cos(\theta)$

a) Identificar el tipo de gráfica y su orientación
b) Hallar las tangentes al polo
c) Graficar

Rosas

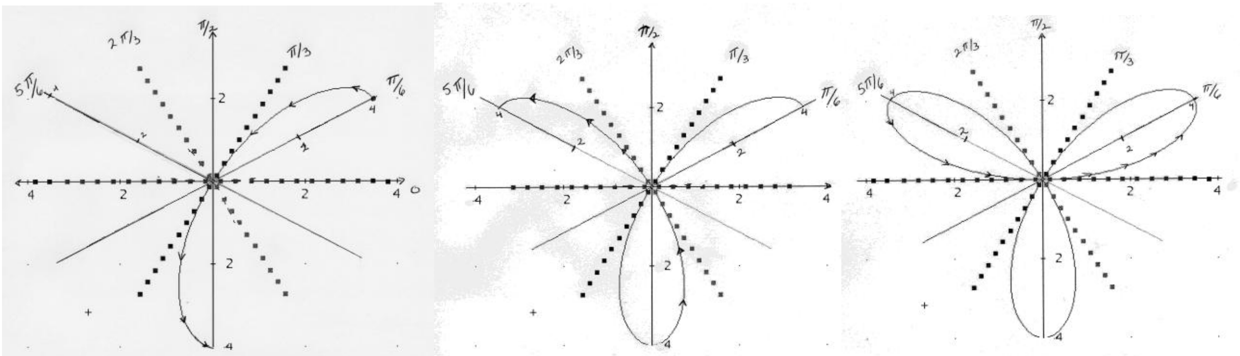
Las ecuaciones que tienen la forma $r = a\cos(n\theta)$ $ó$ $r = a\,sen(n\theta)$ con $n \geq 2$, donde n un número entero positivo, se conocen como rosas. Si n es impar el número de pétalos de la rosa es n y si n es par, el número de pétalos es 2n. El valor de a es la longitud de cada pétalo y el número de tangentes al polo es igual a n.
Ejemplos:

Ejercicio 11:

Elaborar la gráfica de la ecuación polar $r = 4sen(3\theta)$ **, utilizando las tangentes al polo.**

Solución
Se trata de una rosa de 3 pétalos con una longitud de 4 unidades cada pétalo.
Encontremos ahora las tangentes al polo y luego grafiquemos dichas tangentes en el plano polar. En el ángulo que se forma a partir de dos tangentes (al polo) consecutivas es probable que esté un pétalo de la rosa y / o en el opuesto por el vértice cuya longitud mayor de r se ubica en el ángulo medio de dos tangentes (al polo) consecutivas.

NOTA: Las líneas punteadas son las rectas tangentes al polo

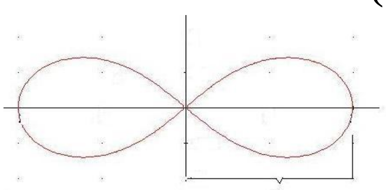


Ejercicio 12: Elaborar la gráfica de la ecuación polar $r = -4\cos(3\theta)$, utilizando las tangentes al polo.

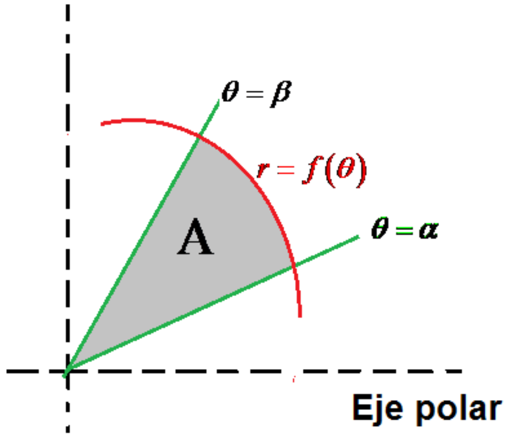
Lemniscata

Son ecuaciones en coordenadas polares de la forma

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta) \qquad \text{ó} \qquad r^2 = a^2 sen(2\theta)$$



Area de una región en coordenadas polares



Teorema:

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha,\beta]$, el área de la región limitada por la gráfica de $r=f(\theta)$ y las rectas radiales $\theta=\alpha \quad y \quad \theta=\beta$ viene dada por

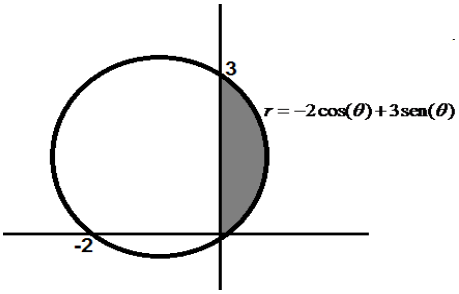
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}d\theta$$

Observación: Notemos que el área anterior siempre es la superficie que se encuentra entre la curva polar y dos rectas que pasan por el polo.

Ejercicio 13: **Hallar el área limitada por la gráfica de** $r=3sen(2\theta)$

Ejercicio 14: **Hallar el área entre lazos de la** $r=2-4sen(\theta)$

Ejercicio 15: **Hallar el área de la región sombreada**



Ejercicio 16: **Hallar el área limitada por la gráfica de** $r = 3sen(5\theta)$

Ejercicio 17: **Obtener el área dentro de** $r = 2\cos(\theta)$ **y fuera de** $r = 2 - \cos(\theta)$

Ejercicio 18: **Hallar el área de la región sombreada**