UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIDAD DE CIENCIAS BASICAS

Asignatura: Matemática III
Ciclo: I / 2019

GUIA DE DISCUSIÓN No. 4

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. (Cálculo diferencial)

I. FUNCIONES DE DOS VARIABLES: DOMINIO Y RECORRIDO.

En los ejercicios 1 - 4, determínese si z es función de las variables x e y.

1) $x^2z + yz - xy = 3$

2) $z = \sqrt{1 + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}}$

3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

4) $y\ln(x) + 4 - z = 0$

En los ejercicios 5 - 8, hállense los valores de la función.

5) $g(x, y) = \ln|x + y|$

a) $g(2,3)$
b) $g(5,6)$
c) $g(e,0)$
d) $g(0,1)$
e) $g(2,-3)$
f) $g(e,e)$

6) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

a) $f(0,5,4)$
b) $f(6,8,-3)$

7) $f(x, y) = x\cos(y)$

a) $f\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$
b) $f(5, 2)$

8) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{t}\,dt$

a) $f(2,6)$
b) $f\left(e^3, e^5\right)$
c) $f(x,x), \quad x \neq 0$

En los ejercicios 9 - 12, descríbase la región **R** del plano coordenado xy que corresponde al dominio de la función dada, y hállese el recorrido de la función.

9) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$

10) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$

11) $f(x,y) = \sqrt{\ln(4-x-y)}$

12) $f(x,y) = \ln(4-xy)$

En los ejercicios 13 - 20, descríbase la región **R** del plano coordenado xy que corresponde al dominio de la función dada

13) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

14) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x-y)$

15) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2+1}}{\sqrt{y+x}}$

16) $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}}}$

17) $f(x,y) = \ln(y) - \sqrt{4x^2-9y^2-36}$

18) $f(x,y) = e^{\sqrt{x(1-|y|)}}$

19) $f(x,y) = \sqrt{\cos(x+y)}$

20) $g(x,y) = x\sqrt{y^2-9}$

En los ejercicios 21 - 32, dibújese la gráfica de la superficie especificada por la función.

21) $z = 3 + x^2 + y^2$

22) $z = -\sqrt{x^2+y^2}$

23) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

24) $z = 1-x^2$

25) $z = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}-1}$

26) $z = \sqrt{1-\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{x^2}{2}}$

27) $f(x,y) = 6-2x-3y$

28) $f(x,y) = \dfrac{1}{12}\sqrt{144-16x^2-9y^2}$

29) $f(x,y) = e^{-x}$

30) $f(x,y) = \begin{cases} sen(x) \quad , & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ -x^2-4x, & x<0,\ y>0 \\ 0 \quad , & x<0,\ y<0 \end{cases}$

31) $z = \sqrt{x^2-y^2}$

32) $z = \ln(x^2+y^2-1)$

33. a) Dibújese la gráfica de la superficie dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

b) Sobre la superficie de la parte a), dibújese las gráficas: $z = f(1,y)$ y $z = f(x,1)$

34. a) Dibújese la gráfica de la superficie dada por $f(x,y) = xy$ en el primer octante.

b) Sobre la superficie de la parte a), dibújense las gráficas de $z = f(x,x)$.

II. DERIVADAS PARCIALES:

En los ejercicios 1 - 22, hállense las derivadas parciales primeras con respecto a "x" y con respecto a "y".

1) $f(x,y) = \left(y^2-1\right)\left(x+2\right)$

2) $f(x,y) = \cos^2(x^2 - 3y^2 + 7)$

3) $f(x,y) = |xy|$

4) $f(x,y) = xye^{x^2+y^2}$

5) $z = y^x$

6) $z = 3x\,sen(y) + 4x^3y^2$

7) $z = x^2e^y - 4y$

8) $z = x\left(2^{x/y}\right)$

9) $z = e^{\frac{y}{x}} \ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$

10) $z = \sqrt{\cos\left(\dfrac{y}{x+y}\right)}$

11) $z = \ln\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

12) $z = \dfrac{y^2}{4x} - \dfrac{2x^2}{y}$

13) $h(x,y) = 4e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{y}{x}$

14) $g(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

15) $f(x,y) = \dfrac{sen(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

16) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

17) $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

18) $z = sen(3x)\,\cos(3y)$

19) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

20) $z = \cos(x^2 + y^2)$

21) $f(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$ $\left(\text{g continua para toda } t\right)$

22) $f(x,y) = \int_x^y (2t+1)\,dt + \int_y^x (2t-1)\,dt$

En los ejercicios 23 - 25, evalúense f_x y f_y en el punto indicado.

