UNIDAD V: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO DIFERENCIAL)

DERIVADAS PARCIALES

Definición: **(primeras derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$)**

Las primeras derivadas parciales de f con respecto a $x \wedge y$ son funciones f_x y f_y definidas por:

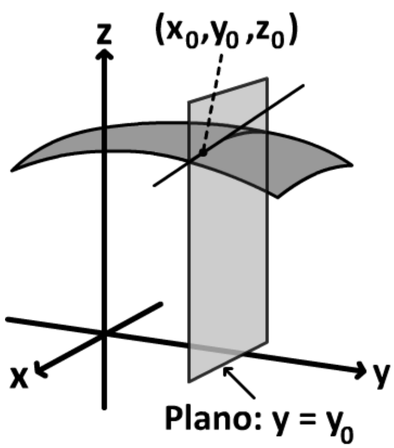
$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

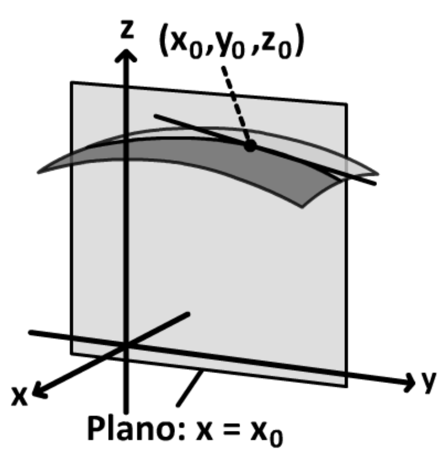
$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Siempre y cuando el límite exista.

Note que, según el teorema anterior, cuando se derive parcialmente respecto a la variable independiente **"x"** la otra variable independiente permanece constante y cuando se derive parcialmente con respecto a **"y"** la variable **"x"** se toma como constante.

OBSERVACIÓN: *Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por lo tanto $f_x(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.*





Ejemplo: Encontrar las primeras derivadas parciales de $f(x, y) = 4x^2 - e^{3y} + 3$.
Como la función tiene 2 variables independientes "x" y "y" posee 2 primeras derivadas parciales.

$$f(x, y) = 4x^2y - e^{3y} + 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y) - \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(e^{3y})} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(3)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 0 + 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4y(2x) = 8xy$$

Para determinar la derivada parcial con respecto a la variable **"y"** se hará un poco más simple. Solamente concentrándose en el hecho que la variable x se toma como constante. Así:

$$f(x, y) = \underbrace{4x^2}_{\text{constante}}\ y - e^{3y} + \underbrace{3}_{\text{constante}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x, y) = 4x^2 - 3e^{3y}$$

Ejemplo: Encontrar las primeras derivadas parciales de $f(x, y) = y^3 sen(x^3 + y^2)$.

Solución:

Acá hay que aplicar la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3\frac{\partial sen(x^3 + y^2)}{\partial x}$$

$$= y^3 \cos(x^3 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2)$$

$$= y^3 \cos(x^3 + y^2)(3x^2 + 0)$$

$$= y^3 \cos(x^3 + y^2)(3x^2)$$

Solución: $f_x(x, y) = 3x^2y^3 \cos(x^3 + y^2)$

$$f(x, y) = y^3 sen(x^3 + y^2)$$

Acá debe aplicarse la regla del producto.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y^3 sen(x^3 + y^2)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(y^3) sen(x^3 + y^2) + y^3 \frac{\partial}{\partial y}[sen(x^3 + y^2)]$$

$$= 3y^2 sen(x^3 + y^2) + y^3 \cos(x^3 + y^2) \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^2)$$

$$= 3y^2 sen(x^3 + y^2) + y^3 \cos(x^3 + y^2)(0 + 2y)$$

$$= 3y^2 sen(x^3 + y^2) + y^3 \cos(x^3 + y^2)(2y)$$

Solución: $f_y(x, y) = 3y^2 sen(x^3 + y^2) + 2y^4 cos(x^3 + y^2)$

Ejemplo: Encontrar las primeras derivadas parciales de $z = \frac{y^2 \cos(x)}{x^3}$.

