UNIDAD VI: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO INTEGRAL)

6.3 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS RECTANGULARES

Definición:

Si $f$es continua en una región sólida D, la integral triple de f sobre D se define como:

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x, y, z)\Delta V_i$$

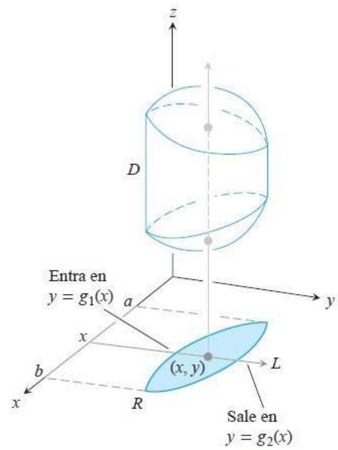
Siempre que este límite exista. El volumen de la región D viene dado por:

$$V_D = \iiint_D dV$$

Teorema: (Evaluación de integrales iteradas)

Sea f continua en una región sólida D definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$ donde h_1, h_2, g_1, g_2, son funciones continuas, entonces:

$$V_D = \iiint_D f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$



Además del orden $dzdydx$, puede utilizarse los órdenes $dxdydz$, $dydxdz$, $dzdxdy$, $dxdzdy$, $dydzdx$.

Observaciones:

- En el orden de integración $dxdydz$ R: proyección en plano YZ
R

- La última variable a integrar es z (los límites de integración son constantes)

$$a \leq z \leq b \; h_1(x)$$

$$\leq y \leq h_2(x)$$

$$g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

Ejemplo:

Calcular la integral triple

$$\int_2^3 \int_0^2 \int_0^4 xydzdydx$$

Solución

Recordemos que se empieza por la integral más interna (en este caso respecto a z) y la última integral es respecto a x

$$\int_2^3\int_0^2\int_0^4 xydzdydx = \int_2^3\int_0^2\left[xy\int_0^4 dz\right]dydx \text{ considerando } x \text{ e } y \text{ constantes}$$

$$\int_2^3\int_0^2[xyz|_0^4]dydx = \int_2^3\int_0^2[xy(4-0)]dydx = \int_2^3\int_0^2[4xy]dydx$$

$$\int_2^3\int_0^2 4xydydx = \int_2^3 4x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 dx = \int_2^3 2x[(2)^2-(0)^2]dx = \int_2^3 2x(4)dx$$

$$\int_2^3 8xdx = 8\int_2^3 xdx = 4x^2|_2^3 = 4[(3)^2-(2)^2] = 4(9-4) = 4(5) = 20$$

La aplicación que veremos para las integrales triples es el determinar volumen de sólidos.

Ejemplo:

Usar integrales triples para calcular el volumen del sólido limitado por las gráficas de:

$$x - y = 1, x = y^2 - 1, z = 0 \text{ y } z = 1 + y - x$$

Solución

Observemos que en las primeras dos ecuaciones hace falta la variable z, por lo que se trata de superficies cilíndricas cuyas curvas generatrices están en el plano xy y éstas nos generan la proyección del sólido en dicho plano.

$x - y = 1$: recta que pasa por 1 en x y -1 en y

$x = y^2 - 1$: Parábola abierta hacia la derecha con vértice en el punto $(-1,0)$

Intersecciones entre estas dos gráficas:

