UNIDAD IV: Funciones de varias variables (cálculo diferencial)

Ejemplos de funciones de varias variables:
1) El trabajo realizado por una fuerza $w = fd$ (función de 2 variables)

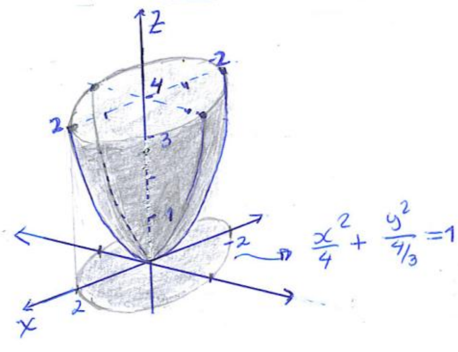
2) El volumen de un paralelepípedo $v = lwh$ (función de tres variables)

Notación:
$z = f(x, y)$ f es una función de 2 variables (2 var. independientes: x,y)
$w = g(x, y, z)$ g es una función de 3 variables (3 var. independientes: x,y,z)

Definición: (función de 2 variables)
Sea D un conjunto de pares ordenados. Si a cada par (x,y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es función de x e y. El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el recorrido de f.

NOTA:
- De las superficies cuádricas, las únicas funciones son el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico. Sin embargo, con restricciones podemos formar funciones con las demás cuádricas.
- El dominio de una función de dos variables puede ser todo el plano XY o una sub región de él.
- El dominio de una función de dos variables es la proyección su gráfico en el plano XY.

Ejemplo1:
Dada la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, hallar el dominio y el recorrido
Solución
La ecuación anterior la podemos escribir como $z = x^2 + 3y^2$.
La gráfica que corresponde a esta ecuación es un paraboloide elíptico.
Notemos que si graficamos esta ecuación con corte en $z = 4$ resulta lo siguiente



En este corte vemos que la proyección del gráfico recortado con el plano XY es la elipse mostrada y el dominio de la función son todos los pares ordenados que están dentro de esa elipse, es decir, $D_f = \left\{ (x, y) \in R^2 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4/3} \le 1 \right\}$ Pero como este paraboloide se extiende hasta el infinito, la proyección de la gráfica completa **es todo el plano XY**. Esto lo podemos ver fácilmente de la ecuación $z = x^2 + 3y^2$, en donde no hay ninguna restricción para los valores que pueden tomar las variables $x \wedge y$. Por lo tanto, el dominio son todos los pares ordenados (x, y) tal que pertenecen al plano (x, y), Dominio=$\left\{(x, y)/(x, y) \in R^2\right\}$.

El recorrido o rango de la función es un número real no negativo, es decir, Recorrido=$\left\{z / z \in R_0^+\right\}$.

Ejercicio 1:
Hallar el dominio de las siguientes funciones (graficar el dominio)

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x - y}$

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

<u>Combinación de funciones de dos variables</u>

1) Suma o diferencia

$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$

2) Producto

$(f.g)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$

3) Cociente

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0$

<u>Función polinomial</u>: es la que se expresa como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$, donde c es un número real, y m y n son enteros no negativos.

Ejemplos:

$f(x, y) = 5x^3 - 2x^2 y + y^3 + 8$

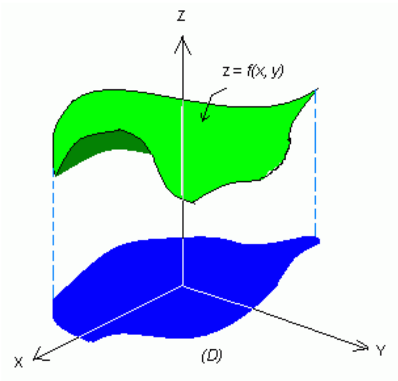
$g(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + 5y - 4$

<u>Función racional</u>:
Es el cociente de dos funciones polinómicas

Nota: Se usa terminología similar para funciones de más de dos variables.