Como la función tiene 2 variables independientes "x" y "y" posee 2 primeras derivadas parciales. Para este ejemplo, trabajará de manera más simple. ***Solución:***

Hay que aplicar la derivada de un cociente.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(x)}{x^3}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{-sen(x)x^3 - \cos(x)3x^2}{(x^3)^2}$$

Lo de color verde se toma como constante.

$$z = \frac{y^2 \cos(x)}{x^3}$$

$$z_y = 2y \frac{\cos(x)}{x^3}$$

Ejemplo: Encontrar las primeras derivadas parciales de: $f(y,t) = te^{y/t} + y^2t^5 + 5t + 2$

Solución:

$$f(t,y) = te^{y/t} + y^2t^5 + 5t + 2$$

"y" constante.

$$f_t(t,y) = e^{y/t} + te^{y/t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y}{t}\right) + y^2(5t^4) + 5 + 0$$

$$f_t(t,y) = e^{y/t} + te^{y/t}\left(-\frac{y}{t^2}\right) + 5y^2t^4 + 5$$

$$f_t(t,y) = e^{y/t} - \frac{y}{t}e^{y/t} + 5y^2t^4 + 5$$

$$f(t,y) = te^{y/t} + y^2t^5 + 5t + 2$$

"t" constante.

$$f_t(t,y) = te^{y/t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{t}\right) + 2yt^5 + 0 + 0$$

$$f_y(t,y) = te^{y/t}\left(\frac{1}{t}\right) + 2yt^5$$

$$f_y(t,y) = e^{y/t} + 2yt^5$$

NOTACION:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \textbf{1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$Con \quad z = f(x,y)$$

2) Las primeras derivadas parciales evaluadas en un punto (a,b) se denotan por:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE TRES O MÁS VARIABLES

Las derivadas parciales para funciones de 3 variables $w = f(x, y, z)$ se definen de manea similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

OBSERVACIONES:

1) *La función tendrá tantas primeras derivadas parciales como variables independientes tenga*
2) *Para encontrar la derivada parcial respecto a una variable, las demás se toman como constantes.*

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ entonces hay n derivadas parciales que se denotan por:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ejercicio: Calcular las derivadas parciales propuestas.

a) $Para\ f(x, y, z) = xy + y + 2yz^2 + xz + 5 \quad hallar \quad f_z(x, y, z)$

Solución:

La función es de 3 variables y por ende tiene 3 primeras derivadas parciales. Sin embargo, solamente se pide la derivada parcial respecto a la variable “z”. Entonces se tomarán a las otras variables como constantes.

$$f_z(x, y, z) = 0 + 0 + 2y(2z) + x + 0$$

$$f_z(x, y, z) = 4yz + x$$

b) $Para\ f(x, y, z) = y\cos(xy^2 + 2z) \quad hallar \quad f_z(x, y, z) \quad y \quad f_y(x, y, z)$

Solución:

$$f_z(x,y,z) = y\left[-sen(xy^2+2z)\frac{\partial}{\partial z}(xy^2+2z)\right]$$

$$f_z(x,y,z) = y[-sen(xy^2+2z)(2)]$$

$$f_z(x,y,z) = -2ysen(xy^2+2z)$$

$$f_y(x,y,z) = (1)\cos(xy^2+2z) + y\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy^2+2z)$$

$$f_y(x,y,z) = cos(xy^2+2z) + y\left[-sen(xy^2+2z)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2+2z)\right]$$

$$f_y(x,y,z) = cos(xy^2+2z) + y[-sen(xy^2+2z)(2xy)]$$

$$f_y(x,y,z) = cos(xy^2+2z) - 2xy^2sen(xy^2+2z)$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Segundas derivadas parciales

La función $z = f(x,y)$ tiene las derivadas parciales de segundo orden siguientes:

1) Derivando 2 veces respecto a la variable x: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$.
2) Derivando 2 veces respecto a la variable y: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$.
3) Derivando primero con respecto a x, luego con respecto a y: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$.
4) Derivando primero con respecto a y, luego con respecto a x: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$.

Los casos 3 y 4 se conocen como derivadas parciales cruzadas.