$$x = y^2 - 1$$

$x - y = 1$ □ $x = y + 1$

$$x = x$$

$$y^2 - 1 = y + 1$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

$$y_1 = 2,\ y_2 = -1$$

Cuando $y = 2$

$$x = y + 1$$

$$x = 2 + 1 = 3$$

$$x = 3$$

Cuando $y = -1$

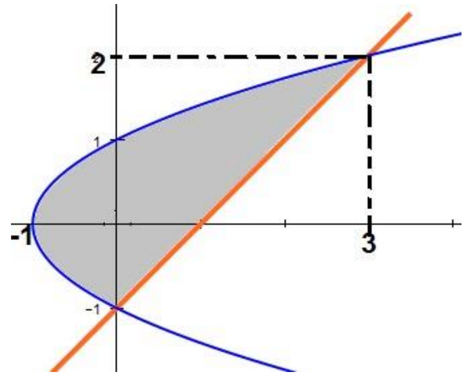
$$x = y + 1$$

$$x = -1 + 1 = 0$$

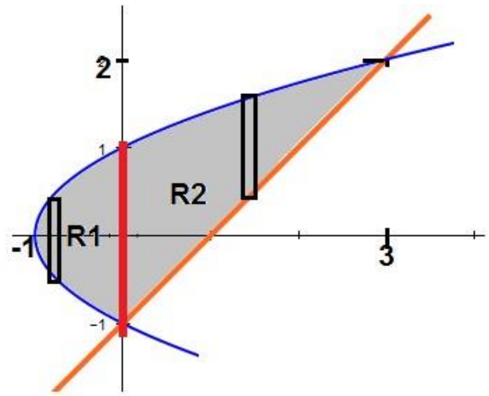
$$x = 0$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $P_1(3,2)$ y $P_2(0,-1)$

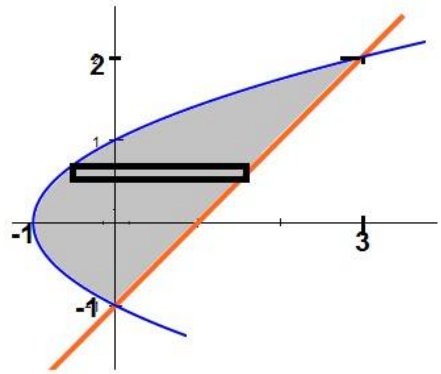
La proyección del sólido en el plano XY es la región sombreada a continuación:



Si escogemos el orden $dydx$ (verticalmente simple) tenemos que plantear dos integrales triples; uno para cada región, así:



Conviene mejor el orden $dxdy$ (valores constantes en y)

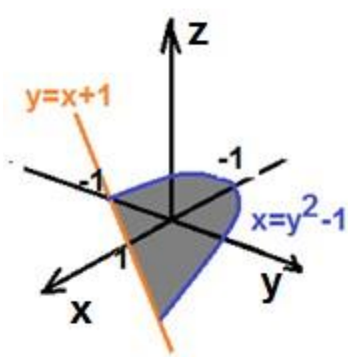


Región horizontalmente simple:

Variación en y: $-1 \leq y \leq 2$

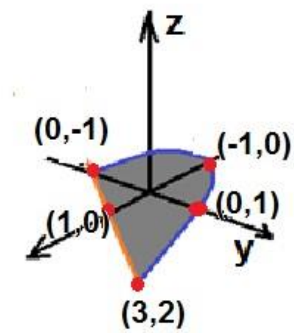
Variación en x: desde la parábola hasta la recta, ambas en términos de y

$$y^2 - 1 \leq x \leq y + 1$$



La gráfica nos muestra la región del plano XY en tres dimensiones, que es la proyección del sólido en dicho plano. La parte superior del sólido lo forma la ecuación del plano $z = 1 + y - x$, ya que cada punto de la región sombreada se "elevará" y "topará" con dicho plano.

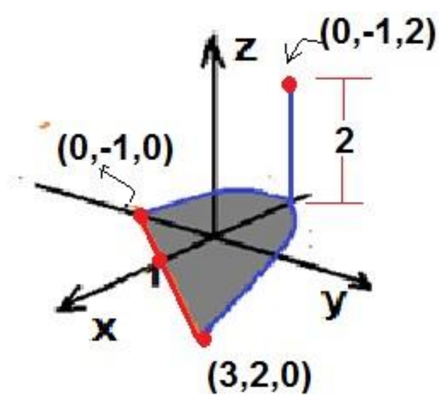
Graficaremos el sólido, tal como lo hicimos en la unidad IV. Evaluaremos algunos puntos claves de la región sombreada en el plano $z = 1 + y - x$, para determinar la altura o valor de z que le corresponde a cada par ordenado (x, y) de dichos puntos clave que mostramos a continuación.



