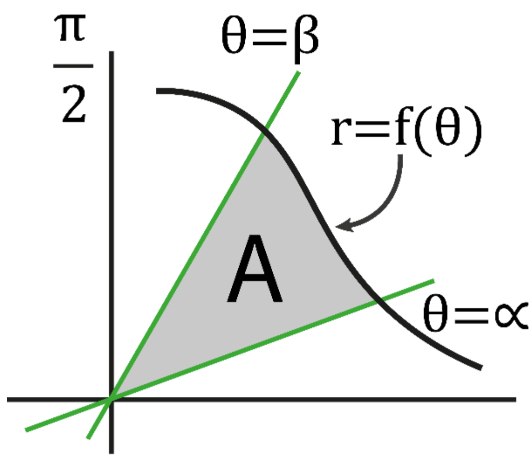
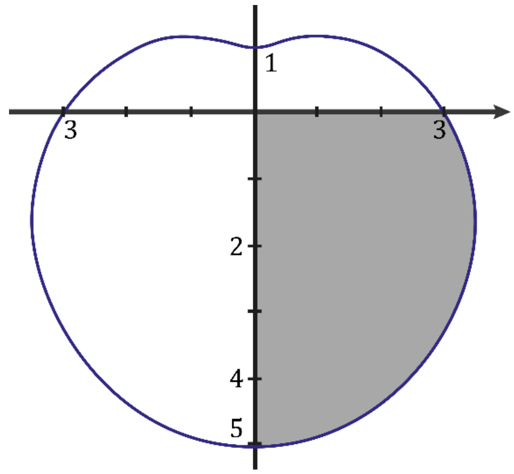
1.7 ÁREA DE UNA REGION EN COORDENADAS POLARES



t *Teorema:* *Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, el área de la región limitada por la gráfica de $r = f(\theta)$ y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada mediante* $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ *Los ángulos expresados en radianes*

Observación: *Nótese que el área anterior siempre es la región que se encuentra entre la curva polar y dos rectas que pas an por el polo*

Ejemplo: Obtener el área sombreada en la siguiente gráfica.



Se observa que la gráfica es un caracol con hoyuelo y está orientada hacia abajo, el mayor valor es **5**, así que su ecuación es $\boldsymbol{r = 3 - 2sen(\theta)}$.

Existen varias maneras de obtener el área de la región sombreada. Una forma es

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}[3 - 2sen(\theta)]^2 d\theta}$$

y la otra forma es

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[3 - 2sen(\theta)]^2 d\theta}$$

de cualquiera de las dos formas se obtendrá el mismo resultado.

Se resuelve de la segunda forma:

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[3 - 2sen(\theta)]^2 d\theta}$	*Desarrollando el binomio* $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[9 - 12sen(\theta) + 4sen^2(\theta)]d\theta}$	

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[9 - 12sen(\theta) + 4\,\{\frac{1-cos(2\theta)}{2}\}]\,d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[9 - 12sen(\theta) + 2 - 2cos(2\theta)]d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}[11 - 12sen(\theta) - 2cos(2\theta)]d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}[11\theta + 12cos(\theta) - sen(2\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$A = \frac{1}{2}\{[11(0) + 12cos(0) - sen(2(0))] - [11\,(\frac{-\pi}{2}) + 12cos\,(\frac{-\pi}{2}) - sen\,(2\,(\frac{-\pi}{2}))\,]\}$$

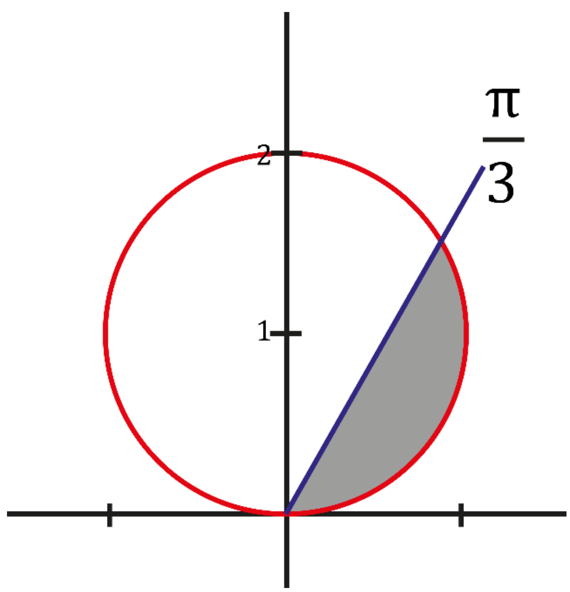
$$A = \frac{1}{2}[(0 + 12 - 0) - (-11\frac{\pi}{2} + 0 - 0)]$$

