ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESTÁTICA DE FLUIDOS

J.L. ALMAZÁN GÁRATE
Prof. Titular de Puertos y Costas de la
E.T.S. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

F. HERMOSILLA VILLALBA
Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos

M.C. PALOMINO MONZÓN
Dra. Ciencias Físicas
P.T.U.I. de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

ESTÁTICA DE FLUIDOS

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: CONCEPTO DE FLUIDO

En la naturaleza se puede decir que existen tres tipos de cuerpos:

A. Cuerpos rígidos
B. Cuerpos deformables
C. Cuerpos fluidos

En este libro se van a tratar los fluidos, pero antes, y para enfocar mejor el problema se analizarán los cuerpos rígidos y los deformables, y así poder comparar unos y otros resultando de esta forma sus diferencias.

En primer lugar todos los cuerpos en la naturaleza están formados por pequeñas corpúsculos o moléculas, constituidos a su vez por otros más pequeños, llamados átomos.

A. Cuerpos rígidos:
   Son aquellos cuya distancia entre dos moléculas cualesquiera es invariable, aunque se le aplique una fuerza tan grande como se quiera.

B. Cuerpos deformables:
   B.1. Cuerpos elásticos:
      Los cuerpos elásticos se deforman ante una fuerza externa, esto es, la distancia entre sus moléculas varía, pero al retirar la fuerza externa, las fuerzas intermoleculares hacen que las moléculas vuelvan a su posición inicial y así, el cuerpo recupera su forma primitiva, por ejemplo: una regla de plástico.
      Naturalmente esto ocurre siempre y cuando no se supere un límite que haga que la deformación sea permanente (caso que se sale del marco de esta breve exposición del sólido).
   B.2. Cuerpos no elásticos:
      Estos cuerpos se deforman ante la aparición de una fuerza externa y recuperan parcialmente su forma o no lo hacen absoluto al retirar la fuerza externa, por ejemplo la plastilina.

En la naturaleza no existen los sólidos rígidos, pues todos se deforman más o menos ante una fuerza externa. Así pues, el sólido rígido vale más como modelo de comportamiento ante unas fuerzas externas, que como un sólido real.

C. Fluidos:

Los fluidos se dividen en:

C.1.Gases

C.2.Líquidos

Su comportamiento ante una fuerza externa es completamente diferente del de los sólidos.

Los líquidos tienen un determinado volumen que varía poco, pero la forma depende de la vasija que los contenga.

Los gases no tienen volumen definido pues ocupan todo el volumen del recipiente que los contengan, por grande que sea éste.

Los líquidos tienen sus moléculas tan juntas que resulta prácticamente imposible juntarlas por lo que, haciendo una abstracción, se llama a los líquidos fluidos incompresibles, y éstos son el objeto de este libro. Sin embargo el gas puede aumentar o disminuir su volumen fácilmente, por lo que son fluidos compresibles.

Si se encierra un gas en un cilindro con un émbolo, se puede variar el volumen del gas con toda facilidad simplemente haciendo fuerza sobre el émbolo.

Si se introduce un objeto tal como por ejemplo una piedra, en el interior del cilindro, el gas se acoplará perfectamente a la forma de la piedra, esto es, se ha deformado el gas sin apenas hacer esfuerzo.

Si dentro del mismo cilindro se introduce un líquido, éste se acoplará a las paredes del cilindro. Si a continuación se introduce la misma piedra que en el ejemplo anterior con un gas, se ve que el líquido también adopta la forma de la piedra sin apenas resistencia. Se ve, pues, que la deformación de líquidos y gases bajo una fuerza tan pequeña como se quiera es una característica común. Si embargo si se deslizase el émbolo hacia arriba el líquido seguiría ocupando el mismo volumen que al principio, por el contrario si se tratara de comprimir el líquido se tropezaría con la “casi” imposibilidad de hacerlo.

Más adelante se verá con más detalle el concepto de compresibilidad y el por qué llamar a los gases fluidos incompresibles.

Así pues, se puede definir el concepto de fluido como: aquellos cuerpos que se pueden deformar con una fuerza tan pequeña como se quiera, pues como se ha visto ésta es la propiedad común de líquidos y gases, diferenciándose en la capacidad para variar su volumen (compresibilidad).

CAPÍTULO 2: CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y UNIDADES

Los conceptos básicos que empleamos son longitud, masa, tiempo y fuerza.

Estos cuatro conceptos están ligados por la 2ª ley de Newton:

$$\vec{F} = m.\,\vec{a}$$

Aristóteles (384-322 a de J.C.) hizo la primera relación entre la fuerza y el movimiento. Según él, la fuerza era proporcional a la velocidad. Tuvo que llegar Sir I. Newton (1642-1727), para formular su segunda ley, fuerza igual a masa por aceleración, para encuadrar el problema. Según Newton la fuerza no era proporcional a la velocidad, sino a su variación con respecto al tiempo (aceleración). Este concepto se modificó, más tarde, con D'Alenbert, Lagrange y Hamulton, siendo válidas hasta la llegada de la Teoría de la Relatividad de A. Einstein. Aun así y todo la mecánica Newtoniana es la base de la ingeniería moderna.

***Unidades*:**

Longitud: Está ligado con el concepto intuitivo de distancia entre 2 puntos que ocupan una posición en el espacio referidas, naturalmente, a unos ejes coordenadas.

Masa: Es el concepto de substancia y, aunque existía inicialmente, fue Newton el que separa los conceptos de masa y de peso (o fuerza capaz de desequilibrar una balanza o bien acción por la cual un cuerpo cae a la tierra), con su segunda ley al enunciar que si se aplica una fuerza sobre un cuerpo, éste ve modificada su velocidad en un cierto tiempo (aceleración) y el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración era precisamente la masa. Este coeficiente se llama masa inerte (o resistencia de un cuerpo a modificar su estado de reposo o movimiento).

Tiempo: Es un concepto también intuitivo que el hombre ha tratado, desde tiempos remotos, de medir. Desde los relojes de arena, de agua o velas. hasta los actuales relojes.

Estas tres magnitudes básicas: longitud, masa y tiempo se miden respecto a un patrón y son independientes entre sí, estando la fuerza ligada a ellas mediante la 2ª ley de Newton:

$$\vec{F} = m.\,\vec{a}$$

Patrones de medida:

A) El patrón de medida de longitud es el metro. El metro es la longitud a 0ºC del prototipo internacional de platino e iridio que se conserva en Levres (Francia), según el acuerdo de la Conferencia Internacional de pesos y medidas celebrado en París en 1889. Esta barra es aproximadamente igual a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. En 1960 se definió como 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación anaranjada del criptón 86. Esta definición substituye con mayor garantía, el prototipo internacional anterior. La longitud es, por supuesto, la misma. Los centros de metrología, hoy en día, utilizan ya la tecnología del rayo láser, midiendo la longitud de onda de este rayo -una vez estabilizado- y definiéndose el metro como un múltiplo de dicha longitud de onda. De esta forma en cualquier laboratorio se puede tener un patrón de longitudes, alcanzándose un grado de precisión de 10^{-8} cm. , esto es del orden del tamaño de los átomos.

El metro se representa simbólicamente con la letra m.

Los múltiplos son:

Decámetro	= 10 m.
Hectómetro	= 100 m.
Kilómetro	= 1.000 m.

Los submúltiplos son:

Decímetro	= 0,1 m.
Centímetro	= 0,01 m.
Milímetro	= 0,001 m.

B) La unidad de medida de masa es el kilogramo, el gramo es igual a 0,001 Kg. y la u.t.m. (unidad técnica de masa) = 9,8 kg.
El "patrón de masa" es la masa de un cilindro de platino-iridio llamado kilogramo y el cual se encuentra en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas de Levres (Francia).

C) La unidad de tiempo es el segundo. Sus múltiplos más frecuentes son el minuto = 60 segundos y la hora = 60 minutos.
El "patrón de tiempo" ha ido evolucionando, para hacerse más preciso, desde el "día solar medio" (tiempo que tarda el sol en pasar 2 veces sucesivas por el meridiano, obteniéndose el valor medio), pasando por el "año trópico", hasta llegar a la definición de "el periodo de la radiación correspondiente al tránsito entre los dos niveles de energía hiperfinas del estado fundamental del átomo de cesio 133". 1 segundo = 919263/770 periodos de cesio.

D) La fuerza tiene como patrón al kilopondio o kilogramo-fuerza, que es la fuerza con la cual la tierra atrae a 1 kilogramo masa en un lugar donde la gravedad es 9,8 m/seg^2.

Basándose en la ecuación

$$\vec{F} = m.\,\vec{a}$$

se va a hacer un cuadro de unidades, para lo cual se tendrá presente que hay 3 sistemas de unidades: el C.G.S., el M.K.S (o sistema Internacional S.I.), y el técnico

En la actualidad se trata de trabajar siempre en el M.K.S., pero es muy frecuente encontrar en todo tipo de publicaciones y maquinaria otros sistemas como el C.G.S. o el técnico e incluso en los países anglosajones sigue siendo frecuente utilizar otros patrones de medida diferentes de los aquí expuestos, tales como la pulgada, el ________, la libra, etc.

Véase el cuadro adjunto de unidades:

	LONGITUD	MASA	TIEMPO	FUERZA
M.K.S.	metro (m)	kilogramo (kg)	segundo (s)	Newton (N)
C.G.S.	centímetro (cm)	gramo (gr)	segundo (s)	dina (din)
TÉCNICO	metro (m)	u.t.m. (9,806 kg)	segundo (s)	kilopondio (kp=kg-f)

Un Newton es la fuerza que aplicada a la masa de un kilogramo le provoca una aceleración de $1 m/s^2$.

Un dina es la fuerza que aplicada a la masa de un gramo le provoca una aceleración de $1 \text{ cm}/ \text{s}^2$.

Unidades de área:

El área está ligada al concepto de superficie o zona encerrada en un recinto y sus unidades más frecuentes son:

- 1 m^2 = Metro cuadrado: es el área de un cuadrado de 1 m. de lado.
- 1 cm^2 = Centímetro cuadrado: es el área de un cuadrado de 1 cm. de lado
  $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$
- 1 mm^2 = Milímetro cuadrado: es el área de un cuadrado de 1 mm. de lado.
  $1 \text{ mm}^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$
- 1 km^2 = Kilómetro cuadrado: es el área de un cuadrado de 1 km. de lado.
  $1 \text{ km}^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$

Volumen. Unidades:

El volumen es el concepto ligado con la idea de capacidad o zona del espacio o bien de un cuerpo encerrado dentro de una superficie.

Las unidades son:

- $1\ m^3$ = Metro cúbico: volumen encerrado dentro de un cubo de 1m de lado.
- $1\ cm^3$ = Centímetro cúbico: volumen encerrado dentro de un cubo de 1 cm de lado.
  $1\ cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$
- $1\ mm^3$ = Milímetro cúbico: volumen encerrado dentro de un cubo de 1 mm de lado.
  $1\ mm^3 = (10^{-3}\ m)^3 = 10^{-9}\ m^3$
- $1\ Hm^3$ = Hectómetro cúbico: volumen encerrado dentro de un cubo de 100 m de lado.
- $1\ Hm^3 = (10^2\ m)^3 = 10^6\ m^3$

Cuando se trabaja en un determinado fenómeno, el sistema de unidades que se utilice debe ser el mismo para todas las magnitudes que intervienen en el mismo.

Dimensiones:

Las magnitudes físicas independientes son tres: longitud, masa y tiempo. El análisis dimensional consiste en atribuir a estas tres magnitudes las letras:

L = longitud
M = masa
T = tiempo

Con lo cual las magnitudes derivadas resultarán de la combinación de las potencias de las magnitudes fundamentales y así:

Área = $S \Rightarrow [S] = L^2$
(una longitud al cuadrado)
Volumen = $V \Rightarrow [V] = L^3$
(una longitud al cubo)
Fuerza = $F \Rightarrow [F] = M\ .\ (L/T^2) = MLT^{-2}$,
pues la fuerza equivale a la masa por el vector aceleración.

CAPÍTULO 3: VISCOSIDAD. FLUIDOS PERFECTOS Y FLUIDOS REALES

Viscosidad:

Entre dos sólidos en contacto aparece una fuerza de rozamiento cuando se ejerce una fuerza sobre uno de ellos. Por ejemplo si se empuja un cajón (fig. 3.1) con una fuerza F_1, aparecerá una fuerza de rozamiento R_E, que impide que el cajón se mueva. A esta R_E se le llama rozamiento estático, donde:

$$R_E = \mu_E . N_1 = \mu_E .(P + F_1 \operatorname{sen} \alpha)$$

y al coeficiente μ_E se le llama coeficiente de rozamiento estático, y es constante.

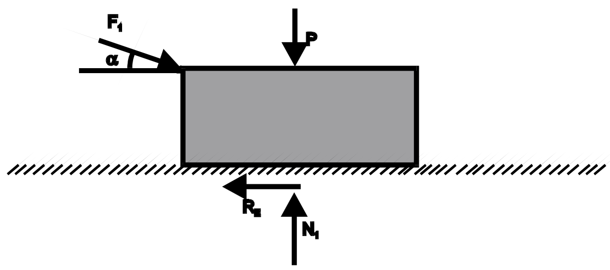


Fig. 3.1.

Si se aumenta la fuerza F_1 hasta una fuerza F_2 llegará un momento en que el cajón comenzará a moverse y aparecerá un rozamiento dinámico R_D, inferior al estático y tal que:

$$R_D = \mu_D . N$$

donde:

R_D = Rozamiento dinámico

μ_D = Coeficiente de rozamiento dinámico que también es constante.

N_2 = Reacción normal = P + F_2 Sen α

(ver fig. 3.2.)

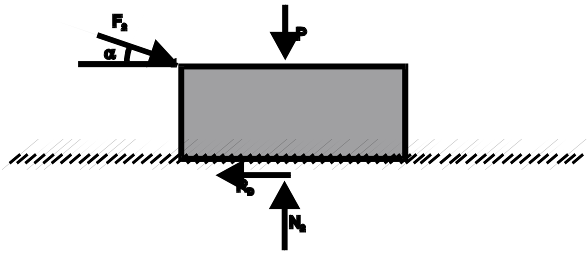


Fig. 3.2.

donde los coeficientes de rozamiento estático y dinámicos son constantes, siendo el dinámico inferior al estático.

En el caso de los fluidos, cuando una copa fluida se mueve respecto a otra aparecerá un rozamiento o fuerza tangencial a las capas que se opondrá al movimiento de unos respecto de otros. Estos fluidos se llaman reales y a los fluidos en que esto no ocurre -por abstracción- se les llama fluidos perfectos. En los fluidos perfectos sólo aparecerá una fuerza normal a las capas pues la tangencial es cero.

En los fluidos reales este rozamiento entre capas se llama viscosidad y a diferencia del rozamiento entre sólidos esta viscosidad es función de la velocidad de unas capas con relación a las otras, decreciendo con esta y anulándose al estar el fluido en reposo.

Es así que un fluido real en reposo no tiene viscosidad y este comportamiento ideal hace posible una formulación más sencilla que en los fluidos en movimiento.

CAPÍTULO 4: MEDIO CONTINUO

Los fluidos y en concreto los líquidos, como se ha dicho, están formados por moléculas que al estar muy juntas, dan la sensación de continuidad.

La continuidad de un cuerpo se define como: aquella propiedad en virtud de la cual entre dos partículas del citado cuerpo siempre existe una tercera, lo cual se sabe que no es cierto en la realidad, pues entre dos partículas no hay absolutamente nada llegado un grado de proximidad.

Véase un ejemplo real. Considérese 1 mol de agua, el cual como se sabe pesa 18 gr. y ocupa por tanto 18 cm^3 y por tratarse de 1 mol. contendrá un número de moléculas igual al número de Avogadro, esto es 6,023 x 10^{23} moléculas.

Si se considera que una molécula de agua ocupa un volumen encerrado en un cubo de arista de 2a, el volumen del citado cubo se puede calcular estableciendo la siguiente proporción: si en 18 cm^3 hay 6,023 x 10^{23} moléculas, en un cubo de volumen $(2a)^3$ habrá una molécula, con lo cual el volumen:

$$(2a)^3 = \frac{18\ cm^3}{6{,}023x10^{23}}$$

y el lado de la arista del cubo:

$$2a = \sqrt[3]{\frac{18}{6{,}023x10^{23}}} = 3{,}1x10^{-8}\ cm$$

Como se puede ver esta distancia es tan pequeña que resulta imposible de ser percibida por el ojo humano, y en la actualidad tampoco es posible de ver con ningún tipo de microscopio, por potente que este sea. Es así que ante esta imposibilidad de ver la molécula dé la sensación global de continuidad de acuerdo a la definición de ésta.

CAPÍTULO 5: DENSIDAD, VOLUMEN, PESO ESPECÍFICO DE UN FLUIDO Y VARIACIÓN DE LA DENSIDAD

Ya se ha definido el concepto de masa que como se sabe está ligado al concepto de substancia, así como se definió el volumen y las unidades más habituales que se utilizan para uno y otro.