Para el punto $(-1{,}0)$ valor de z que le corresponde en el plano $z = 1 + y - x$ es:

$$z = 1 + y - x$$
$$z = 1 + 0 - (-1)$$
$$z = 1 + 1$$
$$z = 2$$

La altura de este punto es 2.



Para el punto $(0, -1)$ valor de z que le corresponde en el plano $z = 1 + y - x$ es:

$$z = 1 + y - x$$
$$z = 1 + (-1) - (0)$$
$$z = 0$$

La altura de este punto es 0.

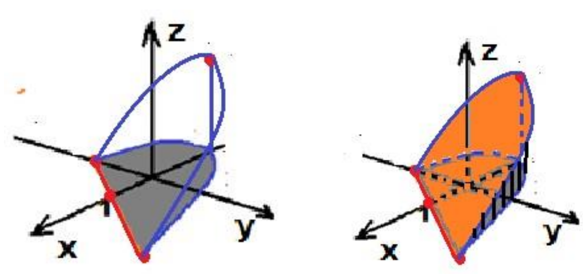
Para el punto de intersección $(3{,}2)$ valor de z que le corresponde en el plano $z = 1 + y - x$ es:

$$z = 1 + y - x$$
$$z = 1 + (2) - (3)$$
$$z = 0$$

La altura de este punto es 0.

Es lógico pensar que no habrá altura para el punto $(1{,}0)$. Recordando, que esta recta a la que pertenecen estos puntos es la intersección de dos planos.

Ahora trazamos la gráfica del plano, recordando que la región sombreada es la proyección del sólido en el plano xy.



La variación en z:

$Z =$0 (plano xy) hasta el plano $z = 1 + y - x$ (tapadera de abajo del sólido está en el plano xy y la tapadera de arriba del sólido es el plano), es decir:

$$0 \leq z \leq 1 + y - x$$

Resumiendo, las variaciones son:

$$-1 \leq y \leq 2$$
$$y^2 - 1 \leq x \leq y + 1$$
$$0 \leq z \leq 1 + y - x$$

Luego la integral triple que nos determina el volumen del sólido es:

$$\int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} \int_{0}^{1+y-x} dzdxdy$$

Determinemos el volumen del sólido:

$$V = \int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} \int_{0}^{1+y-x} dzdxdy = \int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} [z]|_0^{1+y-x} dxdy = \int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} (1 + y - x)dxdy$$

$$V = \int_{-1}^{2} \int_{y^2-1}^{y+1} (1 + y - x)dxdy = \int_{-1}^{2} \left[x + yx - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{y^2-1}^{y+1} dy$$

$$V = \int_{-1}^{2} \left\{\left[y + 1 + y(y + 1) - \frac{(y + 1)^2}{2}\right] - \left[y^2 - 1 + y(y^2 - 1) - \frac{(y^2 - 1)^2}{2}\right]\right\} dy$$

$$V = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}y^4 - y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 2\right) dy = \left(\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^3 + y^2 + 2y\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$V = \left[\frac{1}{10}(2)^5 - \frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{2}(2)^3 + (2)^2 + 2(2)\right] - \left[\frac{1}{10}(-1)^5 - \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1)\right]$$

$$V = \left(\frac{32}{10} - 4 - 4 + 4 + 4\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - 2\right)$$

$$V = \frac{32}{10} - 4 - 4 + 4 + 4 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 2$$

$$V = \frac{32}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{33}{10} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{66 - 5 + 20}{20} = \frac{81}{20}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{81}{20}\ (u.l.)^3}$$

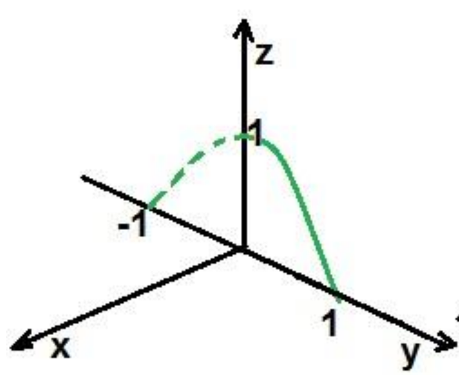
Ejemplo:

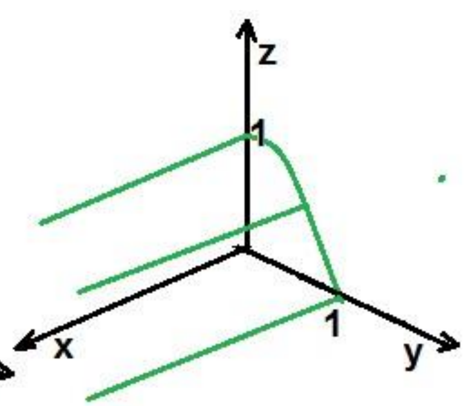
Usar integrales triples en coordenadas cartesianas para plantear el volumen del sólido formado **<u>en el primer octante</u>**, limitado por las gráficas de $z = 1 - y^2$ y $x = 3$. Hacer el planteamiento de dos órdenes de integración

Solución:

Notemos que:

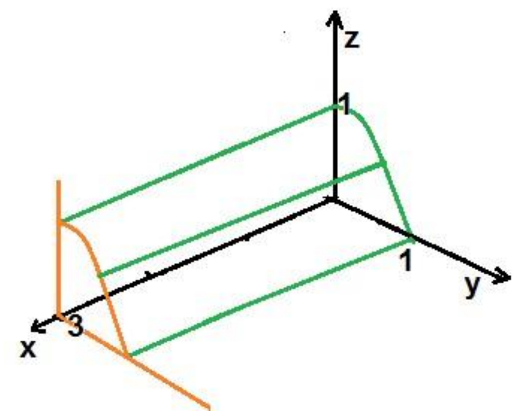
1) No resolveremos ninguna integral, pues solamente nos piden plantear el volumen del sólido.
2) El sólido está formado en el primer octante, es decir, el octante donde las variables x, y, z son positivas.
3) La ecuación $z = 1 - y^2$ corresponde a una superficie cilíndrica cuya curva generatriz es una parábola en el plano yz (abierta hacia abajo). Las rectas directrices son paralelas a la variable ausente (en este caso paralelas al eje x).



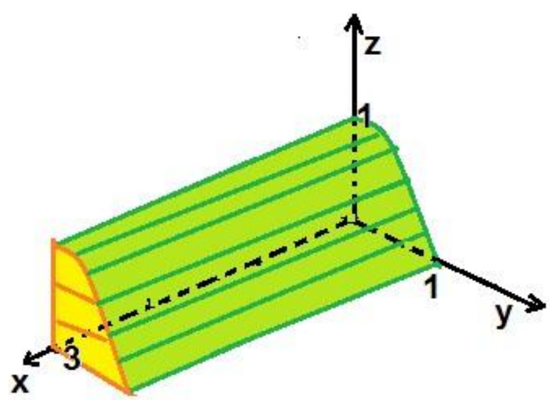


Recordemos que el sólido es en el primer octante

La otra gráfica que corresponde a la ecuación $x = 3$ es un plano paralelo al plano yz y éste corta al cilindro anterior (superficie cilíndrica).

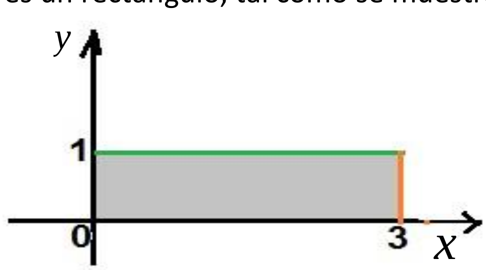


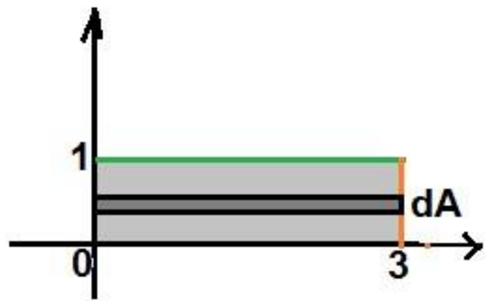
La curva que se forma en la intersección del plano $x = 3$ con el cilindro $z = 1 - y^2$ es la misma del fondo en el plano yz. El sólido que se forma es:



Ahora para determinar el volumen de dicho sólido, escogemos primero donde lo proyectamos. Si proyectamos el sólido anterior en el plano xy, es que haremos los órdenes de integración $dzdydx$ ó $dzdxdy$, el que mejor convenga.

