Funciones de Variable Compleja

Definición:

Una *función compleja de una variable compleja* es una regla que asigna a cada z complejo en $D \subset \mathbb{C}$ un único w en $\mathbb{C}$. Notación: $w = f(z)$

Ejemplos:

- a) $f(z) = z^2 + z$ $\quad D = \mathbb{C}$
- b) $f(z) = \sin(z) + 3$ $\quad D = \mathbb{C}$
- c) $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$ $\quad D = \mathbb{C} - \{0\}$

Si a cada valor de z en D le corresponde más de un valor de w, no se trata de una aplicación o función, pero suele decirse que w es *función multivaluada o multiforme*.

Ejemplo: $f(z) = \sqrt[4]{z}$

Funciones de Variable Compleja

Nota:

- Si a cada $z \in D$ le corresponde un único valor w, se dice que f es una función unívoca o uniforme. Caso contrario se dice f es *multívoca o multiforme*.
- Una *función multiforme* puede considerarse como una colección de funciones uniformes, cada una de las cuales se denomina *rama* de la función. Si se estudia una rama en especial, se la suele llamar *rama principal* de la función multiforme y el valor correspondiente en dicha rama, *valor principal*.

Siempre que hablemos de función en la materia, nos referiremos, salvo advertencia expresa, a *función uniforme* .

El conjunto *imagen o recorrido* es el conjunto de valores que toma la función:

$$I_f = \{ w \in \mathbf{C} \ / \ w = f(z), z \in D \}$$

Funciones de Variable Compleja

Toda función compleja f puede escribirse como: $f = u + i\,v$

donde:

u: es la parte real de f (Re($f(z)$))

v: parte imaginaria de f (Im ($f(z)$))

Como u y v son las partes real e imaginaria de w respectivamente y puesto w depende de $z=x+iy$, es evidente que en general, u y v dependen de x e y. Entonces:

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Funciones de Variable Compleja

Ejemplos:

- Determine el dominio de las siguientes funciones y calcule el valor de las mismas en los puntos $z = 1+2i$ y en $z=3-i$. Indique, en todos los casos, sus parte real e imaginaria

a) $f(z) = z^2 - 5iz + 4$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z^3}$

c) $f(z) = |z|^2 - \bar{z}$

Funciones de Variable Compleja

Ejemplos:

- Sea $w = u + iv$ con $u = x^2 - y^2 + x$; $v = 2xy - y$. Exprese a w como una función de variable compleja $z = x + i\,y$.

Solución:

Recordemos que $x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Resulta:

$$w = u + i\,v = (x^2 - y^2 + x) + i\,(2xy - y)$$

$$w = \left[\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + \frac{z+\bar{z}}{2} \right] + i \left[2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - \frac{z-\bar{z}}{2i} \right]$$

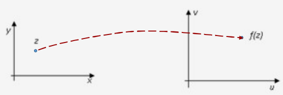
$$= \frac{2z^2 + 2\bar{z}^2 + 2z + 2\bar{z} + 2z^2 + 2\bar{z}^2 - 2z + 2\bar{z}}{4} = z^2 + \bar{z}$$

Funciones de Variable Compleja

No puede hacerse una representación gráfica de la función $w=f(z)$ tan conveniente como en el caso de funciones reales de una variable real $y= f(x)$, que se representaban mediante curvas en el plano, o como en el caso de funciones reales de dos variables reales $z = f(x,y)$, que se representaban mediante superficies en el espacio tridimensional.

Para el caso de funciones complejas , es decir $w=f(z)$, se necesitaría un espacio de dimensión cuatro.

Será necesario utilizar dos planos complejos; el plano z de ejes x e y , y el plano w de ejes u y v . Se representan algunos puntos en el plano complejo z y los correspondientes en el plano w.



Funciones de Variable Compleja

A cada punto *P(x,y)* en el plano *z* , situado en el dominio de *f*, corresponderá el punto *P'(u,v)* en el plano *w* .

Esta correspondencia se llama una *transformación* del plano *z* en el *w* mediante *f*. Se dirá que *P(x,y)* se transforma en el *P'(u,v)* por la *aplicación o transformación*. A *P'* se le llama la *imagen* de *P* .

Se obtiene más y mejor información de *f* , estudiando cómo se transforman algunas curvas o regiones convenientes del plano *z* , en lugar de representar simplemente pares de puntos correspondientes.

Límite . Continuidad. Derivada

Límite: Extendemos el concepto ya estudiado.

Propiedades:

- El límite es *único*
- Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=\omega_0$ entonces

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)+g(z)\right]=w_0+\omega_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \lambda f(z)=\lambda w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0\omega_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{w_0}{\omega_0} \quad si \quad \omega_0\neq 0 \end{cases}$$

Límite . Continuidad. Derivada

- Sea $\begin{cases} f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \\ z_0=x_0+iy_0 \\ w_0=u_0+iv_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0 \end{cases}$ entonces

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\operatorname{Re} w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=\operatorname{Im} w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \left|f(z)\right|=\left|w_0\right| \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)}=\overline{w_0} \end{cases}$$

Continuidad

Definición: $w=f(z)$ es continua en $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

Límite . Continuidad. Derivada

Propiedades:

De las propiedades de límites se deduce que:

- Si f y g son continuas en z_0 entonces son continuas en z_0 : $\begin{cases} f(z)+g(z) \\ \lambda f(z) \\ f(z)g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)}, g(z_0)\neq 0 \end{cases}$

También los son: $\begin{cases} (f\circ g)(z) \\ \overline{f(z)} \\ \left|f(z)\right| \end{cases}$