Así pues, se define la densidad absoluta como la masa que hay en la unidad de volumen. Un ejemplo sería un líquido que tuviese una masa de 2.000 gr. y ocupara un volumen de 2.500 cm^3, en este caso su densidad sería:

$$\rho = \frac{2.000\ gr}{2.500\ cm^3} = 0,8\ gr / cm^3$$

Se define la densidad relativa como el cociente de la densidad absoluta a la densidad absoluta del agua (siendo la densidad del agua, ρ_{H2O} = 1 gr/cm^3). En el ejemplo anterior la densidad absoluta era ρ = 0,8 gr/cm^3 y por tanto la densidad relativa es:

$$\rho_R = \frac{0,8\ gr / cm^3}{1\ gr / cm^3} = 0,8$$

que como se puede ver es un número adimensional.

<u>Peso específico</u>:

Así como se define el peso como la fuerza con que la tierra atrae a una determinada masa, y es: peso = masa x aceleración de la gravedad, se define el peso específico como el peso de una masa por unidad de volumen:

$$\gamma = peso\ específico = \frac{peso}{volumen} = \frac{m.g}{volumen}$$

Luego:

$$\gamma = \frac{m}{v}.g = \rho.g$$

donde:

m = masa

v = volumen

ρ = densidad

g = aceleración de la gravedad

Variación de la densidad:

Como se explicó al definir los fluidos, se vio que ese comportaban de forma diferente: líquidos y gases, pues los líquidos no pueden variar su volumen, o si lo hacen es de una forma inapreciable. No es así en los gases, en donde el volumen se puede variar fácilmente. Así pues, la densidad en los líquidos se puede considerar constante pues tanto su masa como su volumen lo son, mientras que en los gases para una determinada masa se puede modificar su volumen, y por tanto su densidad es variable.

Ajustándonos más a la realidad, hay que tener en cuenta que el volumen, y por tanto la densidad, varían con la temperatura, pues tanto líquidos, como gases, tienden a dilatarse al aumentar ésta y a contraerse al disminuir ésta, excepción hecha del comportamiento autónomo del agua en las proximidades del punto de compelación.

Como ejemplo, cójase un cilindro con un émbolo. Si se introduce un gas se ve que aplicando una fuerza F sobre el émbolo se puede disminuir su volumen sin variar su masa, con lo que su densidad habrá aumentado. Las moléculas del gas están muy separadas inicialmente y no existen fuerzas intermoleculares lo suficientemente importantes para impedir que se haga esto, por lo que resulta muy sencillo juntarlas.

Si embargo si en el mismo cilindro se introduce un líquido tal como el agua y se aplica una fuerza sobre el émbolo, el volumen del agua prácticamente no variará, pues sus moléculas están muy próximas (como se calculó anteriormente) y en consecuencia su densidad tampoco variará de forma apreciable, por lo que podemos decir que un líquido tiene densidad constante.

Si el cilindro con su émbolo en el que se introdujo agua o gas, se calentase se vería que el émbolo tendería a ascender al aumentar la temperatura. Mucho en el caso del gas y poco en el caso del líquido.

CAPÍTULO 6: PRESIÓN

Considérese un fluido en "reposo y en él una superficie diferencial ds (esto es tan pequeña como se quiera).

Dicha superficie ds divide al líquido en dos zonas (1) y (2), de tal modo que si se quisiese quitar la zona (1), para mantener el fluido en equilibrio, se tendría que hacer una fuerza $\overline{dF}$, pues tanto las moléculas de la zona (1) como las de la (2) golpean a la otra a través de dicha superficie ds (ver Fig. 6.1).

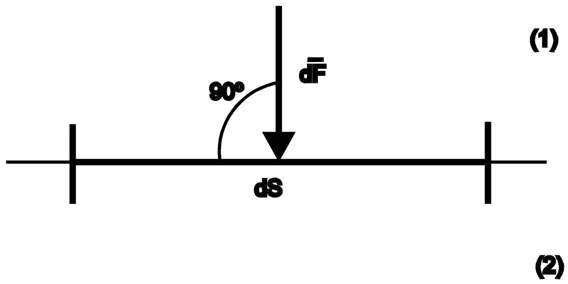


Fig. 6.1

Como se puede ver esta fuerza $\overline{dF}$ es perpendicular al elemento de área ds, y es que se ha dicho que el fluido está en "reposo" y por tanto no aparecerá una fuerza paralela al elemento de superficie ds, pues como se ha dicho la viscosidad o rozamiento entre capas fluidas es función de la velocidad relativa de éstas, y al acumularse dicha velocidad relativa se anula consecuentemente el rozamiento, con lo cual queda justificado el ángulo de 90º entre fuerza diferencial y superficie ds.

Se define la presión como:

$$p = \frac{dF}{ds}$$

o puesto vectorialmente:

$$\overline{dF} = p.\overline{ds}$$

La presión es una magnitud escalar, o dicho de otra forma no es un vector con módulo dirección y sentido, pues es independiente de la dirección que se considere como se va a demostrar a continuación.

Considérese un líquido en reposo y en su interior un tetraedro infinitesimal cuyas aristas, que parten del punto 0, son las infinitésimas. OA = dx; OB = dy y OC = dz, como muestra la Fig. 6.2.

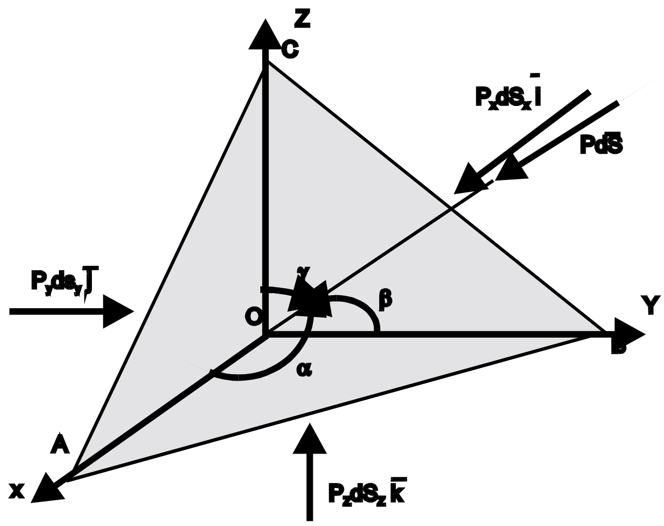


Fig. 6.2.

Este tetraedro está en equilibrio bajo las fuerzas debidas a la presión en sus cuatro caras y las fuerzas por unidad de masa (en el caso del agua dentro de un depósito, la fuerza por unidad de masa, es la aceleración de la gravedad $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 9{,}81\,\frac{N}{Kg}$) por la masa diferencial.

Habrá, así, cinco fuerzas:

1. La primera que actuará sobre la cara OBC, de área ds, y en la cual actuará un presión p, y consecuentemente la fuerza será pds y formará su recta de acción ángulos α, β y γ con los ejes x, y y z respectivamente, como se puede ver en la Fig. 6.2.

2. La segunda fuerza debida a la presión actuará sobre la cara abc de área ds_x y de valor $p_x ds_x \bar{i}$.

3. La tercera fuerza actuará sobre la cara OAC de área ds_y y de valor $p_y ds_y \overline{f}$.

4. La cuarta fuerza actuará sobre la cara OAB y de valor $p_z ds_z \overline{k}$.

5. La quinta fuerza será la debida a la masa diferencial dm = ρ.dvol, donde ρ es la densidad y dvol el volumen del tetraedro diferencial OABC.
   De esta forma si la fuerza por unidad de masa tiene por componentes X, Y y Z, la fuerza total sobre el elemento OABC será ρXdvol, ρYdvol, ρZdvol. X, Y y Z se unidan en N/kg o bien su equivalente m/seg^2.

Proyectando las cinco fuerzas sobre los tres ejes coordenadas e imponiendo las condiciones de equilibrio al tetraedro se tendrá:

$$p_x ds_x - pds \cos\alpha + \rho \ X \ dvol = 0 \qquad (6.1)$$

$$p_y ds_y - pds \cos\beta + \rho \ Y \ dvol = 0 \qquad (6.2)$$

$$p_z ds_z - pds \cos\gamma + \rho \ Z \ dvol = 0 \qquad (6.3)$$

Analícese la ecuación (6.1):

$$d \ vol = \frac{1}{3} dx \ . \ dsx = \frac{1}{6} dx \ dy \ dz$$

Teniendo en cuenta que α es el ángulo que forma la fuerza pds con el eje x, y puesto que esta fuerza es normal al plano (pues no hay viscosidad) se cumple que α también es el ángulo que forma el área ds con el plano y o z y por tanto $ds \cos\alpha = dsx$. De esta forma la ecuación (6.1) queda:

$$p_x ds_x - p ds_x + \frac{1}{3} d_x \; ds_x \; . \; \rho \; . \; X = 0$$

Con lo cual simplificando:

$$p_x - p + \frac{1}{3} d_x \;\; \rho \; . \; X = 0$$

al tender a cero las dimensiones del tetraedro, el tercer término $\frac{1}{3} d_x \;\; \rho \; . \; X$, será despreciable frente a $p_x - p$, y cuanto más pequeño sea el diferencial, más precisa será la igualdad.

$$p_x - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x - p$$

Análogamente se tiene que $p_y - p$ y $p_z - p$, cumpliéndose que la presión en un punto de un fluido en reposo es independiente de la dirección que se escoja.

$$p = p_x = p_y = p_z$$

CAPÍTULO 7:

7.1. UNIDADES DE PRESIÓN Y EQUIVALENCIAS

Se tiene que, la presión en un punto será el peso de la columna líquida que hay sobre él. Pues en el equilibrio la presión p por el ds se igualará al peso de la columna de líquido que hay sobre el citado punto. (Ver Fig. 7.1).

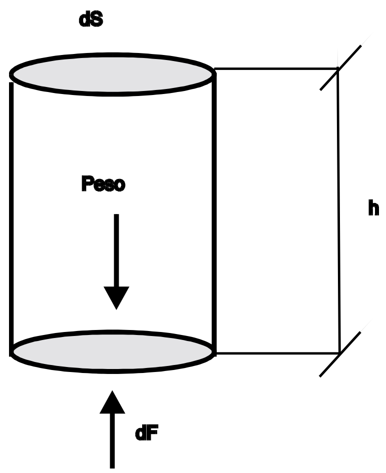


Fig. 7.1

Al tener la columna de líquido una altura h y un área de su base ds y siendo la densidad de líquido ρ, se tendrá que el peso será:

$$Peso = dm \,.\, g$$

donde:

dm = ρ dvol
dm = diferencial de masa
dvol = diferencial de volumen = h.ds
dvol = p . ds

Peso = dm . g, y en el equilibrio:

$$dF = Peso \Rightarrow p \,.\, ds = dm \,.\, g = (ds \,.\, h).\, \rho . g$$

y de aquí:

$$p = \rho \cdot g \cdot g$$

Las unidades de presión serán, de acuerdo a la definición, unidades de fuerza por unidad de superficie.

$$p = \frac{dF}{ds}$$

En el C.G.S. 1 dina/cm^2 = 1 baria

En el M.K.S. 1 Newton/m^2 = 1 Pascal = 1 Pa

$$1 \quad Pascal = \frac{1\ N}{m^2} = \frac{10^5\ dinas}{10^4\ cm^2} = 10\, barias$$

El Pascal es una unidad de baja presión pues es repartir 1 N $\approx$ 0,1 kg-f, en una superficie de 1 m^2. Por ello se recurre a unidades mayores como es el kg-f/cm^2.

$$\frac{1\, kg - f}{cm^2} = \frac{9{,}81\ N}{10^{-4}\ m^2} = 98.100\ Pascales$$

Así por ejemplo la presión de las ruedas de un coche está alrededor de los 2 kg-f/cm^2.

Habitualmente, como hemos visto, se define la presión en un punto de un líquido como el peso de la columna de éste sobre la unidad de superficie.

De esta forma si se tiene un líquido de densidad ρ_1, a una profundidad h_1, producirá una presión p = ρ_1. g. h_1. Si se tiene otro líquido de densidad ρ_2, para que produjese la misma presión ¿qué profundidad de líquido 2 se tendría que tener?.

$$p_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

$$p_2 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

y como se quiere que $p_1 = p_2$:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

con lo cual se puede establecer una equivalencia entre las alturas h_1 y h_2 de ambos líquidos.

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2$$

<u>Ejemplo</u>: Se define la atmósfera como la presión que ejerce una columna de mercurio a 0º C y de 76 cm. de altura.

Si se coge un tubo de 1 cm^2 de sección y en él se vierten 76 cm^3 de mercurio la presión en el fondo será:

$$p = 13{,}591\,\frac{gr}{cm^3}\; x\; 981\,\frac{cm}{s^2}\; x\; 76\; cm$$

$$p = 1{,}013\; x\; 10^6\; gr\,.\,\frac{cm}{s^2} = 1{,}013\; x\; 10^6\; barias$$

$$p = 10{,}13\; x\;\frac{N}{cm^2} = 1{,}013\,\frac{kg-f}{cm^2}$$

Como se puede ver la atmósfera es una presión grande y es aproximadamente 1 kg-f/cm^2.

Considérese, así mismo, una columna de agua que produjese una presión de 1 atmósfera.

Estableciendo la equivalencia entre densidades y alturas se tendrá:

$$76\ cm\ x\ 13{,}591\ {}^{gr}\!/_{cm^3} = h_{H_2O}\ .\ 1\ {}^{gr}\!/_{cm^3}$$

y de aquí

$$h_{H_2O} = 10{,}32\ metros\ de\ columna\ de\ agua\,.$$

Luego la columna de agua equivalente a una de mercurio de 76 cm. es de 10,32 m.

Se suele utilizar como medida de presión -debido a esta relación de equivalencia- los metros de columna de un líquido o su equivalente de mercurio.

Así se hablará de 10 m.c.a. (metros de columna de agua) para expresar una presión de:

$$p = \frac{1\ gr}{cm^3}\ x\ 1.000\ cm\ x\ 981\,\frac{cm}{s^2}$$

$$p = 9{,}81\ x\ 10^5\ \frac{dinas}{cm^2} = 1\,\frac{kg-f}{cm^2}$$

<u>Aproximaciones</u>:

Como 1 atmósfera es 1,032 kg-f/cm^2 y la equivalencia de alturas entre agua y mercurio es 76 cm. de Hg $\leftrightarrow$ 10,32 m.c.a., se podrá saber con bastante exactitud las atmósferas o bien los kg-f/cm^2, que hay a una determinada profundidad en el mar.

Como ejemplo véase la presión que hay a 100 m. de profundidad en el mar exacta y aproximadamente:

A) Exactamente:

$$p = \rho \ \ g\, h$$

suponiendo que la densidad del agua del mar es 1 gr/cm^3 (es ligeramente mayor)

$$p = 1\ gr/cm^3 \ x\ 981 \frac{cm}{s^2}\ x\ 100\ x\ 10^2\ cm = 10 \frac{kg-f}{cm^2}$$

Sin contar la presión de la atmósfera que como se ha visto es del orden de 1 kg-f/cm^2. (Más adelante se verá con más detalle la presión atmosférica).

Como $1\ atmosfera \leftrightarrow 1{,}032 \dfrac{kg-f}{cm^2} \leftrightarrow 10{,}32\ \ m.c.a \leftrightarrow 76\ cm\ de\ Hg$, por cada 10,32 m.c.a. que se baje, se conseguirá 1,032 kg/cm^2, o bien 1 atmósfera.

B) Aproximadamente:

Se puede decir que aproximadamente 1 atmósfera es 1 kg-f/cm^2 $\leftrightarrow$ 10 m.c.a.

Luego dividiendo la profundidad por 10 se obtendrá de forma exacta los kg-f/cm^2, y de forma aproximada las atmósferas (hecha excepción de la presión atmosférica).

Así pues a 100 m. de profundidad habrá una presión de 100/10 kg-f/ cm^2, y aproximadamente 10 atmósferas.

El hecho de que se ignore con frecuencia la presión de la atmósfera, es debido a que en una superficie que está sumergida, la presión atmosférica actúa en los 2 lados y se contrarrestan, y de ahí que sólo se considere la presión debida a la capa de líquido. Sin embargo siempre hay que tener en cuenta este fenómeno. Si por ejemplo se considerase un cajón de forma cúbica, al construirlo se tendría que tener en cuenta que a una misma profundidad actúa la presión debida a la columna de líquido y a la atmosférica, pues el cajón no es nunca un sólido rígido, sino que se deforma y se ha de tener en cuenta este exceso de presión.

7.2. Subpresión

Este fonómeno es debido a que el agua, o un líquido en general, se filtra por debajo de un cuerpo que está apoyado en el fondo de un recipiente que contiene al citado líquido.

El agua se ve empujada por la presión reinante en el punto B, (ver Fig. 7.3.), hacia los huecos que dejan entre sí, cuerpo y fondo del recipiente.