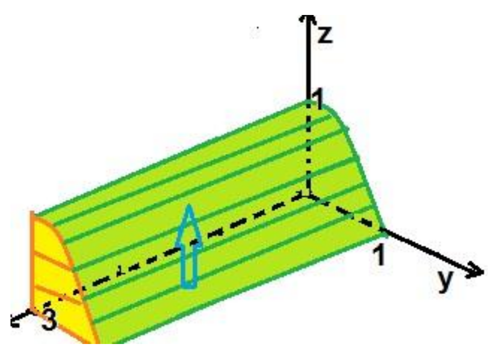
La proyección el plano xy es un rectángulo, tal como se muestra a continuación:





Podemos escoger la región verticalmente simple u horizontalmente simple, sin ningún problema.

Si utilizamos la región horizontalmente simple, el orden de integración será $dzdxdy$.
La variable y varía desde la recta $y = 0$ (eje x) hasta la recta $y = 1$: $0 \leq y \leq 1$.
La variable x, varía desde la recta $x = 0$ (eje y) hasta la recta $x = 3$: $0 \leq x \leq 3$.
Estos valores son los límites de integración en y y en x.
Para determinar la variación en la variable z, nos remitimos al sólido graficado anteriormente.



La variación en z es desde $z = 0$ (plano xy) hasta la superficie cilíndrica $z = 1 - y^2$.
Podemos también visualizarlo como que la base o tapadera de abajo del sólido es el plano xy ($z = 0$) y la tapadera de arriba del sólido es la gráfica del cilindro $z = 1 - y^2$.

Es decir que la región sólida se puede representar por las desigualdades siguientes:

$$0 \leq y \leq 1$$

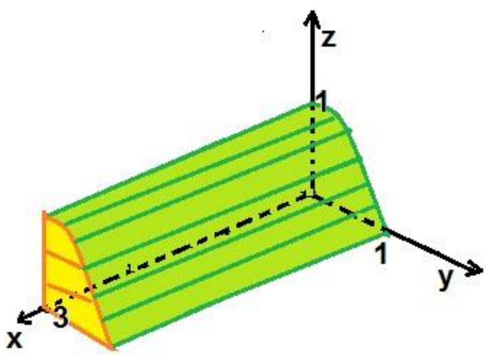
$$0 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq z \leq 1 - y^2$$

Luego, el volumen del sólido, en el orden de integración $dzdxdy$ es:

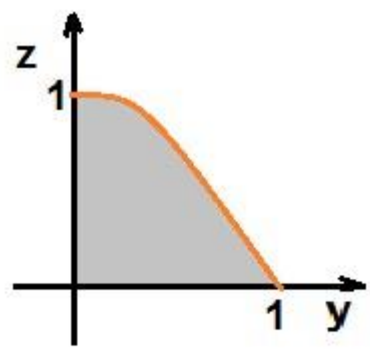
$$V = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy$$

Se nos pide plantear otro orden de integración, y para ello proyectaremos el sólido en el plano yz.



------->

La sombra o proyección del sólido es en YZ-



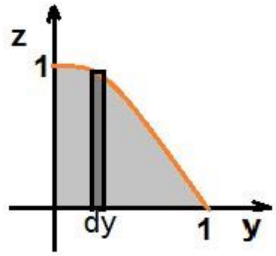
La curva de esa proyección coincide con la curva generatriz del cilindro $z = 1 - y^2$. Tenemos la opción de escoger entre verticalmente simple u horizontalmente simple. Es decir, en el orden $dzdy$ o en el orden $dydz$.

