Universidad Blas Pascal

Guía de Ejercicios

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

Ingeniería Informática
Ingeniería en Telecomunicaciones

- 2018 -

PRÁCTICO Nº 1: Números Complejos

1- Realice las operaciones indicadas y exprese los resultados en forma binómica

a) $(3 + 7i) + (-3 + i) =$

b) $(i - 2)\,[2(1 + i) - 3(i - 1)] =$

c) $(1 + i)(2 - i)(1 - i) =$

d) $\dfrac{1-i}{i} =$

e) $i\,(2 + 3i)^2 =$

f) $\dfrac{7+2i}{3-i} =$

g) $(1 + i\sqrt{3})^2 =$

h) $\dfrac{12+8i}{2-3i} + \dfrac{52+13i}{13i} =$

i) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5 =$

j) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4 =$

2- Resuelva las siguientes ecuaciones en el campo complejo (encuentre el valor de z)

a) $(1 + i) + z = 3 + 2i$

b) $(1 + i) \cdot z = 4 + 2i$

c) $\dfrac{z+2i}{2+i} = i$

d) $\dfrac{i.z + 3 - 2i}{1 + i} = 1 - i$

3- Verifique : $\dfrac{i\,\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(i\,z)} = i$

4- Calcule todos los valores reales **x** tal que $w = (x - i)\,[(x + 3) - 4i]$ sea imaginario puro. Calcule además los correspondientes valores de w.

5- Escriba los siguientes números en forma polar:

a) $z = 5 - 5i$

b) $z = 4i$

c) $z = 8 + i\,8\sqrt{3}$

d) $z = 2\sqrt{3} + 2i$

e) $z = 2$

f) $z = -5$

g) $z = 2 - 2i$

h) $z = -5i$

i) $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i$

j) $z = -2 - 2i$

k) $z = -2\sqrt{3} - 2i$

l) $z = i^{-1}$

6- Evalúe las siguientes expresiones:

a) $\left|\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+7i)}{-4-6i}\right| =$

b) $\left|\dfrac{(6 + 7i)(4 - 2i)}{4 + 2i}\right| \cdot \left|\dfrac{-1}{7 + 6i}\right| =$

7- Evalúe las siguientes expresiones empleando la forma trigonométrica:

a) $2(\cos 15º + i \operatorname{sen} 15º)(3 + 3i) =$

b) $\dfrac{8 + 8\sqrt{3}i}{2\sqrt{3} + 2i} =$

c) $(1 + i)^6 =$

d) $(1 + \sqrt{3}\,i)^3 =$

e) $(2\sqrt{3} + 2i)^6 =$

f) $\left[\dfrac{4+4\sqrt{3}i}{2+2i}\right]^2 =$

g) $\left[\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i}\right]^{-3} =$

8- Exprese a ***z*** en forma trigonométrica:

a) $z = (2 + 2i)^{-2}$

b) $z = \dfrac{1}{(i-1)^3}$

c) $z = (\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,)^3$

d) $z = (1 - \sqrt{3}\,i)^6 =$

9- Calcule todas las raíces cuartas de $16i$.

[**Recuerde:** Si $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y n es un número <u>natural</u>, las raíces enésimas de z están dada por la fórmula:

$$\boxed{w_k = z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$ con $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$]

10- Calcule todas las raíces cúbicas de - 8.

11- Calcule:

a) $\sqrt[3]{1}$

b) $i^{1/3}$

c) $\left(16\sqrt{2} + i\,\dfrac{32}{\sqrt{2}}\right)^{1/5}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{1-i}}$

EJERCICIOS ADICIONALES

12- Realice las operaciones indicadas y exprese los resultados en forma binómica:

a) $i^{-1} =$

b) $\dfrac{2}{1 - 3i} =$

c) $\left[\dfrac{34}{(1-4i)(5+3i)}\right]^2 =$

d) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^4 =$

13- Sea $z = x + i\,y$. Calcule:

a) $\mathrm{Re}(z^2) =$

b) $\mathrm{Im}(z^2 + 2z) =$

c) $\mathrm{Re}(z^2 - 3i\,\bar{z}) =$

d) $\mathrm{Im}(z^3 - 2z) =$

14- Verifique que el complejo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$ es una solución de $z^3 - i\,z = 0$

15- Si $z = x + i\,y$ y $\bar{z} = x - i\,y$, calcule:

a) $z + \bar{z} =$

b) $z - \bar{z} =$

c) $z \cdot \bar{z} =$

16- Demuestre:

a) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

b) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

17- Si $w = (x + y + 2) + i\,(x^2 + y)$, ¿ para qué valores de x e y es $w = 0$?

18- Resuelva y exprese el resultado final en forma binómica:

a) $(5\,\underline{|20^\circ})\,(3\,\underline{|40^\circ})$

b) $\left(\dfrac{4\,\underline{|30^\circ} \times 4\,\underline{|60^\circ}}{2\,\underline{|15^\circ}}\right)^4$

c) $\dfrac{[2(\cos 15^\circ + i\,\mathrm{sen}\,15^\circ)]^7}{[4(\cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)]^3}$

19- Resuelva:

a) $z^5 - 32 = 0$

b) $i\,z^4 - (i + \sqrt{3}\,) = 0$

c) $(-i + 2)\,z + (-3 + i) = 0$

d) $z^3 + 4iz = 0$

e) $z^2 + (i - 2)\,z + (3 - i) = 0$

f) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 1

1.- a) $8i$ b) $-9+7i$ c) $4-2i$ d) $-1-i$ e) $-12-5i$ g) $-2+2\sqrt{3}\,i$
h) 1 i) i j) $2+2\sqrt{3}\,i$

2.- a) $z=2+i$ b) $z=3-i$ c) $z=-1$ d) $z=2+i$

4.- $x_1=1 \wedge x_2=-4$; $w_1=-8i \wedge w_2=17i$

5.- a) $z=5\sqrt{2}\,\underline{|7\pi/4}$ c) $z=16\,\underline{|\pi/3}$ e) $z=2\,\underline{|0}$ h) $z=5\,\underline{|3\pi/2}$
i) $z=2\sqrt{2}\,\underline{|7\pi/6}$ j) $z=2\sqrt{2}\,\underline{|5\pi/4}$ l) $z=1\,\underline{|3\pi/2}$

6.- a) $\sqrt{2}$ b) 1

7.- a) $6\sqrt{2}\,(\cos\pi/3+i\,\mathrm{sen}\,\pi/3)$ b) $4(\cos\pi/6+i\,\mathrm{sen}\,\pi/6)$ f) $8(\cos\pi/6+i\,\mathrm{sen}\,\pi/6)$

8.- a) $1/8\,(\cos 3\pi/2+i\,\mathrm{sen}\,3\pi/2)$ d) $64\,(\cos 0+i\,\mathrm{sen}\,0)$

9.- $z_0=2\,\underline{|\pi/8}$, $z_1=2\,\underline{|5\pi/8}$, $z_2=2\,\underline{|9\pi/8}$, $z_3=2\,\underline{|13\pi/8}$

10.- $z_0=2\,\underline{|\pi/3}$, $z_1=2\,\underline{|\pi}$, $z_2=2\,\underline{|5\pi/3}$

11.-
a) $1\,\underline{|0}$, $1\,\underline{|2\pi/3}$, $1\,\underline{|4\pi/3}$ c) $2\,\underline{|\pi/20+k\,2\pi/5}$ ($k=0,1,2,3,4$)

b) $1\,\underline{|\pi/6}$, $1\,\underline{|5\pi/6}$, $1\,\underline{|3\pi/2}$ d) $1\,\underline{|\pi/12+k\,\pi/3}$ ($k=0,1,2,3,4,5$)

12.- a) $-i$ b) $0.2+0.6i$

15.- a) $2x$ b) $2iy$ c) x^2+y^2

17.- $x_1=2 \wedge y_1=-4$; $x_2=-1 \wedge y_2=-1$

18.- a) $7.5+i\,7.5\sqrt{3}$ b) $2048-2048\sqrt{3}\,i$ c) $\sqrt{3}-i$

19.- a) $2\,\underline{|k\,2\pi/5}$ ($k=0,1,2,3,4$) b) $\sqrt[4]{4}\,\underline{|5\pi/12+k\,\pi/2}$ ($k=0,1,2,3$)
d) $z_1=0$; $z_2=2\underline{|3\pi/4}$; $z_3=2\underline{|7\pi/4}$ e) $z_1=(1-2i)$; $z_2=(1+i)$
f) $z_1=1\,\underline{|\pi/3}$, $z_2=1\,\underline{|2\pi/3}$, $z_3=1\,\underline{|4\pi/3}$, $z_4=1\,\underline{|5\pi/3}$

PRÁCTICO Nº 2: Elementos de Topología del Plano Complejo

20- Calcule la distancia entre z_1 y z_2 si:

a) z_1 : origen $z_2=1-2i$
b) $z_1=2+3i$ $z_2=-1+3i$
c) $z_1=1+i$ $z_2=1-i$
d) $z_1=2$ $z_2=1+i$
e) $z_1=2+i$ $z_2=2+i$
f) $z_1=-3$ $z_2=2i$

21- Escriba la ecuación de:

a) La circunferencia unidad,
b) La circunferencia centrada en el origen y de radio 4,

c) El disco cerrado de radio 2 y centro $-1 + \sqrt{2}\,i$,
d) El disco abierto de radio 1 y centro i
e) La circunferencia de centro $1 + i$ que pasa por el origen.