$$A = \frac{1}{2}\{12 + 11\frac{\pi}{2}\} = 6 + 11\frac{\pi}{4}(u.l)^2$$

$$A \approx 14.6394\ \ (u.l)^2$$

El área sombreada es aproximadamente: $A \approx 14.6394\ \ (u.l)^2$

Ejemplo: Determinar el área sombreada en la siguiente figura.



La ecuación que corresponde a la gráfica es $\boldsymbol{r = 2sen(\theta)}$. Recuérdese que es una circunferencia de diámetro 2, está orientada hacia arriba y $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ es el eje de simetría.

Además, el eje polar es la tangente al polo, de ahí que la gráfica completa se genera de cero a $\boldsymbol{\pi}$**.** Por lo tanto, el área sombreada se calcula utilizando el teorema anterior así:

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta \,;\, \alpha = 0 \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad , \quad f(\theta) = r = 2sen(\theta)}$
$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}[2sen(\theta)]^2 d\theta}$
$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 4sen^2(\theta) d\theta}$

$$A = \frac{1}{2} 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(\theta) d\theta$$

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\frac{1 - cos(2\theta)}{2}] \, d\theta$$

$$A = \frac{2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [1 - cos(2\theta)] d\theta$$

$$A = [\theta - \frac{sen(2\theta)}{2}]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A = [\frac{\pi}{3} - \frac{sen\,(2\frac{\pi}{3})}{2}] - [0 - \frac{sen(2(0))}{2}]$$

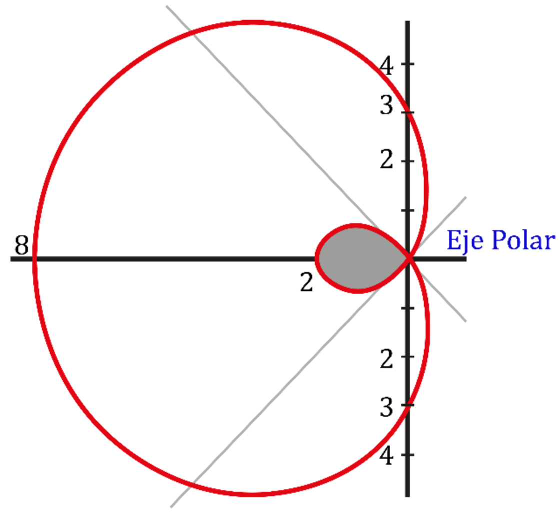
$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A \approx 0.6142 \; (unidades\ lineales)^2$$

Ejercicio: Plantear, mediante integrales en coordenadas polares el área del lazo interior de la gráfica de $r = 3 - 5\cos(\theta)$

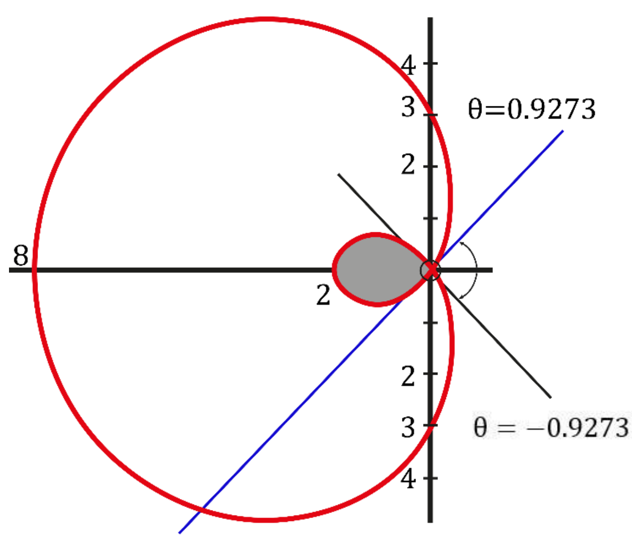
Solución: La gráfica de la ecuación corresponde a un caracol con lazo interior orientado hacia la izquierda. La mayor longitud es 8 unidades, la longitud del lazo interior es de 2 unidades y las longitudes de arriba y abajo son de 3 unidades. Por lo tanto la gráfica es la siguiente:



El área que se pide es la sombreada. Recuérdese que los puntos del lazo interior se generan de tangente al polo a tangente al polo. Por lo tanto es necesario calcularlas.