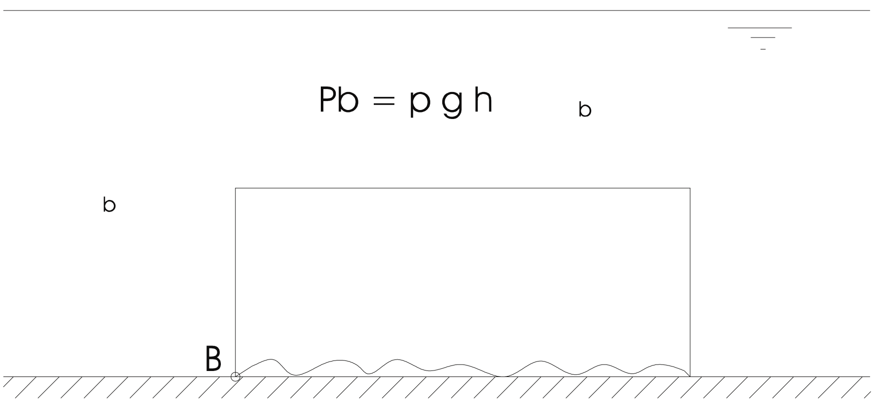
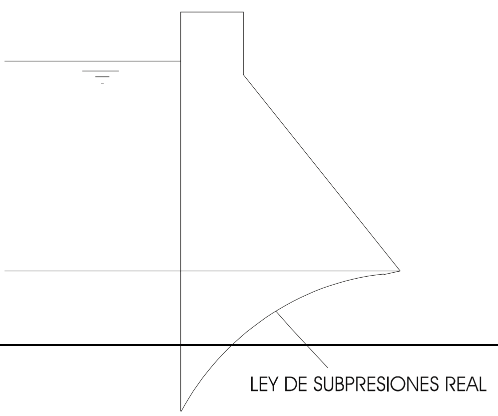


Fig. 7.3.

También se debe a la característica de los líquidos de amoldarse perfectamente al entorno que los rodea (los huecos) sin apenas esfuerzo, aunque en este caso sí que hay una presión P_B, que puede llegar a ser grande. Esta presión, que por presentarse por debajo del cuerpo se llama "SUBPRESIÓN", tiende a levantar el cuerpo y es origen de inestabilidad de éste (tendencia a volcarlo).

La subpresión hay que tenerla en cuenta siempre que se diseñe una obra civil que esté en contacto con el agua, por ejemplo: una presa, bien en un río o en el mar, un dique, etc.

En una presa la lay de subpresión varía desde la presión, en el parámetro de aguas arriba, P_A, hasta la presión en el parámetro de agua abajo, P_B que será una curva como la indicada en la Fig. 7.4. En general, y para estar del lado de la seguridad, se supondrá que esta curva es una línea recta. (ver Fig. 7.5.).



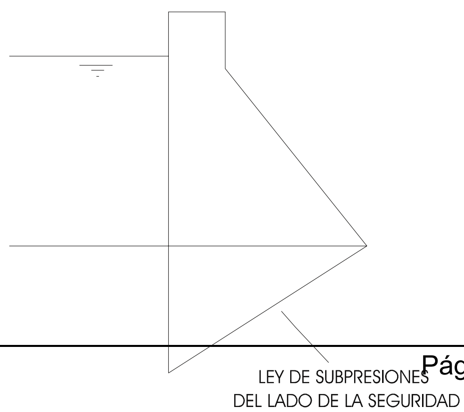


Fig. 7.4. Fig. 7.5.

Ejemplo:

Sea una presa de río como la que indica la fig. 7.6.:

A. Hallar la ley de subpresión es en la base de la presa teniendo en cuenta que la profundidad del agua es de 15 m. en el paramento de aguas arriba y no hay agua en el de guas abajo. Se supondrá que la variación de la subpresión es lineal.
B. Hallar la ley de presiones y subpresiones debidas al agua que soporta la presa.

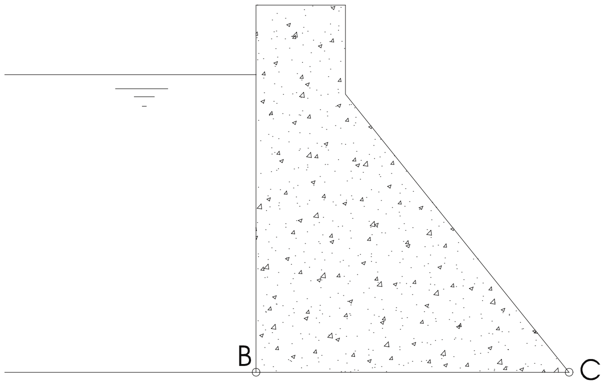


Fig. 7.6.

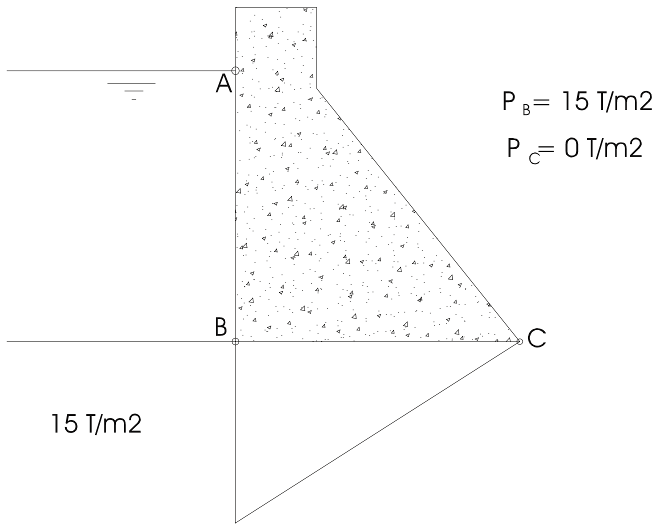
A. La presión en B será:

$P_B = \rho \; g \; h_B$, como $\rho \; g = 1 \, {}^{T}\!/_{m^3}$

$$P = 15\,(m) \; x \; 1\left({}^{T}\!/_{m^3}\right) = 15 \, {}^{T}\!/_{m^2} = 15 \; x \; \frac{10^3 \, kg}{10^4 \, cm^2}$$

$$P_B = 1{,}5 \, {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

La presión en A será cero, y por ello la ley de subpresiones será:



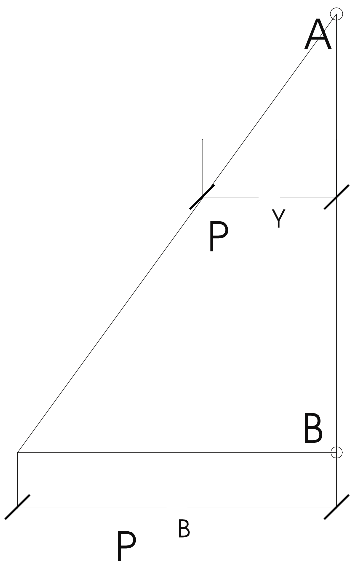
$$P_B = 15\left(\frac{T}{m^2}\right)$$

$$P_C = 0\left(\frac{T}{m^2}\right)$$

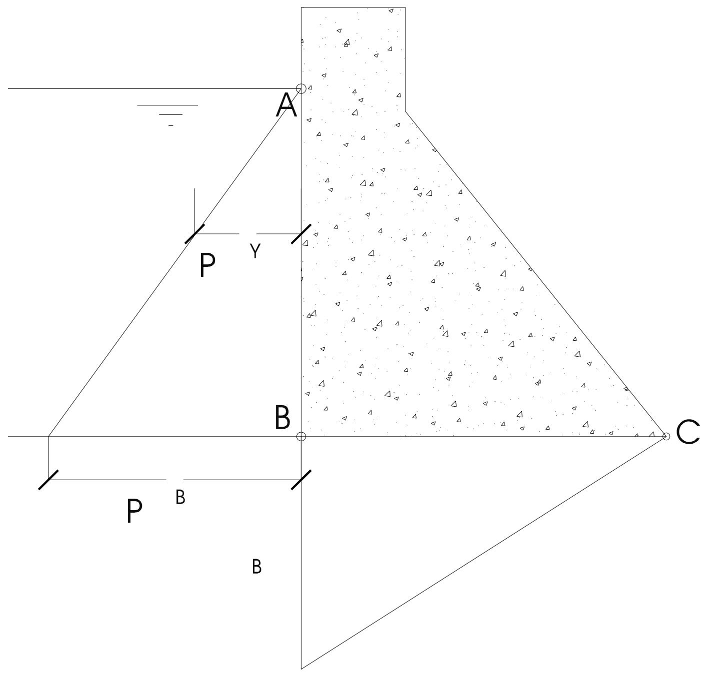
B. La ley de presiones en la cara AB será de acuerdo a la definición de presión $P_y = \rho\ g\ y$, donde:

$\rho\ g$ = peso específico del agua = $1\left(\frac{T}{m^3}\right)$

y = profundidad contada desde la superficie



La ley de presiones y subpresiones será la superficie.



donde la longitud del segmento P_y indica la presión a una profundidad "y".

Para definir la ley de subpresiones DC es necesario conocer la longitud de la base BC y así dimensionar la presa, para que cumpla los requisitos que le pidamos.

CAPÍTULO 8:

Se ha dicho que el volumen y, consecuentemente, la densidad varían con la presión y con la temperatura.

Se va a analizar este comportamiento, tanto en líquidos como en gases, por separado.

8.1. VARIACIÓN DEL VOLUMEN Y LA DENSIDAD CON LA PRESIÓN. MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD

Considérese un cilindro con un émbolo, como muestra la Fig. 8.1, y un gas en su interior.

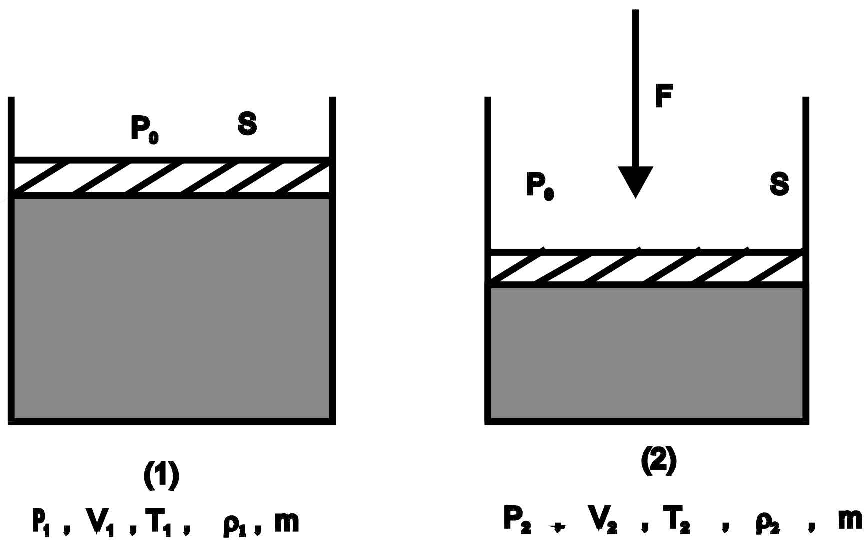


Fig. 8.1

Enseña la experiencia que aplicando una fuerza sobre el émbolo de área S, el volumen del gas disminuye, y al no variar la masa aumenta consecuentemente la densidad ρ.

Donde:

V_1 = Volumen inicial
V_2 = Volumen final
T_1 = Temperatura inicial
T_2 = Temperatura final
m = masa gaseosa
ρ_1 = densidad inicial = m/ V_1
ρ_2 = densidad final = m/ V_2

En un gas perfecto estas variables están ligadas por la ecuación:

$$P \, . V = u \; R \; T$$

En el caso (1) el gas está en equilibrio con la presión exterior (no se ha considerado el peso del émbolo, se desprecia).

En este caso $P_1 = P_0$; $P_1 \, V_1 = u \; R \; T_1$ y $\rho = \dfrac{m}{V_1}$.

En el caso (2) el gas alcanza el equilibrio tras un proceso, que será definitorio del módulo de compresibilidad, y cuando la presión interior $P_0 + \dfrac{F}{S}$ se iguala con la presión del gas P_2. De esta forma $P_{EXTERNA} = P_0 + \dfrac{F}{S}$. $P_2 = P_{EXTERNA}$ (en el equilibrio). $P_2 . V_2 = u \; R \; T_2$ y $\rho = \dfrac{m}{V_2}$.

Supóngase que la transformación que ha llevado al gas desde el estado (1) al (2) es isotérmica y que $\dfrac{F}{S} = P_0$.

Según esto $P_2 = 2 \; P_0$, $T_1 = T_2$ y aplicando la ley de los gases perfectos se tendrá:

$$P_1 \, . V_1 = P_2 \, . V_2 \quad \Rightarrow \quad P_0 \, . V_1 = 2 \; P_0 \, . V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0{,}5 \, . V_1$$

El incremento de volumen $\Delta V = V_2 - V_1 = -0,5 V_1$, y el incremento de presión es $\Delta p = P_2 - P_1 = P_0$.

Se define el módulo de compresibilidad como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

Donde:

ε = módulo de compresibilidad

ΔV = $V_2 - V_1$

Δp = $P_2 - P_1$

V = V_1

Así pues, en este ejemplo, el módulo de compresibilidad es:

$$\varepsilon = -\frac{(2\ P_0 - P_0)}{\left(\frac{-0,5 V_1}{V_1}\right)} = 2\ P_0$$

Donde P_0 es la presión atmosférica.

Como se puede ver para un incremento de presión, ΔP_1, positivo el volumen disminuye y consecuentemente ΔV es negativo y de ahí el signo menos que acompaña a la definición del módulo de compresibilidad, pues de esta forma siempre será positivo.

Véase, a continuación, el caso de un líquido, en particular del agua, cuyo módulo de compresibilidad es:

$$\varepsilon = 2,2\ x\ 10^{9}\ \ Pa \approx 2,2\ x\ 10^{9}\ \ x\ \frac{10^{-1}}{10^{4}}\ \ \frac{kg-f}{cm^{2}} = 22.000\ \ \frac{kg-f}{cm^{2}}$$

Considérese un volumen inicial de 1 m^3 encerrado dentro del mismo cilindro del ejemplo anterior. Comprímase este volumen en 10^6 Pascales$\rightarrow \Delta_p = 10^6$ Pa.

Si inicialmente era de 1 m^3 la disminución de volumen ΔV será igual a:

$$\Delta V = \frac{\Delta_p\ .V}{\varepsilon} = \frac{-10^{6}\ \ Pa\ .\ 1\ m^{3}}{2,2\ x\ 10^{9}\ \ Pa}$$

Luego:

$$\Delta V = -\ \frac{10^{-3}}{2,2}\ m^{3} = -4,54\ x\ 10^{-4}\ \ cm^{3}$$

$$10^{6}\ \ Pa = 10^{6}\ \frac{N}{m^{2}} \approx 10^{5}\ \frac{kg-f}{m^{2}} = 10\ \frac{kg-f}{cm^{2}}$$

De este modo, aplicando una presión de $10^{6}\ Pa \approx 10\frac{kg-f}{cm^{2}}$, se ha reducido el volumen en $4,54\ x\ 10^{-1}\ \ dm^{3} = 0,454\ dm^{3}$.

El hecho de que se aplique una presión de 10^6 Pa es como si este volumen de 1 m^3 de agua se hubiera bajado desde la superficie hasta 100 metros de profundidad obteniendo una reducción de volumen ínfima, pues $1\ m^{3} = 10^{3}\ \ dm^{3}$.

Comparándolo con el caso del gas, se ve que para un incremento de presión de 2 atmósferas se ha reducido el volumen a la mitad.

Véase el cuadro adjunto para mejor comparar los dos casos:

A) Caso del gas:

$$\frac{\Delta V}{V} = -0,5 \Rightarrow 50\ \%$$

$$\Delta P = 2 \quad Atmósferas$$

B) Caso del agua:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-4,54\ x\ 10^{-1}}{10^{3}} \Rightarrow 0,0454\ \%$$

$$\Delta P \approx 10 \quad Atmósferas$$

A la vista de los resultados se puede ver que a efectos de “presión” los líquidos son prácticamente incompresibles, mientras que los gases son altamente compresibles.

8.2. MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD EN GASES

Cuando se ha comparado la disminución unitaria del volumen entre gases y líquidos, se ha precisado que al hacer la compresión en el gas era mediante un proceso isotérmico, mientras que para el agua no se ha dicho nada. El módulo de compresibilidad de un gas depende del tipo de proceso del que se trate. Así se distinguirá entre procesos adiabáticas e isotérmicas, pues para los procesos isobaras ($\Delta p = 0$) el módulo de compresibilidad es cero, y para los procesos isocoras ($\Delta V = 0$), el módulo de compresibilidad es infinito.

8.2.1. Módulo de compresibilidad isotérmico

La ecuación de los gases perfectos se expresa $PV = URT$ y como el proceso es isotérmico queda $PV = Cte$.