22- Grafique las curvas y regiones del plano complejo descriptas por las siguientes expresiones. Determine, si dichos conjuntos son abiertos o cerrados, conexos o no, dominios, acotados o no.

a) $\mathrm{Re}(z) = 2$
b) $\mathrm{Re}(z) \geq 2$
c) $\mathrm{Im}(z) < 1$
d) $\mathrm{Re}(z + 2) = 0$
e) $\mathrm{Re}(z + iz) \leq 1$
f) $|z| = 2$
g) $|z - 2 + i| \leq 2$
h) $|z + 1| = 2$
i) $\arg(z) = \pi/4$
j) $1 \leq |z| \leq 2$
k) $1 < |z| < 2$
l) $\arg(z) < \pi/2$
m) $0 < |z - i| \leq 2$
n) $|\bar{z} - 1| \leq 2$
o) $\mathrm{Re}(z^2) > 0$
p) $0 \leq \mathrm{Im}(z) < 1$
q) $|3z + 2| < 1$
r) $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4$
s) $\pi/2 < \arg(z) < \pi \wedge |z| > 2$
t) $\mathrm{Im}(z^2) > 0$
u) $|z - 4| > |z|$
v) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| > 2$
w) $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$
x) $0 \leq \mathrm{Re}(iz) \leq 1$
y) $|\mathrm{Re}(z)| < 2$
z) $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$

EJERCICIOS ADICIONALES

23- Pruebe que : $\mathrm{Re}(z) > 0$ y $|z - 1| < |z + 1|$ determinan el mismo conjunto en el plano.

24- Verifique que el conjunto $S = \{ z \,/\, |z| < 1 \} \cup \{ z \,/\, 2 < |z| < 4 \}$ a) es abierto ; b) no es conexo ; c) no es dominio.

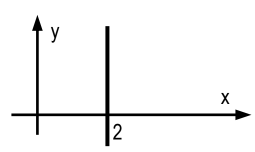
25- Muestre que los puntos z del plano complejo que verifican la desigualdad $|z + i| < |z - 1|$ forman un dominio no acotado.

■ **RESPUESTAS** - Práctico 2

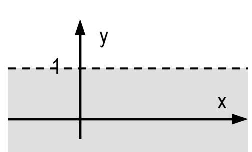
20 .- a) $\sqrt{5}$ b) 3 c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) 0 f) $\sqrt{13}$

21.- a) $|z| = 1$ b) $|z| = 4$ c) $|z + 1 - \sqrt{2}\,i| \leq 2$ d) $|z - i| < 1$ e) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$

22.- a) cerrado, conexo, no acotado.

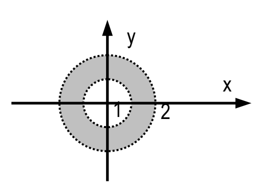


c)

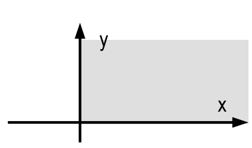


abierto, conexo , dominio, no acotado.

k) abierto, conexo, dominio, acotado.

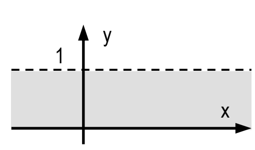


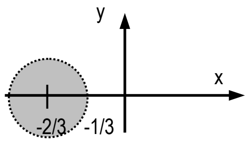
l)



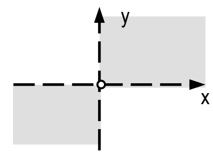
ni abierto , ni cerrado, conexo, no acotado.

p) ni abierto , ni cerrado, conexo, no acotado.



q) 

abierto, conexo, dominio, acotado.

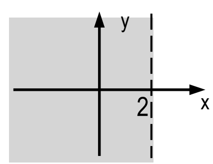
t) abierto, no conexo, no acotado. 

u) $|z - 4| > |z|$ por definición de valor absoluto

$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} > \sqrt{x^2 + y^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros

$(x - 4)^2 + y^2 > x^2 + y^2$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 > x^2 + y^2$ $\Rightarrow$ $-8x + 16 > 0$ despejando $\mathbf{x < 2}$

por lo tanto la región es 

abierto , conexo, dominio, no acotado.

v) $\left|\dfrac{z + 1}{z - 1}\right| > 2$ aplicando propiedad del valor absoluto

$\dfrac{|z + 1|}{|z - 1|} > 2$ $\Rightarrow$ $|z + 1| > 2\,|z - 1|$ por definición de valor absoluto

$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} > 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ elevando al cuadrado

$(x + 1)^2 + y^2 > 4\,[(x - 1)^2 + y^2]$ desarrollando

$x^2 + 2x + 1 + y^2 > 4\,[x^2 - 2x + 1 + y^2]$ $\Rightarrow$ $x^2 + 2x + 1 + y^2 > 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$

sacando factor común 3

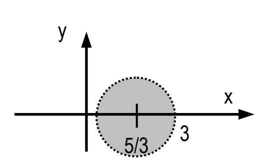
$0 > 3\,(x^2 - \frac{10}{3}x + 1 + y^2)$ dividimos por 3 ambos miembros

$0 > (x^2 - \frac{10}{3}x + 1 + y^2)$ completando cuadrado en x

$[\,2x\,b = -\frac{10}{3}x \Rightarrow b = -\frac{5}{3}\,]$ sumamos y restamos el cuadrado de b, $\frac{25}{9}$

$0 > (x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} + 1 + y^2)$ operando

$0 > (x - \frac{5}{3})^2 + y^2 - \frac{16}{9}$ $\Rightarrow$ $\frac{16}{9} > (x - \frac{5}{3})^2 + y^2$



por lo que la región es un disco abierto de centro $(\frac{5}{3}, 0)$ y radio $\frac{4}{3}$

Por lo tanto la región es un dominio (abierto y conexo) acotado.

PRÁCTICO Nº 3 : Funciones de una Variable Compleja

26- Determine el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^2 + 2z$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 3}$ c) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + z + 1}$

27- En las siguientes funciones $w = f(z)$, determine $u = \mathrm{Re}(w)$; $v = \mathrm{Im}(w)$

[Ayuda: exprese $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ **]**

a) $w = z^2 + 2iz$

b) $w = i z^2 + z - 1$

c) $w = z^3 + 3z^2$

d) $w = i\,|z|$

e) $w = 1/z$

f) $w = \dfrac{z^2 + 1}{2z}$

g) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$

h) $w = \dfrac{1}{z - 1}$

i) $w = e^z$

j) $w = e^{iz}$

k) $w = e^{1 - z}$

l) $w = z.\,e^z$

m) $w = i\,e^{-z}$

n) $w = e^{\bar{z}}$

28- Calcule los siguientes límites , si existen , y analice si las funciones son continuas en dichos puntos:

a) $\lim\limits_{z \to i} (z\,.\,\bar{z})$

b) $\lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$

c) $\lim\limits_{z \to -2i} \dfrac{(z^2 + 2(i+1)z + 4i)}{z + 2}$

d) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$

29- Determine los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{2z - 3}{z^2 + 2z + 2}$ b) $f(z) = \dfrac{3z^2 + 4}{z^4 - 16}$ c) $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 1}$

30- Dadas las siguientes funciones, determine:

i) Sus componentes u y v

ii) Cuáles son analíticas y su dominio de analiticidad;

iii) La derivada (expresada en función de z) de las funciones analíticas:

a) $f(z) = z^2 - 2z$

b) $f(z) = z^2 + 5iz - i$

c) $f(z) = \dfrac{1}{2z}$

d) $w = x^2 + i y^3$

e) $f(z) = i z^2 - 3z$

f) $f(z) = z^3 - iz$

g) $w = z\,.\,\bar{z}$

h) $f(z) = (2 + i)z - z^2$

i) $w = i\,.\,\bar{z} - 3z^2$

j) $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}$

k) $w = x^2 y + i x$

l) $w = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

31- Verifique que las siguientes funciones son enteras [analíticas en todo el plano complejo] y calcule su derivada en $z_0 = 2 + i$

a) $f(z) = (2 + 3i)z + z^3 + 3$ b) $f(z) = z^4$ c) $f(z) = i z^2 - (1 - i)z$

32- Determine en qué puntos no son analíticas las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{1 + 2z}{z(z^2 - 1)}$

b) $f(z) = \dfrac{2 + z}{z^2 + 2z + 2}$

c) $f(z) = \dfrac{i + z^3}{z^2 - 3z + 2}$

d) $f(z) = \dfrac{z - 2}{(z + 1)(z^2 + 1)}$

33- Dada la función u :

i) Verifique que es armónica
ii) Halle la función armónica conjugada v más general
iii) Construya la función analítica más general $f = u + iv$ y exprésela en función de z:

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$
b) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$
c) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
d) $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 2xy + 3x$
e) $u(x, y) = -3x^2y + y^3 + x + 2y$
f) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + y + 4$

34- Dada la función v :

i) Verifique si es armónica.
ii) Halle, de ser posible, la función armónica conjugada u más general
iii) Construya, de ser posible la función analítica más general $f = u + iv$ y exprésela en función de z:

a) $v(x, y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x$
b) $v(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$
c) $v(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
d) $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y - 3$

35- Sea f analítica tal que $\text{Re}[f'(z)] = 2y + 3$, siendo $f(0) = -4i$ y $f(i) = 0$.
[**Recuerde** : $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$]

a) Halle $f = u + iv$ y exprésela en función de z.
b) Calcule $f(2 + i)$

36- Sea f analítica tal que $\text{Re}[f'(z)] = 3x^2 - 4y - 3y^2$, siendo $f(-1) = 5$ y $f(1 + i) = 0$. Halle $f = u + iv$ y exprésela en función de z.