$\boldsymbol{r = 3 - 5cos(\theta)}$	
$\boldsymbol{3 - 5cos(\theta) = 0}$	
$\boldsymbol{-5cos(\theta) = -3}$	
$\boldsymbol{cos(\theta) = \frac{3}{5}}$	
$\boldsymbol{\theta = cos^{-1}(0.6)}$	
$\boldsymbol{\theta \approx 0.9273}$	*(utilizando calculadora configurada en radianes)*

Por simetría se puede determinar la otra tangente al polo, tal como se muestra en la siguiente figura:

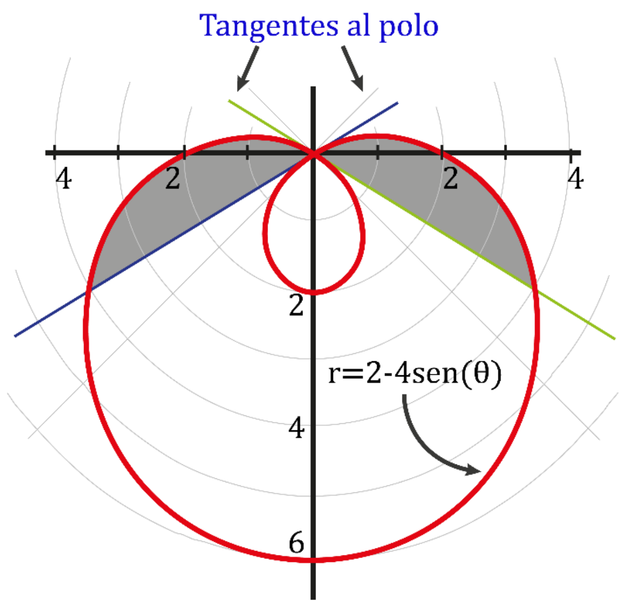


También se puede aplicar simetría para calcular el área que se pide y en este caso no es necesario la otra tangente al polo.

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{0.9273}\left(3 - 5\cos(\theta)\right)^2 d\theta\right]$$

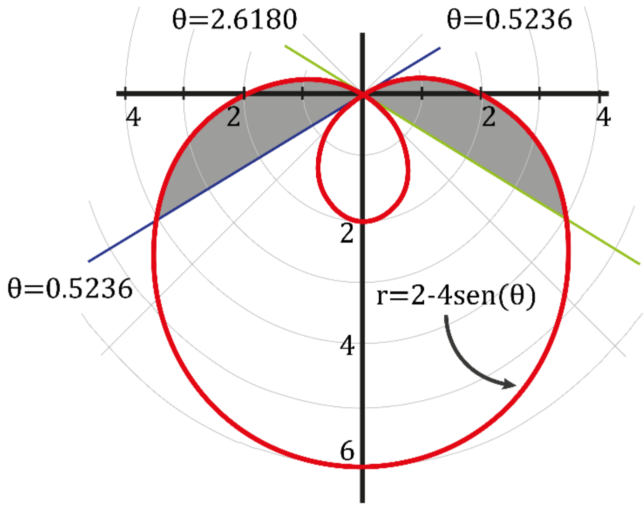
Sin utilizar simetría es $A = \frac{1}{2}\int_{-0.9273}^{0.9273}\left(3 - 5\cos(\theta)\right)^2 d\theta$

Ejercicio: Plantear, mediante integración en coordenadas polares, el valor del área de la región sombreada de la siguiente figura



Existen diferentes formas de hallar el valor del área solicitada. Una de ellas es la siguiente:

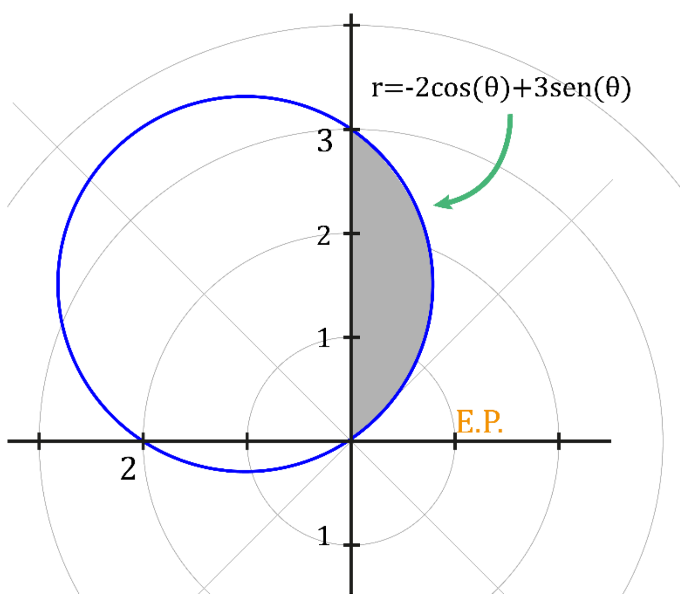
$r = 2 - 4sen(\theta)$
$2 - 4sen(\theta) = 0$
$\theta = sen^{-1}(0.5)$
$\theta \approx 0.5236$



Utilizando simetría, se tiene que:

$$A = \frac{1}{2}\int_{2.6180}^{3.6652} \left(2 - 4\ \text{sen}(\theta)\right)^2 d\theta$$

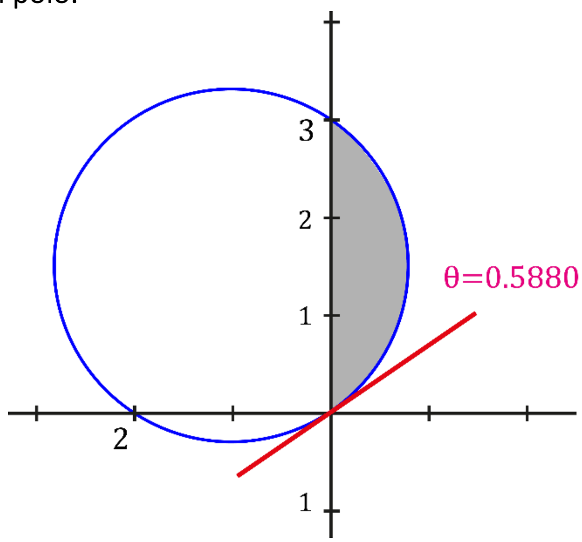
Ejercicio: Plantear, mediante integrales en coordenadas polares, el área de la región sombreada en la siguiente figura.



Esta gráfica posee una tangente en el polo y es indispensable calcularla para determinar el área sombreada. Es un error si se toman los límites de integración de “cero” a $\frac{\pi}{2}$ puesto que los puntos

$\frac{\pi}{2}$ de la gráfica involucrados en el área sombreada se generan de la tangente al polo a la recta θ .

Calculando la tangente al polo.



$=$

$\boldsymbol{r = -2cos(\theta) + 3sen(\theta) - 2cos(\theta) + 3sen(\theta)}$

Despejando θ se tiene que:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

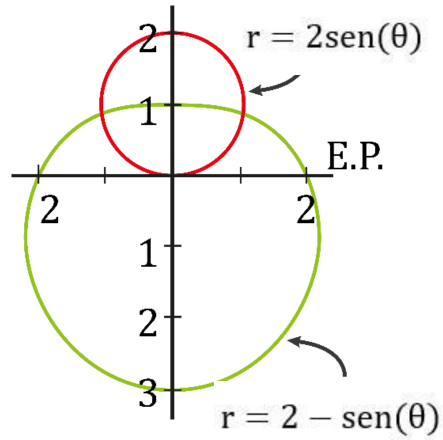
$\theta \approx 0.5880$ *Utilizando calculadora en radianes*

Para efectos de cálculo se utiliza **0.588** (radianes), pero para graficar, hay que hacer la conversión en grados (33.7° aprox.).

