TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO

En el plano complejo se distinguen varios tipos de conjuntos, principalmente por sus propiedades topológicas.

Distancia entre dos puntos: Sea $z_1=x_1+y_1$ y $z_2=x_2+y_2$, definimos la distancia entre ambos complejos como $d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\mathrm{y}_1 - y_2)^2}$. Recuerde que la distancia es un número positivo o cero.

Entorno (o Vecindad). Un *entorno* de radio $\in$ o $\in$-entorno o vecindad de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \in$, donde $\in$ es cualquier número positivo. También se lo llama *disco* o *bola abierta*

Entorno reducido de z_0 es un entorno o vecindad en el que se ha eliminado el punto z_0; esto es, $0 < |z - z_0| < \in$.

Punto Interior. Un punto z_0 es un punto interior de un conjunto S *si existe algún* entorno de z_0 cuyos puntos están todos en S.

Punto Frontera. Un punto z_0 es un punto frontera de un conjunto S *si todo entorno* de z_0 tiene puntos que están en S y puntos que no están en S. La frontera de un conjunto es el conjunto de todos sus puntos frontera.

Punto Exterior. Un punto z_0 es un punto exterior de un conjunto S si *existe algún* entorno de z_0 cuyos puntos no están en S.

Punto de Acumulación (Punto Límite). Un punto z_0 de un conjunto S se dice que es un punto de acumulación *si todo* $\in$-entorno reducido de z_0 contiene al menos un punto de S. Como $\in$ puede ser cualquier número positivo, se deduce que S debe tener infinitos puntos. No es necesario que z_0 esté en S para que z_0 sea un punto de acumulación. En este caso z_0 es un punto frontera. Un punto z_0 no es un punto de acumulación *si existe al menos* un entorno reducido de z_0 que no tenga puntos de S.

Conjunto Abierto. Un conjunto abierto es un conjunto cuyos puntos son todos interiores. *Por ejemplo*, el conjunto de todos los z tales que $|z| < 1$ es un *conjunto abierto.*

Conjunto Cerrado. Un conjunto es *cerrado* si su complemento es abierto. Un conjunto cerrado es un conjunto que contiene a todos sus puntos frontera. Un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación. *Por ejemplo*, el conjunto de todos los z tales que $|z| \leq 1$ es un *conjunto cerrado*.

Cierre (Clausura). El cierre o clausura S de un conjunto S es el conjunto cerrado que consta de S y de todos sus puntos frontera.

Conjunto Conexo. Un conjunto abierto S es conexo si un par de puntos cualesquiera del conjunto se pueden unir por un camino formado por segmentos rectos (camino poligonal) cuyos puntos están en S.

Regiones o Dominios. A conjunto *abierto conexo* se le llama región abierta o dominio . El cierre de una región abierta es una región cerrada. En general, una región es una región abierta con algunos, ninguno o todos los puntos de la frontera.

Conjunto Acotado. Un conjunto S se dice que es acotado si podemos encontrar una constante (necesariamente positiva) tal que $|z| < R$; esto es, los puntos tienen que estar dentro de algún círculo de radio R.
Un conjunto que *es acotado y cerrado* se llama *compacto*. Un conjunto que no es acotado es un conjunto no acotado o ilimitado.

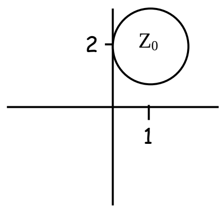
Teorema de Bolzano-Weierstrass. Todo conjunto S con un número infinito de puntos y acotado, tiene al menos un punto de acumulación.

Algunas regiones

Sea la circunferencia de centro z_0 y radio R; si z es un punto cualquiera de esa circunferencia, entonces: $|z - z_0| = R$ es **la ecuación de la circunferencia** C

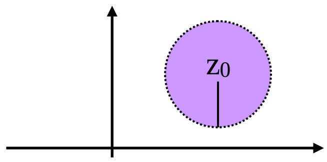
Ejemplo: Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $z_0 = 1 + 2i$ y radio 1

La ecuación de dicha circunferencia es :
$|z - (1 + 2i)| = 1$



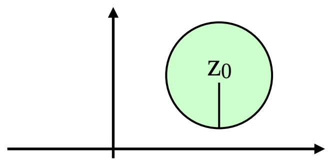
El **disco abierto $D_R(z_0)$** de centro z_0 y radio R está dado por la desigualdad:

$$|z - z_0| < R$$



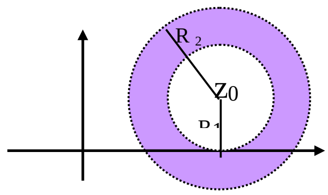
El **disco cerrado** de centro z_0 y radio R está dado por la desigualdad:

$$|z - z_0| \leq R$$



O sea que el disco abierto es el interior del círculo C; el disco cerrado, en tanto, es todo el círculo C.