23) $f(x,y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right), (2, -2)$

25) $f(x,y) = x^{xy}, (2, 2)$

24) $f(x,y) = e^{sen(x)}\tan(xy), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

26) El plano $x=1$ corta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (1, 2, 5)

En los ejercicios 27 - 32, hállense las derivadas parciales primeras con respecto a x, y z.

27) $w = ye^{2x^2} + x\ln\left(y^2 - z^2\right) + \tan^{-1}\left(3z^2\right)$

30) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

28) $\dfrac{1}{f(x,y,z)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

31) $h(x,y,z) = 4z\,sen\left(x\right)\cos(y)$

29) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

32) $f(x,y,z) = x^2y - 2x^2z + 3xyz - y^2z + 2xz^2$

33) En una reacción química, la temperatura T, la entropía s, la energía libre de Gibbs G y la entalpia H se relacionan mediante $G = H - Ts$. Demuestre que:

a) $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(G/T\right) = -\dfrac{H}{T^2}$

b) $\dfrac{\partial\left(G/T\right)}{\partial\left(1/T\right)} = H$. Los químicos miden la entalpía de una reacción midiendo esta razón de cambio.

En los ejercicios 34 - 41, hállense las derivadas parciales segundas.

34) $z = x^4 - 3x^2y^3$

38) $z = arctg\ \dfrac{y}{x}$

35) $z = 3x^2y - xsen(xy)$

39) $z = \ln(3x + 5y)$

36) $z = e^{2x}sen(y)$

40) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

37) $z = e^{-\frac{x}{y}} + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

41) $z = \dfrac{x}{x+y}$

42) La energía cinética de un cuerpo con masa "m" y rapidez "v" es $k = \frac{1}{2} m v^2$.

Demuestre que $\frac{\partial k}{\partial m} \frac{\partial^2 k}{\partial v^2} = k$.

43) La ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, se llama ecuación de Laplace. Las soluciones de esta ecuación se denominan funciones armónicas y desempeñan un importante papel en problemas de conducción de calor, movimientos de fluidos y potencial eléctrico. Demuestre que la función $u(x, y) = e^x sen(y)$ es solución de la ecuación de Laplace.

En los ejercicios 44 - 47, véase que las parciales cruzadas f_{xyy}, f_{yxy} y f_{yyx} son iguales.

44) $f(x, y, z) = xyz$

45) $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$

46) $f(x, y, z) = e^{-z} \cos(xy)$

47) $f(x, y, z) = \frac{2z}{x + y}$

48) Dada $f(x, y, z) = \frac{xy}{y^2 + z^2}$ calcular $f_{xy}(x, y, z)$

49) Dada $f(x, y, z) = xsen\left(y^3 + 3z^2\right)$ calcular f_{xyy}

III. DIFERENCIALES

1) Calcule el diferencial de la función $u = \frac{r}{s + 2t}$.

2) Utilice diferenciales para estimar la cantidad de metal en un recipiente cilíndrico cerrado que mide $10cm$ de alto y $4cm$ de diámetro, si el metal de la tapa y del fondo tiene $0.1cm$ de grosor y el metal de los costados tiene un grosor de $0.05cm$.

3) La presión, el volumen y la temperatura de un mol de un gas ideal están relacionados por la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en kelvin. Utilice diferenciales para calcular el cambio aproximado en la presión si el volumen aumenta de 12L a 12.3L y la temperatura se reduce de 310K a 305K.

4) Se mide un cono circular recto. Su radio y su altura son 2 y 5 pulgadas, respectivamente. El posible error de medición es $\frac{1}{8}$ de pulgada. Utilice diferenciales para aproximar el error máximo posible en el cálculo de a) el volumen, b) la superficie lateral. (La superficie lateral está dada por $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$)

5) La potencia eléctrica P está dada por $P = \frac{E^2}{R}$, donde E es el voltaje y R la resistencia. Utilice diferenciales para aproximar el máximo error porcentual al calcular la potencia si se aplican 200 voltios a una resistencia de 4000 ohms, si los posibles errores porcentuales al medir E y R son 2% y 3% respectivamente.

IV. LA REGLA DE LA CADENA

En los ejercicios 1 - 5, hállense dw/dt usando la regla de la cadena apropiada.

1) $w = x\ln(x+2y)$, $x = sen(t)$, $y = \cos(t)$

2) $w = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = sen\, t$, $y = e^{sen(t)}$

3) $w = x\sec y$, $x = e^{t^2+3t-1}$, $y = \pi - t$

4) $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t \cos(t)$ $y = e^t\, sen\, t$, $z = e^t$

5) $w = xy\cos z$, $x = t+1$, $y = t^2$, $z = \arccos t$

6) Sea $w = xy + x^2$, $x = 4\cos(t)$, $y = 3sen(t)$. Calcular $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

En los ejercicios 7 - 10, hállense: $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$. Usando la regla de la cadena apropiada, y evalúese cada derivada parcial para los valores indicados "s" y "t".