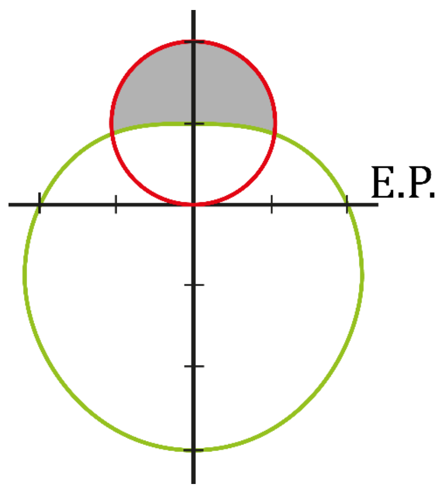
$$A = \frac{1}{2}\int_{0.588}^{\frac{\pi}{2}} [-2cos(\theta) + 3sen(\theta)]^2 d\theta \qquad (u.l.)^2$$

Ejercicio: Obtener el valor del área dentro de $r = 2sen(\theta)$ y fuera de $r = 2 - sen(\theta)$

Solución:

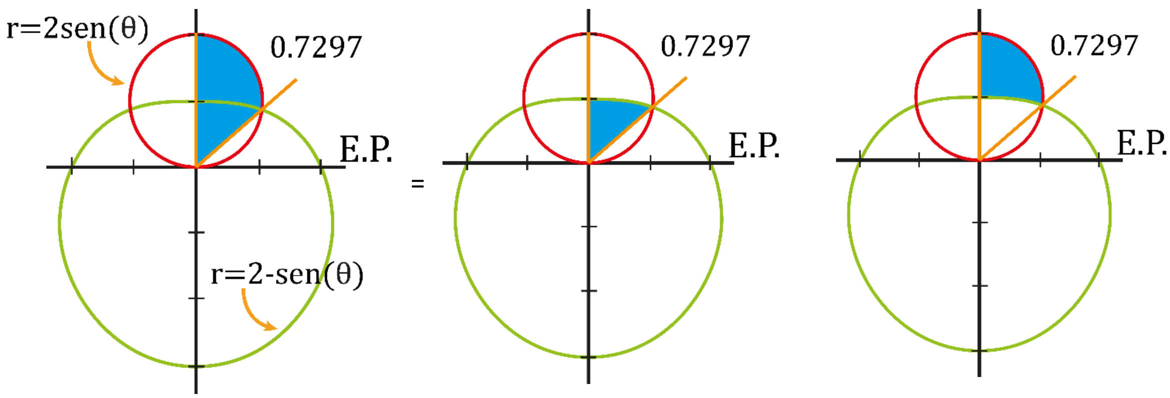


El área que se pide es la que está dentro de la circunferencia $\boldsymbol{r = 2sen(\theta)}$ y fuera del caracol convexo $\boldsymbol{r = 2 - sen(\theta)}$.



El área de una región polar se obtiene integrando “la curva polar” cuyos límites de integración son dos rectas que pasan por el polo $\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta}$. Es por eso que la recta intersección de las dos curvas involucradas juega un papel primordial para dicho cálculo. Además, según el esquema, se puede utilizar simetría. Determinando la recta intersección.

$r = 2sen(\theta), r = 2 - sen(\theta)$
$2sen(\theta) = 2 - sen(\theta)$
$2sen(\theta) + sen(\theta) = 2$
$3sen(\theta) = 2$
$sen(\theta) = \frac{2}{3}$
$\theta = sen^{-1}(\frac{2}{3})$
$\theta \approx 0.7297$



"Si se integra la ecuación de la circunferencia ($r = 2sen(\theta)$) desde la recta intersección ($\theta \approx 0.7297$) hasta la recta $\frac{\pi}{2}$", se estaría calculando el área mostrada en la parte izquierda de la figura anterior.

"Si se integra la ecuación del caracol ($r = 2 - sen(\theta)$) desde la recta intersección hasta la recta $\frac{\pi}{2}$ ", se estaría calculando el área mostrada en la parte central de la figura anterior y si se resta el área de la región de la izquierda menos el área de la región mostrada en la parte central se obtendría la mitad del área que nos piden calcular.

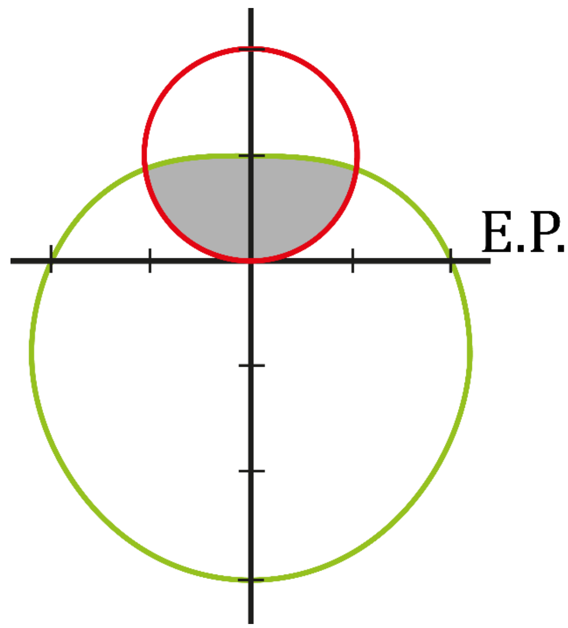
Por lo tanto

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(2sen(\theta)\right)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - sen(\theta)\right)^2 d\theta\right]$$