EJERCICIOS ADICIONALES

37- En las siguientes funciones, calcule $f(1 - i)$

a) $f(z) = z^2 - 2z$
b) $f(z) = \dfrac{z}{1 - z}$
c) $f(z) = z^3 - i\,\bar{z}$

38- Sea $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$. Calcule:

a) $f(i)$
b) $f(1 + i)$
c) $f(i - 2)$

39- Sea $f(z) = \dfrac{z+2}{2z-1}$. Calcule todos los z tales que:

a) $f(z) = i$
b) $f(z) = 2 - 3i$
c) $f(z) = z$

40- Exprese w en función de z. (**Recuerde** que : $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$)

a) $w = (x - y) + i(x + y)$
b) $w = (2xy + 2x - 1) + i(y^2 + 2y - x^2)$
c) $w = (x^2 - y^2) + i\,2xy$
d) $w = (x^2 - y^2 + 2y) + i(2xy + 2x)$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 3

26.- a) $D = \mathbb{C}$ b) $D = \mathbb{C} - \{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i\}$ c) $D\ \mathbb{C} - \{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} ; \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\}$

27.- a) $\boldsymbol{u}(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$ $\boldsymbol{v}(x,y) = 2xy + 2x$

c) $\boldsymbol{u}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$ $\boldsymbol{v}(x, y) = 3x^2 y - y^3 + 6xy$

d) $\boldsymbol{u}(x, y) = 0$ $\boldsymbol{v}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $\boldsymbol{u}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\boldsymbol{v}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$

g) $\boldsymbol{u}(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $\boldsymbol{v}(x, y) = -\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

i) $\boldsymbol{u}(x, y) = e^x \cos y$ $\boldsymbol{v}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

l) $\boldsymbol{u}(x, y) = e^x (x.\cos y - y.\operatorname{sen} y)$ $\boldsymbol{v}(x,y) = e^x (x.\operatorname{sen} y + y.\cos y)$

n) $\boldsymbol{u}(x, y) = e^x \cos y$ $\boldsymbol{v}(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y$

28.- a) 1 ; continua b) no existe ; discontinua d) $4 + 4\,i$; discontinua

29.- a) $z = -1 \pm i$ b) $z = 2 \underline{|\,k\,.\,\pi/2}$ ($k = 0, 1, 2, 3$)

30.- a) $\boldsymbol{u} = x^2 - y^2 - 2x$; $\boldsymbol{v} = 2xy - 2y$; analítica en $\mathbb{C}$; $f'(z) = 2z - 2$

c) $\boldsymbol{u} = \dfrac{x}{2(x^2 + y^2)}$; $\boldsymbol{v} = -\dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$; analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$; $f'(z) = -\dfrac{1}{2z^2}$

g) $\boldsymbol{u} = x^2 + y^2$; $\boldsymbol{v} = 0$; no es analítica en ningún punto.

32.- a) -1, 0, 1 b) $-1 + i$, $-1 - i$ c) 1, 2

33.- a) $\boldsymbol{v}(x, y) = 2y - y^2 + x^2 + k$; $f(z) = 2z + i\,z^2 + i\,k$

b) $\boldsymbol{v}(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + k$; $f(z) = 2z^2 - i\,z^3 + i\,k$

e) $\boldsymbol{v}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y - 2x + k$; $f(z) = i\,z^3 + (1 - 2i)\,z + i\,k$

34.- a) $\boldsymbol{u}(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y + k$; $f(z) = (1 + i)\,z^2 - (2 + 3i)\,z + k$

c) $\boldsymbol{u}(x, y) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} + k$; $f(z) = -\dfrac{1}{z} + k$

35.- a) $f(z) = 3z - i\,z^2 - 4\,i$ b) $f(2 + i) = 10 - 4\,i$

36.- $f(z) = z^3 + 2i\,z^2 + 6 - 2\,i$

37.- a) $f(1 - i) = -2$ b $f(1 - i) = -1 - i$ c) $f(1 - i) = -1 - 3i$

38.- a) $f(i) = i$ b) $f(1 + i) = -1 + 2i$ c) $f(i - 2) = -2/5 + i/5$

39.- a) $z = -i$ b) $z = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}i$ c) $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

40.- a) $\boldsymbol{w} = (1 + i)z$ b) $\boldsymbol{w} = -i\,z^2 + 2z - 1$ c) $\boldsymbol{w} = z^2$

RESUMEN TEORICO: Funciones Elementales

FUNCIONES ELEMENTALES

Se llaman operaciones elementales sobre las funciones *f*(z) y *g*(z) aquellas que dan uno de los siguientes resultados: $f(z) \pm g(z)$, $f(z).\, g(z)$, $f(z)/\, g(z)$, $[\, f(z)]^a$, $a^{f(z)}$, con *a* constante compleja.

Una **función elemental** es una función o la inversa de una función generada a partir de constantes y la variable independiente por medio de una sucesión finita de operaciones elementales. En la siguiente tabla se muestran algunas de las funciones elementales más importantes:

Nombre de la función	Representación
Polinomios	$\sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon z^\upsilon$
Funciones Racionales	$\sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon z^\upsilon \Big/ \sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon z^\upsilon$
Función Exponencial	e^z
Funciones Trigonométricas	sen z , cos z , tg z csec z , sec z , ctg z
Funciones Hiperbólicas	senh z , cosh z , tgh z csech z , sech z , ctgh z
Función Logarítmica	Ln z
Funciones Trigonométricas Inversas	$\text{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, $\text{tg}^{-1} z$ $\text{csec}^{-1} z$, $\sec^{-1} z$, $\text{ctg}^{-1} z$
Funciones Hiperbólicas Inversas	$\text{senh}^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$, $\text{tgh}^{-1} z$ $\text{csech}^{-1} z$, $\text{sech}^{-1} z$, $\text{ctgh}^{-1} z$
Función Potencial	z^a , con *a* complejo

Función Exponencial

La función exponencial se denota mediante e^z y se define considerando las funciones reales e^x , cos *y* y sen *y* mediante la fórmula:

$$e^z = e^x(\cos y + i \text{ sen } y) \quad ,\text{siendo } z = x + i\, y$$

Propiedades:

1) Si $x = 0 \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i \text{ sen } y$ (Fórmula de Euler). Notar que $|e^{iy}| = 1$.

   Además: $e^{-iy} = \cos y - i \text{ sen } y$ (recuerde que el seno es una función impar y que el coseno es una función par) .

2) Si z = r (cos θ + i sen θ) podemos expresar a z como z = r e $^{i\,\theta}$ (fórmula exponencial de un número complejo distinto de 0).

3) La función exponencial es periódica de período imaginario $2\pi i$, ya que e $^{z+2\pi i}$ = e ^{z} (compruébelo)

4) $e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$; $e^{-z} = \dfrac{1}{e^{z}}$; $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{zn}$ para n∈N

5) de la definición se puede ver que $e^z \neq 0$ (ya que para que ésta sea cero, como e^x no se anula nunca, deberían ser tanto el coseno y el seno ceros al mismo tiempo y esto no sucederá jamás.)

Como hemos dicho en el punto 3) la función exponencial es periódica y por dicha causa, se considera que **y** puede tomar los valores entre $0 \leq$ **y** $< 2\pi$. Esta franja la denominaremos *región fundamental* de e ^{z}. (Se puede considerar también la franja $-\pi < y \leq \pi$)

Veamos, ahora, que la derivada de la función exponencial al igual que para números reales, es igual a la misma exponencial.

Si e ^{z} = e ^{z} (cos y + i sen y) ⇒ Re (e ^{z}) = $\boldsymbol{u}$(x,y) = e^x cos y , Im (e^z) = $\boldsymbol{v}$(x,y) = e^x sen y

La derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

como puede observarse, las derivadas de primer orden son continuas en todos los puntos y además, se cumplen las condiciones de Cauchy- Riemann, de esto dicha función es derivable en todo punto z, por lo tanto la función exponencial es analítica en el campo complejo, es decir es una función entera o regular. Podemos expresar su derivada en función de las derivadas parciales como:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dz} = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$$

Por lo que: $f'(z) = f(z)$ ⇒ ***(e ^{z}) ' = e ^{z}***

Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas seno y coseno se definen por exponenciales, a partir de la fórmula de Euler y las restantes se definen en concordancia con las de variable real, entonces:

sen z = $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	**csec z =** $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ **(sen z ≠ 0)**
cos z = $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	**sec z =** $\dfrac{1}{\cos z}$ **(cos z ≠ 0)**
tg z = $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ **(cos z ≠ 0)**	**ctg z =** $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$ **(sen z ≠ 0)**

Como las funciones seno, coseno están definidas por medio de exponenciales, y éstas son periódicas, entonces también son periódicas y su período se indica a continuación:

Función	Período
sen z , cos z	**2 π *i***
tag z	**π *i***

Puede probarse, usando la definición que:

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

Como la función exponencial es entera, las funciones seno y coseno también lo son.

Las funciones tangente y secante, son analíticas salvo en los valores que se anula el coseno y las funciones cosecante y cotangente son analíticas salvo donde se anule el seno.

$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$	$\frac{d}{dz}(\sec z) = \operatorname{tg} z \sec z$
$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z$	$\frac{d}{dz}(\operatorname{csec} z) = -\operatorname{ctg} z \operatorname{csec} z$
$\frac{d}{dz}(\operatorname{tg} z) = \sec^2 z$	$\frac{d}{dz}(\operatorname{ctg} z) = -\operatorname{csec}^2 z$

Los ceros de las funciones seno y coseno son:

$\operatorname{sen} z = 0$ sii $\operatorname{Re}[z] = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3....$ y $\operatorname{Im}[z] = 0$

$\cos z = 0$ sii $\operatorname{Re}[z] = \pm \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, 3....$ y $\operatorname{Im}[z] = 0$

Funciones Hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen como:

senh z = $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$	**csech z =** $\frac{1}{\operatorname{senh} z}$ $(\operatorname{senh} z \neq 0)$
cosh z = $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$	**sech z =** $\frac{1}{\cosh z}$ $(\cosh z \neq 0)$
tgh z = $\frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$ $(\cosh z \neq 0)$	**ctgh z =** $\frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$ $(\operatorname{senh} z \neq 0)$

Puesto que e^z y e^{-z} son funciones enteras entonces seno y coseno hiperbólico también los son.

