UNIDAD 4: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

4.3 SUPERFICIES CILÍNDRICAS (CILINDROS)

Se conoce hasta este momento 2 tipos de superficies y éstas son:

1) La esfera $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ 2)

Planos $ax + by + cz + d = 0$

Un tercer tipo de superficie son las superficies cilíndricas o simplemente cilindros.

Definición:

Sea **C** una curva en un plano y **L** una recta no paralela a ese plano. El conjunto de todas las rectas paralelas a **L** que cortan a la curva **C** se llama **cilindro** de **curva generatriz C**. Cada una de estas rectas se llama recta directriz del cilindro.

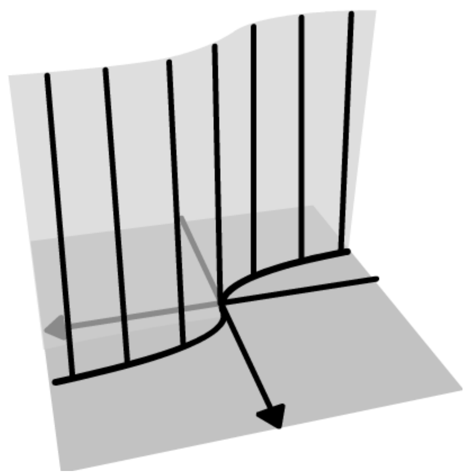


Figura 1

Se estudiará solamente los cilindros cuya curva generatriz está en cualquiera de los tres planos coordenados y las rectas directrices sean perpendiculares a la curva generatriz **C** (cilindros rectos).

NOTA: *Las superficies cilíndricas o cilindros, que se estudiarán, se caracterizan porque falta una de las variables en la ecuación. Por lo tanto, las variables que aparecen determinan el plano donde se grafica la curva generatriz y también el tipo de curva a graficar. La variable que falta (variable ausente) indica la dirección de las rectas directrices.*

Por ejemplo, el cilindro $x = z^2$, la curva generatriz es una parábola y se grafica parte de ella en el plano xz y las rectas directrices van paralelas a la variable ausente (paralelas al **eje "y"**).

Graficando primero parte de la curva generatriz $x = z^2$, sin olvidar trazar líneas paralelas a los ejes para ubicar puntos.

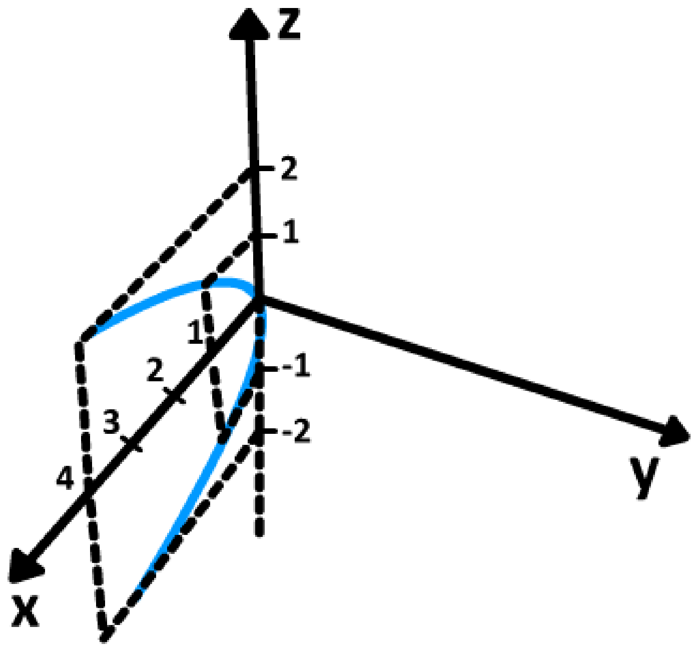
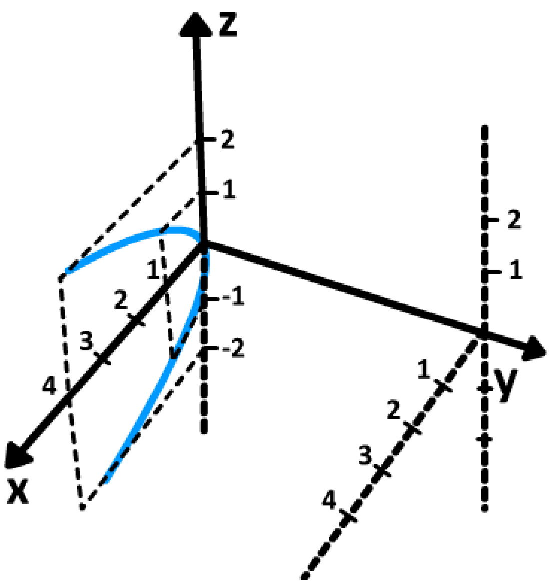
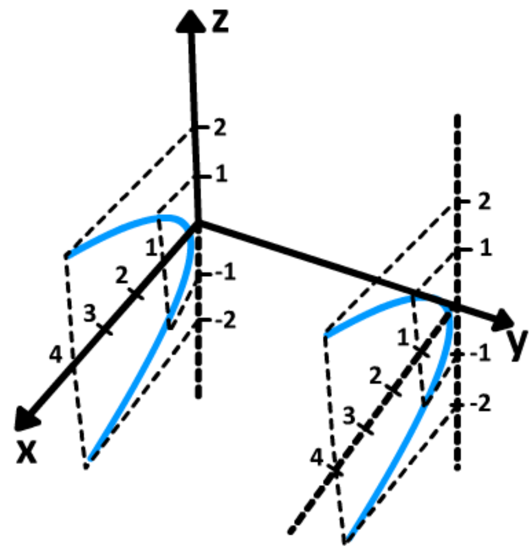


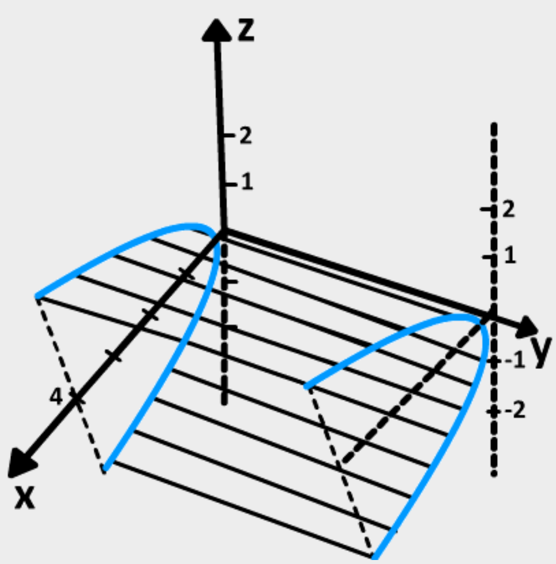
Figura 2

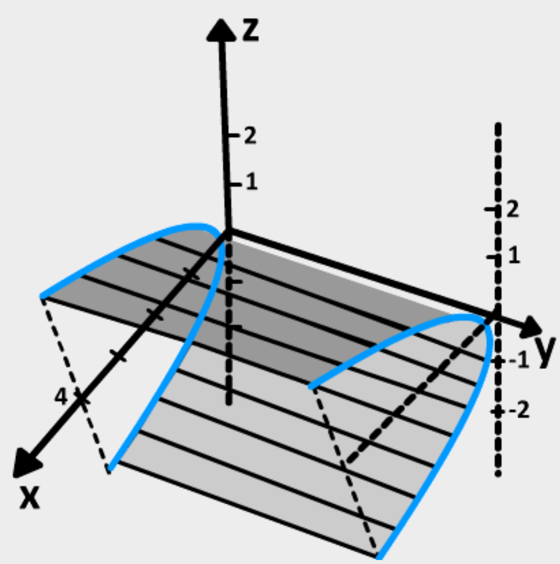
Luego, como las rectas directrices van paralelas al eje de la variable ausente, se escoge un punto donde cortar el cilindro en el **eje "y"**. En este punto se hace una réplica de los ejes coordenados y se grafica la misma curva generatriz.





Ahora se traza las rectas directrices.





Las superficies cilíndricas son como láminas de formas diferentes en el espacio de tres dimensiones. En el ejemplo anterior, la parábola se extiende a lo largo del **eje "y"** (tanto positivo como negativo y también se "abre" infinitamente hacia el **eje "x"**. Solamente se ha graficado una pequeña parte de la superficie cilíndrica.

Ejemplo:

Graficar cada una de las ecuaciones en el espacio tridimensional

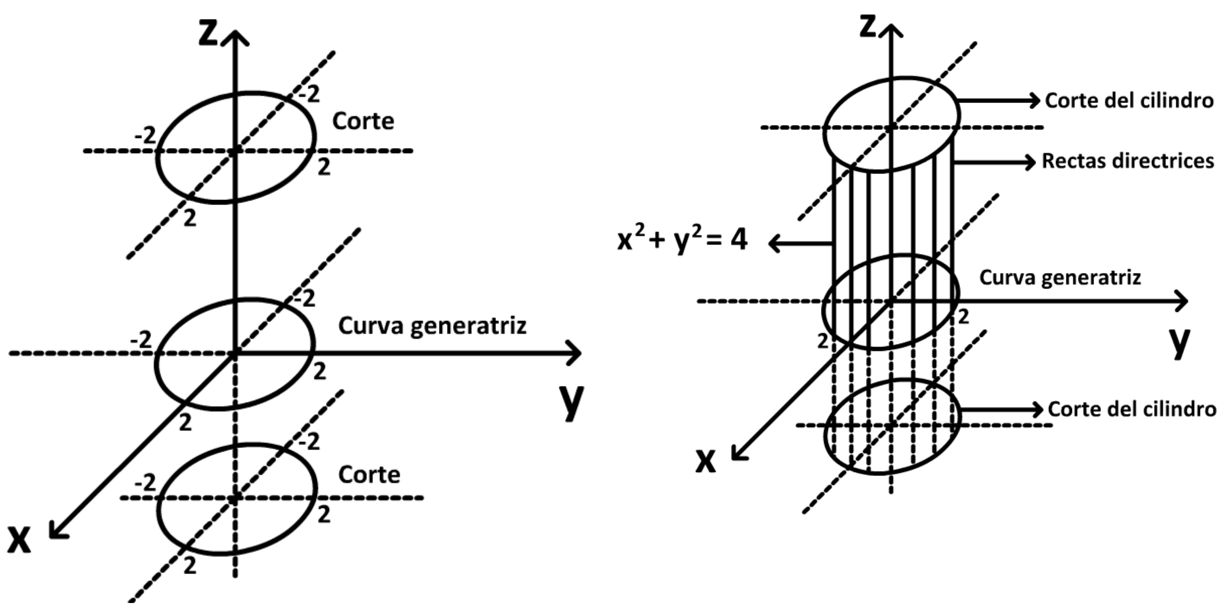
a) $\boldsymbol{x^2+y^2=4}$ b) $\boldsymbol{x=sen(y), 0\le y\le 2\pi}$ c) $\boldsymbol{z^2+y^2=4}$ d) $\boldsymbol{y=z^2}$ e) $\boldsymbol{z=e^x}$
f) $\boldsymbol{x+y=4}$ g) $\boldsymbol{3x+4z=12}$.