Diferenciando esta expresión:

$$dp\ .V + p\ .dV = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = -P\frac{dV}{V}$$

$$\frac{-dp}{(dV/V)} = p$$

pero el primer miembro, es el módulo de compresibilidad y así:

$$\varepsilon \ isotermico = p$$

8.2.2. Módulo de compresibilidad adiabático

Un proceso adiabático viene representado por la ecuación $PV^{\gamma} = cte$. Este tipo de procesos es muy importante en la naturaleza y representa una transformación en la que no hay disipación de calor. Como caso particular los procesos que se realizan a gran velocidad son adiabáticos pues debido a su gran rapidez, la propagación del calor es prácticamente imposible. Un ejemplo se tiene en la propagación de la onda sonora en el aire, donde la velocidad del sonido es del orden de 330 m/s a 20º C.

Véase a continuación cómo calcular el módulo de compresibilidad en un proceso adiabático.

Diferénciese la ecuación de un proceso adiabático $PV^{\gamma} = cte$, donde:

P = Presión
V = Volumen
γ = Coeficiente adiabático

$$dp\,.V^{\gamma} + P\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,.dV = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dp\,.V + P\,\gamma\,.dV = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dp = -P\,\gamma\,.\frac{dV}{V} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{-\dfrac{dV}{V}} = P\,\gamma$$

donde el primer miembro es el módulo de compresibilidad del gas. $\varepsilon\ adiabatico = p\ .\gamma$

8.3. VARIACIÓN DE LA DENSIDAD EN GASES Y LÍQUIDOS CON LA TEMPERATURA

A) GASES:

Según la ecuación de los gases perfectos:

$$P\,.V = U\ .R\,.T$$

Donde:

P = Presión

V = Volumen

n = número de moles = $\frac{m}{M}$

m = masa

M = Peso molecular

R = Cte. de los gases

T = Temperatura en grados Kelvin

De aquí:

$$P \cdot \frac{m}{\rho} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

Y por tanto:

$$P = \frac{R}{M} \cdot \rho \ \cdot T$$

La conclusión es que la densidad es directamente proporcional a la presión, e inversamente proporcional a la temperatura.

B) LÍQUIDOS:

En los líquidos, como se ha visto, el volumen varía insignificantemente para grandes incrementos de presión. Sin embargo e volumen de los líquidos varía mucho más (unas 100 veces más), que el de los sólidos, al aumentar la temperatura.

Ha de tenerse en cuenta que si se calienta una vasija con agua habrá dos fenómenos superpuestos.

El primero es a consecuencia del calentamiento de la vasija con su consecuente dilatación, y el segundo la dilatación del agua. Como consecuencia si se marca el volumen final del agua en el cuello de la vasija se han de tener en cuenta estos dos fenómenos por separado. En los líquidos sólo es posible considerar la dilatación cúbica que responde a la fórmula:

$$V_T = V_0\left(1 + \beta\ t\right)$$

Donde:

V_T = Volumen a un temperatura t (º C)

V_0 = Volumen inicial

β = Coeficiente de dilatación del líquido

Según la Fig. 8.2. el volumen inicial vendrá definido por el punto A_0.

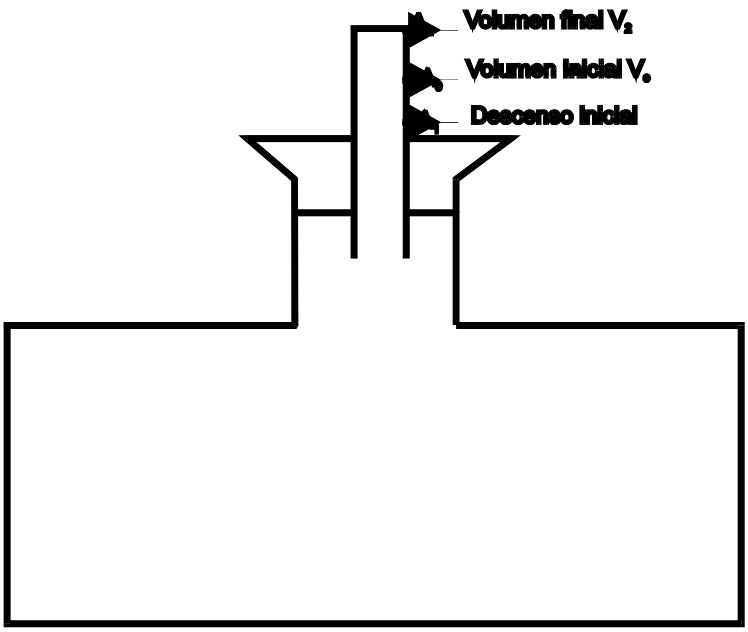


Fig. 8.2

Al dilatarse la vasija el líquido desciende hasta A_1 y a continuación al dilatarse el líquido, éste asciende hasta A_2.

$$V_1 = V_0\left(1 + \beta_a\ t\right)$$

Donde β_a es el coeficiente de dilatación aparente del líquido.

Como, además, la vasija se ha dilatado el volumen total dilatado será $V_{FINAL} = V_2 = V_1\left(1 + \beta_v\ t\right)$, donde β_v es el coeficiente de dilatación de la vasija.

Luego el $V_{FINAL} = V_0\left(1 + \beta_a\ t\right)\left(1 + \beta_v\ t\right)$

$$V_{FINAL} \approx \left[1 + \left(\beta_a + \beta_v \right) t \right]$$

Donde el coeficiente de dilatación real del líquido es:

$$\beta = \beta_a + \beta_v$$

Comportamiento del agua

El agua responde a un comportamiento que se sale del marco de los demás líquidos. Cuando el agua caliente se enfría hasta 4º C se va contrayendo su volumen y en consecuencia su densidad aumenta. Entre 4ª C y 0º C el agua está en el proceso de compelación (solidificación), y aumenta su volumen disminuyendo consecuentemente su densidad.

Este proceso es de gran importancia en la naturaleza, pues en virtud de él se forma una capa de hielo en la superficie evitando que el agua más profunda pierda calor, conservando así su temperatura.

Según esto los líquidos aumentan su volumen, al hacerlo la temperatura y consecuentemente desciende su densidad y disminuye su volumen al descender la temperatura, ascendiendo su densidad. Con lo cual las moléculas de los líquidos se juntan más al disminuir la temperatura y consecuentemente aumenta -para una variación unitaria de volumen determinada- la presión que hay que ejercer y consecuentemente su módulo de compresibilidad.

Corolorario

Centrándonos en los líquidos, el módulo de compresibilidad aumenta con la disminución de temperatura. El modelo de compresibilidad es función de la presión y de la temperatura, variando mucho con la temperatura y afectando poco las variaciones de presión, pues los líquidos se pueden considerar incompresibles.

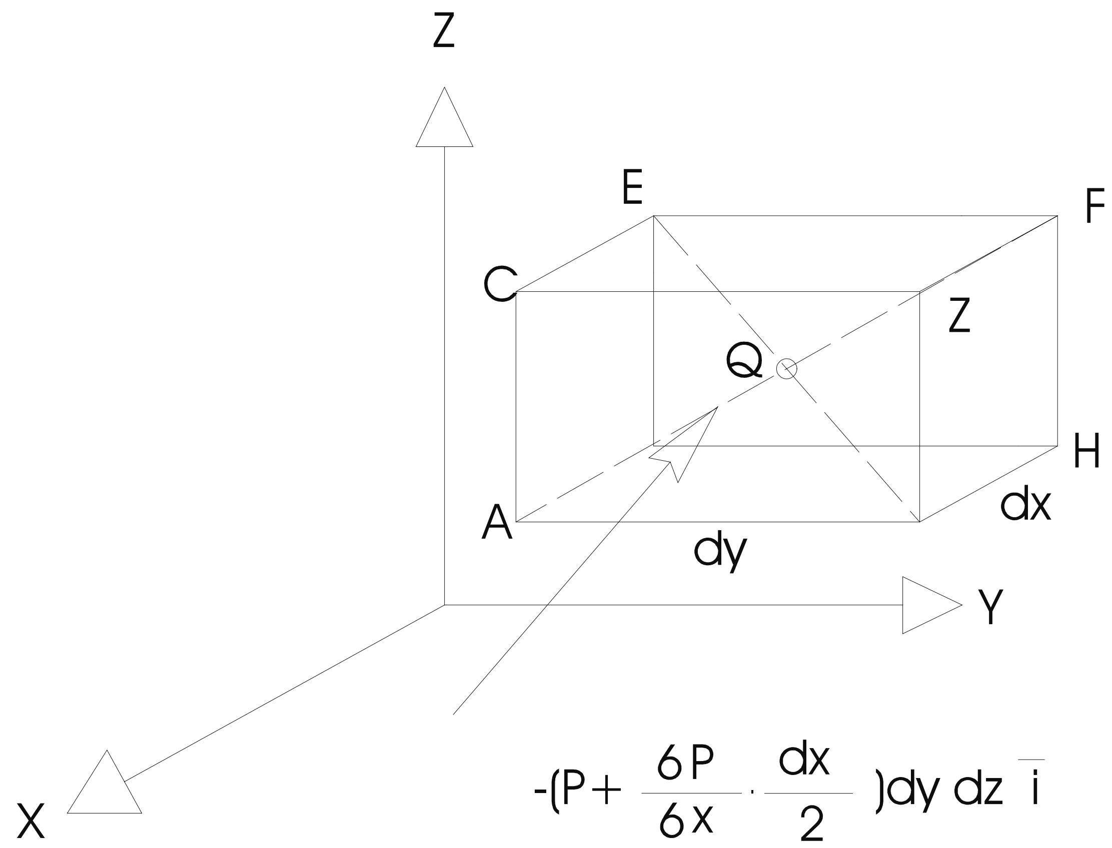
Se “podría decir”, entonces, que en los líquidos el módulo de compresibilidad es función “exclusiva” de la temperatura, diferenciándose, así, de los gases, donde el módulo de compresibilidad es función, tanto de la presión, como de la temperatura.

CAPÍTULO 9:

9.1. ECUACIÓN BÁSICA DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS

Considérese en el seno de un fluido un paralelepipedo recto rectangular de lados dx, dy y dz, como indica la Fig. 9.1

Fig. 9.1



Sea $p = p(x, y, z)$ la presión en el punto $Q = (x, y, z)$, centro del paralelepipedo.

Las fuerzas por unidad de masa serán:

$$\overline{F} = X\,\bar{i} + Y\,\bar{j} + Z\,\bar{k}$$

En consecuencia las fuerzas debidas a $\overline{F}$ serán $dm\,\overline{F} = \rho\, dvol\left(X\,\overline{i} + Y\,\overline{j} + Z\,\overline{k}\right)$, donde dvol es el volumen diferencial = dx.dy.dz, y ρ es la densidad del fluido.

En la cara ABCD actuará una presión igual a la presión p, en el punto Q, más la variación de presión al pasar del punto Q al centro de la cara ABCD, recorriendo un espacio diferencial dx/2.

Así:

$$P_{ABCD} = P_Q + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}$$

La fuerza sobre la cara ABCD será:

$$-P_{ABCD} \cdot \left(dy \cdot dz\right) \overline{i}$$

En la cara EFGH actuará una presión igual a la que hay en Q menos la variación de presión al recorrer una distancia dx/2 desde Q hasta el centro de la cara EFGH.

$$P_{EFGH} = P_Q - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}$$

$$P_{EFGH} = P - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}$$

y la fuerza sobre la cara EFGH será:

$$\left(dy\; dz\right) \cdot P_{EFGH} \cdot \overline{i} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dy\; dz\; \overline{i}$$

Estos son todas las fuerzas que actúan según el eje x, pues en las caras paralelas a los planos X 0 Z y X 0 Y, no actúan fuerzas tangenciales, pues esto supondría un rozamiento (viscosidad) que al estar el fluido en reposo es nulo.

Así pues, sumando fuerzas según el eje de las X e igualándolo a cero (pues está en equilibrio el fluido) queda:

$$\rho\, X\, dx\, dy\, dz - \left(P + \frac{\partial\, P}{\partial\, x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy\, dz + \left(P - \frac{\partial\, P}{\partial\, x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy\, dz$$

Con lo que:

$$\left(\rho\, X - \frac{\partial\, P}{\partial\, x} \right) dx\, dy\, dz = 0$$

(1) $\rho\, X - \frac{\partial\, P}{\partial\, x} = 0$

Análogamente:

(2) $\rho\, X - \frac{\partial\, P}{\partial\, y} = 0$

(3) $\rho\, X - \frac{\partial\, P}{\partial\, z} = 0$

Multiplicando la ecuación (1) por $\bar{i}$, y sumándole la (2), multiplicada por $\bar{j}$, y la (3) por $\bar{k}$, queda:

$$\rho \left(X\, \bar{i} + Y\, \bar{j} + Z\, \bar{k} \right) - \left(\frac{\partial\, P}{\partial\, x}\, \bar{i} + \frac{\partial\, P}{\partial\, y}\, \bar{j} + \frac{\partial\, P}{\partial\, z}\, \bar{k} \right) = 0$$

donde:

$$\frac{\partial\, P}{\partial\, x}\, \bar{i} + \frac{\partial\, P}{\partial\, y}\, \bar{j} + \frac{\partial\, P}{\partial\, z}\, \bar{k} = \overline{\mathrm{grad}}\; p$$

luego la ecuación queda:

$$\rho\, \overline{F} - \overline{\mathrm{grad}}\; p = 0$$

Donde $\overline{\text{grad}}\ p$ se llama gradiente de presiones y expresa la variación de la presión según los ejes x, y, z.

9.2. CASO PARTICULAR DE UN FLUIDO EN EL CAMPO GRAVITATORIO

Si las fuerzas por unidad de masa son las del campo gravitatorio y eligiendo el eje Z, en la dirección del radio de la tierra, queda:

$$\overline{F} = -g\,\overline{k}$$

$$\rho\,\overline{F} - \overline{\text{grad}\ p = 0}$$

Así pues:

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$

(5) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

(6) $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho\,g$

Como se desprende de las ecuaciones (4) y (5), la presión no depende ni de x, ni de y, pues la variación de la presión P es nula según estas direcciones, con lo que la presión sólo es función de x, y la variación de la presión según x (derivada parcial) se convierte en una derivada total (solo depende de una variable “z”, y no de 3, como se ha planteado al desarrollar la ecuación de Euler).

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{d\,P}{d\,z} = -\rho\,g \quad \Leftrightarrow$$

$dp = -\rho\,g\,d\,z$ e integrando entre 2 puntos cualesquiera Q_1 y Q_2.

$$P_2 - P_1 = -\rho\,g\left(z_2 - z_1\right)$$

(7) luego $P_2 + \rho\, g\, z_2 = P_1 + \rho\, g\, z_1$

o dividiendo por $\rho\, g$:

$$\frac{P_2}{\rho\, g} + z_2 = \frac{P_1}{\rho\, g} + z_1$$

Al término $\dfrac{P}{\rho\, g}$ se le llama altura equivalente de presión, que es la altura que tiene una columna de líquido de densidad ρ y que ejerce una presión *p* sobre el punto Q.

En la Fig. 9.2 se ve que es lógica la ecuación (7), pues $P_1 = \rho\, g \cdot h_1$ y $P_2 = \rho\, g \cdot h_2$, luego la presión sobre el fondo será $\rho\, g\left(h_1 + z_1\right)$, o bien $\rho\, g\left(h_2 + z_2\right)$.

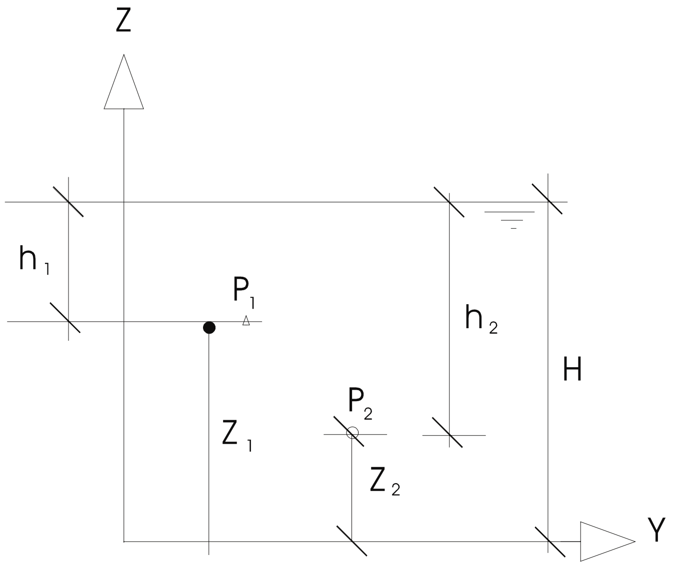


Fig. 9.2.

$$\rho\, g\, h_1 + \rho\, g\, z_1 = P_1 + \rho\, g\, z_1$$
$$\rho\, g\, h_2 + \rho\, g\, z_2 = P_2 + \rho\, g\, z_2$$

que son iguales, pues:

$$h_1 + z_1 = h_2 + z_2 = H$$

Ejemplo 1:

Cuál es la altura equivalente de presión de 1 kg-f/cm^2, siendo el líquido agua. $\rho_{H_2O} = 1 gr / cm^3$.

$$h = \frac{R}{\rho\ g} = \frac{1 \frac{kg-f}{cm^2}}{1 \frac{gr}{cm^3}\ x\ 981\ \frac{m}{sg^2}} = \frac{9{,}81\ x\ 10^5\ \frac{dinas}{cm^2}}{981 \frac{m}{sg^2}\ x\ 1 \frac{gr}{cm^3}}$$

$$h = \frac{9{,}81\ x\ 10^5\ \frac{\left(1\ gr\ .\ \frac{1\ cm}{sg^2}\right)}{cm^2}}{981\ \frac{cm}{sg^2}\ x\ 1\ \frac{gr}{cm^3}} = 10^3\ cm$$

h = 1.000 cm = 10 m., como se había visto en el apartado de unidades de presión.