Las funciones tangente y secante hiperbólicas, son analíticas salvo en los valores que se anula el coseno hiperbólico y las funciones cosecante y cotangente hiperbólicas son analíticas salvo donde se anule el seno hiperbólico.

$\frac{d}{dz}$ (senh z) = cosh z	$\frac{d}{dz}$ (sech z) = - tgh z sech z
$\frac{d}{dz}$ (cosh z) **=** senh z	$\frac{d}{dz}$ (csech z) = - ctgh z csech z
$\frac{d}{dz}$ (tgh z) **=** sech ^{2} z	$\frac{d}{dz}$ (ctgh z) = - csech ^{2} z

Propiedades:

$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

$\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$

$\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$ $\qquad$ $\cosh(iz) = \cos z$

$\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$ $\qquad$ $\cos(iz) = \cosh z$

Función Logaritmo

El logaritmo de un número complejo z= x + i y, se denota por ln z o logz, se define como la función inversa de la función exponencial, es decir, un número w = ln z se define, para $z \neq 0$, por la relación $z = e^w$. Por lo tanto:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$$

La función logarítmica w = ln z, tiene infinidad de valores, ya que el $\arg(z) = (\theta + 2k\pi)$ con k = 0, ±1, ±2, ... , y $-\pi < \theta \leq \pi$.

Si el valor de k = 0, entonces se llama valor principal del logaritmo y generalmente se lo denota por Ln z.

Es obvio que los otros valores de ln z son , entonces, de la forma $\ln z = \operatorname{Ln} z \pm i\, 2k\pi$, tienen la misma parte real y sus partes imaginarias difieren en múltiplos de 2π, lo que condice con el período de la función exponencial.

Propiedades:

1- ln 1 = 0

2- $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$, $\ln(z_1/z_2) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$, $\ln(z_1^n) = n \ln(z_1)$

3- La función ln z es analítica en todo punto $z \neq 0$ y del eje real negativo. La derivada de ln z es 1/z.

Función Potencial Generalizada

Se define $z^a = e^{a \ln z}$ con a complejo, y se la puede expresar como $z^a = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2k\pi)]}$ o $z^a = e^{a[\operatorname{Ln}|z| + i\theta]}\, e^{i 2k\pi}$ k = 0, ±1, ±2, ...

Propiedades:

- La función potencial generalizada es una función de varios valores o multiforme
- La función $e^{a[Ln|z| + i\theta]}$ es uniforme y se llama ***valor principal*** de la función.
- La función z^a es derivable y su derivada es $a z^{a-1}$.

Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Supongamos que "trg" representa cualquiera de las funciones trigonométricas, esto es, seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente y que "hip" representa cualquiera de las funciones hiperbólicas, esto es, seno hiperbólico, coseno hiperbólico, etc...

La función trigonométrica inversa $w = trg^{-1}z$ es la inversa de la función trigonométrica **z = trg w**. Así por ejemplo, $w = sen^{-1}z$ (seno inverso o arcoseno) sii $z = sen\, w$.

La función hiperbólica inversa $w = hip^{-1}z$ es la inversa de la función trigonométrica **z = hip w**. Así por ejemplo, $w = tgh^{-1}z$ (tangente hiperbólica inversa o arcotangente hiperbólico) sii $z = tgh\, w$.

Funciones	Funciones trigonométrica inversa	Función hiperbólica inversa
Seno	$sen^{-1} z = \frac{1}{i} \ln (\sqrt{1 - z^2} + i z)$	$senh^{-1} z = \ln (z + \sqrt{1 + z^2})$
Coseno	$cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln (z + i \sqrt{1 - z^2})$	$cosh^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$
Tangente	$tg^{-1} z = \frac{i}{2} \ln (\frac{i + z}{i - z})$	$tgh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln (\frac{1 + z}{1 - z})$

- Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas son multiformes.

Las derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas son:

Funciones	Funciones trigonométrica inversa	Función hiperbólica inversa
Seno	$\frac{d}{dz} (sen^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$	$\frac{d}{dz} (senh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$
Coseno	$\frac{d}{dz} (cos^{-1} z) = - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$	$\frac{d}{dz} (cosh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$
Tangente	$\frac{d}{dz} (tg^{-1} z) = \frac{1}{1 + z^2}$	$\frac{d}{dz} (tgh^{-1} z) = \frac{1}{1 - z^2}$

PRÁCTICO Nº 4 : Funciones Elementales (Opcional)

41- Dadas las siguientes funciones, determine sus componentes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ y compruebe que son analíticas en todo $\mathbb{C}$.

a) $f(z) = e^{2z}$

b) $f(z) = e^{iz}$

c) $f(z) = e^{z^2}$

d) $f(z) = z \,.\, e^{z}$

e) $f(z) =$ sen $3z$

f) $f(z) = \cos iz$

g) $f(z) =$ senh $2z$

h) $f(z) = \cosh iz$

42- En cada una de las funciones del ejercicio anterior, calcule $f(1 + i)$.

43- Para cada una de las funciones del ejercicio 41, calcule $f\,'(1 - i)$.

44- Dé las componentes real e imaginaria de las siguientes funciones :

a) $f(z) = \text{Ln}(z^2)$ b) $f(z) = \text{Ln}(1 + z)$ c) $f(z) = z\,\text{Ln}\,z$

45- En cada una de las funciones del ejercicio anterior, calcule $f(2 - i)$ y $f\,'(-1 + i)$.

46- Calcule los valores principales de:

a) $(1 + i)^{i}$

b) i^{i}

c) $(1 + i)^{(1 - i)}$

d) i^{2+i}

47- Calcule los valores principales de:

a) $\text{sen}^{-1}\, 2i$

b) $\cos^{-1} 3$

c) $\text{senh}^{-1}\, 2i$

d) $\cosh^{-1}(-3i)$

48- Dada la función $\boldsymbol{u}$, verifique que es armónica, calcule la armónica conjugada $\boldsymbol{v}$ y construya la función analítica $f = \boldsymbol{u} + i\,\boldsymbol{v}$ más general (exprésela en función de z)

a) $\boldsymbol{u} = e^{x} \cos y$

b) $\boldsymbol{u} = \text{senh}\, x \cos y$

c) $\boldsymbol{u} = \text{Ln}(x^2 + y^2)$

d) $\boldsymbol{u} = x\, e^{x} \cos y - y\, e^{x}\, \text{sen}\, y$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 4

41.-

a) $\boldsymbol{u} = e^{2x} \cos 2y$ $\boldsymbol{v} = e^{2x}\, \text{sen}\, 2y$

b) $\boldsymbol{u} = e^{-y} \cos x$ $\boldsymbol{v} = e^{-y}\, \text{sen}\, x$

d) $\boldsymbol{u} = e^{x}(x \cos y - y\, \text{sen}\, y)$ $\boldsymbol{v} = e^{x}(y \cos y + x\, \text{sen}\, y)$

e) $\boldsymbol{u} = \text{sen}\, 3x \cosh 3y$ $\boldsymbol{v} = \cos 3x\, \text{senh}\, 3y$

g) $\boldsymbol{u} = \text{senh}\, 2x \cos 2y$ $\boldsymbol{v} = \cosh 2x\, \text{sen}\, 2y$

42.-

a) $f(1+i) = e^2(\cos 2 + i \operatorname{sen} 2) \cong -3.075 + 6.719\, i$

b) $f(1+i) = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) \cong 0.199 + 0.310\, i$

c) $f(1+i) = \cos 2 + i \operatorname{sen} 2 \cong -0.416 + 0.909\, i$

f) $f(1+i) = \cos 1 \cosh 1 + i \operatorname{sen} 1 \operatorname{senh} 1 \cong 0.834 + 0.989\, i$

g) $f(1+i) = \operatorname{senh} 2 \cos 2 + i \cosh 2 \operatorname{sen} 2 \cong -1.509 + 3.421\, i$

43.-

a) $f'(1-i) = 2e^2(\cos 2 - i \operatorname{sen} 2) \cong -6.150 - 13.438\, i$

b) $f'(1-i) = e(-\operatorname{sen} 1 + i \cos 1) \cong -2.287 + 1.469\, i$

d) $f'(1-i) = e(2\cos 1 - \operatorname{sen} 1) - i\, e(2 \operatorname{sen} 1 + \cos 1) \cong 0.650 - 6.043\, i$

e) $f'(1-i) = 3\cos 3 \cosh 3 + i\, 3 \operatorname{sen} 3 \operatorname{senh} 3 \cong -29.901 + 4.241\, i$

g) $f'(1-i) = 2\cos 2 \cosh 2 - i\, 2 \operatorname{sen} 2 \operatorname{senh} 2 \cong -3.131 - 6.596\, i$

44.- a) $\boldsymbol{u} = \operatorname{Ln}(x^2 + y^2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = \operatorname{arctg}(2xy / (x^2 - y^2)) = 2 \operatorname{arctg}(y/x)$

b) $\boldsymbol{u} = 1/2 \operatorname{Ln}(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = \operatorname{arctg}(y / (1+x))$

c) $\boldsymbol{u} = 1/2\, x \operatorname{Ln}(x^2 + y^2) - y \operatorname{arctg}(y/x)$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = x \operatorname{arctg}(y/x) + 1/2\, y \operatorname{Ln}(x^2 + y^2)$