Primero se analiza para cada una de ellas el plano en que se encuentra su curva generatriz y la dirección de las rectas directrices.

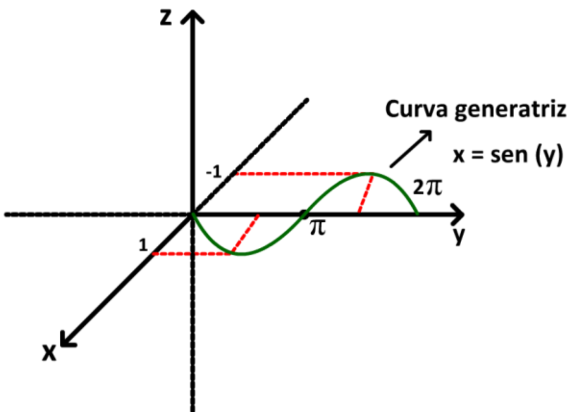
Las gráficas de los literales $\boldsymbol{a}$), $\boldsymbol{b}$) $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{f}$) tienen la curva generatriz en el plano **XY** y rectas directrices paralelas al **eje "z"** (la variable ausente). Las de los literales $\boldsymbol{c}$) $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{d}$) tienen la curva generatriz en el plano **YZ** y las directrices son paralelas al **eje "x"**. Por último, las gráficas de las ecuaciones $\boldsymbol{e}$) $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g}$) poseen la generatriz en el plano $\boldsymbol{xz}$ y directrices paralelas al **eje "y"**.

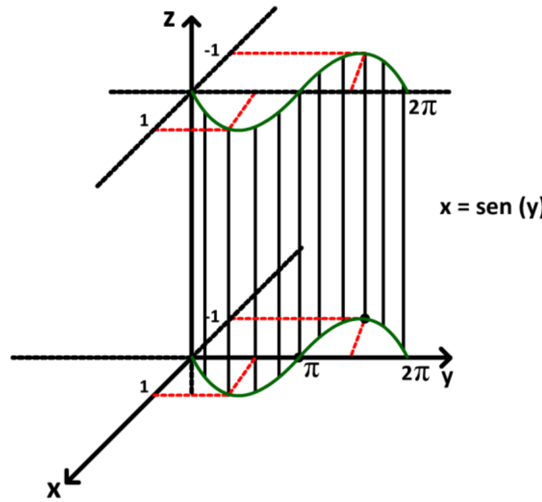
Gráfica de $\boldsymbol{x^2+y^2=4}$. La curva generatriz es una circunferencia de radio 2.

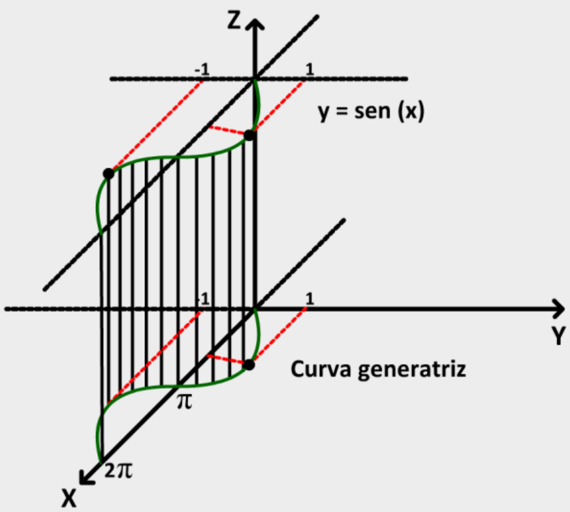
Si las rectas directrices son paralelas al **eje "z"**, significa que la gráfica se extenderá paralela a dicho eje. Entonces se puede hacer cortes del cilindro perpendicular al **eje "z"**, o sea, paralelos al plano **XY**. Se puede, además, graficar solamente la parte de la gráfica sobre el plano **XY**.

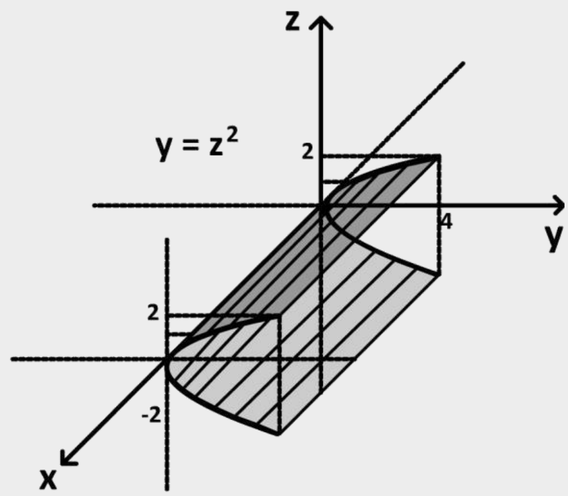


Gráfica de $x = sen(x)$; $0 \le y \le 2\pi$

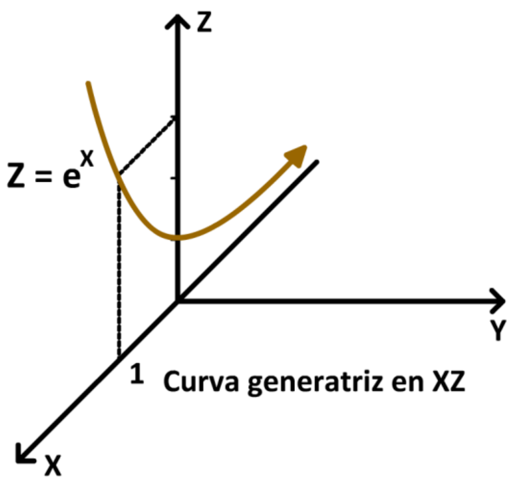


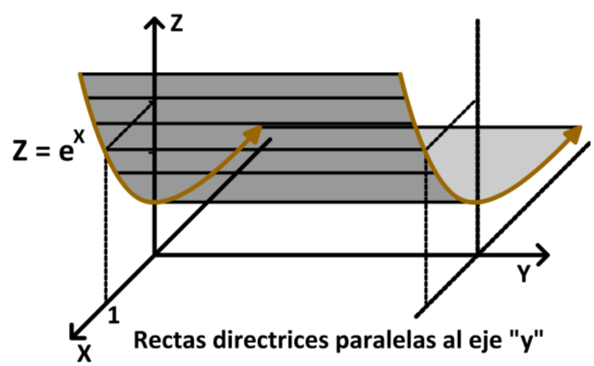






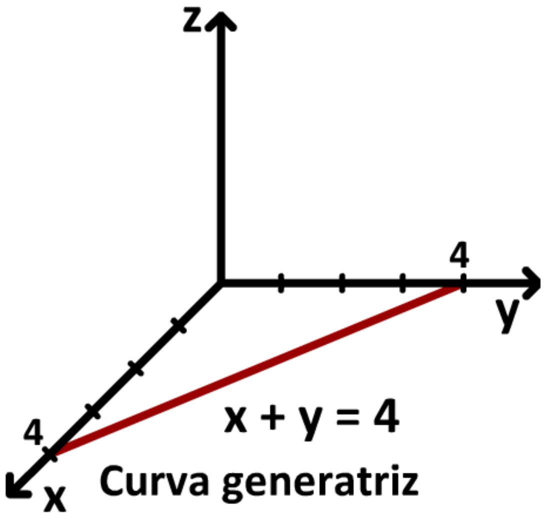
Gráfica del cilindro $z = e^x$

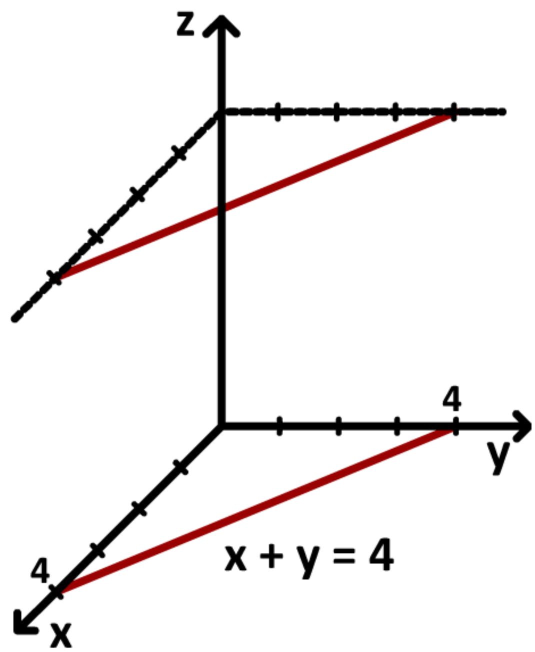


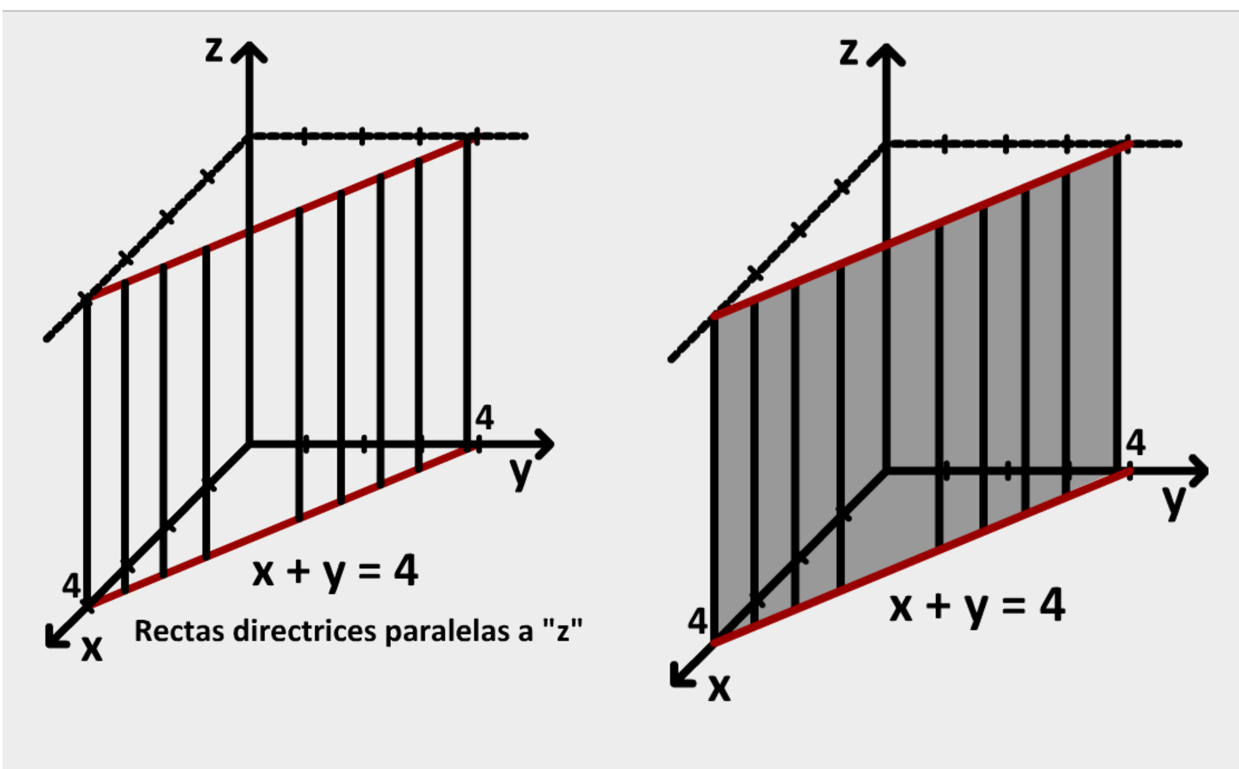


Graficar $x + y = 4$

En dos dimensiones es una recta, pero en tres dimensiones es un plano y como cilindro, la curva generatriz se grafica en el plano xy y las rectas directrices son paralelas al **eje "z"**.