Ejemplo 2:

Cuál es la altura equivalente de presión de 1 kg-f/cm^2, en un líquido cuya densidad es $0{,}8\ \frac{gr}{cm^3}$.

$$h = \frac{R}{\rho\ g} = \frac{1\ \frac{kg-f}{cm^2}}{0{,}8\ \frac{gr}{cm^3}\ x\ 981\ \frac{m}{sg^2}} = \frac{9{,}81\ x\ 10^5\ \frac{gr\ \frac{cm}{sg^2}}{cm^2}}{0{,}8\ \frac{gr}{cm^3}\ x\ 981}$$

$$h = 12{,}5\ m$$

9.3. PRINCIPIO DE PASCAL. PRENSA HIDRÁULICA

Una conclusión importante de la ecuación $P_1 + \rho\ g\ z_1 = P_2 + \rho\ g\ z_2$ es que en dos puntos situadas a la misma profundidad reinará la misma presión. Lo cual, al no afectar a la forma del recipiente, trae consigo que si se aumenta la presión en un punto (1) entonces, en un punto situado a la misma profundidad, aumentará la presión en la misma cantidad.

Este principio fue formulado por Blaise Pascal (1623-1662) y se enuncia así: “La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminuciones a cada punto del fluido y las paredes del recipiente”.

Este es el fundamento de la prensa hidráulica, como se puede ver en la Fig. 9.3.

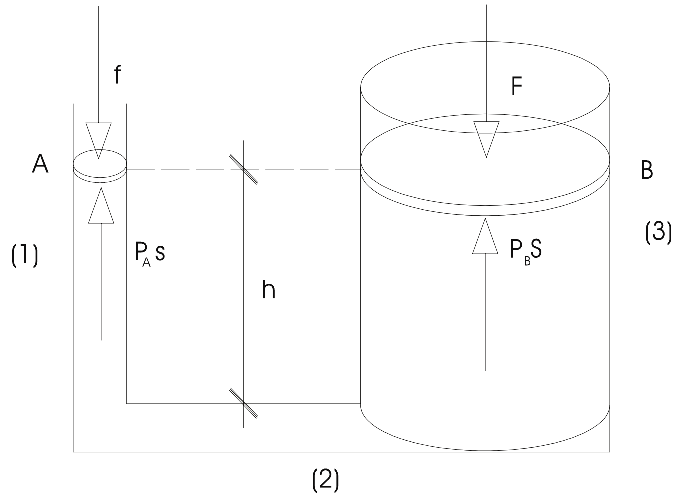


Fig. 9.3

Cuando se ejerce una fuerza f sobre el pistón que comprime el líquido encerrado en el cilindro (1) el tubo horizontal (2) y el cilindro (3) de sección S grande, se tiene:

$$P_A + \rho\ g\ h = P_B + \rho\ g\ h$$

y tomando como nivel de referencia el tubo horizontal entonces:

$$P_A = P_B$$

Pero:

$$P_A = \frac{f}{s} \quad \Rightarrow \quad f = P_A \cdot s$$

y:

$$P_B = \frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad F = P_B \cdot S = P_A \cdot S$$

Esto es, si se ejerce una fuerza pequeña f sobre el pistón A aparecerá una presión P_A que se traducirá en una fuerza $F\left(\text{grande}\right) = P_A \cdot S$, pues S es mucho mayor que s, con lo que se ha conseguido multiplicar la fuerza $f = P_A \cdot s$, por el factor S/s y obtener $F = f\,\dfrac{S}{s} = P_A \cdot s \cdot \dfrac{S}{s} = P_A \cdot S$, mucho mayor.

9.4. *PARADOJA HIDROSTÁTICA. VASOS COMUNICANTES*

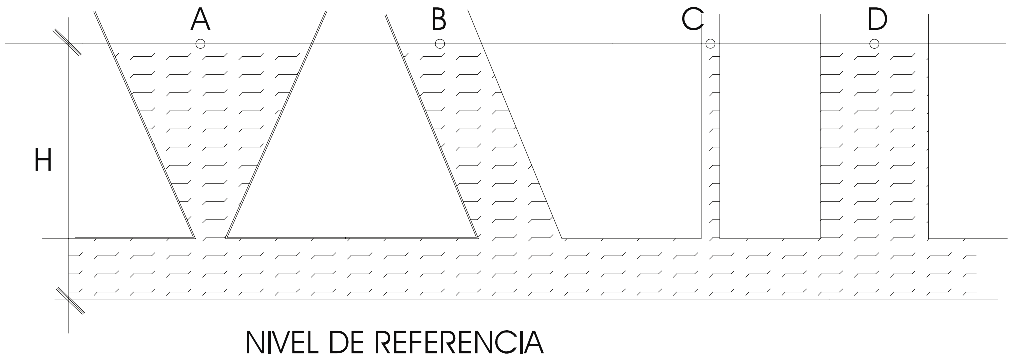


Fig. 9.4

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_D = H$$

$$P_A = P_B = P_C = P_D = \text{Patm.}$$

Si varios recipientes A, B, C y D (ver Fi. 9.4), de diversas formas, están conectadas entre sí por medio de un tubo (que se tomará como nivel de referencia) y se vierte un líquido de densidad cualquiera ρ, el nivel por él alcanzado en los diferentes recipientes es el mismo.

Hay que darse cuenta que la presión sobre todos los puntos del nivel de referencia es la misma, como se desprende de la ecuación de la hidrostática, y como la presión en A, B, C y D es la atmosférica.

$$P_A + \rho\, g\, Z_A = P_B + \rho\, g\, Z_B = P_C + \rho\, g\, Z_B = P_C + \rho\, g\, Z_B \quad \Rightarrow$$

$$Z_A = Z_B = Z_B = Z_C = H$$

9.5. APARATOS PARA MEDIR LA PRESIÓN. BARÓMETROS Y MANÓMETROS. OTRAS UNIDADES DE PRESIÓN

Barómetros:

Son aparatos que valen para medir la presión atmosférica en ese lugar y momento. Para ello precísese más lo que es la presión atmosférica.

Se ha definido la presión como el peso de una columna de líquido por unidad de área. Pero ocurre que la presión atmosférica es el peso de la columna de aire que gravita sobre una persona en un determinado punto y por unidad de área. Dado que la densidad del aire no es constante, ni la gravedad, pues varía con la distancia al centro de la tierra. La fórmula $\rho\, g\, z$, no sería válida pues provienen de la fórmula de estática de fluidos.

$$d\,p = -\rho\, g\, d\,z$$

Y para obtener la presión en la superficie se tendría que integrar con ρ y g variables.

Es así que Torricelli hizo un experimento que da directamente la presión. Para ello cójase un tubo de vidrio de 1 m. de longitud y llénese de mercurio, invirtiéndose e introduciéndose en un recipiente con mercurio como indica la Fig. 9.5

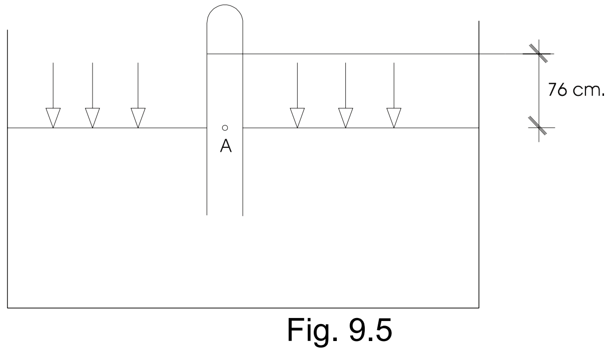


Fig. 9.5

Obsérvese que desciende el mercurio y se sitúa a una altura de aproximadamente 760 mm. sobre el nivel de mercurio del recipiente.

Es así que el punto A (en el interior del tubo) la presión es igual a la presión en la superficie del recipiente (presión atmosférica). Lo que quiere decir es que la presión atmosférica equilibra el peso de la columna de mercurio.

Esto da una presión atmosférica P_0 que se toma como patrón y es $P_0 = \rho\, g\, h\,,\quad \rho = 13{,}5951\ \mathrm{gr/cm^3}$, a una temperatura de 0º C y en un lugar donde la aceleración de la gravedad y es de 9,806 m/s^2, resultando 1,013 x 10^5 N/m^2, valor al cual se le llama atmósfera.

Esta presión, como se puede ver, es el resultado de equilibrar el peso por unidad de área de una columna de mercurio con el peso por unidad de área de la atmósfera que gravita sobre una vasija llena de mercurio.

Se debe tener presente que el peso de la columna de aire que tiene una persona sobre ella es variable, entre otras cosas con la altura a la cual se encuentra.

Así, si en Alicante, donde se toma como patrón la aceleración de la gravedad y estamos al nivel del mar, la presión es de 760 mm., mientras que en Madrid, que está 600 m. por encima del nivel del mar, la presión atmosférica es del orden de 710 mm. Se podría decir como corolario que la capa de atmósfera que tenemos sobre nosotros es de espesor variable de unos días a otros, así como su temperatura, densidad, etc.

Otras unidades:

Como unidades pequeñas, tenemos el Torricelli, que es 1 cm. de mercurio:

$$1\ Torr = 1\ cm\ de\ Hg$$

Se define el bar como:

$$1\,bar = 10^6\ dinas/cm^2 = 10\ N/cm^2$$

También el unilibar:

$$1\,unilibar = 10^{-3}\ bares$$

En los laboratorios de meteorología se tienen aparatos como éste (básicamente) llamados “barómetros” para poder medir, en cada instante, la presión atmosférica, y su evolución a lo largo del día.

Manómetros:

Supóngase que se desea medir la presión de una gas encerrado en un recipiente tal y como se muestra en la Fig. 9.6.

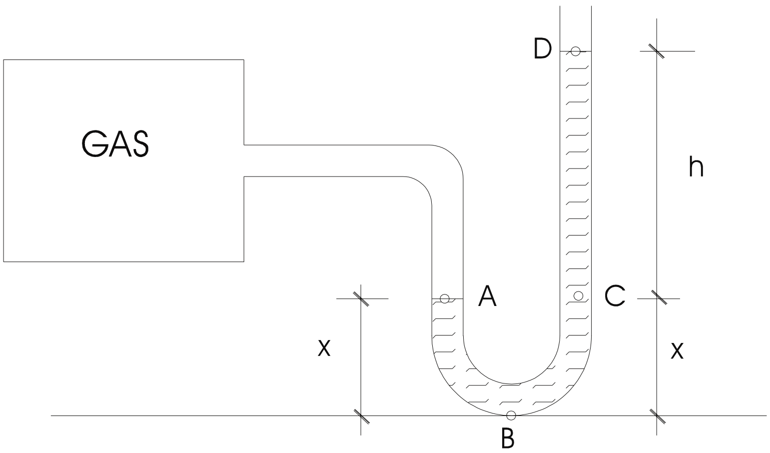


Fig. 9.6

Conéctese el recipiente, que contiene el gas, con un tubo en U (el A,B,C,D), en cuyo interior se ha introducido un líquido de densidad ρ. La presión en el punto A será la presión del gas y que se llamará p. En el punto B, por otro lado aparecerá una presión $p_B = p + \rho\, g\, x$, en el ramal AB y el ramal BCD.

$$p_B = \rho\, g\,(h + x) + P_0$$

Siendo P_0 la presión atmosférica, entonces $p + \rho\, g\, x = \rho\, g\,(h + x) + P_0$ y $p = P_0 + \rho\, g\, h$.

A la presión p se la llamará la presión absoluta ya la diferencia de presiones $p - P_0 = \rho\, g\, h$, presión monométrica.

CAPÍTULO 10: FUERZA SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA. FUERZA SOBRE UNA SUPERFICIE ALABEADA

Fuerza sobre una superficie plana:

Supóngase una superficie S plana dentro de un líquido tal y como muestra la Fig. 10.1

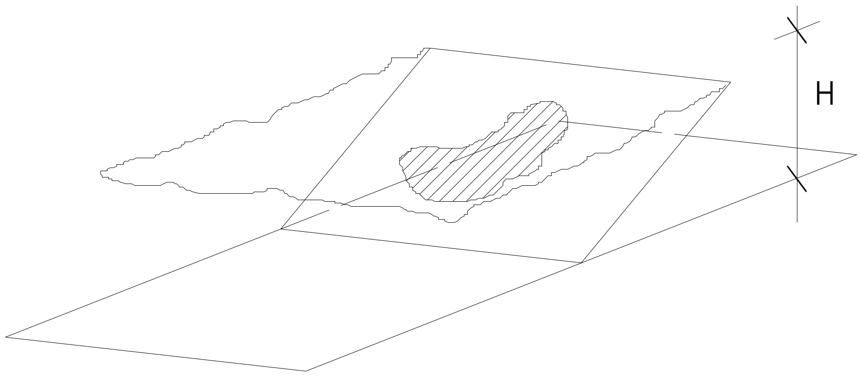


Fig. 10.1

En la Fig. 10.2 se puede ver el perfil de este área.

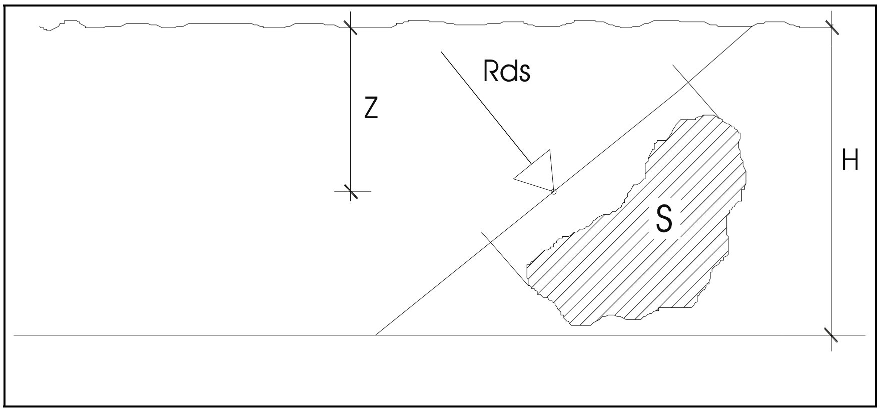


Fig. 10.2

A una profundidad Z la presión se sabe que es $\rho\, g\, z$, y sobre un elemento diferencial de área actuará una fuerza diferencial $d\overline{F} = p \cdot \overline{ds}$. Esta fuerza será perpendicular a la superficie y tendrá por módulo $p\, d\, s = \rho\, g\, z\, d\, s$.

La fuerza total sobre la superficie será:

(10.1) $$\int dF = \int \rho\, g\, z\, d\, s = \rho\, g \int z \cdot ds$$

Pero como la definición de centro de gravedad de un área es precisamente $z\, g = \frac{\int z \cdot ds}{S}$, donde $z\, g$, es la profundidad del centro de gravedad del área y z es la profundidad de un elemento cualquiera ds. S - Área total sumergida.

La expresión $\int z \cdot ds = z\, g \cdot S$, por definición de centro de gravedad y la fuerza total sobre el área S será:

(10.2) $$F = \rho\, g\, z\, g \cdot S$$

La localización de esta fuerza total sobre la superficie no es el centro de gravedad de ésta, pues las fuerzas diferenciales $d\overline{F}$ son crecientes con la profundidad y no son constantes (salvo que la superficie S fuera paralela a la superficie del líquido, en cuyo caso la resultante de las fuerzas se aplicaría en el centro de gravedad del área S).

Véase cómo calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante o centro de presiones.