45.-

a) $f(2-i) = \operatorname{Ln} 5 + i\, 2 \operatorname{arctg}(-1/2) \cong 1.609 - 0.927\, i$ $\qquad$ $f'(-1+i) = -1 - i$

b) $f(2-i) = 1/2 \operatorname{Ln} 10 + i \operatorname{arctg}(-1/3) \cong 1.151 - 0.322\, i$ $\qquad$ $f'(-1+i) = -i$

c) $f'(-1+i) = (\operatorname{Ln}\sqrt{2} + 1) + i \operatorname{arctg}(-1) \cong 1.347 + 2.356\, i$

46.-

a) $0.429 + 0.155\, i$ $\qquad$ b) 0.208

c) $2.808 - 1.318\, i$ $\qquad$ d) -0.208

47.-

a) $-1.444\, i$, $3.142 - 1.444\, i$ $\qquad$ b) $\pm 1.763\, i$

c) $\pm 1.317 + 1.571 i$ $\qquad$ d) $-1.818 + 1.571\, i$, $1.818 + 4.712\, i$

48.-

a) $\boldsymbol{v} = e^x \operatorname{sen} y + k$ $\qquad$ $f(z) = e^z + i\, k$

b) $\boldsymbol{v} = \cosh x \operatorname{sen} y + k$ $\qquad$ $f(z) = \operatorname{senh} z + i\, k$

c) $\boldsymbol{v} = 2 \operatorname{arctg}(y/x) + k$ $\qquad$ $f(z) = \operatorname{Ln}(z^2) + i\, k$

d) $\boldsymbol{v} = e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + k$ $\qquad$ $f(z) = z\, e^z + i\, k$

PRÁCTICO Nº 5 : Integrales en el Campo Complejo

49- Para cada función f y cada curva γ, calcule el valor de $\int_\gamma f(z)\,dz$

a) $f(z) = z - 1$; γ : $z(t) = (1+i)\,t$, $0 \le t \le 1$

b) $f(z) = \bar{z}$; γ : segmento rectilíneo de $z_1 = 0$ a $z_2 = 1 + 2i$

c) $f(z) = z$; entre los puntos $z_1 = 0$ a $z_2 = 1 + i$, siendo γ:

i) el segmento que une dichos puntos.

ii) la unión de los segmentos de recta de $\underline{0}$ a $\underline{i}$ y luego de i a $1 + i$

iii) la parábola $z(t) = t + i\,t^2$

d) $f(z) = 1 - \bar{z}$; entre los puntos $z_1 = 0$ a $z_2 = 1 + 2i$, siendo γ:

i) el segmento de recta que une dichos puntos.

ii) la unión de los segmentos de recta de $\underline{0}$ a $\underline{1}$ y luego de $\underline{1}$ a $1 + 2i$

e) $f(z) = z^2$; γ : $z(t) = (1 - i)\,t$, $1 \le t \le 2$

50- Si C es el contorno del cuadrado de vértices en 0, 1, $1 + i$, i recorrido en sentido positivo, demuestre que $\oint_C 3z\,dz = 0$.

51- Calcule $\int_C \bar{z}\,dz$ entre $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$, donde C es la semicircunferencia unidad superior;

52- Calcule $\oint_C \dfrac{dz}{z-3}$ donde C es la curva $|z - 3| = 2$ recorrida en sentido positivo.

[**Ayuda:** parametrice la curva en la forma $z(t) = 3 + 2e^{it}$, con $0 \le t < 2\pi$]

53- Calcule :

a) $\oint_C \dfrac{dz}{z+1}$ y C: $|z + 1| = 1$ recorrida en sentido negativo.

b) $\oint_C \dfrac{dz}{(z-2)^2}$ y C: $|z - 2| = 1$ recorrida en sentido negativo.

c) $\oint_C (z^2 - 1)\,dz$ alrededor de :

i) $|z| = 1$ con orientación positiva

ii) un cuadrado de vértices en (0,0) ; (0, 1) ; (1, 1); (1, 0) con orientación negativa.

iii) la curva unión de $C_1 : y = x^2$ de (0,0) a (1,1) y de $C_2 : x = y^2$ de (1, 1) a (0,0).

d) $\oint_C \dfrac{dz}{z-1}$ alrededor de :

i) $|z| = 2$ en sentido positivo

ii) $|z + 1| = 1$ en sentido positivo.

54- Para cada una de las siguientes funciones y considerando C: $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo :

i) Analice si es posible o no aplicar el Teorema de la Integral de Cauchy para calcular $\int_C f(z)\,dz$.

ii) Calcule, en todos los casos, el valor de la integral.

a) $f(z) = 1/z$

b) $f(z) = \text{Re}(z)$

c) $f(z) = z^2 e^z$

d) $f(z) = 1/(z-3)$

e) $f(z) = z^3 - z^2$

f) $f(z) = |z|$

55- Calcule el valor de cada una de las siguientes integrales:
[**Aplique** la fórmula de la integral de Cauchy]

a) $\oint_C \dfrac{z+2}{z^2-3z}\,dz$; C: $|z-3| = 2$

b) $\oint_C \dfrac{z}{z^2+4}\,dz$; C: $|z-i| = 2$

c) $\oint_C \dfrac{e^z}{z^3-4z}\,dz$; C: es el contorno del cuadrado determinado por las rectas $y = \pm 1$; $x = \pm 1$

d) $\oint_C \dfrac{z}{z^2-1}\,dz$; C: $|z| = 2$

e) $\oint_C \dfrac{dz}{2z^2-8z+10}$; C: $|z-2| = 2$

f) $\oint_C \dfrac{dz}{z^3-7z^2+12z}$; C: $|z-3| = 2$

g) $\oint_C \dfrac{z^2}{z^2-(1+2i)z+(-7+i)}\,dz$; C: $|z+2| = 2$

h) $\oint_C \dfrac{(z+2)}{2z^3-2z}\,dz$; C: $|z| = 2$

i) $\oint_C \dfrac{\text{sen } z}{z^2+1}\,dz$; C: $|z-i| = 1$

j) $\oint_C \dfrac{3z+2}{z\cos z}\,dz$; C: $|z| = 1$

k) $\oint_C \dfrac{e^z}{z^2-2z+2}\,dz$; C: $|z| = 2$

l) $\oint_C \dfrac{z^2+1}{z^2-2iz}\,dz$; C: $|z| = 3$

En todos los casos, considere C recorrida en sentido antihorario.

56- Calcule el valor de las siguientes integrales:
[**Aplique** la fórmula de la integral de Cauchy generalizada]

a) $\oint_C \dfrac{2z^2+1}{z^3}\,dz$; $C: |z| = 1$

b) $\oint_C \dfrac{3z}{z^3+2z^2}\,dz$; $C: |z| = 1$

c) $\oint_C \dfrac{z}{z^2-2z+1}\,dz$; $C: |z| = 2$

d) $\oint_C \dfrac{e^{2z}}{z^3}\,dz$; $C: |z-1| = 2$

e) $\oint_C \dfrac{dz}{(z^2+z)(z+2)^2}$; $C: |z+2| = 1.5$

EJERCICIOS ADICIONALES

57- Represente gráficamente los siguientes arcos de curvas:

a) $z(t) = 3 - i\,t$; $-1 \leq t \leq 1$

b) $z(t) = t - 2\,i\,t^2$; $-2 \leq t \leq 2$

c) $z(t) = (1 + 2\,i)\,t$; $0 \leq t \leq 3$

d) $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq \pi$

e) $|z - i| = 2$; en sentido antihorario

f) $y = 4 - x^2$; desde (0,4) hasta (2,0)

58- Para las siguientes curvas, determine si son simples y cerradas.

a) $z(t) = 2\,e^{i\,t}$; $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $z(t) = 2\,e^{i\,2\,t}$; $0 \leq t \leq 3\pi$

c) $z(t) = 2\,e^{i\,2\,t}$; $0 \leq t \leq \pi$

d) $z(t) = 2\,e^{i\,t}$; $0 \leq t \leq \pi$

59- Calcule el valor de las siguientes integrales por integración indefinida:

a) $\int_0^{i} z^3\,dz$

b) $\int_0^{1+i} e^z\,dz$

c) $\int_0^{i} \operatorname{sen} z\,dz$

d) $\int_0^{1-i} \operatorname{senh} 2z\,dz$

■ RESPUESTAS - Práctico 5

49.- a) -1 b) 5/2 c) i d) $-3/2 + 2i$ y $-3/2$

51.- $-\pi i$

52.- $2\pi i$

53.- a) $-2\pi i$ b) 0 c) *i)* 0 ; *ii)* 0; *iii)* 0 d) *i)* $2\pi i$; *ii)* 0

54.- a) no; $2\pi i$ b) no; πi c) si; 0

d) si ; 0 e) si; 0 f) no; 0

55.-

a) $\frac{10}{3}\pi i$

b) πi

c) $-\frac{\pi}{2} i$

d) $2\pi i$

e) 0

f) $-\frac{\pi}{6} i$

g) $(-8/5 - 6/5\, i)\,\pi$

h) 0

i) senh 1. $\pi i \cong 3.692\, i$

j) $4\pi i$

k) 2 sen 1 $.\pi.$ $e\, i \cong 14.372\, i$

l) -4π

56.-

a) $4\pi i$

b) $3\pi i$

c) $2\pi i$

d) $4\pi i$

e) $-\frac{\pi}{2} i$

59.-

a) 1/4

b) e(cos 1 + i sen 1) -1

c) - cosh 1 + 1 $\cong$ - 0.543

d) 1/2(cos 2 cosh 2 - i sen 2 senh 2)