Gráfica de una función de dos variables: Es el conjunto de puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ tal que (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una superficie en el espacio R^3

Nota: El dominio D es la proyección de la superficie $z = f(x, y)$ sobre el plano XY



<u>Ejercicio 2</u>: Elaborar la gráfica de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4}$ **y encontrar el dominio y recorrido**

<u>Ejercicio 3</u>: Elaborar la gráfica de $z = 4 - x^2 - y^2$ **. Hallar dominio y recorrido.**

Derivadas parciales

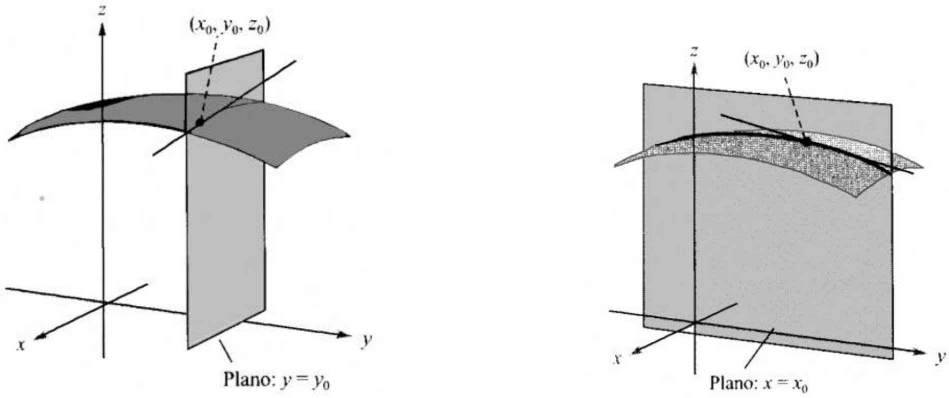
Definición: (primeras derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$)
Las primeras derivadas parciales de f con respecto a $x \wedge$ a y son funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación:
Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por lo tanto $f_x(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Ejercicio 4: Encontrar las primeras derivadas parciales de $f(x,y) = \dfrac{x\cos(y)}{y^2}$

Ejercicio 5: Encontrar las primeras derivadas parciales de $z = ye^{x/y} + x^2y^5 + 5y + 2$

NOTACION:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

1) $$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$con \quad z = f(x,y)$

2) Las primeras derivadas parciales evaluadas en un punto (a,b) se denotan por

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

Derivadas parciales de una función de tres o mas variables

Las derivadas parciales para funciones de 3 variables $w = f(x,y,z)$ se definen de manea similar

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x,y,z) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x,y,z) = \underset{\Delta y \to 0}{Lim} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x,y,z) = \underset{\Delta z \to 0}{Lim} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

Observaciones:

1) La función tendrá tantas primeras derivadas parciales como variables independientes tenga
2) Para encontrar la derivada parcial respecto a una variables, las demás se toman como constantes.

En general , si $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces hay n derivadas parciales que se denotan por

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \quad , i = 1, 2, ..., n$$

Ejercicio 6: Calcular las derivadas parciales propuestas.

a) $para \quad f(x,y,z) = xy + y + 2yz^2 + xz + 5 \quad hallar \quad f_z(x,y,z)$

b) $para \quad f(x,y,z) = y\cos(xy^2 + 2z) \quad hallar \quad f_z(x,y,z) \quad y \quad f_y(x,y,z)$

c) $para \quad f(w,x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{w}, hallar \quad f_w(w,x,y,z)$

Derivadas parciales de orden superior

Segundas derivadas parciales

La función $z = f(x,y)$ tiene las derivadas parciales de segundo orden siguientes:

1) Derivando 2 veces respecto la variable x : $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

2) Derivar 2 veces respecto a la variable y: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

3) Derivar primero con respecto a x , luego con respecto a y : $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$

4) Derivar primero con respecto a y , luego con respecto a x : $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$

Los casos 3 y 4 se conocen como derivadas parciales cruzadas

Teorema: (Igualdad de derivadas cruzadas)
Si f es una función de x e y tal que $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ son continuas en la región R, entonces para cada (x,y) en R se tiene que: $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Nota: El teorema también se aplica a funciones de tres o más variables. Asi, se tiene que:

$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z)$

$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z)$

$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z)$

$f_{xyy}(x,y,z) = f_{yxy}(x,y,z) = f_{yyx}(x,y,z)$

Ejercicio 7:

Dada $f(x,y) = 2x^3y^2 + 3x^2y + 5y$, hallar las derivadas parciales segundas y evaluar dichas derivadas en (1,-1).