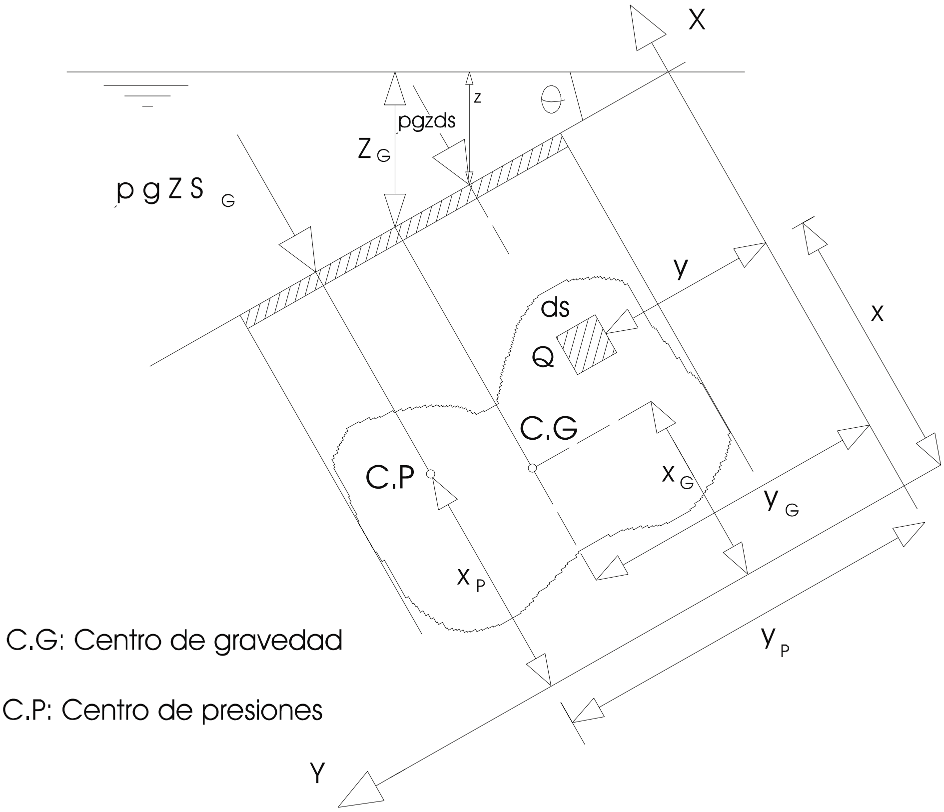


Fig. 10.3

Tomando momentos respecto del eje X queda $\int y \cdot dF$ que es igual a toda la fuerza F, situada en el centro de presiones. Entonces:

(10.3) $$y_p \cdot F = \int y \, dF$$

Análogamente tomando momentos respecto del eje Y, queda:

(10.4) $$x_p \cdot F = \int x \, dF$$

$\int y \, dF$, será:

$$y \cdot \operatorname{sen} Q = Z$$

$$dF = (\rho \ g \ z) \cdot ds = \rho \ g \operatorname{sen} Q \cdot y \cdot ds$$

$$\int y \, dF = \rho \ g \operatorname{sen} Q \cdot \int y^2 \, ds = \rho \ g \operatorname{sen} Q \cdot I_x$$

Siendo $I_x = \int y^2 \ ds$, el momento de inercia del área respecto al eje X.

Por el teorema de Steiner $I_x = I_{GX} + y_G^2 \cdot S$

I_{GX}: momento de inercia del área respecto a un eje paralelo al X,Y, que pasa por su centro de gravedad

I_G: distancia del eje X al centro de gravedad

(10.5) $$y_p \cdot F = \rho \ g \ \mathrm{sen}\, Q \left(I_{GX} + y_G^2 \ S \right)$$

$$F = \rho \ g \ Z_G \cdot S$$

$$y_p = \frac{\mathrm{sen}\, Q}{Z_G \cdot S} \left(I_{GX} + y_G^2 \ S \right)$$

pero:

$$\frac{Z_G}{\mathrm{sen}\, Q} = y_G$$

(10.6) $$y_p = \frac{I_{GX}}{y_G \cdot S} + y_G$$

Véase la localización de la X_p.

(10.7) $$x_p \cdot F = \int x \ dF$$ (ver Fig. 10.4)

(10.8) $$dF = \rho \ g \ z \ ds = \rho \ g \ y \ \mathrm{sen}\, Q \ ds$$

$$x_P \cdot F = \int \rho \ g \ \mathrm{sen}\, Q \cdot y \cdot x \cdot ds = \rho \ g \ \mathrm{sen}\, Q \int x \ y \ ds$$

(10.9) $$x_P = \frac{\rho \ g \ \mathrm{sen}\, Q}{\rho \ g \ z_G \cdot S} \int x \ y \ ds = \frac{P_{xy}}{y_G \cdot S}$$

Pero como:

$$P_{xy} = \int x \ y \ ds = \int \left(x_G + x' \right) \left(y_G + y' \right) \cdot ds$$

$$P_{xy} = x_G \; y_G \int ds + x_G \int y' ds + y_G \int x' ds + \int x' \, y' \, ds$$

$\int y' \, ds = 0$

$\int x' \, ds = 0$

pues son lo momentos de primer orden referidos al centro de gravedad.

(10.10) $$P_{xy} = P_{(xy6)\,G} + x_G \; y_G \; S$$

Luego:

$$x_p = \frac{\left(P_{(xy6)\,G} + x_G \; y_G \; S \right)}{y_G} S$$

(10.11) $$x_p = \frac{P_{(xy)\,G}}{y_G \; S} + x_G$$

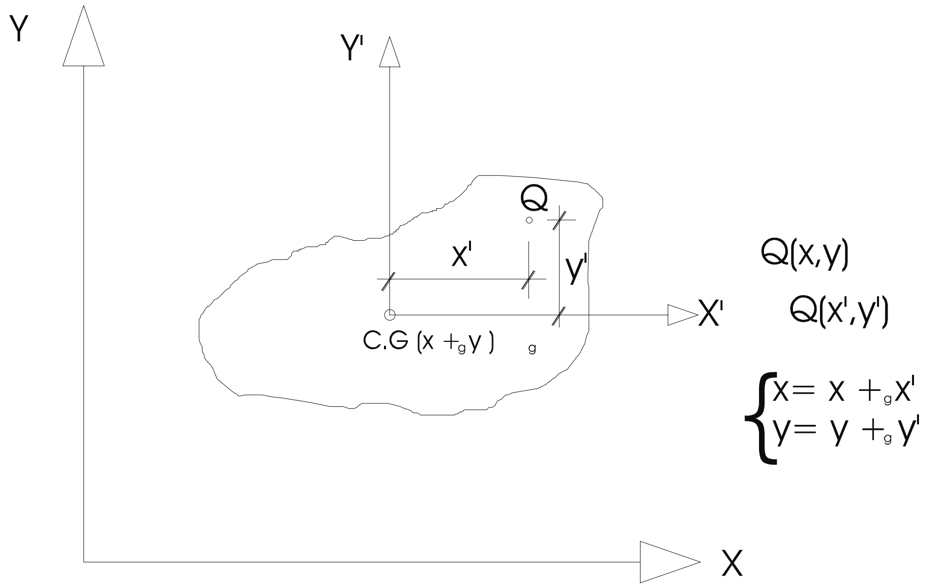


Fig. 10.4

<u>Ejemplo</u>:

Como ejemplo considérese una pared plana de una presa tal y como indica la Fig. 10.5

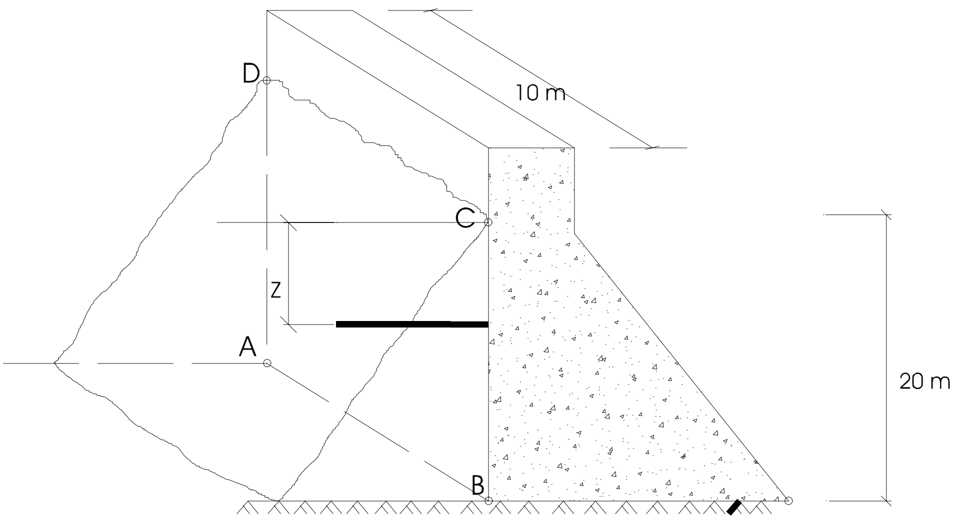


Fig. 10.5

La ley de presiones es $\rho\ g\ z$ y el esquema aparece en la citada figura.

Supóngase que el agua tiene una profundidad de 20 cm. y el ancho de la pared es de 10 cm.

Calcúlese:

1. Fuerza total sobre la pared.
2. Localización de esta fuerza total referida a unos ejes que pasan por la intersección de la superficie del agua con la pared (eje X) y unos eje “Y”, vertical y que pase por el centro de simetría del área sumergida S. $S = A\ B\ C\ D$.

1. La fuerza total, F sobre el área ABCD será:

$$F = \rho\ g\ z_G \cdot S$$

ρg = peso específico del agua = $10^3\ \frac{kg-f}{m^3}$

z_G = profundidad a la que se encuentra el centro de gravedad del área $S = \frac{20}{2}$.

z_G = 10 cm.

S = área ABCD = 20 x 10 = 200 m^2.

Luego:

$$F = 10^3 \frac{kg-f}{m^3} \cdot 10\ m. \cdot 200\ m^2 = 2\ x\ 10^6\ kg-f.$$

$$F = 2.000 Tm$$

2. Localización de esta fuerza:

   Según las fórmulas:

$$y_p = \frac{I_{GX}}{y_G \cdot S} + y_G$$

$$x_p = \frac{P_{(xy)G}}{y_G\ S} + x_G$$

Como método práctico se debe coger el eje Y, de forma que sea eje de simetría del área S, siempre que esta exista. De esta forma el $P_{(xy)G} = 0$ y la $x_G = 0$, con lo cual $x_P = 0$, que es este caso.

$$y_p = \frac{I_{GX}}{y_G \cdot S} + y_G$$

Donde $I_{GX} =$ momento de inercia del área S, respecto de un eje paralelo al X, y que pasa por el centro de gravedad del área S.

$$I_{GX} = \frac{1}{12} \cdot 10\ x\ 20^3 = 6.666{,}6\ m^4.$$

$$y_G = 10\ m.$$

$$S = 10\ x\ 20 = 200\ m^2$$

$$y_P = \frac{6.666{,}6}{10\ 200} + 10 = 13{,}33\ m.$$

<u>Fuerza sobre una superficie alabeada</u>:

Considérese una superficie alabeada e inmersa en un líquido de densidad ρ, tal y como se muestra en la Fig. 10.6.

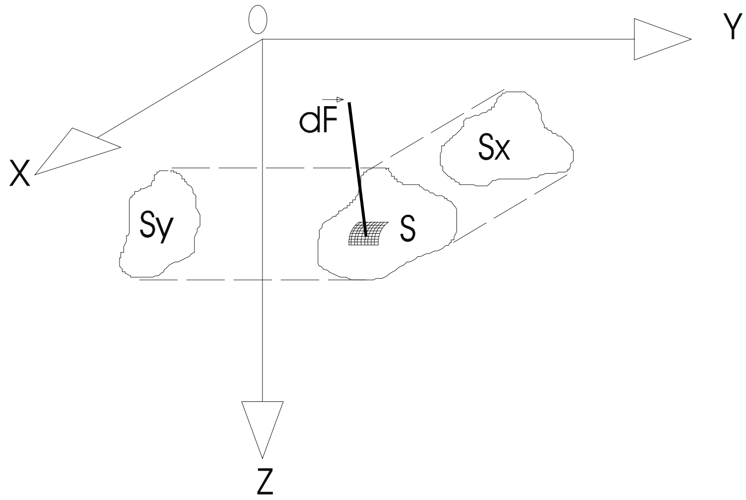


Fig. 10.6

La fuerza diferencial $d\overline{F}$, consecuencia de la presión, tiene por valor $p\ d\overline{s}$ donde p es la presión en ese punto y $d\overline{s}$ es el área diferencial. Para hallar la resultante de las fuerzas ya no se puede recurrir al mismo sistema que se ha utilizado en el apartado anterior, pues esta superficie, al ser alabeada, no tiene en común el vector normal -como ocurría en el caso de una pared plana- así es que la resultante será la suma vectorial de las fuerzas $d\overline{F}$ las cuales tendrán cada una, direcciones diferentes.

Lo que sí se puede hacer es descomponer $d\overline{F}$ según los ejes x, y, z.

$$d\overline{F} = dF \cdot \cos\alpha\ \overline{i} + dF \cdot \cos\beta\ \overline{j} + dF \cdot \cos\gamma\ \overline{k}$$

Donde $\alpha\ \beta\ \gamma$ son los ángulos que forman dF, con los ejes x, y, z, respectivamente. En la figura 10.7 se pueden ver con más detalle estos ángulos.

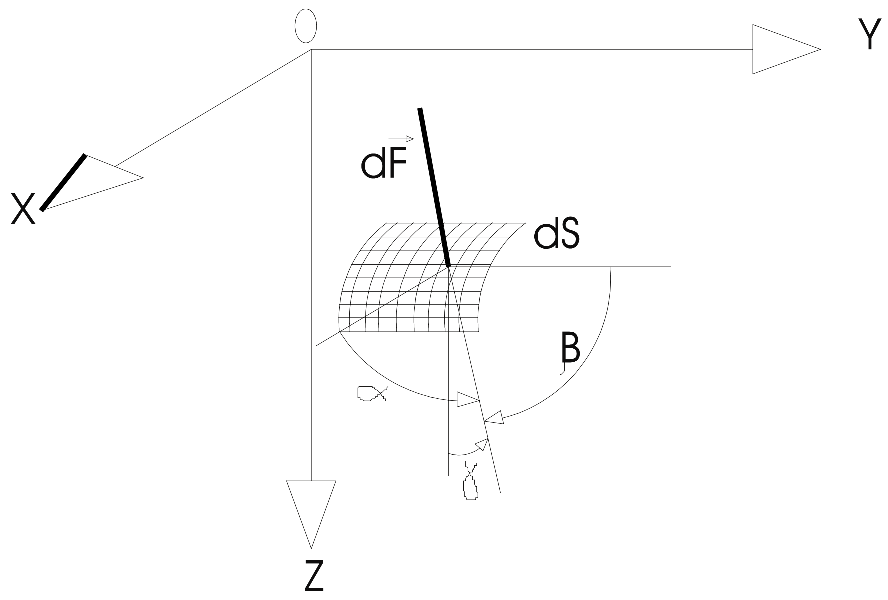


Fig. 10.7

Como $d\overline{F} = \rho \cdot \overline{ds}$ y el vector $\overline{ds}$, tiene la misma dirección que el vector $d\overline{F}$, resulta que $ds \cos\beta$ es la proyección del área ds sobre el plano y,o,z, esto es dS_x y $p \cdot ds \cos\alpha$ es la componente según el eje x de dF. De ello resulta que se trata de un sistema de fuerzas paralelas al eje x y que actúan sobre el área S_x (proyección de S sobre el plano y, o, z), y por tanto $F_x = \int p \cdot ds \cdot \cos\alpha = \int \rho \; ds_x$

El punto de aplicación de la fuerza F_x, se calculará como se ha hecho en el apartado anterior, pues se trata de fuerzas paralelas perpendiculares a una pared plana.

Para calcular la componente de la fuerza que actúa sobre la superficie según el eje de las y se procede en forma análoga.

El cálculo de la fuerza horizontal sobre una superficie cerrada es nulo. El razonamiento es el siguiente:

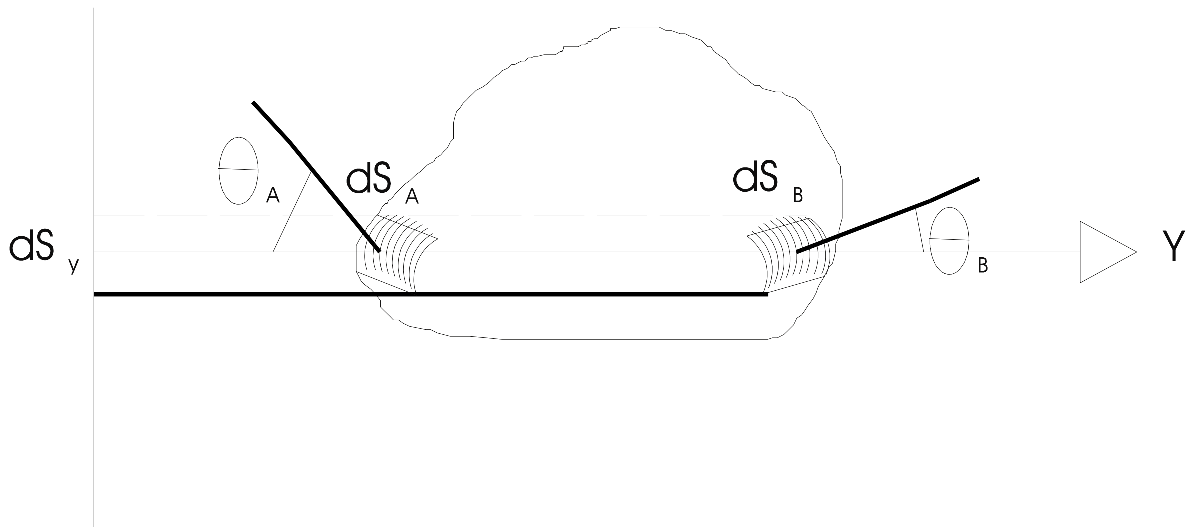


Fig. 10.8

Para hallar la fuerza sobre el elemento DSB (ver Fig. 10.8), su valor será $d\ F_B \cdot \cos Q_B$, igual a $p \cdot ds_B \cdot \cos Q_B = p \cdot ds_y$. Análogamente el valor de la fuerza diferencial sobre el elemento $d\ S_A$, será $-p \cdot ds \cdot \cos Q_B$, igual a $-p \cdot ds_y$, es así que la suma de las fuerzas da cero, pues, como se puede ver, la proyección $d\ S_y$, es igual para ambas.