PRÁCTICO Nº 6: Series de Números Complejos

60- Analice la convergencia de las siguientes series de números complejos:

a) $1 + \frac{8\,i}{1!} + \frac{(8\,i)^2}{2!} + \frac{(8\,i)^3}{3!} + \frac{(8\,i)^4}{4!} + \ldots\ldots$

b) $5i + \frac{(5\,i)^3}{3!} + \frac{(5\,i)^5}{5!} + \frac{(5\,i)^7}{7!} + \ldots\ldots.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\,i)^n}{3^n\, n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}{5^{n/2}}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7+3\,i)^n}{n!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+i)n}{(n+1)(n+2)}$

61- Determine y grafique el dominio de convergencia de las siguientes series de funciones:

a) $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$

b) $1 + \frac{2}{z+1} + \frac{4}{(z+1)^2} + \frac{8}{(z+1)^3} + \ldots\ldots..$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

62- Determine el radio de los círculos de convergencia de las siguientes series funcionales:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z)^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(z-i)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (z+2i)^n}{n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$

63- Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. Represente el dominio de convergencia en cada caso.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+ni}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)\, z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

64- Desarrolle las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor de z_0 y calcule el radio de convergencia de dicha serie:

a) $f(z) = \frac{2}{z+2}$; $z_0 = 0$

b) $f(z) = e^{-2z}$; $z_0 = 0$

c) $f(z) = \text{Ln } z$; $z_0 = 1$

d) $f(z) = \text{sen } z$; $z_0 = 0$

e) $f(z) = e^{-z}$; $z_0 = 1$

f) $f(z) = \cos z$; $z_0 = \pi/2$

g) $f(z) = z \,.\, e^{2z}$; $z_0 = 0$

h) $f(z) = \text{sen}(z^2)$; $z_0 = 0$

i) $f(z) = \cos(\text{Ln } z)$; $z_0 = 1$

j) $f(z) = \text{sen}^2(z)$; $z_0 = 0$

65- En cada una de las siguientes funciones determine, <u>sin hacer el desarrollo</u>, cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias con centro en z_0 que representa a dicha función:
[**<u>Ayuda</u>:** En general el radio de convergencia será igual a la distancia de z_0 al punto singular más próximo de f.]

a) $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^2+4}$; $z_0 = 0$ c) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$; $z_0 = 0$

b) $f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-4)^2}$; $z_0 = 2$ d) $f(z) = \frac{z+3}{z^3 - 5z^2 + 4z}$; $z_0 = 2 + i$

66- Recordando que por serie geométrica es:

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$ si $|z| < 1$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$ si $|z| < 1$

escriba los desarrollos de Mac Laurin e indique su radio de convergencia, de :

a) $f(z) = \frac{4}{1-z}$ c) $f(z) = \frac{2}{1-2z}$

b) $f(z) = \frac{1}{2+z}$ d) $f(z) = \frac{1}{z-4}$

67- Desarrolle en serie de Mac Laurin e indique radio de convergencia de la función f.
[**Sugerencia**: descomponga ,en caso de ser necesario, en fracciones simples]

a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$

c) $f(z) = \dfrac{4}{8-6z+z^2}$

d) $f(z) = \operatorname{sen}^3 z$

68- Desarrolle en serie de potencias las siguientes funciones alrededor de $z_0 = 0$ considerando que f es el producto de dos funciones y las propiedades correspondientes. Indique dominio de convergencia.

a) $f(z) = z^2 . e^{3z}$

b) $f(z) = z. \operatorname{sen} z$

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 2z^2}$

e) $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3}$

f) $f(z) = z^2 e^{-z^4}$

69- Escriba la serie de Laurent que representa a las siguientes funciones en los dominios indicados :

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ en *i)* $D_1 = \{ z / |z| < 3\}$; *ii)* $D_2 = \{ z / |z| > 3\}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ en $D = \{ z / 0 < |z| < 1\}$

c) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+1)}$ en $D = \{ z / 0 < |z+2| < 1\}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z+1)}$ en *i)* $D = \{ z / 1 < |z| < 3\}$ *ii)* $D = \{ z / |z| > 3\}$ *iii)* $D = \{ z / 0 < |z+1| < 2\}$ *iv)* $D = \{ z / |z| < 1\}$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ en *i)* $D = \{ z / 0 < |z| < 2\}$ *ii)* $D = \{ z / |z| > 2\}$

f) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ en *i)* $D_1 = \{ z / 1 < |z| < 2\}$ *ii)* $D_2 = \{ z / |z| > 2\}$ *iii)* $D_3 = \{ z / |z-1| > 1\}$ *iv)* $D_4 = \{z / 0 < |z-2| < 1\}$ *v)* $D_5 = \{ z / |z| < 1\}$

g) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$ en $D = \{ z / 0 < |z| < 2\}$

h) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ en $D = \{ z / |z| > 0\}$

i) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$ en $D = \{ z / |z| > 0\}$

j) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$ en $D = \{ z / |z| > 0\}$

k) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ en *i)* $D = \{ z / 0 < |z-1| < 2\}$ *ii)* $D = \{ z / |z| < 1\}$ *iii)* $D = \{ z / 1 < |z| < 3\}$ *iv)* $D = \{ z / |z| > 3\}$

l) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ en $D = \{ z / \ |z| > 0\}$

m) $f(z) = z \,\text{Ln}\, z$ en $D = \{z / |z - 1| < 1\}$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 6

60.- a) conv. b) conv. c) conv. d) conv. e) conv. f) div.

61.- a) $|z| < 1$ b) $|z + 1| > 2$ c) $x > -1/2$ d) $x < 0$

62.- a) 1 b) 5 c) 1 d) 1 e) 1/4 f) 2 g) ∞
h) 1 i) ∞

63.- a) 1 b) 3 c) ∞ d) 1 e) 1/2 f) e

64.- a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n z^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{e.n!}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi/2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^n}{(n-1)!}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{4n-2}}{(2n-1)!}$

i) $1 - \dfrac{(z-1)^2}{2!} + \dfrac{3(z-1)^3}{3!} - \dfrac{10(z-1)^4}{4!} + \dfrac{40(z-1)^5}{5!} - \dfrac{190(z-1)^6}{6!} + \dfrac{1050(z-1)^7}{7!} - \ldots$

j) $\dfrac{2^1}{2!} z^2 - \dfrac{2^3 z^4}{4!} + \dfrac{2^5 z^6}{6!} - \dfrac{2^7 z^8}{8!} + \dfrac{2^9 z^{10}}{10!} + \ldots$

65.- a) 2 b) 1 c) 1 d) $\sqrt{2}$

66.- a) $f(z) = 4 + 4z + 4z^2 + 4z^3 + \ldots$ si $|z| < 1$

b) $f(z) = 1/2 - (1/4)z + (1/8)z^2 - (1/16)z^3 + \ldots$ si $|z| < 2$

c) $f(z) = 2 + 4z + 8z^2 + 16z^3 + \ldots$ si $|z| < 1/2$

d) $f(z) = -1/4 - (1/16)z - (1/64)z^2 - \ldots$ si $|z| < 4$

67.- a) $f(z) = 1/2 + (3/4)z + (7/8)z^2 + (15/16)z^3 + \ldots$ si $|z| < 1$

b) $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots$ si $|z| < 1$

c) $f(z) = 1/2 + (3/8)z + (7/32)z^2 + (15/128)z^3 + \ldots$ si $|z| < 2$

d) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - 3^{2n-1})\, z^{2n-1}}{4(2n-1)!}$

68.- a) $f(z) = z^2 + 3z^3 + (9/2!)z^4 + (27/3!)z^5 + \ldots$

b) $f(z) = z^2 - (1/3!)z^4 + (1/5!)z^6 - (1/7!)z^8 + \ldots$

c) $f(z) = 1 - (1/3!)\, z^2 + (1/5!)\, z^4 - (1/7!)\, z^6 + \ldots$ si $0 < |z|$

d) $f(z) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} - \frac{1}{8} - \frac{z}{16} - \frac{z^2}{32} - \ldots$ si $0 < |z| < 2$

e) $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$

f) $f(z) = z^2 - z^6 + \frac{z^{10}}{2!} - \frac{z^{14}}{3!} + \ldots$

69.-

a) *i)* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$ *ii)* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{z^{n+1}}\right)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{n-2}\right)$

c) $\frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + (z+2)^3 + \ldots$

d) *i)* $\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{z^n}{3^{n+1}}\right)\right]$

ii) $\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, 3^n}{z^{n+1}}\right)\right]$

iii) $\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z+1)^{n-1}}{2^n}\right]$

iv) $\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(z^n - \frac{z^n}{3^{n+1}}\right)\right]$

e) *i)* $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}$ *ii)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+2}}$

f) *i)* $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots$

ii) $-\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{7}{z^3} - \frac{15}{z^4} - \ldots$

iii) $-\frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-1)^4} - \ldots$

iv) $-\frac{2}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + (z-2)^4 - \ldots$

v) $-\frac{z}{2} - \frac{3}{4}z^2 - \frac{7}{8}z^3 - \frac{15}{16}z^4 - \ldots$

g) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\, z^{n-1}}{2^{n+1}}\right)$

h) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots$

i) $\frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots$

j) $\frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - \ldots$

k) i) $-\frac{1}{2(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$ *ii)* $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{3^n})\, z^n$

iii) $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{z^n}{3^n})$ *iv)* $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(-1+3^{n+1})$

l) $\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} - \frac{z^3}{720} + \ldots$

m) $(z-1) + \frac{(z-1)^2}{1.2} - \frac{(z-1)^3}{2.3} + \frac{(z-1)^4}{3.4} + \ldots.$

PRÁCTICO Nº 7: Residuos

70- Determine y clasifique los puntos singulares aislados de cada una de las siguientes funciones (recurra al desarrollo en serie de Laurent cuando sea necesario):

a) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$

c) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

d) $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 4z + 4}$

e) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$

f) $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$

g) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}$

h) $f(z) = z^2\, e^{1/z}$

71- Calcule los residuos en todos los puntos singulares aislados de cada una de las funciones del ejercicio anterior.

