Funciones Analíticas - Repaso

Función Analítica

Sea f una función definida en un dominio D, entonces :

Definición:

Se dice que f es analítica en un punto $z_0 \in$ D si y sólo si f es derivable no sólo en z_0 sino en todo punto de algún entorno de z_0 contenido en D.

Definición:

Se dice que f es *analítica en un dominio* D si y sólo si es analítica en todos los puntos del dominio D.

Funciones Analíticas

Condiciones de Cauchy-Riemann- Ecuación de Laplace

Se demostrará que si f es *analítica* en un dominio D, entonces u y v deben cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann en todo punto de D e inversamente, si u y v son continuas y tienen derivadas parciales que cumplan las condiciones de Cauchy- Riemann en todo punto de D, entonces *es analítica* en D.

Supongamos que $f(z)= u(x,y)+iv(x,y)$ está definida y es continua en algún entorno de un punto fijo arbitrario z y diferenciable en él, de modo tal que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z) \qquad \text{existe en z.}$$

Funciones Analíticas

Condiciones de Cauchy-Riemann- Ecuación de Laplace

Entonces $\Delta z \to 0$ puede tender a cero por cualquier trayectoria en un entorno de z, donde $\Delta z = \Delta x + i\ \Delta y$.

Analizaremos dos trayectorias, en la primera consideramos que $\Delta y \to 0$ primero y luego $\Delta x \to 0$ y en la segunda al revés.

- Si $\Delta y \to 0$, entonces $\Delta z = \Delta x$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - (u(x,y) + iv(x,y))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y))}{\Delta x}$$

Funciones Analíticas

Condiciones de Cauchy-Riemann- Ecuación de Laplace

Como la derivada de *f* existe , las derivadas de *u* y *v* también existen, entonces:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y))}{\Delta x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

Funciones Analíticas

Condiciones de Cauchy-Riemann- Ecuación de Laplace

De manera similar, por el otro camino

- Si $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta z = i\Delta y$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y))}{i\Delta y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \qquad (2)$$

Funciones Analíticas

Condiciones de Cauchy-Riemann- Ecuación de Laplace

La existencia de la derivada de *f* implica que existen las derivadas parciales de *u* y *v*.
Igualando la parte real e imaginaria de la derivada encontrada en las expresiones (1) y (2),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Estas se llaman *Ecuaciones de Cauchy- Riemann*

Funciones Analíticas

Teorema: Ecuaciones de Cauchy Riemann

Una *condición necesaria* para que una función *f (z) = u(x,y)+iv(x,y)* sea derivable en un punto *z= x+ iy* de un dominio *D* es que existan las derivadas parciales de primer orden de *u* y *v* respecto de *x* e *y* en *D* y que satisfagan las ecuaciones de Cauchy- Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Y su derivada es:

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Si las derivadas parciales que intervienen son continuas, entonces las condiciones de Cauchy-Riemann son *condiciones suficientes* para que *f* sea derivable en *D*.

Funciones Analíticas

Las funciones *u* y *v* se denominan *funciones conjugadas;* cualquiera de ellas puede determinarse, salvo una constante aditiva, si se conoce la otra, de manera que *f = u + iv* sea derivable.

Funciones Armónicas - Ecuación de Laplace

Se dice que una función *u* real de variables reales *x* e *y* es una *función armónica* en un conjunto S si satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para todos los puntos } (x,y) \text{ en } S$$

Se puede expresar la misma usando el operador laplaciano ∇^2 quedando $\nabla^2 u = 0$

Funciones Analíticas

Funciones Armónicas - Ecuación de Laplace

Teorema: Ecuación de Laplace

La parte real e imaginaria de una función compleja *f (z) = u(x,y)+iv(x,y)* que sea analítica en un dominio *D* son soluciones dela *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

en *D* y tienen segunda derivadas parciales continuas en éste.

Si dos funciones armónicas satisfacen las condiciones de C-R, se dicen *armónicas conjugadas.*

Funciones Analíticas

Funciones Armónicas - Ecuación de Laplace

Esto muestra que hay una relación estrecha entre la parte real e imaginaria de una función analítica *f(x+iy) =u(x, y) + iv(x ,y)*. Se dice que *v* es la *armónica conjugada* de *u*.

Note:

- La palabra conjugada no tiene relación con la conjugación de complejos.
- El hecho que *v* sea la armónica conjugada de *u* no implica que *u* sea la armónica conjugada de *v* ya que las condiciones de C- R no son simétricas. De hecho, $-u$ es la armónica conjugada de *v* ya que $-i\, f(x+iy)= v(x, y) - i\, u(x, y)$ es analítica.

Dada una función armónica *u,* para encontrar una armónica conjugada *v,* basta resolver el sistema de ecuaciones planteado por las condiciones de C-R.