El cálculo de la componente vertical sobre el área S se hará proyectando según el eje Z, las fuerzas dF y por tanto quedará:

$$F_Z = dF \cdot \cos\gamma = dF = p \cdot ds \cdot \cos\gamma = p \cdot ds_Z = \rho\ g\ z \cdot ds_Z$$

La fuerza total según Z será la suma de todas estas fuerzas verticales y valdrá:

$$\int dF = \int \rho\ g\ z\ ds_Z = \rho\ g \int d\ Vol = \rho\ g\ Vol$$

Donde Vol es el volumen encerrado entre la superficie alabeada y la superficie del líquido, como se puede ver en la Fig. 10.9.

$$dvol = z \cdot ds = volumen\ diferencial$$

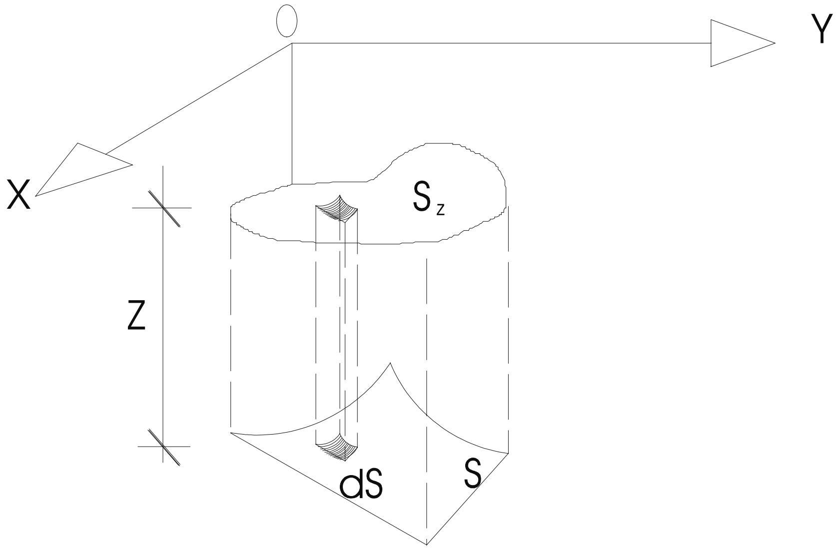


Fig. 10.9

El punto de aplicación se hará teniendo en cuenta que se trata de un sistema de fuerzas (pesos de columnas diferenciales) paralelas y por tanto, tanto la X, como la Y, se calcularán de acuerdo al desarrollado en el apartado anterior.

$$x_p = \frac{\rho\ g \int x\ dvol}{\rho\ g \int z \cdot ds} = \frac{\rho\ g \int x\ dvol}{\rho\ g \cdot Vol}$$

$$x_p = \frac{\int x\ dvol}{Vol}$$

Análogamente:

$$y_p = \frac{\int y\ dvol}{Vol}$$

CAPÍTULO 11: PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

El principio de Arquímedes se enuncia de la siguiente forma: Todo cuerpo sumergido en un fluido, experimenta un empuje hacia arriba, igual al peso del volumen del fluido desalojado.

Véase la justificación de este principio.

Considérese una masa fluida en reposo y en ella una superficie cerrada de forma cualquiera, que en su interior tiene al mismo fluido. Puesto que el peso de dicha masa fluida está en equilibrio con las fuerzas debidas a la presión (pues el fluido está en reposo) darán una resultante igual en módulo y dirección al peso y de sentido contrario, esto es dirigida hacia arriba, llamada empuje.

E = Empuje

P = Peso

En la Fig. 11.1, se ve el esquema de las fuerzas debidas a la presión que al equilibrarse con el peso, estarán ambas aplicadas en el centro de gravedad.

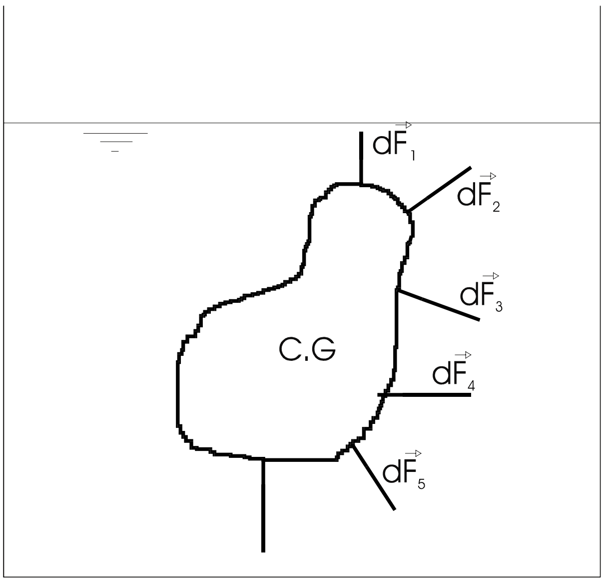


Fig. 11.1

Como se puede ver las fuerzas diferenciales $d\overline{F_i} = (\rho_0 \; g \; z_i) \cdot d\overline{S_i}$, son variables con la profundidad.

Si ahora se quitase la porción de fluido del interior de la superficie y se pusiera un cuerpo con la misma forma, la resultante de las fuerzas debidas a la presión tendría la misma resultante pues sería la suma de las $d\overline{F_i}$ independientemente de la densidad ρ del cuerpo y sólo dependiente de la forma de éste. Dicha fuerza estaría aplicada, como antes, en el centro de gravedad de la superficie sumergida.

Ahora bien, el peso del cuerpo sería $P' = \rho \,\mathrm{Vol} \cdot g$, y esta diferencia de densidades daría lugar a tres situaciones diferentes:

1. $P' > E \quad \rightarrow \quad \rho \cdot Vol \cdot g > \rho_0 \cdot Vol \cdot g$

   Con lo que $\rho > \rho_0$, y el cuerpo se hundiría.

2. $P' = E \quad \rightarrow \quad \rho \cdot Vol \cdot g = \rho_0 \cdot Vol \cdot g$

   Con lo que $\rho = \rho_0$, y el cuerpo se mantendría en equilibrio a una profundidad donde su densidad fuera igual a la del líquido.

3. $P' < E \quad \rightarrow \quad \rho < \rho_0$

   El cuerpo se equilibra con el empuje E' de la parte sumergida. El peso P' se aplicaría en el centro de gravedad del cuerpo y el empuje E' en el centro de gravedad de la parte sumergida. En este caso si V es el volumen del sólido y ρ su densidad, el peso del sólido será:

$$P' = \rho \cdot V \cdot g$$

Si V' es el volumen del sólido que permanece sumergido y ρ_0 el volumen del líquido: $E' = \rho_0 \cdot V' \cdot g$

De esta forma:

$$\rho V g = \rho_0 V' g$$

$$\rho V = \rho_0 V'$$

CAPÍTULO 12:

12.1. EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS SUMERGIDOS

Según el principio de Arquímedes, el empuje es la resultante de las fuerzas debidas a la presión, siendo una fuerza vertical y hacia arriba e igual al peso del volumen desalojado.

Este empuje pasa por un punto que se llama centro de carena, que está en el centro de gravedad del volumen sumergido.

Si el peso es menor que el empuje el cuerpo flota y el centro de carena es variable con la posición del cuerpo, pues depende de la forma de la parte sumergida.

Supóngase un barco flotando, éste no es un sólido homogéneo, pues contiene materiales diversos y espacios vacíos.

Considérese ahora un sólido que sí es homogéneo. Como se acaba de ver el cuerpo podrá estar en una de estas tres situaciones:

1. Hundirse: $\rho > \rho_0$
2. Flotar: $\rho < \rho_0$
3. Mantenerse en suspensión a una determinada profundidad donde $\rho = \rho_0$.

En general, tanto si el sólido es homogéneo, como si no lo es, el empuje y el peso constituyen un par de fuerzas de brazo “d” como se puede ver en la Fig. 12.1, y por tanto el cuerpo girará.

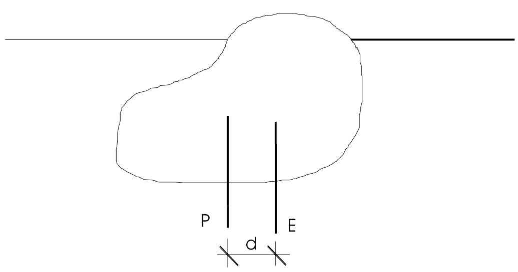


Fig. 12.1

Hasta que queden alineados el peso y el empuje como muestra la Fig. 12.2.

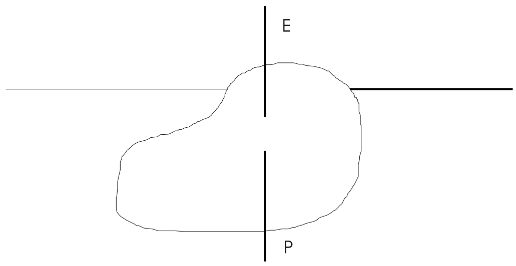


Fig. 12.2

12.2. EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS FLOTANTES, PERÍODO DE OSCILACIÓN

Un cuerpo cuyo empuje es mayor que el peso, flota y está en equilibrio.

Se define el equilibrio como una posición del cuerpo en la cual la resultante de fuerzas y momentos es nula. Pero hay tres clases de equilibrio: equilibrio estable, inestable e indiferente.

Se define el equilibrio estable como aquella posición del cuerpo en la cual, al sacar al cuerpo de dicha posición, las fuerzas actuantes sobre él, tienden a devolverlo a su primitiva posición.

El equilibrio inestable es aquel equilibrio en el cual, al separar el cuerpo de la citada posición, las fuerzas que sobre él actúan tienden a alejarlo de su posición primitiva.

El equilibrio indiferente es aquel en el cual, al separar el sólido de dicha posición, se queda en la nueva situación, pues es indiferente qué posición ocupe.

Cuando un cuerpo flotante -por ejemplo un barco- es sacado de su posición de equilibrio, interesa que sea un equilibrio estable, pues de esta forma se garantiza que el barco volverá a su posición inicial.

Esta condición se refleja en las Fig. 12.3.a y 12.3.b.

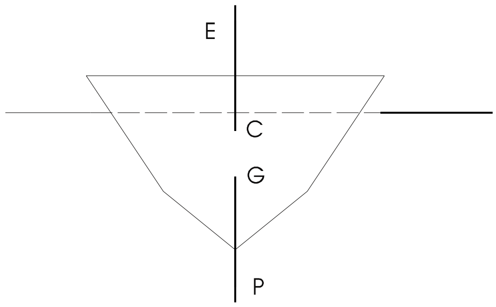


Fig. 12.3.a

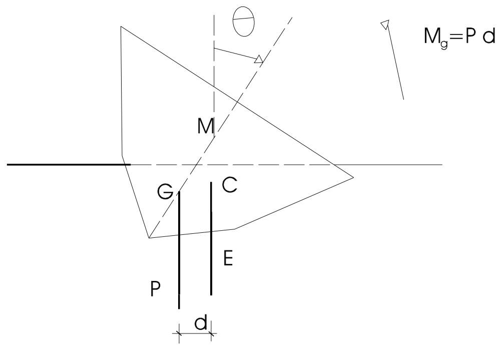


Fig. 12.3.b

C: Centro de carena

G: Centro de gravedad

E: Empuje

P: Peso

M_G = P.d = Par estabilizador

En la Fig. 12.3.a se puede ver un barco en equilibrio P = E, Al desequilibrarlo (Fig. 12.3.b) el peso sigue siendo igual al empuje, pero ahora estas dos fuerzas están separadas una distancia “d” creando, con ello, un par que en este caso es estabilizador, pues tiene a devolver al barco a su posición inicial.

A la intersección de la recta que contiene al empuje con el eje de simetría del barco se le llama metacentro μ.

Para que el equilibrio sea estable interesa que el metacentro quede por encima del centro de gravedad.

<u>Equilibrio inestable</u>:

En la Fig. 12.4. se ve un caso de inestabilidad, pues el par Peso, Empuje, tienden a volver el barco cuando se le separa de su posición de equilibrio.

El metacentro μ queda por debajo del centro de gravedad. Este es el caso de cuando una persona se pone de pie en un bote, éste tiende a volver, pues el centro de gravedad del sistema bako, persona se ha elevado.

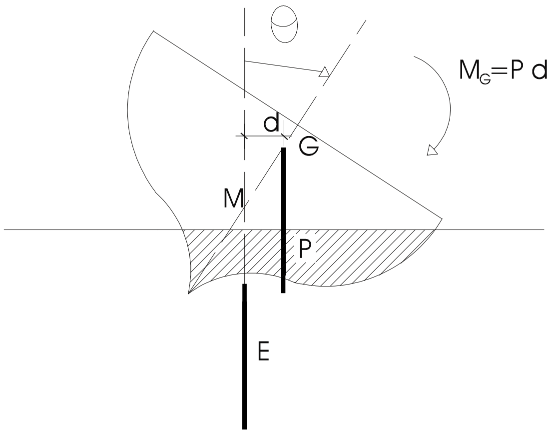


Fig. 12.4

Ahora se va a analizar el par que genera el peso P y el empuje E.

En la Fig. 12.5. se ve el esquema de fuerzas, momentos, distancias y ángulos girados, así como los puntos donde se aplica cada fuerza.

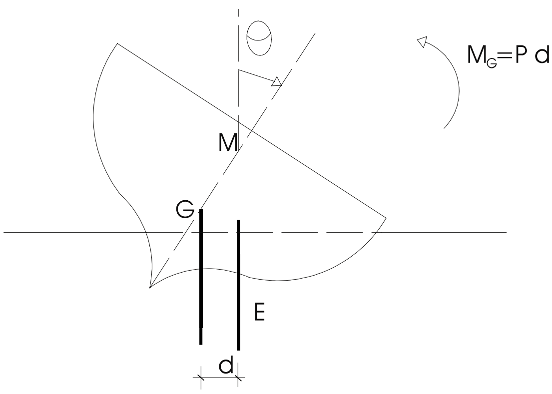


Fig. 12.5

Al aplicar el teorema del momento cinético (Euler) al cuerpo flotante y tomando momentos respecto al centro de gravedad del barco respecto de un eje que está saliendo del papel perpendicularmente (en general sería respecto de un eje perpendicular al plano en el cual se produce el giro).

$\sum \overline{M_G}, \text{ext} =$ Suma de momentos de las fuerzas exteriores al cuerpo.

$I_G =$ Momento de inercia del cuerpo flotante respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y saliendo del papel.

$\alpha =$ Aceleración angular del cuerpo flotante.

$\sum \overline{M_G}, \text{ext} = I_G \cdot \overline{\alpha}$

Como: P = E

$P \cdot d = m\, g \cdot d$

$M_G =$ Distancia del centro de gravedad al metacentro = μ

$$m\, g\, l \operatorname{sen} Q = +I_G \cdot \alpha = -I \frac{d^2\, Q}{d\, t^2}$$

Si la oscilación Q es pequeña: $\operatorname{sen} Q \approx Q$, y: $\dfrac{d^2\, Q}{d\, t^2} = -\left(\dfrac{m\, g\, l}{I_G}\right) \cdot Q$, que es la ecuación de un movimiento armónico simple de pulsación μ, siendo:

$$\mu^2 = \frac{m\, g\, l}{I_G}$$

$$\sqrt{\mu = \frac{m\, g\, l}{I_G}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G}{m\, g\, l}}$$

12.3. PLANO DE FLOTACIÓN, SUPERFICIE DE FLOTACIÓN Y SUPERFICIE DE CARENA

Sea un sólido flotando en un líquido. El plano intersección del sólido con la superficie libre del líquido se le llama plano de flotación.

El hecho de que se cambie la posición del sólido respecto del líquido es un problema de movimiento relativo, por lo que será lo mismo cambiar el sólido de posición y dejar el líquido quieto, o dejar el sólido quieto y mover el líquido. Con lo cual, como se puede ver en la Fig. 12.6 se puede cambiar o girar el plano de flotación para representar el movimiento del cuerpo.