72- Calcule los residuos de las siguientes funciones en todos sus polos:

a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z}$

b) $f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$

c) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 5}$

d) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$

e) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 4}$

f) $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - z^2}$

g) $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$

h) $f(z) = \frac{z^2}{1 - z^4}$

i) $f(z) = \frac{4z - 1}{2z^2 + 6z + 4}$

j) $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$

k) $f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

l) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2iz - 10}$

m) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2 - z - 2}$

n) $f(z) = \frac{1}{z^2 - (4+4i)z + 1 + 8i}$

o) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$

p) $f(z) = \frac{z}{z^4 + 16}$

EJERCICIOS ADICIONALES

73- Estudie el comportamiento de las siguientes funciones en el infinito. Si se presenta una singularidad en el infinito, clasifíquela. Y si esa singularidad es un polo, calcule el residuo de la función:

a) $f(z) = z^2 e^{1/z}$

b) $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$

d) $f(z) = \dfrac{z^5}{1 - z^2}$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 7

70.- a) polos de orden 1 en $z_0 = 1$ y en $z_1 = 3$

c) singularidad evitable en $z_0 = 0$; polos de orden 1 en $z = 2n\pi i$

d) polo de orden 2 en $z_0 = 2$

e) polos de orden 1 en $z = n\pi$, con n entero

f) polo de orden 3 en $z_0 = 0$

g) polos de orden 1 en $z = 1/n$, con n entero; singularidad esencial no aislada en $z_0 = 0$.

h) Singularidad aislada en $z_0 = 0$.

71.- a) $-1/2$ en $z_0 = 1$; $1/2$ en $z_1 = 3$

c) 0 en $z_0 = 0$; $2n\pi i$ en $z = 2n\pi i$

d) 1 en $z_0 = 2$

e) 1 si n es par ; -1 si n es impar

g) $-1/(\pi n^2)$ si n es par ; $1/(\pi n^2)$ si n es par

h) 1/6

72.- a) $-1/2$ en $z_0 = 0$; $3/2$ en $z_1 = 2$

b) -1 en $z_0 = 0$

c) $1/2 + i$ en $z_0 = 2 - i$; $1/2 - i$ en $z_1 = 2 + i$

d) 1 en $z_0 = 0$

e) 0 en $z_0 = -2$

f) -2 en $z_0 = 0$; e en $z_1 = 1$

h) $1/4$ en $z_0 = -1$; $-1/4$ en $z_1 = 1$; $-1/4\, i$ en $z_2 = -i$; $1/4\, i$ en $z_3 = i$

j) $1/17$ en $z_0 = -1$; $-1/34 + 9/68\, i$ en $z_1 = -4i$; $-1/34 - 9/68\, i$ en $z_2 = 4i$

l) $1/2 - 1/6\, i$ en $z_0 = -3 + i$; $1/2 + 1/6\, i$ en $z_1 = 3 + i$

n) $1/2\, i$ en $z_0 = 2 + i$; $-1/2\, i$ en $z_1 = 2 + 3i$

o) $1/4\, i$ en $z_0 = -i$; $-1/4\, i$ en $z_1 = i$

73.- a) polo de orden 2 en $z_0 = \infty$; Res $f(z) = 1$

b) singularidad esencial aislada en $z = \infty$

c) singularidad evitable en $z = \infty$

d) polo de orden 3 en $z = \infty$; Res $f(z) = -1$

PRÁCTICO Nº 8: Cálculo de Integrales por Residuos

74- Calcule, por residuos, las siguientes integrales:

a) $\oint_\gamma \frac{z}{z-2}\,dz$; $\gamma : |z-2| = 1$

b) $\oint_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$; $\gamma : |z| = 2$

c) $\oint_\gamma \frac{z+2}{z^3-z}\,dz$; $\gamma : |z| = 3$

d) $\oint_\gamma \frac{z}{(z-1)^3}\,dz$; $\gamma : |z| = 2$

e) $\oint_\gamma \frac{z^2+3}{z^3}\,dz$; $\gamma : |z| = 1$

f) $\oint_\gamma \frac{4}{z^3-2z^2+z}\,dz$; $\gamma : |z| = 3$

g) $\oint_\gamma \frac{1}{z^2-4z+5}\,dz$; $\gamma : |z| = 3$

h) $\oint_\gamma \operatorname{cotg}(\pi z)\,dz$; $\gamma : |z| = 1/2$

i) $\oint_\gamma \frac{2z^2+5}{(z+1)(z^2+1)}\,dz$; $\gamma : |z+i| = 1$

j) $\oint_\gamma \operatorname{tg} z\,dz$; $\gamma : |z| = 2$

k) $\oint_\gamma z^{-2} e^{-z}\,dz$; $\gamma : |z| = 1$

l) $\oint_\gamma \frac{\operatorname{cosec} z}{z}\,dz$; $\gamma : |z| = 2\pi/3$

75- Sea $\gamma : |z| = 1$ recorrida en sentido positivo. Calcule

a) $\oint_\gamma \frac{dz}{1+4z^2}$

b) $\oint_\gamma \frac{z}{1+9z^2}\,dz$

c) $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+6iz}$

d) $\oint_\gamma \frac{z+4}{z^4+5z^3+6z^2}\,dz$

e) $\oint_\gamma \frac{z^2 \operatorname{sen} z}{4z^2-1}\,dz$

f) $\oint_\gamma \left(\frac{z}{2z-i}\right)^2 dz$

76- Calcule las siguientes integrales reales:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{10-8\cos\theta}\,d\theta$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{6}{5+4\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

e) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{13-5\cos\theta}\,d\theta$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(x^2+4)}\,dx$

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{16+x^4}\,dx$

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+4)}\,dx$

j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$

k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$

l) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

m) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\,dx$

n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx$

o) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

■ **RESPUESTAS** - Práctico 8

74. - a) $4\pi i$ b) 0 c) 0 d) 0 e) $2\pi i$ f) 0

g) 0 h) $2i$ j) $-4\pi i$ k) $2\pi i$ l) 0

75.- a) 0 b) $2\pi i/9$ c) $\pi/3$ d) $-7\pi i/9$ e) $\pi i \operatorname{sen}(1/2)/4$ f) $-\pi/2$

76.- a) $\pi/3$ b) 4π c) $-\pi/3$ d) $\pi/6$

e) $13\pi/150$ f) π g) $\pi/6$ h) 0

i) $\pi/3$ j) $2\pi/\sqrt{3}$ k) $\sqrt{3}\,\pi/6$ l) $\sqrt{2}\,\pi/4$

m) $\sqrt{2}\,\pi/8$

PRÁCTICO Nº 9: Ecuaciones Diferenciales

77- Verifique si las funciones dadas son o no solución de la ecuación diferencial

a) $y'' - y = 0$ $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = \cosh x$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^{x}$

c) $xy' - y = x^2$ $y(x) = 3x + x^2$

d) $y'''' + 4y''' + 3y = x$ $y_1(x) = \frac{x}{3}$, $y_2(x) = e^{-x} + \frac{x}{3}$

e) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0 \quad x > 0$ $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = x^{-1}$

g) $y'' + y = \sec x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $y(x) = \cos x \ln(\cos x) + x \operatorname{sen} x$

h) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0 \quad x > 0$ $y_1(x) = x^{-2}$, $y_2(x) = x^{-2}\ln x$

78- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones, de variables separables y homogéneas:

a) $y' = \operatorname{sen} x + e^{x} - 5x$

b) $y' = -x/y$

c) $y' = 2x^2 y$

d) $y' = y/(1 + x^2)$

e) $y' = (y - x)/(y + x)$

f) $y' = y/x + (x^2 + y^2)/x^2$

g) $y' = (x^3 + y^3)/(xy^2)$

h) $y' = x^2/(1 - y^2)$

i) $y' = (x + 3y)/(x - y)$

j) $y' = \cos^2 x \cos^2 y$

k) $y' = x^2/(1 + y^2)$

l) $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y - 1)$

m) $y' = (y\cos x)/(1 + 2y^2)$

n) $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

o) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

p) $y' = x^2/y$

q) $y' = x^2/y(1 + x^3)$

r) $y' = (x^2 + 3y^2)/(2xy)$

79- Para cada uno de los siguientes incisos, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada:

a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$ b) $y' + y = xe^{-x} + 1$

c) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ d) $y' - y = 2e^{x}$

e) $y' + (1/x)y = 3\cos 2x \quad x > 0$ f) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x \quad x > 0$

g) $y' + 2xy = = 2x\, e^{-x^2}$ h) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

80- En cada caso encuentre la solución del problema con el valor inicial dado

a) $y' - y = 2x\, e^{2x}$ $y(0) = 1$

b) $y' + 2y = xe^{-2x}$ $y(1) = 0$

c) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$ $y(1) = ½$, $x > 0$

d) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$ $y(\pi) = 0$, $x > 0$

e) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

f) $x\,y' + (1+x)\,y = x$ — $y(\ln 2) = 1$

g) $x^3 y' + 4x^2 y = e^{-x}$ — $y(-1) = 0$

81- Encuentre la ecuación diferencial a coeficientes constantes cuya solución general es:

a) $(c_1 + c_2 x)\,e^{-3x}$
b) $c_1 e^{x} \operatorname{sen} 2x + c_2 e^{x} \cos 2x$