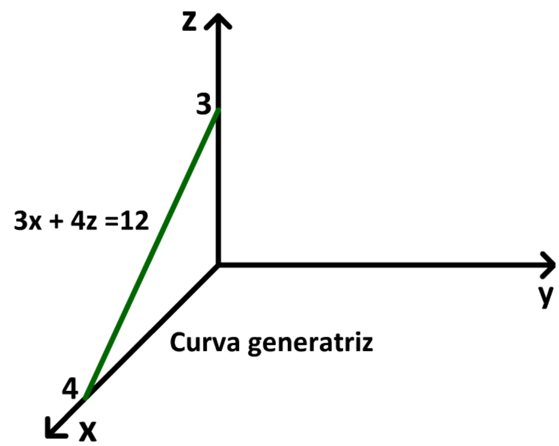
Graficar $3x + 4z = 12$. ***Solución:***

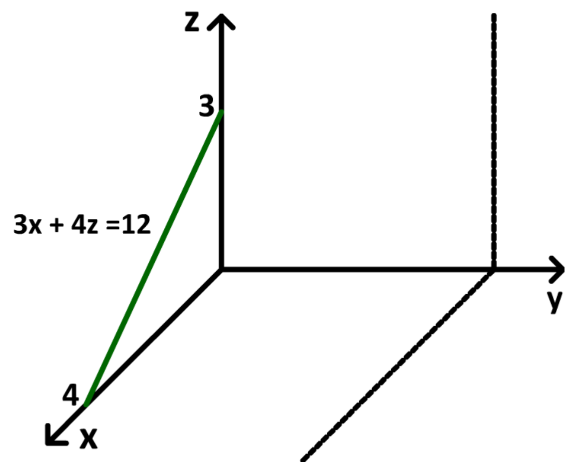
Es otro plano y la curva generatriz es una recta.

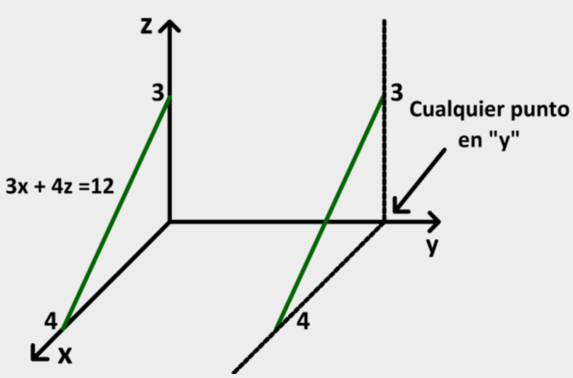
$$\mathbf{3x + 4z = 12}$$

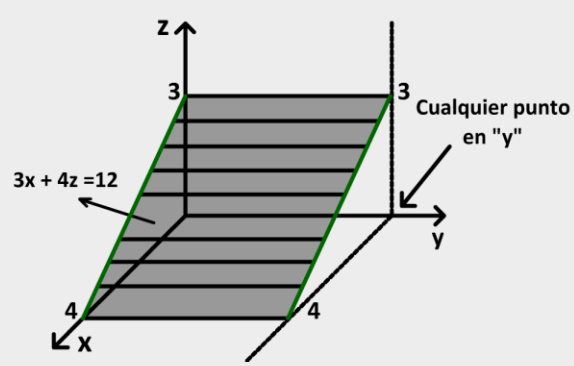
$$\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{12}} + \frac{\mathbf{4z}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{12}}$$

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{4}} + \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1}$$



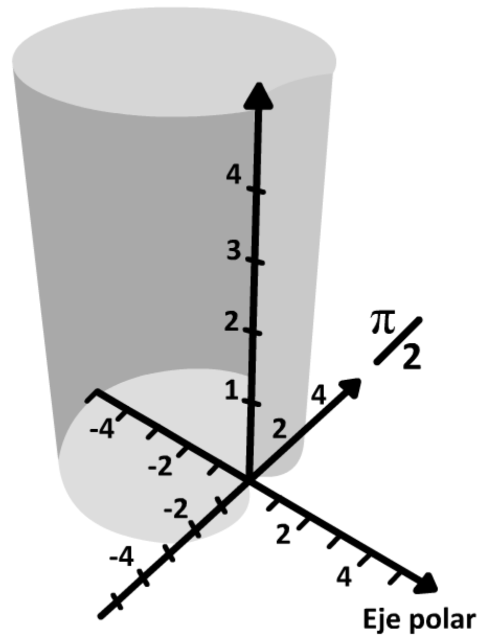






Ejemplo: Trazar la gráfica del cilindro $\boldsymbol{r = 3 - 3\cos(\theta)}$. ***Solución:***

Curva generatriz es un cardioide



4.4 SUPERFICES CUÁDRICAS

Un cuarto tipo de superficie en el espacio tridimensional son las cuádricas. Una superficie cuádrica en el espacio es una ecuación de segundo grado de la forma $\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0}$ con A, B, C no todos nulos.

Existen 6 superficies cuádricas básicas las cuales son:
1) Elipsoide, 2) hiperboloide de una hoja, 3) hiperboloide de dos hojas, 4) cono elíptico, 5) paraboloide elíptico y 6) paraboloide hiperbólico (silla de montar).

OBSERVACION: *La intersección de una superficie con un plano se llama* ***traza de la superficie con ese plano****. En particular, las trazas de las superficies con los planos coordenados se obtienen haciendo* $\boldsymbol{x = 0}$ *(traza con el plano* $\boldsymbol{yz}$*),* $\boldsymbol{y = 0}$ *(traza con el plano* $\boldsymbol{xz}$*) y* $\boldsymbol{z = 0}$ *(traza con el plano* $\boldsymbol{xy}$*).*

Para el estudio de estas superficies cuádricas se utilizará la ecuación canónica de cada una de ellas.

1) **Elipsoide:** $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$ con $\boldsymbol{a, b, c > 0}$.

Observe que las 3 trazas de esta superficie con los 3 planos coordenados son elipses (o circunferencias).

Ejemplo: **Graficar** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{16}=\mathbf{1}$.

De la ecuación puede verse que la parte mayor del elipsoide irá sobre el **eje "Y"**.

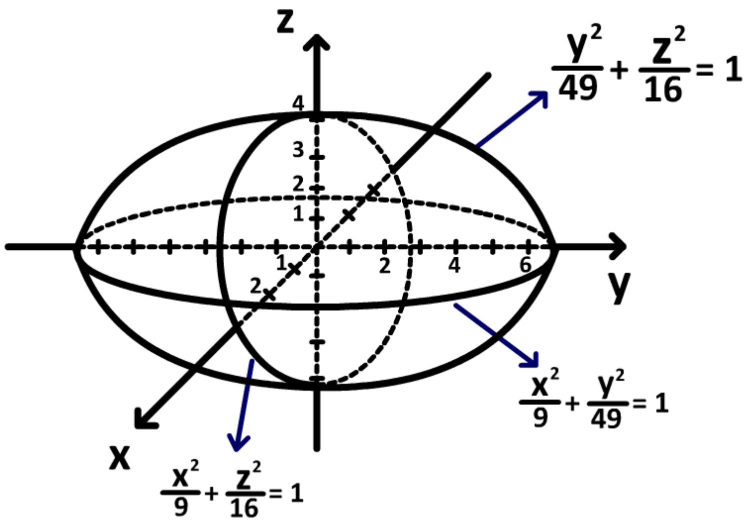


Figura 3

2) Hiperboloide de una hoja

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma

$$x2\ y2\ z2\ 2 \quad \square \quad \square \quad \square b2$$
$$c2\ 1\ a$$

~~Hiperboloide de una hoja e~~je del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo

Para identificar el hiperboloide de una hoja se hace mediante las trazas con los planos coordenados: ***<u>Son 2 hipérbolas y una elipse (la "cintura" del hiperboloide)</u>***

Para graficar esta superficie cuádrica se aplicarán los siguientes pasos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide.

b) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio.

c) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados).

Ejemplo: **Graficar** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-z^2=1$.

Solución:

a) Se identifica que el eje del hiperboloide es el eje z.

b) Se hacen cortes perpendiculares al eje z (paralelos al plano xy): Se escogen cortes, por ejemplo, en $z=2$, $z=0$, $z=-2$.