Función	Punto
7) $w = ye^x$, $x = t^2 - s$, $y = \dfrac{t}{s}$	$s = 1$, $t = 2$
8) $w = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$	$s = 0$, $t = 1$
9) $w = x^2 + 5y^3 z$, $x = e^{t^2+s^2}$, $y = t^2 + 2s$, $z = \ln\left(t + s^3\right)$	$s = 1$, $t = 0$
10) $w = \cos(2x + 3y)$, $x = s + t$, $y = s - t$	$s = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$

En los ejercicios 11 - 13, hállense dv/dt: a) mediante la regla de la cadena apropiada y b) escribiendo w como función de t antes de derivar.

11) $w = x^2 + y^2$, $x = 2\, sen(t)$, $y = \cos(t)$

12) $w = sen(x\,y) - xsen(y)$, $x = e^t$, $y = te^t$

13) $w = sen(x+y+z)$, $x = sen(t)$, $y = \cos(t)$, $z = t^2$

En los ejercicios 14 y 15, hállense: $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$: a) mediante la regla apropiada y b) escribiendo "w" como función de "r" y "θ" antes de derivar.

14) $w = \sqrt{4 - 2x^2 - 2y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\, sen\,\theta$

15) $w = \dfrac{xy}{z}$, $x = r + \theta$, $y = r - \theta$, $z = \theta^2$

16) Dadas $w = f(x, y)$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, f diferenciable, probar que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

17) Si $z = f(u)$, donde $u = \dfrac{y}{x}$. Probar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ utilizando la regla de cadena adecuada.

En los ejercicios 18 - 21, derívese implícitamente para obtener las derivadas parciales primeras de z .

18) $3x^2z + 2z^3 - 3yz = 10$

19) $x\ln(y) + y^2z + z^2 = 8$

20) $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$

21) $z = e^y \cos(x + z)$

En los ejercicios 22 y 23, derívese implícitamente para obtener las derivadas parciales primeras de w:

22) $xyz + xzw - yzw + w^2 = 5$ 23) $x^2 + y^2 + z^2 + 6xw - 8w^2 = 5$

En los ejercicios 24 y 25, derívese implícitamente para obtener todas las derivadas parciales primeras y segundas de z .

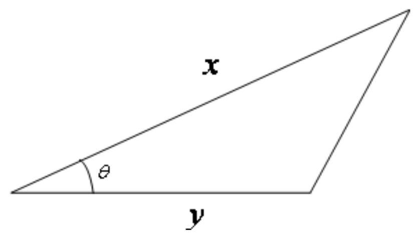
24) $x^2 + 2yz + z^2 = 1$ 25) $x + sen(y + z) = 0$

26) La longitud l , el ancho w , y la altura h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante, las dimensiones son $l = 1m$ y $w = h = 2m$. l y w aumentan a razón de $2\dfrac{m}{s}$ mientras que h está decreciendo a razón de $3\dfrac{m}{s}$. Calcule la razón de cambio de las siguientes magnitudes en ese instante: a) el volumen, b) el área superficial, c) la longitud de una diagonal.

27) El radio r de un cilindro circular recto aumenta a razón de 6 pulgadas por minuto y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. Hállense las razones de cambio del volumen y el área superficial en el momento en que el radio mide 12 pulgadas y la altura es mide 36 pulgadas.

28) Repítase el Ejercicio 27 con un cono circular recto.

29) El lado marcado x del triángulo de la figura siguiente aumenta a razón de 0.3 cm/s, el lado marcado y aumenta a razón de 0.5 cm/s, y el ángulo θ crece a razón de 0.1 rad/s. Aplique la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del área del triángulo en el instante en el que $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \frac{\pi}{6}$.



V. DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE

En los ejercicios 1 - 12 hállese la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de v.