Ejercicio 8:
Siendo $f(x,y,z) = ye^x - y\cos(xz)$ demostrar que:
1) $f_{xz} = f_{zx}$
2) $f_{xyz} = f_{zxy} = f_{yzx}$

Diferenciales:
Si $z = f(x,y)$, el incremento de z o incremento total Δz vienen dado por $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Siendo Δx y Δy los incrementos de x y de y, respectivamente.
Las diferenciales dx, dy y dz se definen asi:
La diferencial total:
Si $z = f(x,y)$ y $\Delta x, \Delta y$ son incrementos de $x \wedge de\ y$, entonces las diferenciales de las variables independientes $x\ e\ y$ son $dx = \Delta x \wedge dy = \Delta y$ y la diferencial total de la variable dependiente z viene dada por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{o} \qquad dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Esta definición puede extenderse a funciones de tres o más variables. Así, si $w = f(x,y,z)$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Ejercicio 9:
Dado $f(x,y) = xy^2$, calcular 1) El incremento total Δz 2) La diferencial total dz

Regla de la cadena

Teorema: (regla de la cadena: una sola variable independiente)
Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = g(t)$, siendo g y h funciones diferencialbles de t , entonces:
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejercicio 10: Siendo $w = x^2 y - y^2$, $x = e^{-t}$, $y = \cos(t)$, hallar $\frac{dw}{dt}$

Para variables intermedias $x_1, x_2, ..., x_n$, que dependen de una sola variable t, siendo $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, entonces se tiene que
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Ejercicio 11:
Una partícula viaja siguiendo una trayectoria recta dada por las ecuaciones paramétricas siguientes: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$. ¿A qué ritmo varía la distancia del origen a la partícula cuando $t = 0$?

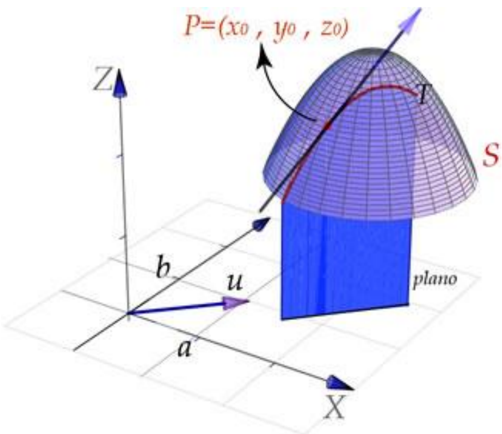
Teorema: (regla de la cadena: dos variables independientes)
Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ son tales que las primeras parciales $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ existen todas, entonces $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ existen y esta dadas por

1) $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ 2) $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Ejercicio 12:
Usar la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ siendo $w = 4xy$, $x = r^2 - t^3$, $y = \frac{t}{r}$

Derivada direccional y el gradiente

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, definimos la derivada direccional



Definición:
Sea f una función de dos variables x y y , y sea $\vec{u}=\cos(\theta)i+sen(\theta)j$ un vector unitario. Entonces la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$, que se denota $D_{\vec{u}}f$ es

$$D_{\vec{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\theta,y+sen\theta)-f(x,y)}{t}$$

Teorema:
Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas f_x, f_y, entonces la derivada direccional de f en (a,b) en la dirección del vector unitario $\vec{u}=\cos(\theta)i+sen(\theta)j$ es

$$D_{\vec{u}}f(x,y)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)sen\theta$$

Casos particulares:
1) Si $\theta=0$, $D_{\vec{u}}f(x,y)=f_x(x,y)$

2) Si $\theta=\frac{\pi}{2}$, $D_{\vec{u}}f(x,y)=f_y(x,y)$

Ejercicio 13:
Hallar la derivada direccional de $f(x,y)=4-x^2-y^2$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\vec{u}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)i+sen\left(\frac{\pi}{6}\right)j$.

Ejercicio 14::
Hallar la derivada direccional de la superficie del ejemplo anterior en la dirección de $\vec{v}=3i-4j$.