Si $z=2$, **entonces:**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-(2)^2=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=5$$

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$$

Si $z=-2$, note que da el mismo resultado anterior, es decir una elipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$

Si $z=0$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$, es otra elipse (en el plano xy)

c)

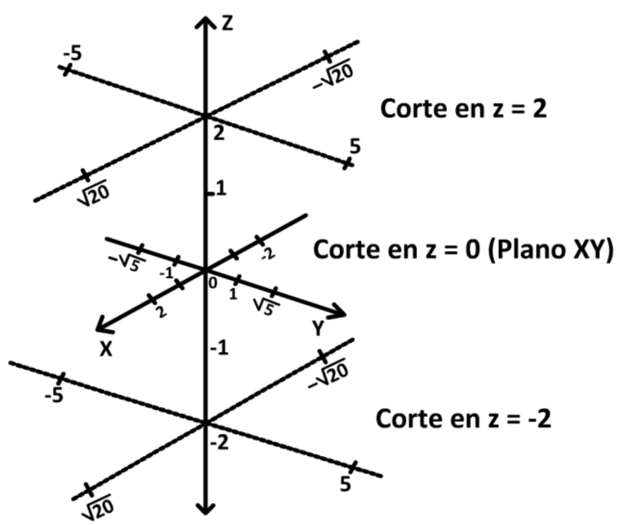
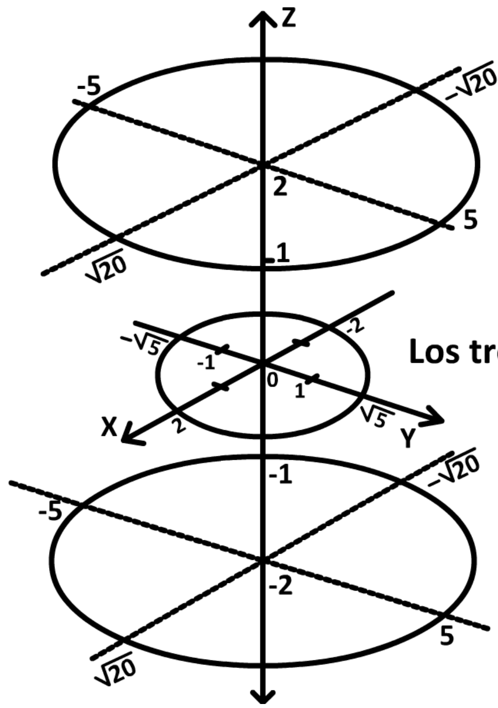
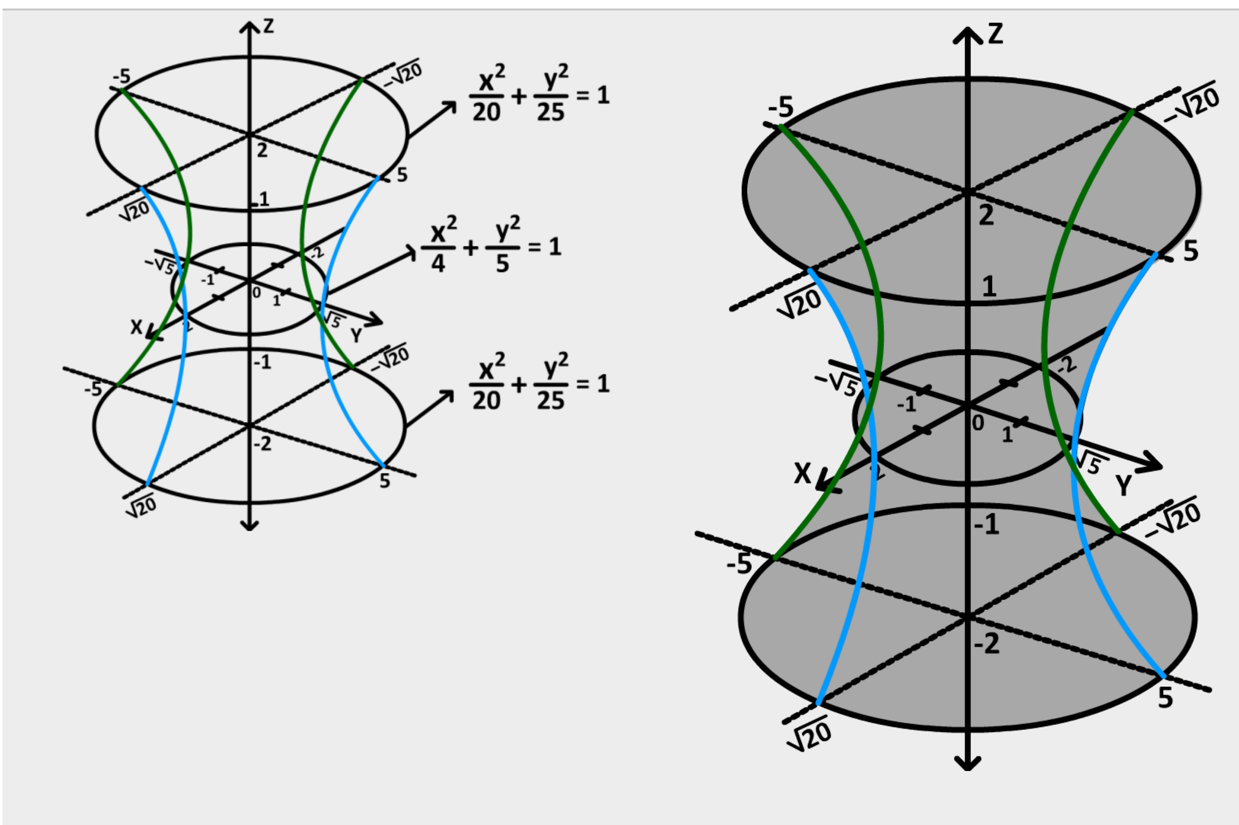


Figura 4

Para que la figura quede mejor, se le ha dado una escala mayor al **eje "z"** (2.5 cm por unidad). A los ejes "x" y "y" (también a los cortes en z=2 y z=2) 1 cm por unidad.



Los tres "cortes" son elipses



Observación importante

Es bueno recordar que todas las gráficas cuádricas son huecas (no son sólidas). Sin embargo, servirán, junto a los planos y superficies cilíndricas, a formar figuras sólidas.

3) Hiperboloide de dos hojas

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma

$$\underbrace{\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Hiperboloide de dos hojas eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo

Para identificar el hiperboloide de dos hojas, se hace mediante las trazas con los planos coordenados: <u>Dos hipérbolas y no existe traza con el plano coordenado perpendicular al eje del hiperboloide.</u>

Para graficar esta superficie cuádrica se aplicarán los siguientes pasos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide
b) Identificar los vértices del hiperboloide de dos hojas
c) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio
d) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

***Ejemplo:* Graficar** $\boldsymbol{\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1}$

Solución:

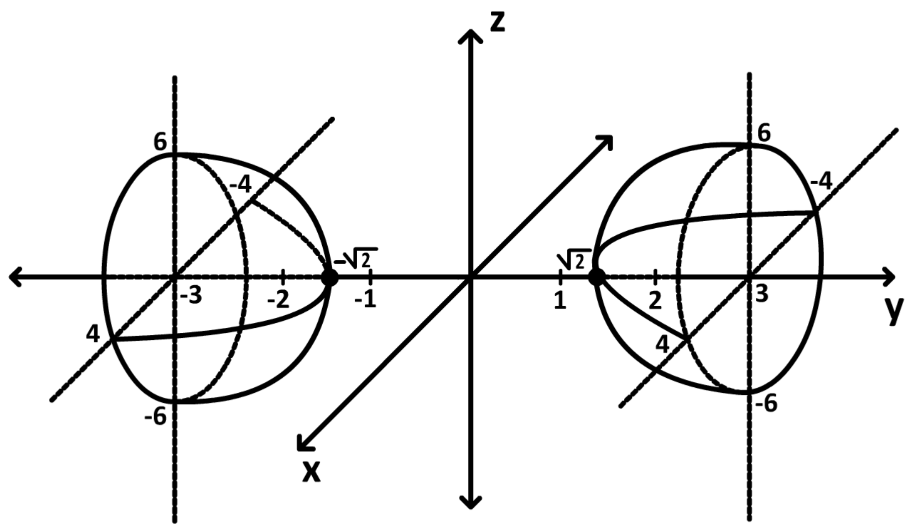
Este hiperboloide es de la forma $\boldsymbol{\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1}$

a) El eje del hiperboloide es el eje $\boldsymbol{y}$.
b) Los vértices del hiperboloide se ubican en su eje, y vienen dados por la raíz cuadrada del denominador del término positivo. Para este caso $\boldsymbol{c = \pm\sqrt{2}}$
c) Hacer cortes perpendiculares al eje del hiperboloide, por ejemplo, en $\boldsymbol{y = \pm 3}$.

$$\frac{(\pm 3)^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3.5 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{14} + \frac{z^2}{31.5} = 1$$

d) Graficar, uniendo estos cortes con hipérbolas



4) Cono Elíptico

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

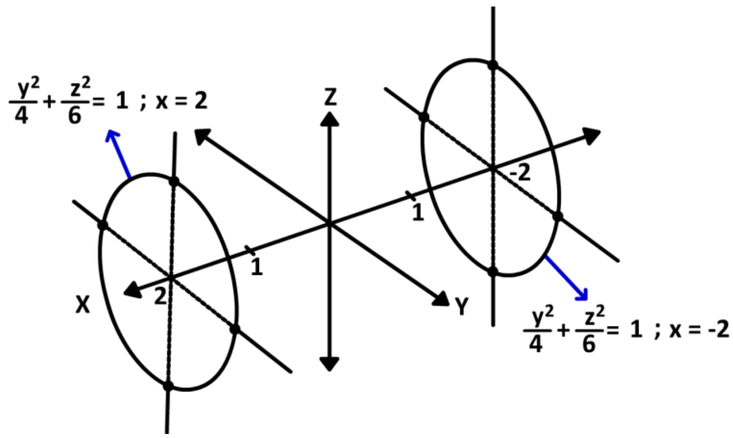
Para identificar el cono elíptico se hace mediante las trazas con los planos coordenados: *<u>Las trazas con los planos coordenados son rectas que pasan por el origen y el punto (0,0)</u>*

Después de identificada el tipo de gráfica, mediante las trazas, se continua con lo siguiente:

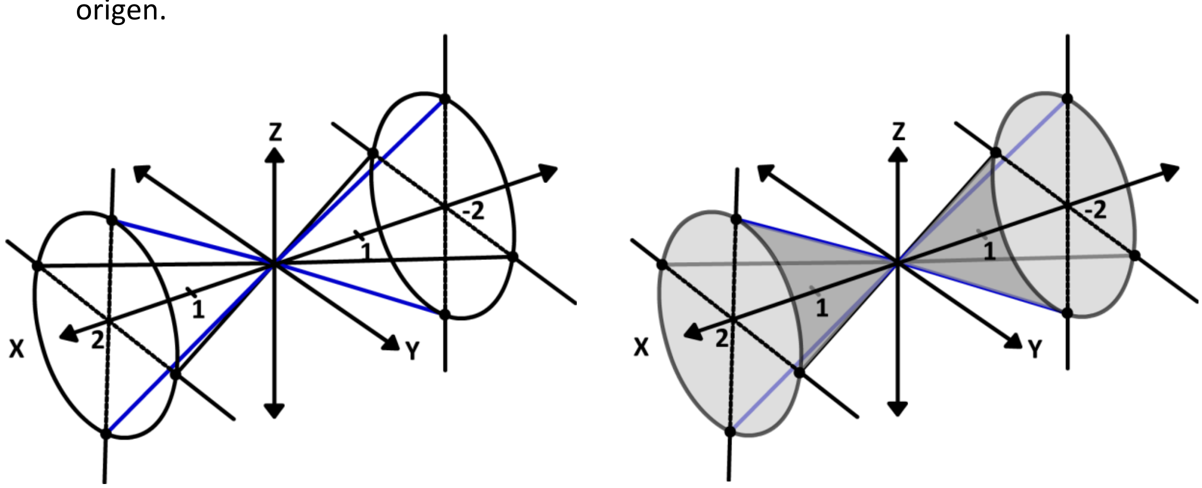
a) Se identifica el eje del cono (la variable del término de diferente signo)
b) Se hacen los cortes perpendiculares al eje del cono y se grafican en el espacio. (estos cortes son elipses)
c) Se unen estos cortes con rectas que pasan por el origen

***Ejemplo:* Graficar** $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 0$

a) El eje del cono es el eje x
b) Se escogen 2 cortes perpendiculares al **eje "x"**, es decir paralelos al plano yz. Por ejemplo $x = \pm 2$.



c) Se unen cortes mediante rectas (las trazas con los planos coordenados) pasando por el origen.