Ya que las dos integrales tienen los mismos límites de integración, el área anterior puede escribirse como:

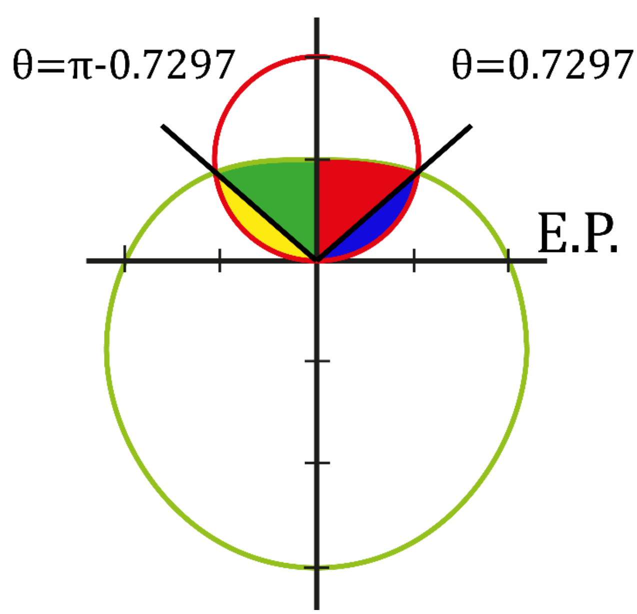
$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(2sen(\theta)\right)^2 - \left(2 - sen(\theta)\right)^2 d\theta\right]$$

Ejercicio: Observe que se trata de las dos mismas gráficas del ejercicio anterior, el área común es la mostrada a continuación:



La recta de intersección de la derecha ya la habíamos calculado y es $\boldsymbol{\theta = 0.7297}$ y la de la izquierda es $\boldsymbol{\theta = \pi - 0.7297}$ **.**

El área común es la suma de cuatro áreas, tal como lo podemos apreciar en la figura de diferentes colores.



El área azul se obtiene integrando la circunferencia desde la tangente al polo, que es cero (eje polar) hasta la recta $\mathbf{0.7297}$. El área en color rojo integrando el caracol convexo desde la recta radial $\mathbf{0.7297}$ hasta la recta radial $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$. El área de color verde, integrando el caracol convexo, desde $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ hasta $\boldsymbol{\theta = \pi - 0.7297}$ y por último el área de color naranja, integrando la circunferencia desde $\boldsymbol{\theta = \pi - 0.7297}$ hasta $\boldsymbol{\theta = \pi}$. Pero se puede aplicar simetría, ya que la recta $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ divide en 2 partes iguales el área a calcular.

Por lo tanto, el área común la se puede calcular mediante la expresión:

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{0.7297}\left(2sen(\theta)\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - sen(\theta)\right)^2 d\theta\right]$$

Ahora, efectuando las multiplicaciones resulta:

$$A = \int_0^{0.7297}\left(2sen(\theta)\right)^2 d\theta + \int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - sen(\theta)\right)^2 d\theta$$

$$A = \int_0^{0.7297} 4sen^2(\theta)d\theta + \int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(4 - 4sen(\theta) + sen^2(\theta)\right) d\theta$$

$$A = \int_0^{0.7297} 4\,\frac{1-cos(2\theta)}{2}\,d\theta + \int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(4 - 4sen(\theta) + \frac{1-cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$A = \int_0^{0.7297} 2(1 - cos(2\theta))d\theta + \int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(4 - 4sen(\theta) + \frac{1}{2} - \frac{cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$A = \int_0^{0.7297}(2 - 2cos(2\theta))d\theta + \int_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{2} - 4sen(\theta) + \frac{cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$A = \left[2\theta - \frac{2sen(2\theta)}{2}\right]_0^{0.7297} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4cos(\theta) - \frac{sen(2\theta)}{4}\right]_{0.7297}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A \approx 1.5175$$