Teorema: *(Igualdad de derivadas cruzadas)*
*Si f es una función de x e y tal que f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} son continuas en la región **R**, entonces para cada (x,y) en **R** se tiene que: $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.*

NOTA: *El teorema también se aplica a funciones de tres o más variables. Así, se tiene que:*

$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z)$$
$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z)$$
$$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z)$$
$$f_{xyy}(x,y,z) = f_{yxy}(x,y,z) = f_{yyx}(x,y,z)$$
$$g_{xyyww}(x,y,z,w) = g_{wywxy}(x,y,z,w) = g_{wywyx}(x,y,z,w) = g_{ywwxy}(x,y,z,w)$$

Ejemplo:

Dada $f(x,\, y) = 2x^3y^2 + 5x^2y + 4y$, hallar las derivadas parciales segundas y evaluar dichas derivadas en (1,-1).

Solución:

Para calcular todas las segundas derivadas de la función se debe calcular antes las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3(2y) + 5x^2 + 4$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y + 5x^2 + 4$$

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 5x^2y + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(3x^2)y^2 + 5(2x)y + 0$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + 10xy$$

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 5x^2y + 4y$$

Segundas derivadas parciales

$f_{xx} = ?$

Hay que derivar $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + 10xy$ otra vez respecto a x.

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12xy^2 + 10y$$

$f_{yy} = ?$

Hay que derivar $f_y = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y + 5x^2 + 4$ otra vez respecto a y.

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^3$$

$f_{xy} = ?$

Hay que derivar $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + 10xy$ respecto a y.

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2y + 10x$$

$f_{yx} = ?$

Hay que derivar $f_y = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y + 5x^2 + 4$ respecto a x.

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2y + 10x$$

Estos dos últimos resultados son iguales (por ser derivadas parciales cruzadas).

Ejemplo: **Dada la función** $f(x,y,z) = x^3sen(y^2z - 5x^2)$ determinar f_{xzz} .

Solución:

Se pide una derivada parcial de tercer orden y específica f_{xzz} .

Primero hay que derivar la función respecto a x y luego este resultado derivarlo respecto a z y el nuevo resultado derivarlo de nuevo respecto a z. Sin embargo, si se deriva primero respecto a x, se tiene que derivar como un producto. Entonces mejor determinar f_{zzx}, que por ser una derivada parcial cruzada queda el mismo resultado que f_{xzz}.

$$f(x,y,z) = x^3sen(y^2z - 5x^2) \rightarrow f_z = x^3\cos(y^2z - 5x^2)y^2 = x^3y^2\cos(y^2z - 5x^2)$$

$$f_{zz} = x^3y^2[-sen(y^2z - 5x^2)y^2] = -x^3y^4sen(y^2z - 5x^2)$$

$$f_{zzx} = -y^4\frac{\partial}{\partial x}[x^3sen(y^2z - 5x^2)] = -y^4[3x^2sen(y^2z - 5x^2) + x^3\cos(y^2z - 5x^2)y^2]$$

DIFERENCIALES

Si $z = f(x,y)$, el incremento de z o incremento total Δz viene dado por:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Siendo $\Delta x \quad y \quad \Delta y$ los incrementos de x y de y, respectivamente.

Los diferenciales dx, dy y dz se definen así:

La diferencial total:

Si $z = f(x,y) \quad y \quad \Delta x, \Delta y$ son incrementos de $x \quad \wedge \quad de \quad y$, entonces las diferenciales de las variables independientes $x \;\; e \;\; y$ son $dx = \Delta x \;\; \wedge \;\; dy = \Delta y$ y la diferencial total de la variable dependiente z viene dada por:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ o $dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$.

Esta definición puede extenderse a funciones de tres o más variables. Así, si $w = f(x,y,z)$.

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Ejemplo:

Dada $f(x, y) = xy^2$, calcular a) El incremento total Δz b) La diferencial total dz. ***Solución para a)***

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)[y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2] - xy^2$$

$$\Delta z = xy^2 + 2xy\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta xy^2 + 2y\Delta x\Delta y + \Delta x(\Delta y)^2 - xy^2$$

$$\Delta z = 2xy\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta xy^2 + 2y\Delta x\Delta y + \Delta x(\Delta y)^2$$

Solución para b)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

$$dz = y^2dx + 2xydy$$