---

5) Paraboloide elíptico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide tienen la forma $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

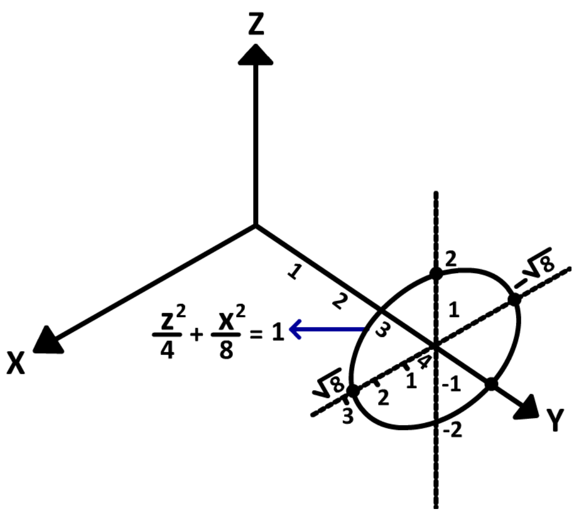
- **Para identificar el paraboloide elíptico se ve que las trazas con los planos coordenados son parábolas abiertas en el mismo sentido (que pasan por el origen) y el punto (0,0).** Recuerde que estas trazas se obtienen haciendo $x=0$, $y=0$, $z=0$.
- El eje del paraboloide es la variable del término de primer grado
- Los cortes perpendiculares al eje del paraboloide son elipses (se hace un solo corte) □ Se une el corte con parábolas que pasan por el origen.

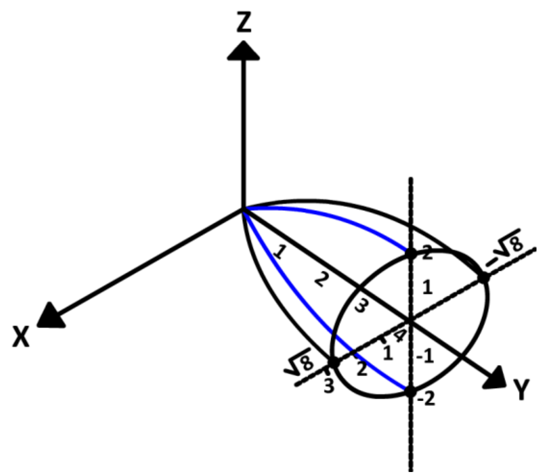
Ejemplo 23: **Graficar** $y=z^2+\frac{x^2}{2}$

Solución:

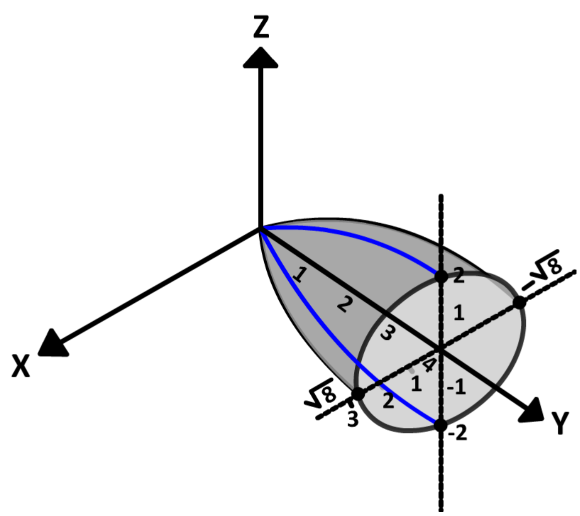
- Es un paraboloide elíptico con eje en “y”
- Se puede escoger hacer corte en $y = 4$ (por ejemplo) $4 = z^2 + \frac{x^2}{2} \rightarrow 1 = \frac{z^2}{4} + \frac{x^2}{8}$ esta es la elipse que hay que graficar en y = 4.

Después, unir esta elipse con parábolas que pasan por el origen (trazas con los planos coordenados).





Por último, se le pueden dar los retoques o efectos que mejoren la presentación de la gráfica. (Todo esto se puede hacer de una sola vez en un sistema de coordenadas, si se hace a lápiz).



6) Paraboloide hiperbólico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide hiperbólico tienen la forma $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

- **Para identificar el Paraboloide hiperbólico se hace mediante las trazas con los planos coordenados: *<u>parábolas abiertas en "sentido contrario", Y las trazas con el plano coordenado perpendicular al eje de la variable lineal son rectas.</u>***

Una manera de trazar la gráfica es la siguiente: (suponiendo que la ecuación es de la forma $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$).

a) Se sabe que el eje de la figura es el **eje "z"**. En la parte inferior se hace el corte en $z = -1$ y la parte superior se graficará hasta $z = 1$.

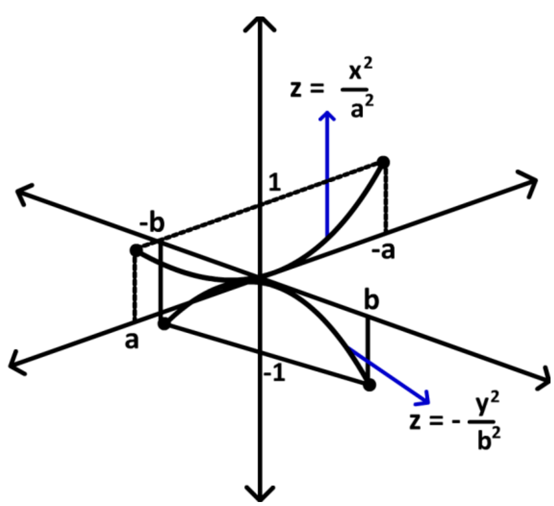
b) Se encuentran las trazas con los planos coordenados que son parábolas y se grafican en el espacio (una es parábola abierta hacia arriba y la otra hacia abajo. Puede decirse así ya que se ha escogido que el eje "z").

Traza con el plano xz: $z = \frac{x^2}{a^2}$. Traza con el plano yz: $z = -\frac{y^2}{b^2}$.

Para graficar estas parábolas se utilizan los valores

$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a \quad \textit{Para el primer caso}$$

$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b \quad \textit{Para la otra parábola}$$



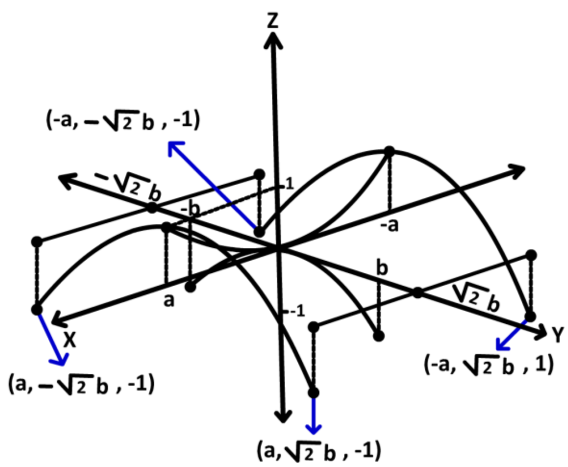
c) Se hacen cortes también en los extremos de la parábola "abierta hacia arriba" y estos cortes son parábolas (cada corte es la parábola abierta hacia abajo, pero trasladada). Los cortes serán en $x = \pm a$. Esto se debe a que la ecuación de la parábola en estos cortes es:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \textbf{\textit{haciendo}} \quad x = \pm a$$

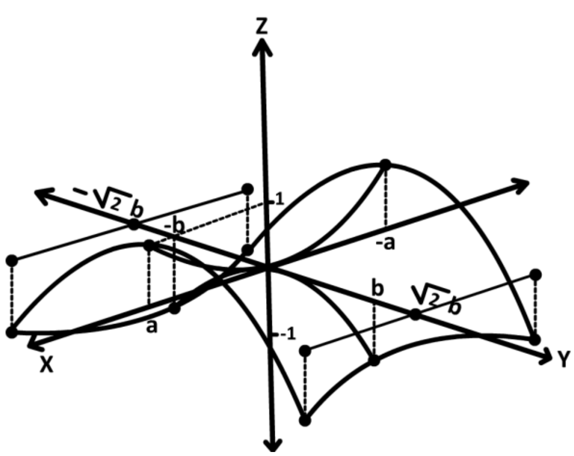
$$z = \frac{a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad o \quad sea \quad z - 1 = -\frac{y^2}{b^2}$$

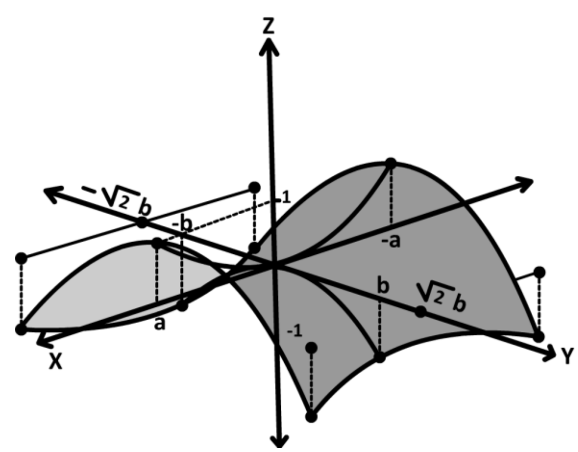
Esta última ecuación es la misma parábola $z = -\frac{y^2}{b^2}$ pero trasladada, es decir con vértice $(\pm a, 0, 1)$.

Como las parábolas abiertas hacia abajo se quieren graficar hasta $z = -1$, para la parábola del corte de la izquierda se utilizan los puntos $(a, \sqrt{2}b, -1)$ y $(a, -\sqrt{2}b, -1)$ y para la parábola del corte de la derecha se utilizan los puntos $(-a, \sqrt{2}b, -1)$ y $(-a, -\sqrt{2}b, -1)$.



Por último, se unen estas parábolas con hipérbolas en la parte de abajo (corte en $x = -1$)





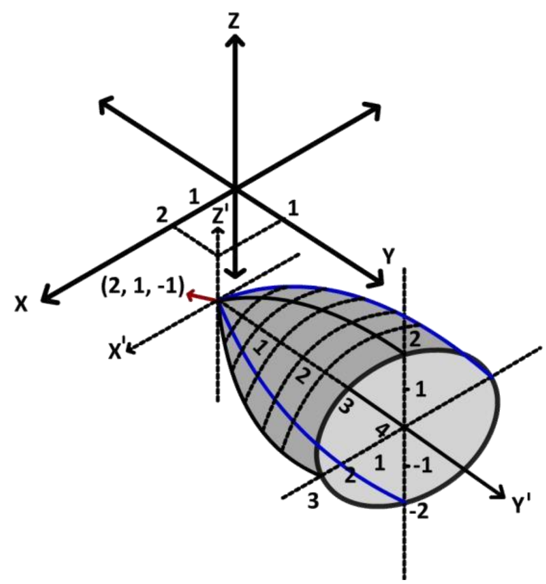
Un proceso similar se utilizará para cuando el paraboloide hiperbólico tenga el eje en otro eje coordenado.