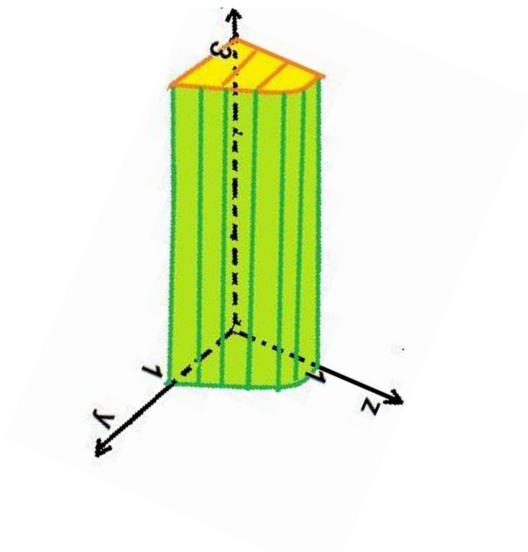
Hagamos en el orden $dzdy$. La variación en y son valores constantes.

La variación en z, según el diferencial de área, es de $z = 0$ (eje y) , hasta la curva $z = 1 - y^2$. Las otras dos variables tienen las variaciones siguientes:

$$0 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq 1 - y^2$$





Ahora bien, para la variación en “x” nos remitimos al sólido. La tapadera inferior del sólido es $x = 0$ y la tapadera superior es el plano $x = 3$.

$$0 \leq x \leq 3$$

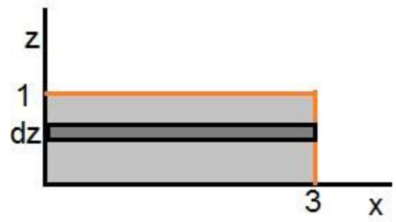
Luego, el volumen del sólido en el orden de integración $dxdzdy$ es:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^3 dxdzdy$$

Hagamos el mismo ejercicio pero ahora en el orden de integración $dydxdz$

Solución

En este caso la proyección del sólido es en el plano xz (la figura es un rectángulo), z es la última variable a integrar.



$$0 \le z \le 1$$
$$0 \le x \le 3$$

Luego, para la variación en y nos remitimos al sólido

Hemos girado la figura para que se vea que ahora la tapadera inferior del sólido es $y = 0$ (plano xz) y la tapadera superior es el cilindro $z = 1 - y^2$, es decir:

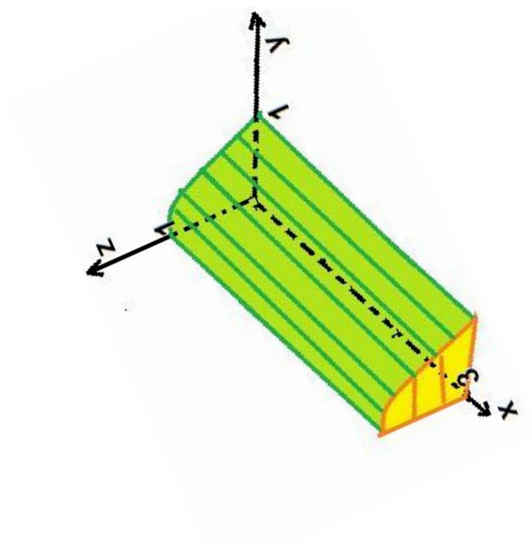
$$0 \le y \le 1 - y^2$$

Pero no se puede colocar la desigualdad de esta manera, ya que lo que está de color rojo es z, no es y. Hay que despejar la variable y de la ecuación $z = 1 - y^2$

$$z = 1 - y^2$$
$$z - 1 = -y^2$$
$$1 - z = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{1 - z}$$

Tomaremos la parte con signo positivo (recordemos que estamos graficando solamente en el primer octante). Así que, la forma correcta de escribir la variación en y es:

$$0 \le y \le \sqrt{1 - z}$$



El volumen del sólido en el orden $dydxdz$, es:

$$V = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{1-z}} dydxdz$$