1) $f(x,y) = 12 - 2x^2 - 2y^2$, $P = (-2,1)$, $v = \langle 3,1 \rangle$

2) $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + y^2$, $P = (1,3)$, $v = \langle 3,2 \rangle$

3) $f(x,y) = xy$, $P = (2,3)$, $v = i + j$

4) $f(x,y) = \frac{y^2}{x} + \sqrt{3}\sec^{-1}(2xy)$, $P = (1,1)$, $v = \langle 12,5 \rangle$

5) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (3,4)$, $v = 3i - 4j$

6) $g(x,y) = \arcsen xy$, $P = (1,0)$, $v = i + 5j$

7) $h(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, $P = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $v = -i$

8) $h(x,y) = e^{4x^2 - y}$, $P = (1,4)$, $v = \langle -2,-1 \rangle$

9) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ $P = (1,1,1)$, $v = \langle 2,1,-1 \rangle$

10) $f(x,y,z) = 4e^y \cos(xz)$, $P = (0,0,0)$, $v = 2i + j - 2k$

11) $h(x,y,z)=xyz$, $P=(4,1,1)$, $v=\langle 1,2,-1\rangle$

12) $h(x,y,z)=\dfrac{xz}{y}$, $P=(1,2,1)$, $v=\langle 1,-2,2\rangle$

En los ejercicios 13 - 15, hállese la derivada direccional de la función en la dirección $u=\cos\theta i + sen\theta j$.

13) $g(x,y)=e^x\tan(y)$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

15) $f(x,y)=sen(2x-y)$, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

14) $f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}$, $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

16) Calcular el valor de la derivada direccional de f, si $f(x,y)=sen(x+2y)$, en el punto $(4,-2)$ en la dirección dada por $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

En los ejercicios 17 - 20, hállese la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

17) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$, $P=(-2,-1)$, $Q=(2,-3)$

18) $f(x,y)=x^2\operatorname{sen}(4y)$, $P=\left(-2,\dfrac{\pi}{8}\right)$, $Q=(0,0)$

19) $h(x,y,z)=\ln(x+y+z)$, $P=(1,0,0)$, $Q=(4,3,1)$

20) $g(x,y,z)=e^{xy+z}$, $P=(2,4,0)$, $Q=(6,2,3)$

En los ejercicios 21 - 30, Hallar las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de la función en el punto dado, y los valores máximos y mínimos de la derivada direccional en dicho punto.

	Función	Punto
21)	$f(x,y)=x^2y+\sqrt{y}$	$(2,1)$
22)	$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$	$(1,1)$
23)	$h(x,y)=x\,tg(y)$	$\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$

24) $h(x,y) = x\cos(3y)$ $\qquad (-2,\pi)$

25) $g(x,y) = \ln\sqrt[3]{x^2+y^2}$ $\qquad (1,2)$

26) $g(x,y) = e^{-x}\cos(y)$ $\qquad \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

27) $f(x,y,z) = x^2\,y + x\sqrt{1+z}$ $\qquad (1,2,3)$

28) $f(x,y,z) = ze^{xy}$ $\qquad (0,1,2)$

29) $w = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ $\qquad (0,0,0)$

30) $w = 4x^2y\,z^3$ $\qquad (1,2,1)$

En los ejercicios 31 - 38, úsese la función $f(x,y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$

31) Dibújese la gráfica de " f " en el primer octante y señálese el punto $(3,2,1)$

32) Hállese $D_{\bar{u}}f(3,2)$ donde $u = \cos\,\theta i + sen\,\theta j$

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

33) Hállese $D_{\bar{u}}\,f(3,2)$ donde $u = \cos\,\theta i + sen\,\theta j$

a) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ $\qquad$ b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

34) Hállese $D_{\bar{u}}\,f(3,2)$ donde $u = v/\|v\|$

a) $v = i + j$ $\qquad$ b) $v = -3i - 4j$

35) Hállese $D_{\bar{u}}\,f(3,2)$ donde $u = \dfrac{v}{\|v\|}$

a) v es el vector desde $(1,2)$ a $(-2,6)$

b) v es el vector desde $(3,2)$ a $(4,5)$

36) Hállese $\nabla f(x,y)$.

37) Hállese el valor máximo de la derivada direccional en $(3,2)$.

38) Hállese un vector unitario ortogonal a $\nabla f(3,2)$ y calcúlese $D_u f(3,2)$. Discútase el significado geométrico del resultado.

En los ejercicios 39 - 42, hállese un vector normal a la curva de nivel $f(x,y)=c$ en P.

39) $f(x,y) = 12-2x^2-2y^2$, $c = 2$, $P = (-2,1)$

40) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$, $c=\ln(2)$, $P=(1,1)$

41) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $c=\dfrac{1}{2}$, $P=(1,1)$

42) $f(x,y)=xy$, $c=-3$, $P=(-1,3)$

En los Ejercicios 43 - 45 úsese el gradiente para hallar un vector normal a la gráfica de la ecuación en el punto indicado. Dibújense los resultados.