GRÁFICAS DE CUÁDRICAS DESPLAZADAS.

Ejemplo: **Graficar** $\boldsymbol{y-1=\frac{(z+1)^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{4}}$

Solución:

Se puede observar que la gráfica de $\boldsymbol{y-1=\frac{(z+1)^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{4}}$ es idéntica a la gráfica de $\boldsymbol{y=\frac{z^2}{2}+\frac{x^2}{4}}$, pero trasladada en $\boldsymbol{x}$, dos unidades en el sentido positivo, una unidad en el sentido positivo de $\boldsymbol{y}$, mientras que una unidad en el sentido negativo de $\boldsymbol{z}$.
Construyendo el sistema $\boldsymbol{x'y'z'}$ cuyo origen es el punto $(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{-1})$ puede escribirse la ecuación en este nuevo sistema como $\boldsymbol{y'=\frac{(z')^2}{2}+\frac{(x')^2}{4}}$, cuya gráfica se haría de forma igual a los procesos de los ejemplos anteriores en este nuevo sistema.



Ejemplo: Identificar la gráfica correspondiente a cada ecuación:

a) $\boldsymbol{9x^2-18y^2+4z^2+18x+108y-16z-101=0}$
b) $\boldsymbol{3x^2-3y^2-2z^2-12x+24y+12z-54=0}$

Solución:
Para a)

a) $\boldsymbol{9x^2-18y^2+4z^2+18x+108y-16z-101=0}$

$$9x^2 + 18x - 18y^2 + 108y + 4z^2 - 16z = 101$$

Factor común a cada pareja.

$$9(x^2 + 2x + \quad) - 18(y^2 - 6y + \quad) + 4(z^2 - 4z + \quad) = 101$$

Completando cuadrados.

$$9(x^2 + 2x + 1) - 18(y^2 - 6y + 9) + 4(z^2 - 4z + 4) = 101 + 9 - 162 + 16$$

Ahora se divide cada término entre -36.

$$\frac{9(x+1)^2}{-36} - \frac{18(y-3)^2}{-36} + \frac{4(z-2)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$$

$$-\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{2} - \frac{(z-2)^2}{9} = 1$$

$$-\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{9} = 1$$

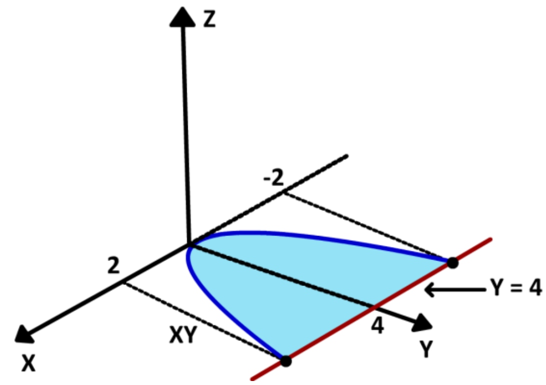
La traza en $x'z'$ (haciendo y'=0) no existe y las trazas en $x'y'$ y $y'z'$ son hipérbolas, por lo tanto, se trata de un hiperboloide de dos hojas desplazado.

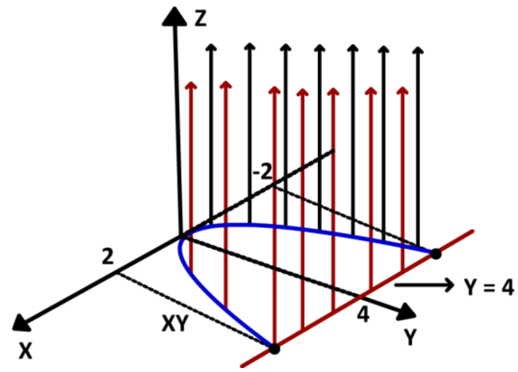
4.5 GRÁFICA DE SÓLIDOS

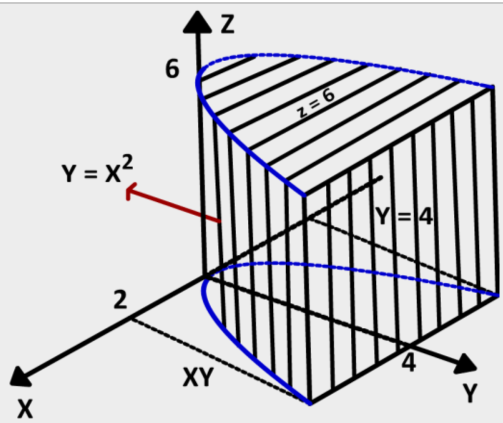
Un sólido es una superficie cerrada que, en la mayoría de las veces, resulta de la intersección de varias superficies.

Sea el cilindro $y = x^2$. Por si solo, no representa ningún sólido, pues recuerde que los cilindros son como láminas en el espacio de tres dimensiones. Además, este cilindro se extiende en forma infinita en dirección del **eje "z"** positivo y negativo. También se tiene que la curva generatriz, que es una parábola, también se abre hacia el **eje "y"** positivo en forma infinita. En conclusión, no se forma ninguna figura cerrada.

Pero, si este cilindro se limita con z=0 (el plano XY), z=6 (plano paralelo al plano XY) y y=4 (plano paralelo al plano XZ), se forma un sólido.







Cada punto de la curva generatriz, sube 6 unidades (y asimismo cada punto de la región cerrada).

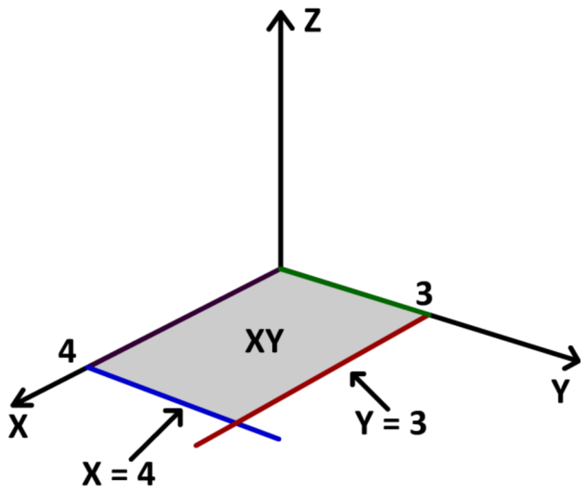
Ejemplo*:* Graficar el sólido limitado por las gráficas de $\mathbf{3x + 4y + 12z - 36 = 0}$, $\boldsymbol{x = 4}$, $\boldsymbol{y = 3}$. **Primer octante**.

Solución:

Al decir que es un sólido en el primer octante, significa que interesa solamente la parte donde **x, y, z** son positivos.

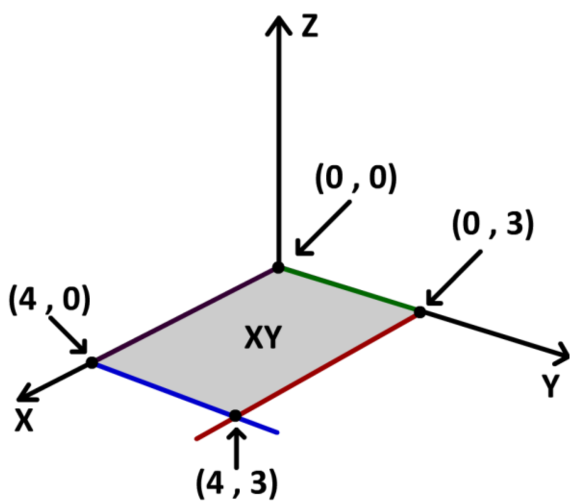
Las tres ecuaciones que se dan son planos.

Se prepara la base del sólido, es decir, la región cerrada en el plano $\boldsymbol{xy}$. En este momento se debe pensar en dos dimensiones lo que significa, por ejemplo, $\boldsymbol{y = 4}$ en tres dimensiones es un plano, pero en dos, es una recta paralela al **eje "x"**. De igual manera, $\boldsymbol{x = 4}$ en tres dimensiones es un plano, pero en dos es una recta paralela al **eje "y"**.



Región cerrada limitada por $z = 0$, $x = 4$, $y = 3$. ($z = 0$ es el plano XY).

La parte de arriba del sólido (la tapadera) es parte del plano $3x + 4y + 12z - 36 = 0$. Sin embargo, no se graficará el plano tal como se hizo cuando se aprendió a trazar un plano de este tipo. Lo que se hace es determinar, para algunos puntos claves de esta región, cuanto es la altura z que le corresponde a cada punto en el plano $3x + 4y + 12z - 36 = 0$.



Para el punto $(0,0)$: $x = 0, y = 0$.

$$3x + 4y + 12z - 36 = 0$$
$$3(0) + 4(0) + 12z - 36 = 0$$
$$12z = 36$$
$$z = \frac{36}{12}$$
$$z = 3$$

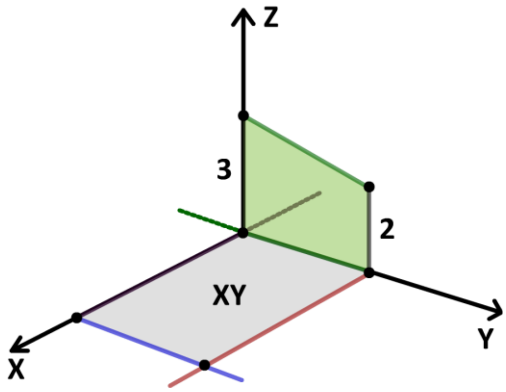
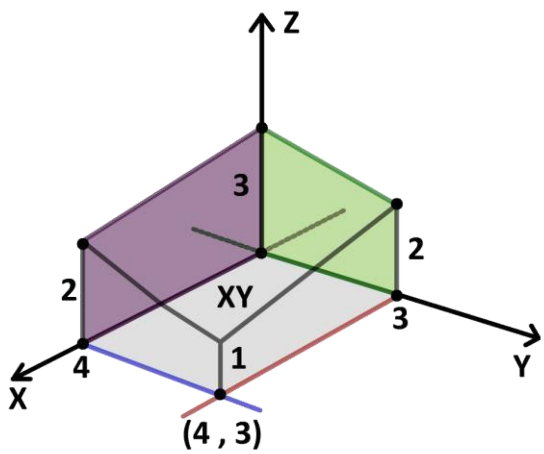


Figura 5

Para el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} = \mathbf{3}.$

$$3x + 4y + 12z - 36 = 0$$
$$3(0) + 4(3) + 12z - 36 = 0$$
$$12 + 12z = 36$$
$$12z = 36 - 12$$
$$12z = 24$$
$$z = \frac{24}{12} = 2$$

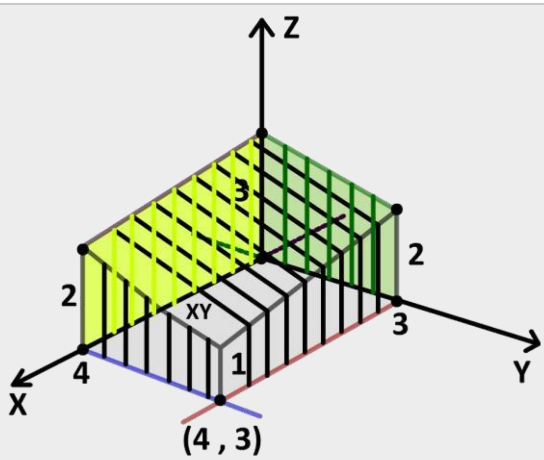
Es de notar que como todas las ecuaciones son planos, las intersecciones entre planos son rectas. Ya se ha construido una pared vertical, que corresponde a esa porción del **eje "y"** de color verde (porción de $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) cuyos puntos suben y "topan" en el plano $\mathbf{3x + 4y + 12z - 36 = 0}$.



