SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE "n" ECUACIONES CON "n" INCÓGNITAS, USANDO DETERMINANTES: REGLA DE CRAMER.

Dado un sistema de **2** ecuaciones lineales con **2** incógnitas:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$$

Observe que el sistema escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix}$$

o más simple como $\boldsymbol{Ax = b}$*, con* ***A*** *matriz de orden* ***2****,* ***x*** *y* ***b*** *matrices de orden* ***2x1****.*

Haciendo,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D_{x_1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D_{x_2}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix}$$

Con: **D** matriz de coeficiente.

- $\boldsymbol{D_{x1}}$: matriz de coeficientes sustituyendo la primera columna por los elementos de la matriz de términos independientes.
- $\boldsymbol{D_{x2}}$**:** matriz de coeficientes sustituyendo la segunda columna por los elementos de la matriz de términos independientes.

Entonces:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{|\boldsymbol{D_{x_1}}|}{|\boldsymbol{D}|};\quad \boldsymbol{x_2} = \frac{|\boldsymbol{D_{x_2}}|}{|\boldsymbol{D}|};\quad |\boldsymbol{D}| \neq \boldsymbol{0}$$

Es decir,

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}} \qquad \boldsymbol{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}}; \qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}$$

NOTA: Si $|\boldsymbol{D}| = \boldsymbol{0}$**,** *entonces se deberá resolver el sistema utilizando el método de Gauss que se estudiará más adelante.*

En forma análoga, se puede resolver un sistema de **“n”** ecuaciones con **“n”** incógnitas.

La regla de Cramer para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es:
Para facilitar la escritura no se utilizará x1, x2 y x3 para nombrar las variables, si no que se utilizará **x**, **y**, **z**.

El conjunto solución, es decir, los valores de las variables x, y, z que satisfacen las 3 ecuaciones lineales vienen dados por:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ D_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ D_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix};\ D_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{|D_x|}{|D|};\quad y = \frac{|D_y|}{|D|};\quad z = \frac{|D_z|}{|D|};\quad |D| \neq 0$$

.

Ejemplo 13: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= -2 \\ 3x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ D_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ D_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ D_z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lo primero que hay que hacer, es calcular el determinante de la matriz **D** (o sea $|\boldsymbol{D}|$). Porque si ese determinante es cero, no puede aplicarse el método de Cramer, ya que la división por cero no existe, y esa situación puede ser por dos casos: que el sistema no tenga solución o que el sistema tenga infinitas soluciones.

orden 3 se puede aplicar Sarrus.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & -3 & 2 & 2 \end{array} \\ |D| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccccc} & & 1 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Como este determinante es de una matriz de

$|\boldsymbol{D}| = \boldsymbol{9}$ *Ya que este determinante es diferente de cero se puede seguir con el método.*

$$\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{D_x}|}{|\boldsymbol{D}|}; \quad \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{D_y}|}{|\boldsymbol{D}|}; \quad \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{D_z}|}{|\boldsymbol{D}|}$$

Para los otros tres determinantes, puede calcularse mediante Sarrus, porque todos son de orden 3. Sin embargo, se utilizará el método de cofactores.

Calculando: *Se ocupa la fila 2: (recordando que se puede escoger cualquier fila o columna)*

$$|D_x| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & -1 & 1 \\ -\overset{-}{2} & \overset{+}{1} & -\overset{-}{1} \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|D_x| = -(-2)\left|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} + (1)\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} - (-1)\left|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$|D_x| = 2(-2-1) + 1(-3+1) + 1(3+2)$$

$$|D_x| = 2(-3) + 1(-2) + 1(5)$$

$$|D_x| = -6 - 2 + 5$$

$$|D_x| = -3$$

Luego $x = \frac{-3}{9}$, simplificando $x = -\frac{1}{3}$.

Ahora se calcula **D_y**, para seguir repasando, se utiliza otro método.
Utilizando operaciones en columna, se hace cero en las posiciones fila 3 columna 1 y en fila 3 columna 2. Como se va a crear ceros a la par del elemento **D_{33}** se debe hacer operaciones en columna.

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C1 - 3C3 \to C1 \\ C2 - 3C3 \to C2 \end{matrix}$$

$$\left|D_y\right| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\left|\begin{matrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{matrix}\right|^{10}_{-2} = 8$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{8}{9}$$

Solamente falta determinar el valor de **z**. Se deja al lector determinarlo. La respuesta es:

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{20}{9}$$