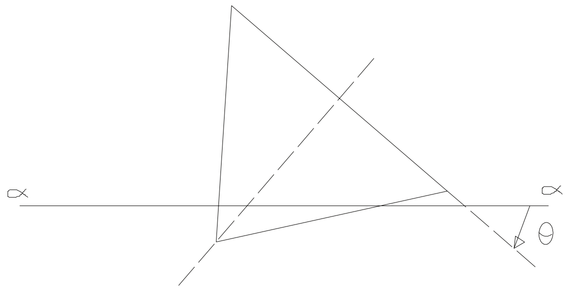


Fig. 12.6.a

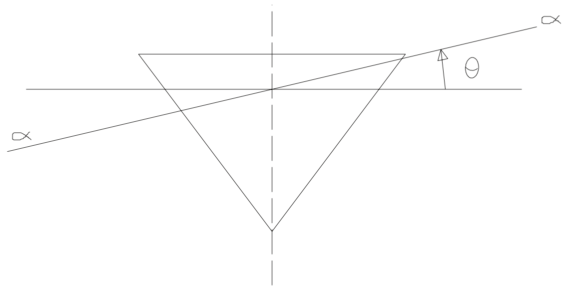


Fig. 12.6.b

Superficie de flotación: La superficie envolvente de las diferentes planos de flotación, resultado del movimiento del cuerpo flotante; se llama superficie de flotación.
Superficie de carena: La superficie generada por todos los centros de carena al mover el cuerpo flotante se llama superficie de carena. La superficie de flotación y la de carena son convexas. (Ver Fig. 12.7).

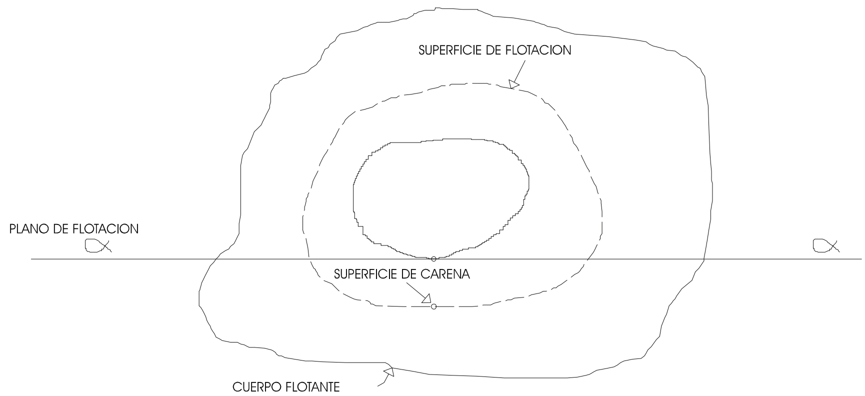


Fig. 12.7

12.4. PRIMER TEOREMA DE EULER

El punto de tangencial “Q” de la superficie de flotación con el plano de flotación es el centro de gravedad geométrico del área, intersección del planto de flotación con el cuerpo (Fig. 12.7).

Considérese las flotaciones $\alpha\alpha$ y $\beta\beta$, las cuales corresponden a girar el cuerpo un ángulo Q en el sentido antihorario (ver Fig. 12.8).

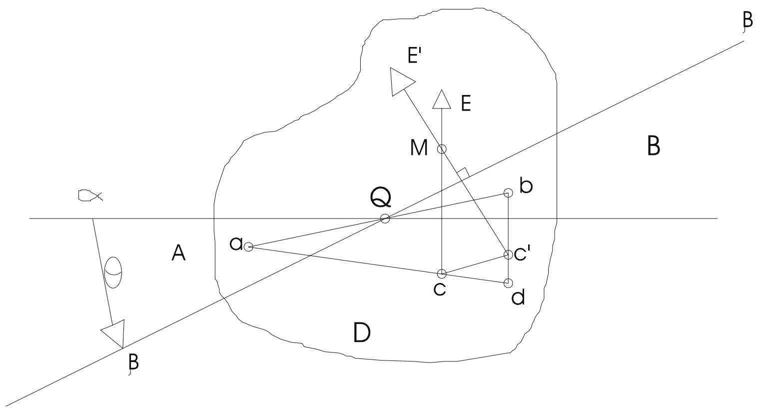


Fig. 12.8

Como el empuje es siempre el mismo (igual al peso del cuerpo), tenemos que:

$$E = (A + D) \cdot \gamma$$

$$E' = (B + D) \cdot \gamma$$

donde: A= Volumen cuña A

B= Volumen cuña B

D= Volumen común

γ= peso específico del líquido

Como $E = P$ y $E' = P$, también $E = E'$ y en consecuencia: $\gamma\,(A + D) = \gamma\,(B + D) \Rightarrow A = B$.

Como A y B son iguales, al tender a cero el ángulo Q, se obliga a que el punto Q sea el centro de gravedad del área intersección del cuerpo con el plano de flotación.

12.5. TEOREMA DE DUPIN

El plano tangente en un punto “C” a la superficie de carena es paralelo al de flotación correspondiente, y por ello perpendicular al empuje de Arquímedes.

Como “C” es el centro de gravedad de la parte sumergida, se ha de cumplir que el momento del peso de la cuña A es igual al momento de la parte D.

$$\overline{ca} \cdot A = \overline{cd} \cdot D$$

Siendo: $\overline{ca} =$ longitud del segmento $\overline{ca}$

$\overline{cd} =$ longitud del segmento $\overline{cd}$

(Ver Fig. 12.8)

$$\overline{ca} \cdot A - \overline{cd} \cdot D = 0$$

Sumando y restando $\overline{cd} \cdot A$:

$$\overline{ca} \cdot A + \overline{cd} \cdot A - \left(\overline{cd} \cdot A + \overline{cd} \cdot D\right) = 0$$

$$\overline{ad} \cdot A = \overline{cd} \cdot (A + D)$$

Análogamente el centro de gravedad cuando el plano de flotación es ββ, será C’, y por tanto:

$$\overline{c'b} \cdot B = \overline{c'd} \cdot D = 0$$

Sumando y restando $\overline{c'd} \cdot B$:

$$\overline{c'b} \cdot B + \overline{c'd} \cdot B - c'd\,(B + D) = 0$$

$$\overline{bd} \cdot B = \overline{c'd}\,(B + D) = \overline{c'd}\,(A + D) = \overline{bd} \cdot A$$

Pues:

$$A = B$$

Así, dividiendo las expresiones $\overline{ad} \cdot A = \overline{cd} \cdot (A + D)$ y $\overline{bd} \cdot A = \overline{c'd}\,(A + D)$:

$$\frac{\overline{ad} \cdot A}{\overline{bd} \cdot A} = \frac{\overline{cd} \cdot (A + D)}{\overline{c'd} \cdot (A + D)}$$

Con lo cual los triángulos *adb* y *acc'*, son semejantes, y en el límite cuando el plano ββ, tienda al αα, el empuje será perpendicular al segmento $\overline{ab}$
.

12.6. SEGUNDO TEOREMA DE EULER. EJEMPLO

Considérese un cuerpo en dos flotaciones cuyos respectivos planos sean αα y ββ (ver Fig. 12.9).

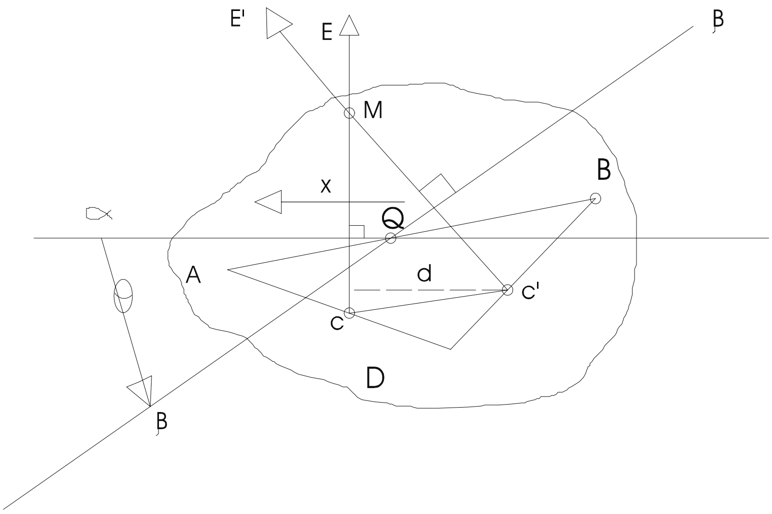


Fig. 12.9

Sean C y C' sus correspondientes centros de carena. Como se ha visto en el primer teorema de Euler el volumen A es igual al B y por ello al desequilibrarse el cuerpo se formará un par de fuerzas debido a las cuñas A y B, pues la cuña A se sumerge y crea un empuje hacia arriba F_A y la cuña B disminuye su empuje en la misma cantidad creando una fuerza $F_B = F_A$.

Este par $F_A \cdot e$ se equilibrará con el par Peso Empuje, que están separados una distancia “d”. (ver Fig. 12.9 y 12.10).

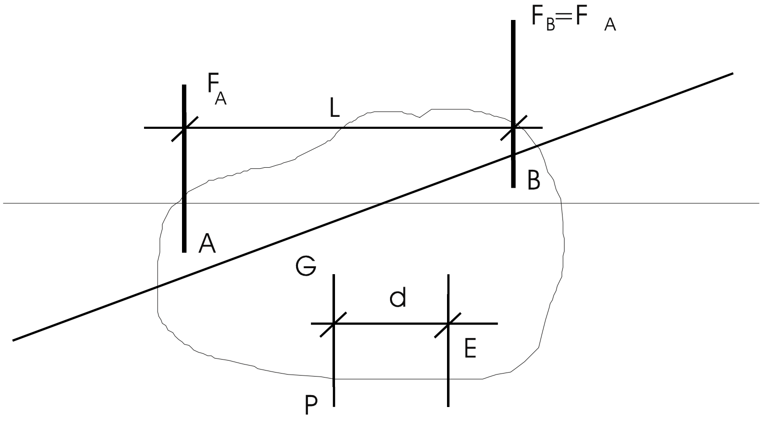


Fig. 12.10

Este par $F_A \cdot e$ se puede valorar tomando momentos respecto de Q que será para pequeños ángulos de Q.

$$\left(X \cdot Q\right) \cdot ds = d\ vol$$

$$dF = \gamma\ d\ vol$$

$$d\ M\ Q = x\ d\ F = Q\,\gamma\ x^2\ d\ s$$

El momento total respecto al eje que pasa por Q y sale del papel será la suma de los momentos, y así:

$$\overline{M_Q} \cdot \overline{C_O} = \int d\ \overline{M_Q} \cdot \overline{C_O} = \int Q\,\gamma \int X^2\ d\ s$$

$$\overline{M_Q} \cdot \overline{C_O} = Q\,\gamma\ I_Q$$

donde: Q = ángulo girado

γ = Peso específico del líquido

I_Q = momento de inercia del área de flotación respecto de un eje que pasa por el centro de gravedad de dicha área y que lleva la dirección perpendicular al plano de giro del cuerpo.

Como cuando se desestabilice el cuerpo, el momento recuperador es precisamente el peso por la distancia en horizontal entre las dos posiciones sucesivas (ver Fig. 12.3.b, 12.5 y 12.9) el par será $P \cdot d = E \cdot d = \gamma \cdot Vol \cdot d$, donde $Vol = A + D$ (volumen sumergido), así pues, queda:

$$Q \cdot \gamma \cdot I_Q = \gamma \, (A + D) \cdot d$$

$$\frac{d}{Q} = \frac{I_Q}{A + D}, \text{ pero } \frac{d}{Q} = \overline{CM}$$

y cuando esté estabilizado y en el límite $(A \rightarrow 0)$

$$\overline{CM} = \frac{I_Q}{D}$$

donde: D = volumen sumergido

$\overline{CM}$ = la distancia del metacentro al centro de carena

Se ha hecho un desarrollo para un cuerpo que flota con unas dimensiones cualesquiera, pero en general, en ingeniería, los cuerpos que se echan a flotar tienen una simetría, por ejemplo: barcas, cajones, etc.

Ejemplo: El caso de una presa en el mar que se construye con cajones de forma paralelepipédica, que están huecas y se llevan flotando hasta su lugar de emplazamiento donde se hunden llenándolas con arena.

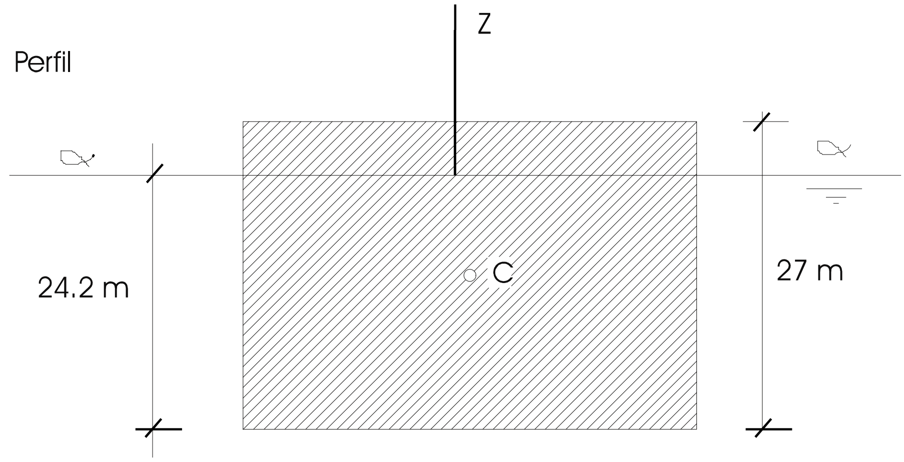
Sea un cajón de dimensiones:

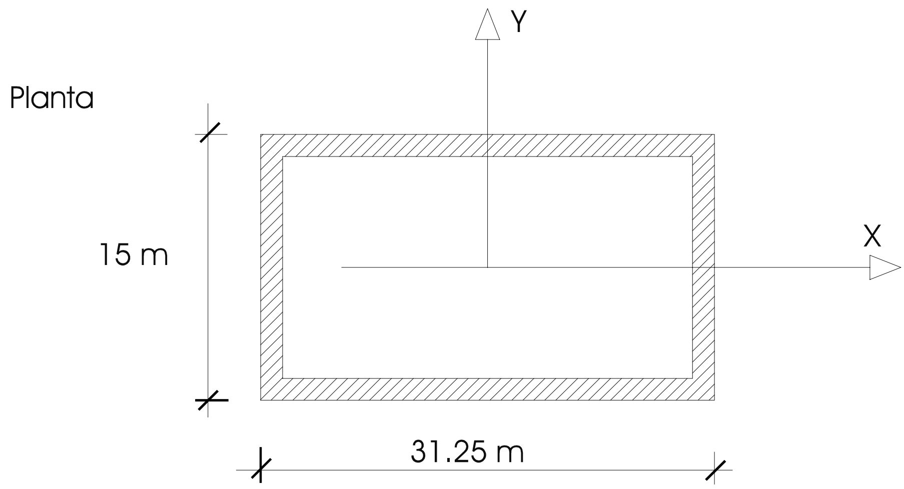
Manga = 15 m.

Puntal = 27 m.

Eslora = 31,25 m.

Peso = 11.337 x 10^3 kg.





$\overline{CM_x}$ = distancia del centro de carena al metacentro, considerando que el cajón gira alrededor del eje x.

$\overline{CM_y}$ = distancia del centro de carena al metacentro, considerando que el cajón gira alrededor del eje y.

$$\overline{CM}_x = \frac{I_{Q_x}}{D} \qquad \overline{CM}_y = \frac{I_{Q_y}}{D}$$

$$I_{Q_x} = \frac{1}{12} 31{,}25 \cdot 15^3 = 8.789\ m^4$$

$$I_{Q_y} = \frac{1}{12} 15 \cdot 31{,}25^3 = 38.146\ m^4$$

El volumen sumergido se calcula en general igualando el peso al empuje.

$$11.337\ Tm = h(15 \cdot 31{,}25) \cdot 1\ T/m^3 \quad \rightarrow$$

$$h = 24{,}2\ m$$

$$D = 24{,}2 \cdot 15 \cdot 31{,}25 = 11.337\ m^3$$

$$\overline{CM}_x = \frac{8.789}{11.337} = 0{,}77\ m$$

$$\overline{CM}_y = \frac{38.146}{11.337} = 3{,}36\ m$$

Bibliografía

Beer y Juhnston: Mecánica vectorial para Ingenieros. Ediciones Castilla.

J. Catalá: Física general.

W.F. Hughes: Dinámica de los fluidos. Schaum.

A. Osuna: Apuntes de hidraulica. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Sears, Zemansky, Young: Física. Aguilar.

J. A. Soler Llinares: Mecánica de fluidos. E.T.S. de Ingenieros de Montes.

V.L. Streejer y E.B. Wylie: Mecánica de los fluidos. Mc. Graw Hill.