Se hace lo mismo para la parte del **eje "x"** (coloreado de morado).

Para el punto $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$:

$$3x + 4y + 12z - 36 = 0$$
$$3(4) + 4(0) + 12z - 36 = 0$$
$$12 + 12z = 36$$
$$12z = 36 - 12$$
$$12z = 24 \; z = 2$$



Para el punto $(\mathbf{4}, \mathbf{3})$:

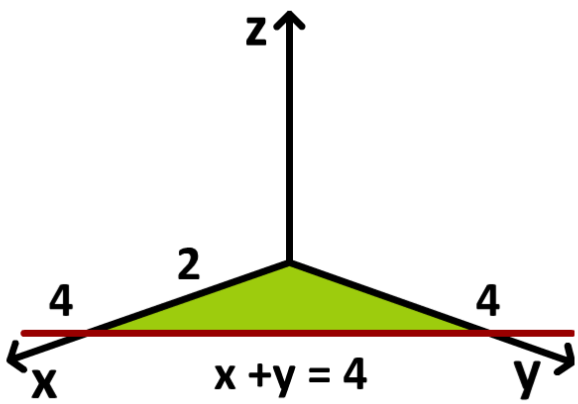
$$3x + 4y + 12z - 36 = 0$$
$$3(4) + 4(3) + 12z - 36 = 0$$
$$12 + 12 + 12z = 36$$
$$12z = 36 - 24$$
$$12z = 12$$
$$z = 1$$

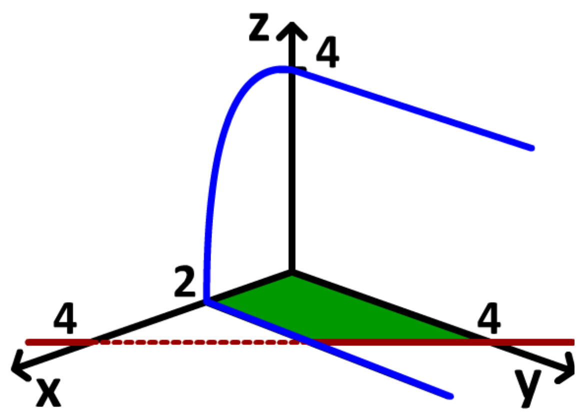
Ejemplo: graficar el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $x + y = 4$, $z = 4 - x^2$. Primer octante.

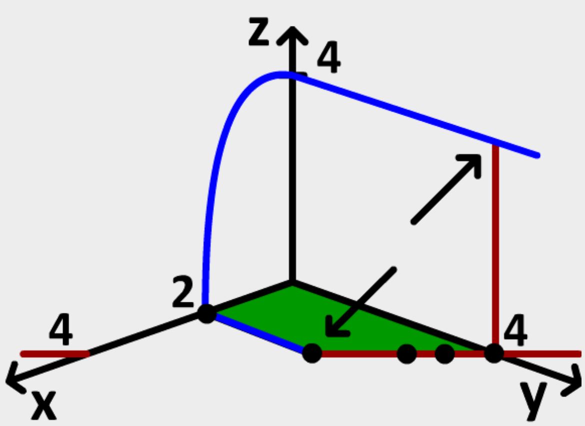
Solución:

Primero se identifica el tipo de gráfica que corresponde a cada una de las ecuaciones.

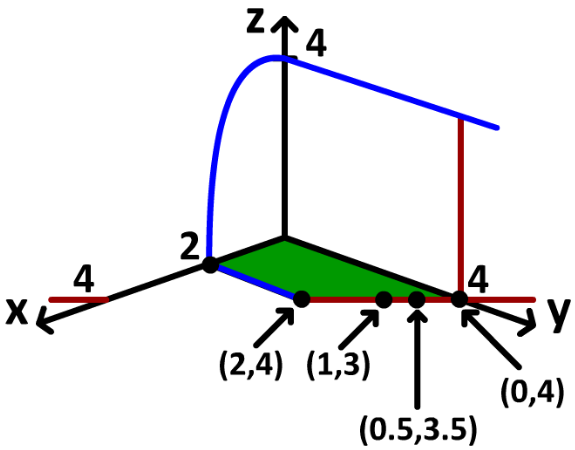
$x + y = 4$	En dos dimensiones es una recta y en tres es un plano.
$z = 4 - x^2$	Superficie cilíndrica cuya curva generatriz se grafica en el plano XZ y las rectas directrices van paralelas al **eje "y"**



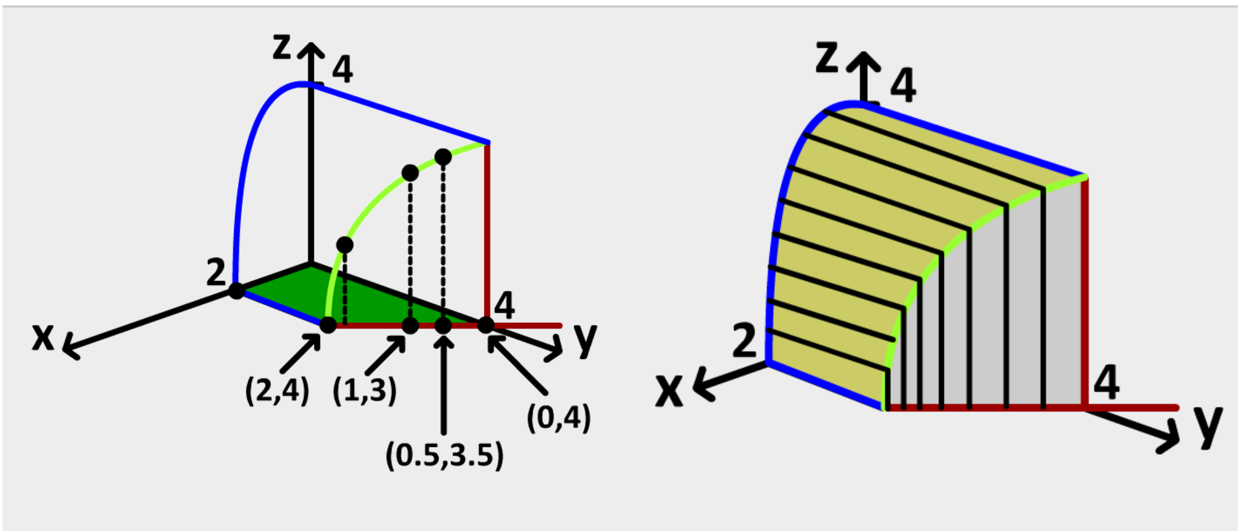




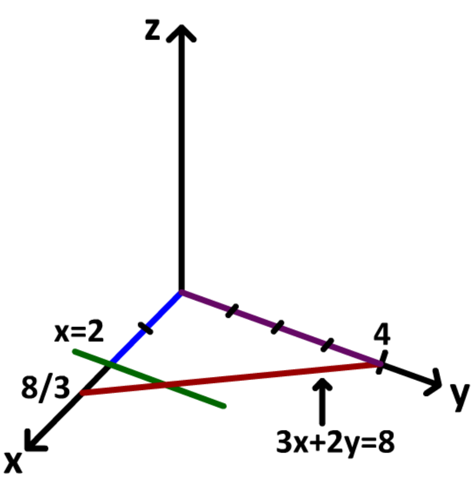
Acá se señalan los puntos donde se interseca el plano $x + y = 4$ y la superficie cilíndrica $z = 4 - x^2$.

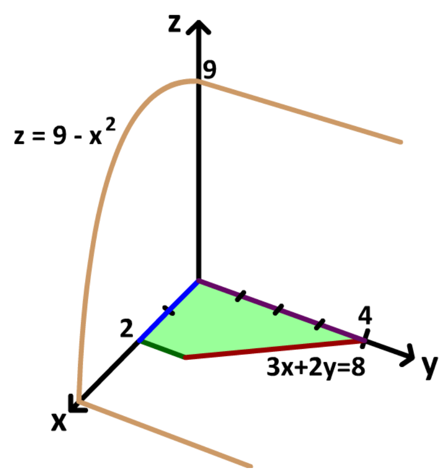


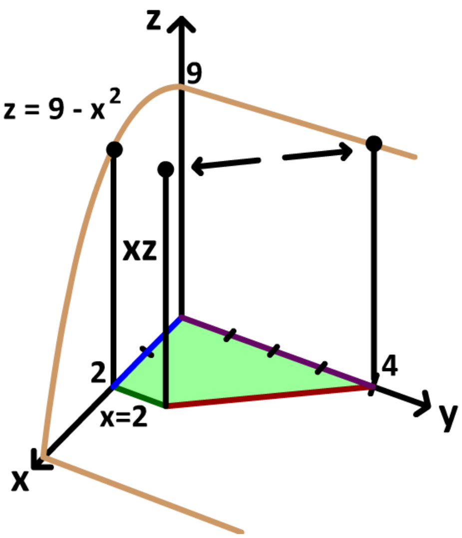
Se toman algunos puntos, para determinar las alturas de cada uno de ellos. Es decir, los valores de **z** que le corresponde a cada uno de ellos en el cilindro $\boldsymbol{z = 4 - x^2}$.