El Gradiente de una función de 2 variables

Definición:

Sea $z = f(x,y)$ una función de x e y tal que f_x, f_y existen. Entonces el gradiente de la función f, denotado por $\nabla f(x,y)$, es el vector

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$$

Ejercicio 15:

Hallar el gradiente de $f(x,y) = x\ln y + x^2 y$ en el punto (2,1)

Propiedades del gradiente

Teorema:

Sea f derivable en el punto (x,y)

1. Si $\nabla f(x,y) = 0$, entonces $D_{\vec{u}} f(x,y) = 0$ par todo $\vec{u}$.
2. La dirección de mayor incremento de f está dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$.
3. La dirección de menor incremento de f está dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de $D_{\vec{u}} f(x,y)$ es -$\|\nabla f(x,y)\|$.

Curvas de nivel

Si $z = f(x,y)$, $f(x,y) = c$ donde c es cualquier constante, representa lo que se llama curva de nivel . Al conjunto de curvas de nivel se le llama mapa de contorno.

Si $z = f(x,y)$ representa la presión atmosférica , el conjunto de curvas de nivel $f(x,y) = c$ se llama mapa climático y las curvas de nivel de igual presión se llama isobaras. Si $z = f(x,y)$ representa la temperatura , el conjunto de curvas de nivel $f(x,y) = c$ se llama mapa climático y las curvas de nivel de igual temperatura se llama isotermas. Los mapas de contorno se usan regularmente para representar regiones de la superficie de la tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama mapa topográfico.

Teorema:

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).

Ejercicio 16:

Dada $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$ calcular $\nabla f(1,-2)$ y comprobar que es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (1,- 2)

Derivación Implícita

Teorema:

i) Si la ecuación $f(x,y) = 0$ define a y de manera implícita como función derivable de x, entonces: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$, $f_y(x,y) \neq 0$

ii) Si la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define a z de manea implícita como función derivable de x e y, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$, $f_z(x,y,z) \neq 0$

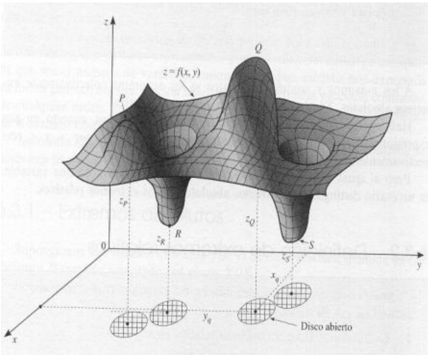
El teorema anterior se puede extender a más de tres variables

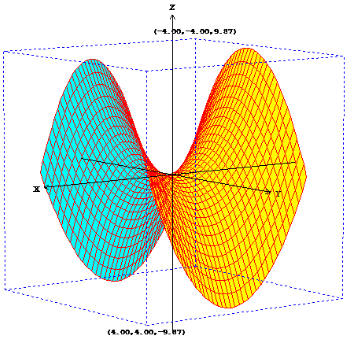
Ejercicio 17:

Utilizar derivación implícita para encontrar $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial z}$, teniendo $x^2 + y^2 + z^2 + 12yw = 10 + 4w^2$

Extremos de funciones de dos variables (máximos y mínimos)

Extremos absolutos y relativos





Observaciones:

a) Una región en el plano xy es cerrada si contiene todos sus puntos frontera
b) Una región en el plano xy es acotada si es una subregión de un disco cerrado plano.

Teorema: (del valor extremo)
Sea f una función continua de dos variables x e y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.
1) Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
2) Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.

Definición de extremos relativos
Sea f una función definida en una región R conteniendo el punto (x_0, y_0)
1) $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo de f si $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$
2) $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo de f si $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$
para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0)

Definición de puntos críticos
Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f si se satisface una de las condiciones siguientes:
1) $f_x(x,y) = 0 \quad y \quad f_y(x,y) = 0$
2) $f_x(x_0, y_0) \quad ó \quad f_y(x_0, y_0)$ no existe

Teorema:
Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

Teorema:

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (x_0, y_0) para el cual

$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad f_y(x_0, y_0) = 0$.

Para encontrar los extremos relativos de f, considerar la cantidad $d = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$

1) Si $d > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0)
2) Si $d > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0)
3) Si $d < 0$, entonces $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es un punto de silla
4) Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión

Ejercicio 18:

a) Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

b) Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = \dfrac{1}{3} y^3 + x^2 y - 2x^2 - 2y^2 + 6$