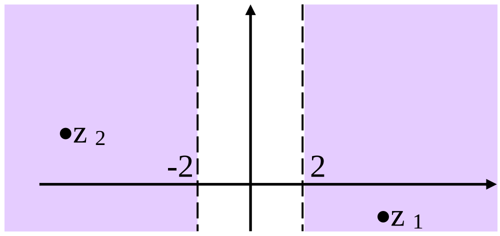
Si $R_1 < R_2$, entonces la desigualdad: $R_1 < |z - z_0| < R_2$ define un **anillo o una corona abierta**



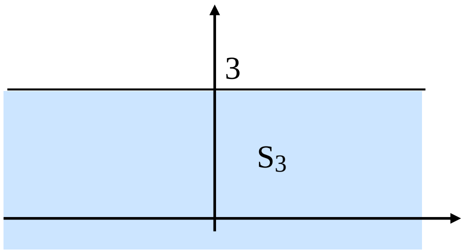
Ejemplos: Para cada uno de los siguientes conjuntos S, se pide indicar si son abiertos, cerrados, conexos:

El conjunto $S_1 = \{z / |z| < 4\}$ es abierto y conexo. Recuerde que S_1 es un disco sin su frontera.

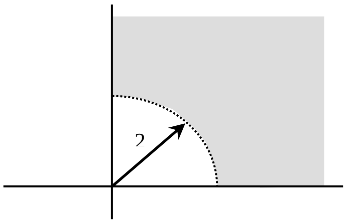
- $S_2 = \{ z \,/\, |Re(z)| > 2 \}$ es abierto pero no es conexo; en efecto, los puntos z_1 y z_2 no pueden ser unidos por una poligonal contenida en S_2.



- $S_3 = \{ z \,/\, Im\,(z) \le 3\}$, no es ni abierto, ni cerrado y es conexo



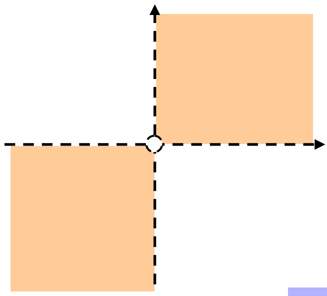
- $S_4 = \{ z \,/\, |z| > 2 \;\; y \;\; 0 \le \theta \le \pi/2\}$, no es ni abierto, ni cerrado y es conexo

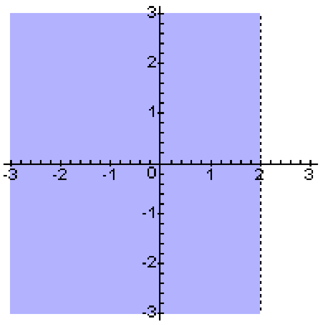


- $S_5 = \{ z \,/\, Im\,(z^2) > 0 \}$

  Recordemos que $Im(z) = 2xy > 0$

  Entonces S_5 es abierto y no es conexo





- $S_6 = \{ z/ \,|\, z -4| > |z| \}$

  Esto es por definición $(x - 4)^2 + y^2 > x^2 + y^2$

  Operando $x^2 - 8x + 16 + y^2 - x^2 - y^2 > 0$

  $-8\,x + 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

  Es la región del plano complejo tal que su parte real es menor que 2. Es un conjunto abierto, conexo y no acotado.

- $S_7 = \{ z/ \,|2z + 4| \ge 1 \}$

  $|2z - 4| \ge 1$ sacando factor común $2 \Rightarrow \; |z + 2| \ge \frac{1}{2}$

  Es el exterior de un disco con centro $(-2, 0)$ y de radio $R = \frac{1}{2}$. Es un conjunto ni abierto, ni cerrado, conexo y no acotado.