

## *Derivada*

Sea  $f$  definida en un dominio  $D$ , se dice que  $f$  es *diferenciable* o que tiene *derivada* en  $z_0 \in D$  si

$$\text{existe } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Si  $z - z_0 = \Delta z$ , entonces, el límite puede escribirse : 
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

## *Ejemplo:*

- La derivada de  $f(z) = z + 5$  es  $f'(z) = 1$
- La función  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en ningún punto

## *Derivada*

### *Reglas básicas de derivación:*

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables y  $k$  una constante compleja, entonces:

$$\text{a) } f(z) = k \quad \rightarrow \quad f'(z) = 0$$

$$\text{b) } f(z) = k g(z) \quad \rightarrow \quad f'(z) = k g'(z)$$

$$\text{c) } (f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$$

$$\text{d) } (f \cdot g)'(z) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$$

$$\text{e) } \left( \frac{f}{g} \right)'(z) = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{(g(z))^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0$$

## *Función Analítica*

Sea  $f$  una función definida en un dominio  $D$ , entonces :

### *Definición:*

Se dice que  $f$  es **analítica** en un punto  $z_0 \in D$  si y sólo si  $f$  es derivable no sólo en  $z_0$  sino en todo punto de algún entorno de  $z_0$  contenido en  $D$ .

### *Definición:*

Se dice que  $f$  es **analítica en un dominio**  $D$  si y sólo si es analítica en todos los puntos del dominio  $D$ .

## *Función Analítica*

Si  $f(z)$  es analítica en  $\mathbb{C}$  dice que  $f$  es entera.

Un punto  $z_0$  se dice *punto singular aislado* o *singularidad aislada* de  $f$  si la función no es derivable en  $z_0$ , pero sí es analítica en algún entorno reducido de  $z_0$ .

**Importante:** Siempre que la función  $f$  dependa de  $\bar{z}$ , no será derivable, por lo tanto tampoco analítica.

## *Función Analítica*

Todas las reglas de derivación del Cálculo Real, son válidas para el complejo.

### Nota:

1. Sean  $f$  y  $g$  funciones analíticas en un dominio  $D$ ; entonces:

a)  $f \pm g$  es analítica en  $D$ .

b)  $f \cdot g$  es analítico en  $D$ .

c)  $\frac{f}{g}$  es analítico en  $D$ , si  $g(z) \neq 0$  en  $D$

## *Función Analítica*

2.  $f(z) = k$  es analítica en  $\mathbb{C}$
3.  $f(z) = z$  es analítica en  $\mathbb{C}$
4. Toda función polinómica es analítica en  $\mathbb{C}$
5. Toda función racional  $P(z)/Q(z)$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , salvo en los puntos tales que  $Q(z) = 0$ .
6. Las funciones exponencial, seno y coseno son enteras.

Si  $f(z)$  es *derivable* en  $z_0$ , es *continua* en  $z_0$ .