	Ecuación	Punto
43)	$4x^2-y=6$	$(2,10)$
44)	$3x^2-2y^2=1$	$(1,1)$
45)	$9x^2+4y^2=40$	$(2,-1)$

46) Dada la función f con regla de correspondencia $f(x,y)=\dfrac{8y}{1+x^2+y^2}$, a) verificar analíticamente que la curva de nivel en $c=2$ es una circunferencia, b) en el punto $\left(\sqrt{3},2\right)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector que apunta en dirección del mayor ritmo de incremento de la función, c) en el punto $\left(\sqrt{3},2\right)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector cuya derivada direccional sea cero.

47) La temperatura en el punto (x,y) de una placa metálica viene dada por: $T=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Hallar la dirección de mayor incremento del calor en el punto $(3,4)$. ¿Cuál es la mayor razón de cambio en el punto $(3,4)$?

48) Se describe la superficie de una montaña mediante la ecuación $h(x,y) = 4000 - 0.001\,x^2 - 0.004\,y^2$ Supóngase que una alpinista está en el punto $(1500, 300, 3390)$. ¿En qué dirección debe moverse la alpinista para ascender lo más rápido posible?

49) El potencial eléctrico en voltios en el plano xy esta dado por $V(x,y) = e^{-2x}\cos(2y)$. Si la distancia se mide en pies, calcular:

a) La razón de cambio del potencial en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ en la dirección del vector unitario $\left\langle \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\rangle$

b) La dirección y la magnitud de la máxima tasa de variación del potencial en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

50) Calcular la trayectoria seguida por una partícula rastreadora de calor situada en un punto P sobre una placa metálica que tiene un campo de temperatura dado por $T(x,y) = 400 - 2x^2 - y^2$, $P = (10, 10)$

VI. EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Determinar los valores extremos de las funciones siguientes:

1) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

2) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6y^2 - 6x^2 + 8$

3) $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$

4) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

5) $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13$

6) $z = 3x^2 + 12xy + 2y^3 - 6x + 6y$

7) $h(x,y) = y^2 - x^2 + 2x - 4y + 3$

8) $h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

9) $g(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^4$

10) $g(x,y) = 120x + 120y - xy - x^2 - y^2$

11) $f(x,y) = y^3 + 6xy + 3x^2 - 9y$

12) $f(x,y) = 4y - x^4 - y^4$

13) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

VII. APLICACIONES

1) Hállese la distancia mínima del punto $(2,-2,3)$ al plano dado por $6x + 4y - 3z = 2$

2) Hállese la distancia mínima del punto $(3,5,0)$ al paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$.

3) Determine el punto de la gráfica de $z = x^2 + y^2 + 10$ más cercano al plano $x + 2y - z = 0$

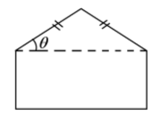
4) Entre todos los puntos sobre la gráfica de $z = 10 - x^2 - y^2$ que están arriba del plano $x + 2y + 3z = 0$, determine el punto más lejano a dicho plano.

En los ejercicios 5 y 6, hállese tres números positivos $x, y \wedge z$ que satisfacen las condiciones dadas.

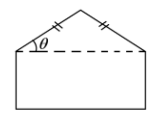
5) La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máximo.

6) La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.

7) Al poner un triángulo isósceles sobre un rectángulo se forma un pentágono. Si el rectángulo tiene perímetro P fijo, encuentre las longitudes de los lados del pentágono que hacen máxima el área del pentágono.



8) Al poner un triángulo isósceles sobre un rectángulo se forma un pentágono. Si el rectángulo tiene área A fija, encuentre las longitudes de los lados del pentágono que hacen mínimo el perímetro del pentágono.



9) La suma de la longitud y el perímetro de una sección recta de los bultos llevados como paquetes postales no puede exceder de 108 pulgadas. Hállense las dimensiones de un paquete rectangular de volumen máximo que pueda ser enviado como paquete postal.

10) El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1,5 veces lo que el material para construir los lados. Para una cantidad fija de dinero C, hállense las dimensiones de la caja de volumen máximo que pueda hacerse.

11) El volumen de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es $4\pi abc/3$. Fijando $a + b + c$, demuéstrese que el volumen máximo es una esfera.

12) Determinar las dimensiones del mayor paralelepípedo rectangular que se puede inscribir en una semiesfera de radio r.

13) Se pide que una caja rectangular, que carece de tapa, tenga un volumen dado V. Determinar sus dimensiones para que el área de la superficie total sea mínima.

14) Se forma una artesa de sección trapezoidal doblando los bordes de una plancha de aluminio de 10 pulgadas de ancho. Hállense la sección de área máxima.

15) La temperatura T en un punto (x, y, z) del espacio es $T = 400xyz^2$. Calcúlese la temperatura máxima de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.