82- Determine si el par de funciones dado es linealmente independiente o dependiente:

a) $f(x) = x^2 + 5x$ — $g(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = \cos 3x$ — $g(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

c) $f(x) = e^{\lambda x} \cos\mu x$ — $g(x) = e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \;,\; \mu \neq 0$

d) $f(x) = e^{3x}$ — $g(x) = e^{3(x-1)}$

e) $f(x) = 3x - 5$ — $g(x) = 9x - 15$

f) $f(x) = x$ — $g(x) = x^{-1}$

83- Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$
b) $y'' + 3y' + 2y = 0$
c) $6y'' - y' - y = 0$
d) $25y'' - 20y' + 4y = 0$
e) $y'' + 5y' = 0$
f) $4y'' - 9y = 0$
g) $y'' - 9y' + 9y = 0$
h) $y'' - 2y' - 2y = 0$
i) $y'' - 6y' + 9y = 0$
j) $y'' + 2y' + y = 0$
k) $y'' + 4y = 0$
l) $8y'' + 14y' - 15y = 0$

84- Halle las soluciones con el valor inicial dado:

a) $y'' + 4y = 0$ — $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
b) $y'' + 4y' + 5y = 0$ — $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
c) $y'' - 2y' + 5y = 0$ — $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 2$
d) $y'' + y' + (5/4)\,y = 0$ — $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
e) $9y'' - 12y' + 4y = 0$ — $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
f) $9y'' + 6y' + 82y = 0$ — $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
g) $y'' + 4y' + 4y = 0$ — $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 1$

85- Aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada. Compruebe la respuesta mediante la aplicación del método de coeficientes indeterminados:

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$
b) $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
d) $4y'' - 4y' - 2y = 16\,e^{x/2}$

86- Encuentre la solución del problema con valor inicial dado:

a) $y'' + y' - 2y = 2x$ — $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
b) $y'' + 4y = x^2 + 3e^{x}$ — $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

c) $y'' - 2y' - 3y = 3x\,e^{2x}$ $\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

d) $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\,2x$ $\qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

e) $y'' + 2y' + 5y = 4\,e^{-x}\cos 2x$ $\qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

87- Verifique que las soluciones y_1 e y_2 satisfacen la ecuación homogénea correspondiente; luego encuentre una solución particular de la ecuación no homogénea dada:

a) $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1$, $x > 0$ $\qquad y_1(x) = x^2$; $\quad y_2(x) = x^{-1}$

b) $x^2 y'' + x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$, $x > 0$ $\qquad y_1(x) = x$; $\quad y_2(x) = x\,e^x$

EJERCICIOS ADICIONALES

88- Determine si cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales es exacta. En caso afirmativo encuentre su solución:

a) $(2x + 3) + (2y - 2)\,y' = 0$

b) $(2x + 4y) + (2x - 2y)\,y' = 0$

c) $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$

d) $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)\,y' = 0$

e) $(e^x \text{sen}\,y - 2y\,\text{sen}\,x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$

f) $(e^x \text{sen}\,y + 3y)\,dx - (3x - e^x \text{sen}\,y)\,dy = 0$

g) $(y\,e^{xy} \cos 2x - 2\,e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 2x)\,dx + (x\,e^{xy} \cos 2x - 3)\,dy = 0$

h) $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0 \quad x > 0; \quad y > 0$

i) $\dfrac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

89- Demuestre que las siguientes ecuaciones no son exactas, aunque se transforma en exactas si se las multiplica por el factor integrante dado. Resuelva las ecuaciones.

a) $x^2 y^3 + x(1 + y^2)\,y' = 0$ $\qquad \mu(x, y) = 1/(xy^3)$

b) $y\,dx + (2x - y\,e^y)\,dy = 0$ $\qquad \mu(x, y) = y$

c) $(x+2)\,\text{sen}\,y\,dx + x\cos y\,dy = 0$ $\qquad \mu(x, y) = x\,e^x$

90- Algunas veces es posible resolver una ecuación no lineal al realizar un cambio de variable dependiente que la convierta en una ecuación lineal. La clase más importante de estas ecuaciones es de la forma $\boxed{y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n}$ (**Ecuación de Bernoulli**).

a) Demuestre que si $n \neq 0$, entonces la sustitución $v = y^{1-n}$ reduce dicha ecuación a una lineal. Y si $n = 0$ o $n = 1$ dicha ecuación es lineal.

b) Resuelva la ecuación dada , usando la sustitución propuesta en el apartado anterior

i) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$, $x>0$ $\qquad$ *ii)* $y' = ry - ky^2$, $r>0$, $k>0$

iii) $y' + y = x\,y^{-1}$ $\qquad$ *iv)* $2xy' = 10x^3y^5 + y$

■ RESPUESTAS - Práctico 9

77.- Son todas soluciones

78.-

a) $y = -\cos x + e^x - 5/2\, x^2 + c$

b) $x^2 + y^2 = c$

c) $y = e^{\frac{2}{3}x^3 + c}$

d) $y = e^{\operatorname{arctg} x + c}$

e) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$

f) $\operatorname{arctg} y/x = \ln|x| + c$

g) $\frac{y^3}{3x^3} = \ln|x| + c$

h) $y - y^3/3 = \frac{x^3}{3} + c$

i) $\frac{y - x}{y + x} - \ln|y + x| = c$

j) $\operatorname{tg} y = \frac{x + \cos x \operatorname{sen} x}{2} + c$

k) $y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$

l) $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$

m) $\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + c$

n) $\operatorname{arctg} y = x + x^3/3 + c$

o) $1/y = -\cos x + c;\ y \neq 0$

p) $y^2/2 = x^3/3 + c$

q) $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c;\ x \neq -1$ e $y \neq 0$

r) $x^2 + y^2 - c\,x^3 = 0;\ x \neq 0$ e $y \neq 0$

79.-

a) $y = c\,e^{-3x} + x/3 - 1/9 + e^{-2x}$

b) $y = c\,e^{-x} + 1 + x^2/2\ e^{-x}$

c) $y = c\,e^{2x} + x^3 e^{2x}/3$

d) $y = c\,e^{x} + 2x\,e^{x}$

e) $y = c/x + 3\cos 2x/4x + 3/2 \operatorname{sen} 2x$

f) $y = (c - x\cos x + \operatorname{sen} x)/x^2$

g) $y = x^2\, e^{-x^2} + c\, e^{-x^2}$

h) $y = (\operatorname{arctg} x + c)/(1 + x^2)^2$

80.-

a) $y = 3e^x + 2(x - 1)e^{2x}$

b) $y = [(x^2 - 1)e^{-2x}]/2$

c) $y = (3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1)/12x^2$

d) $y = \operatorname{sen} x \cdot x^{-2}$

e) $y = x^{-2}(\pi^2/4 - 1 - x\cos x + \operatorname{sen} x)$

f) $y = (x + 1 + 2e^{-x})/x\ ;\ x \neq 0$

g) $y = -(1 + x)\,e^{-x}/x^4$

81.- a) $y'' + 6y' + 9y = 0$ b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

82.-

a) Independiente
b) Dependiente
c) Independiente
d) Dependiente
e) Dependiente
f) Independiente

83.-

a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

c) $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/3}$

d) $y = c_1 e^{2x/5} + c_2\, x\, e^{2x/5}$

e) $y = c_1 + c_2 e^{-5x}$

f) $y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{-3x/2}$

g) $y = c_1 e^{(9 + 3\sqrt{5})x/2} + c_2 e^{(9 - 3\sqrt{5})x/2}$

h) $y = c_1 e^{(1 + \sqrt{3})x} + c_2 e^{(1 - \sqrt{3})x}$

i) $y = c_1 e^{3x} + c_2\, x\, e^{3x}$

j) $y = c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$

k) $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$

l) $y = c_1 e^{3/4\, x} + c_2 e^{-5/2\, x}$

84.- a) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

b) $y = e^{-2x} \cos x + 2 e^{-2x} \operatorname{sen} x$

c) $y = - e^{x - \pi/2} \operatorname{sen} 2x$

d) $y = 3 e^{-x/2} \cos x + 5/2\, e^{-x/2} \operatorname{sen} x$

e) $y = 2 e^{2x/3} - 7/3\, x e^{2x/3}$

f) $y = - e^{-x/3} \cos 3x + 5/9\, e^{-x/3} \operatorname{sen} 3x$

g) $y = 7 e^{-2(x+1)} + 5 x e^{-2(x+1)}$

85.- a) $y = e^{x}$

b) $y = - 2/3\, x e^{-x}$

c) $y = 3/2\, x^2 e^{-x}$

d) $y = 2 x^2 e^{x/2}$

86.- a) $y = e^{x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$

b) $y = 7/10 \operatorname{sen} 2x - 19/40 \cos 2x + \frac{1}{4} x^2 - 1/8 + 3/5\, e^{x}$

c) $y = e^{3x} + 2/3\, e^{-x} - 2/3\, e^{2x} - x e^{2x}$

d) $y = 2 \cos 2x - 1/8 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x$

e) $y = e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x + x e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

88.- b) no; f) no ; h) no

a) $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$

e) $e^{x} \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$ y también $y = 0$

c) $x^3 - x^2 y + 2x + 2y^3 + 3y = c$

g) $e^{xy} \cos x + x^2 - 3y = c$

d) $x^2 y^2 + 2xy = c$

i) $x^2 + y^2 = c$

89.- a) $x^2 + 2 \ln|y| - y^{-2} = c$ y también $y = 0$

b) $x y^2 - (y^2 - 2y + 2)\, e^{y} = c$

c) $x^2 e^{x} \operatorname{sen} y = c$

90.- *i*) $y = \pm \sqrt{\dfrac{5x}{2 + 5cx^5}}$

ii) $y = \dfrac{r}{k + cre^{-rx}}$

iii) $y = \pm \sqrt{x - \dfrac{1}{2} + c\,e^{-2x}}$

iv) $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + cx^{-2}}}$