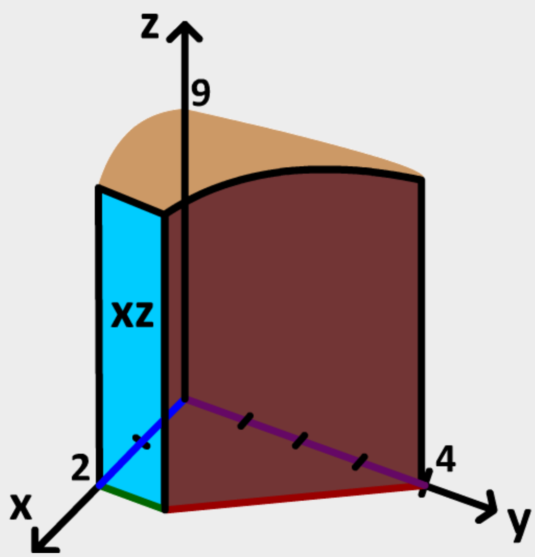
Ejemplo: graficar el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $\boldsymbol{3x + 2y = 8}$, $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{z = 9 - x^2}$**.** Primer octante.



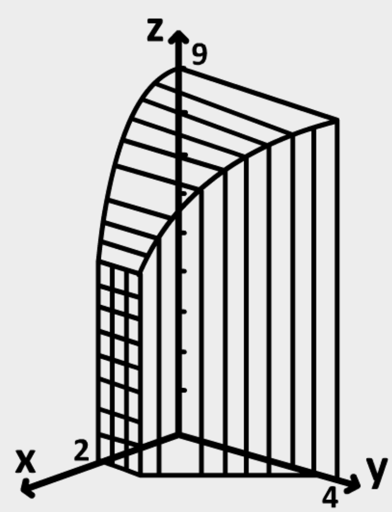




A veces, no es necesario determinar exactamente la altura z de algunos puntos de la base del sólido. Por ejemplo, para unir los dos puntos señalados en la figura, se traza una línea que lleve la misma tendencia del cilindro que está de color naranja.



Sólido graficado a escala



Ejemplo: Graficar el sólido limitado dentro de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, arriba de $z=0$ y debajo de $z=4$.

Solución:

Se identifica qué tipo de gráficas están involucradas en el sólido

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

Dos trazas son hipérbolas y una traza es elipse.

Luego se trata de un hiperboloide de una hoja, con eje en "z".

$z = 0$	Es el plano XY
$z = 4$	Es un plano paralelo al plano XY. Es decir, un hiperboloide es cortado por dos planos horizontales.
$z = 0$	Es la base o tapadera de abajo del sólido.
$z = 4$	Es la tapadera de arriba.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \quad z = 0$	Es la figura que se genera en la intersección de $z = 0$ con el hiperboloide.
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\frac{(0)^2}{16}=1$	
$\frac{x^2}{(2)^2}+\frac{y^2}{(3)^2}=1$	Elipse radio menor 2 y radio mayor 3. Es decir, que en $z = 0$, se graficará esta elipse.

La figura que se genera en la intersección de $z = 4$ con el hiperboloide es:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \quad z = 4$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{(4)^2}{16}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{16}{16}=1$$

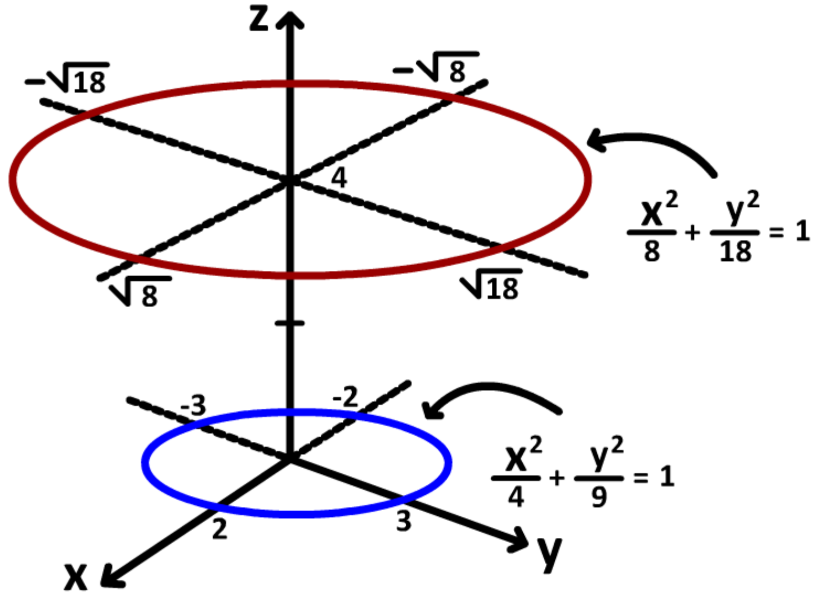
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=1$$

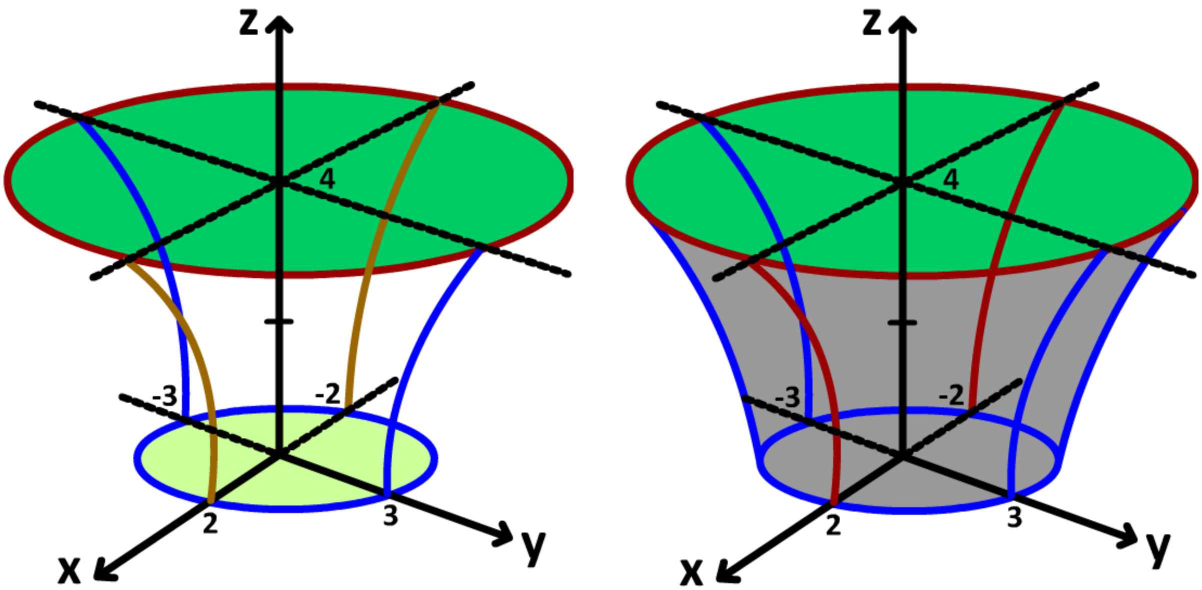
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2$$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$$

Es decir, que en $z = 4$, se graficará esta elipse.

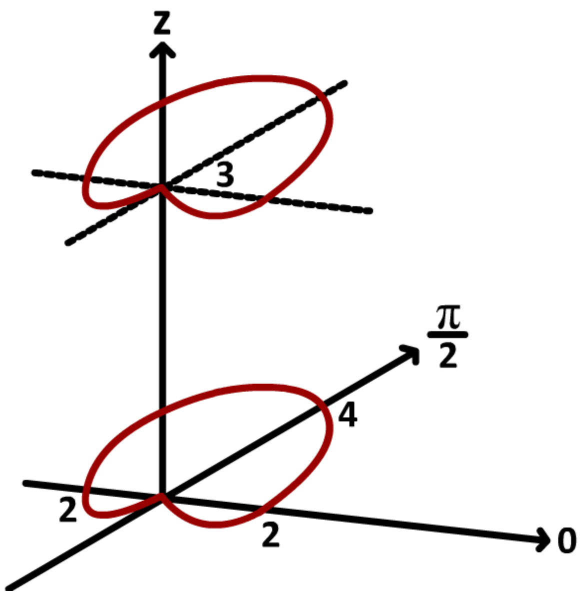
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\mathbf{8}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\mathbf{18}}\right)^2} = 1$$

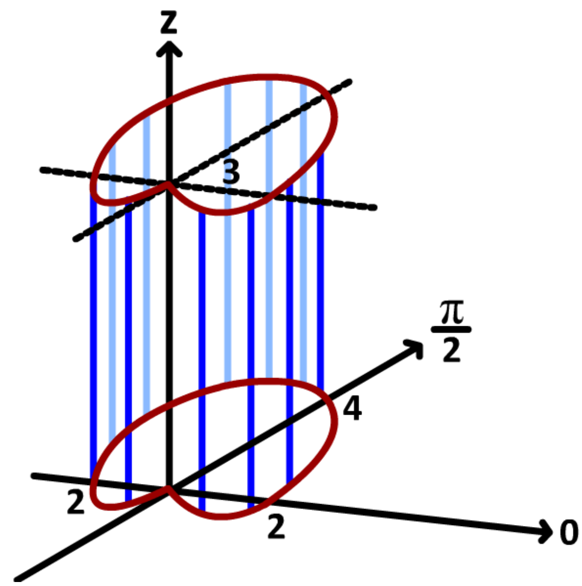


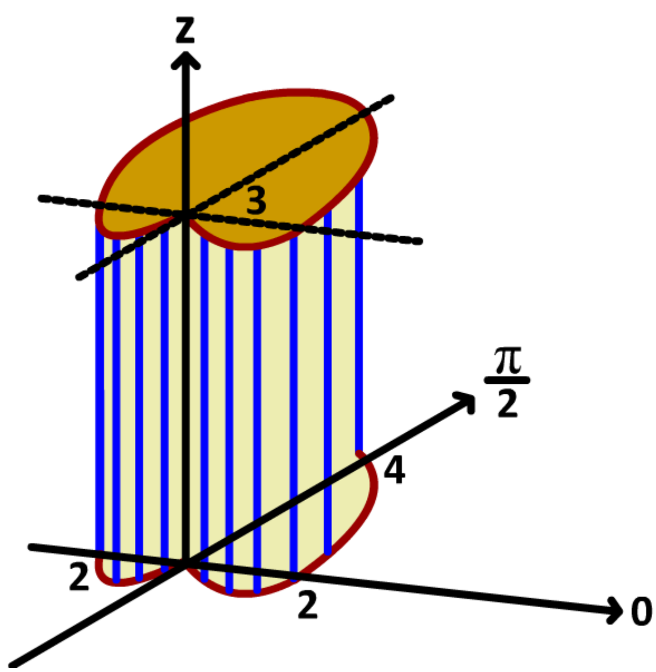


Ejemplo: Graficar el sólido limitado dentro de $\boldsymbol{r = 2 + 2sen(\theta)}$, arriba de $\boldsymbol{z = 0}$ y debajo de $\boldsymbol{z = 3}$.

Solución:







Ejemplo: Graficar el sólido limitado por las gráficas de $\boldsymbol{z = sen(y)}$, $\boldsymbol{0 \leq y \leq 2\pi}$, $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 3}$, $\boldsymbol{z = 0}$.
Solución: