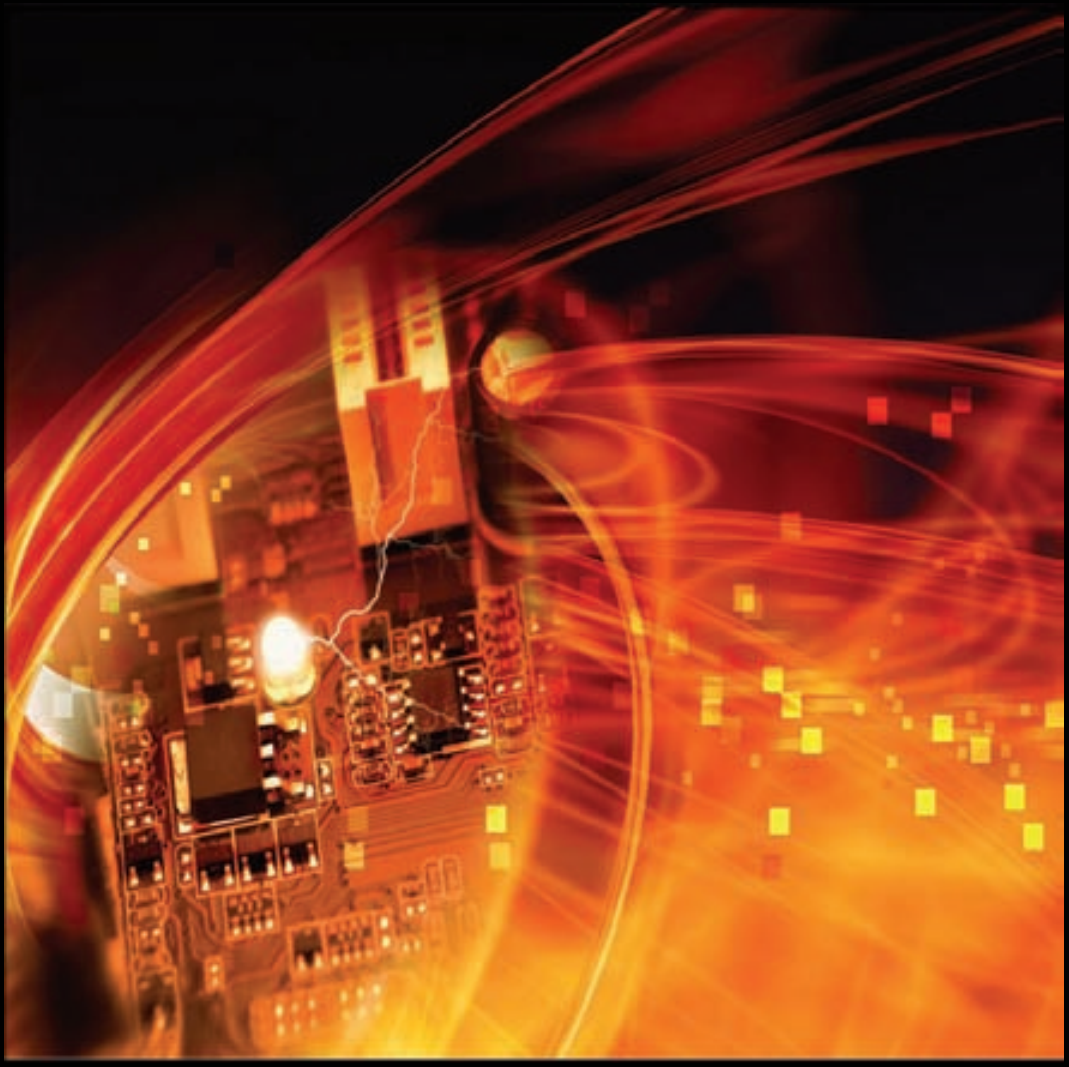
MILLER Y FREUND

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS

OCTAVA EDICIÓN



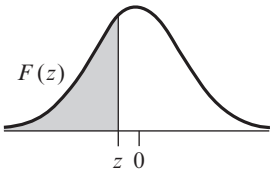
Richard A. Johnson

ALWAYS LEARNING

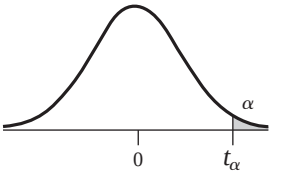
PEARSON

Función de distribución normal estándar

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−5.0	0.0000003									
−4.0	0.00003									
−3.5	0.0002									
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0006	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

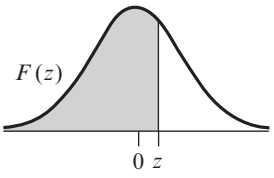


Valores de t_α

v	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	α = 0.01	α = 0.00833	α = 0.00625	α = 0.005	v
1	3.078	6.314	12.706	31.821	38.204	50.923	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	7.650	8.860	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.392	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.315	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	3.810	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.288	3.521	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.335	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.206	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	2.934	3.111	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.038	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	2.891	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	2.780	2.934	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	2.896	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.864	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.837	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.813	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.793	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.775	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.759	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.744	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.602	2.732	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.720	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.710	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.700	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.692	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.684	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.553	2.676	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.547	2.669	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.663	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.394	2.498	2.576	inf.

Función de distribución normal estándar

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5973	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									

MILLER Y FREUND

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS

OCTAVA EDICIÓN

Richard A. Johnson

University of Wisconsin-Madison

Traducción
Víctor Campos Olguín
Traductor especialista en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica
Juan Gilberto Solís Alanís
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME)
Universidad Autónoma de Nuevo León
México

Enrique Alfonso Santillán Velarde
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica, Zacatenco (ESIME)
Instituto Politécnico Nacional
México

Agustín Rodríguez Martínez
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingeniería (CUCEI)
Universidad de Guadalajara
México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Johnson, Richard A.

Probabilidad y estadística para ingenieros.
Octava edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-0799-7
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 552

Authorized translation from the English language edition, entitled *MILLER & FREUND'S PROBABILITY AND STATISTICS FOR ENGINEERS, 8th Edition*, by *Richard Johnson, Irwin Miller and John Freund,* published by Pearson Education, Inc., publishing as Pearson, Copyright © 2011. All rights reserved.
ISBN 9780321640772

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *MILLER & FREUND'S PROBABILITY AND STATISTICS FOR ENGINEERS, 8ª edición,* por *Richard Johnson, Irwin Miller y John Freund,* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Pearson, Copyright © 2011. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editora: Gabriela López Ballesteros
gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

OCTAVA EDICIÓN, 2012

D.R. ® 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 978-607-32-0799-7
ISBN e-book 978-607-32-0800-0
ISBN e-chapter 978-607-32-0801-7

PRIMERA IMPRESIÓN

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

www.pearsoneducacion.com **ISBN 978-607-32-0799-7**

CONTENIDO

Prefacio ix
Agradecimientos xii

Capítulo 1 Introducción 1

1.1 **¿Por qué estudiar estadística?** 1
1.2 **Estadística moderna** 2
1.3 **Estadística e ingeniería** 2
1.4 **El rol del científico y del ingeniero en el mejoramiento de la calidad** 3
1.5 **Estudio de caso: Inspección visual de datos para mejorar la calidad del producto** 3
1.6 **Dos conceptos básicos: población y muestra** 5
Ejercicios de repaso 10
Términos clave 11

Capítulo 2 Organización y descripción de datos 12

2.1 **Diagramas de Pareto y diagramas de puntos** 12
2.2 **Distribuciones de frecuencias** 14
2.3 **Gráficas de distribuciones de frecuencias** 17
2.4 **Presentaciones de tallo y hojas** 21
2.5 **Medidas descriptivas** 24
2.6 **Cuartiles y percentiles** 29
2.7 **El cálculo de $\bar{x}$ y s** 34
2.8 **Estudio de caso: Problemas con la agregación de datos** 39
Ejercicios de repaso 42
Términos clave 44

Capítulo 3 Probabilidad 45

3.1 **Espacios y eventos muestrales** 45
3.2 **Conteo** 49
3.3 **Probabilidad** 55
3.4 **Los axiomas de la probabilidad** 57
3.5 **Algunos teoremas elementales** 60
3.6 **Probabilidad condicional** 66
3.7 **Teorema de Bayes** 72
Ejercicios de repaso 78
Términos clave 80

Capítulo 4 Distribuciones de probabilidad 81

4.1 **Variables aleatorias** 81
4.2 **La distribución binomial** 85
4.3 **La distribución hipergeométrica** 89
4.4 **La media y la varianza de una distribución de probabilidad** 93
4.5 **El teorema de Chebyshev** 100
4.6 **La aproximación de Poisson a la distribución binomial** 104
4.7 **Procesos de Poisson** 107
4.8 **Las distribuciones geométrica y binomial negativa** 109
4.9 **La distribución multinomial** 111
4.10 **Simulación** 113
Ejercicios de repaso 116
Términos clave 118

Capítulo 5 Densidades de probabilidad 119

5.1 **Variables aleatorias continuas 119**
5.2 **La distribución normal 125**
5.3 **La aproximación normal a la distribución binomial 132**
5.4 **Otras densidades de probabilidad 135**
5.5 **La distribución uniforme 135**
5.6 **La distribución logarítmica normal 136**
5.7 **La distribución gamma 138**
5.8 **La distribución beta 141**
5.9 **La distribución de Weibull 142**
5.10 **Distribuciones conjuntas discretas y continuas 145**
5.11 **Funciones generadoras de momentos 157**
5.12 **Cómo verificar si los datos son normales 163**
5.13 **Transformación de observaciones a normalidad cercana 165**
5.14 **Simulación 167**
Ejercicios de repaso 171
Términos clave 172

Capítulo 6 Distribuciones muestrales 175

6.1 **Poblaciones y muestras 175**
6.2 **La distribución muestral de la media (σ conocida) 179**
6.3 **La distribución muestral de la media (σ desconocida) 187**
6.4 **La distribución muestral de la varianza 189**
6.5 **Representaciones de las distribuciones de la teoría normal 192**
6.6 **El método de la función generadora de momentos para obtener distribuciones 194**
6.7 **Métodos de transformación para obtener distribuciones 197**
Ejercicios de repaso 202
Términos clave 203

Capítulo 7 Inferencias concernientes a la media 204

7.1 **Estimación puntual 204**
7.2 **Estimación por intervalo 209**
7.3 **Estimación de máxima verosimilitud 215**
7.4 **Pruebas de hipótesis 222**
7.5 **Hipótesis nulas y pruebas de hipótesis 224**
7.6 **Hipótesis concernientes a una media 229**
7.7 **Relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza 235**
7.8 **Potencia, tamaño de muestra y curvas características de operación 237**
Ejercicios de repaso 243
Términos clave 244

Capítulo 8 Comparación de dos tratamientos 245

8.1 **Diseños experimentales para comparar dos tratamientos 245**
8.2 **Comparaciones: dos muestras independientes grandes 246**
8.3 **Comparaciones: dos muestras independientes pequeñas 251**
8.4 **Pruebas de diferencias pareadas 259**
8.5 **Aspectos de diseño: aleatoriedad y apareado 263**
Ejercicios de repaso 266
Términos clave 266

Capítulo 9 Inferencias concernientes a las varianzas 268

9.1 **La estimación de varianzas 268**
9.2 **Hipótesis concernientes a una varianza 271**
9.3 **Hipótesis concernientes a dos varianzas 272**
Ejercicios de repaso 276
Términos clave 277

Capítulo 10 Inferencias respecto de las proporciones 278

10.1 **Estimación de proporciones 278**
10.2 **Hipótesis respecto de una proporción 283**
10.3 **Hipótesis respecto de varias proporciones 285**
10.4 **Análisis de tablas r × c 292**
10.5 **Bondad de ajuste 295**
Ejercicios de repaso 299
Términos clave 300

Capítulo 11 Análisis de regresión 301

11.1 **El método de mínimos cuadrados 301**
11.2 **Inferencias con base en los estimadores de mínimos cuadrados 309**
11.3 **Regresión curvilínea 321**
11.4 **Regresión múltiple 326**
11.5 **Cómo comprobar si el modelo es adecuado 329**
11.6 **Correlación 335**
11.7 **Regresión lineal múltiple (notación matricial) 345**
Ejercicios de repaso 350
Términos clave 353

Capítulo 12 Análisis de varianza 354

12.1 **Algunos principios generales 354**
12.2 **Diseños completamente al azar 357**
12.3 **Diseños de bloques al azar 370**
12.4 **Comparaciones múltiples 377**
12.5 **Análisis de covarianza 382**
Ejercicios de repaso 388
Términos clave 390

Capítulo 13 Experimentación factorial 391

13.1 **Experimentos de dos factores 391**
13.2 **Experimentos multifactoriales 398**
13.3 **Experimentos factoriales 2^n 409**
13.4 **Presentación gráfica de experimentos 2^2 y 2^3 416**
13.5 **Análisis de superficie de respuesta 430**
13.6 **Confusión en un experimento factorial 2^n 433**
13.7 **Duplicación fraccional 437**
Ejercicios de repaso 442
Términos clave 446

Capítulo 14 Pruebas no paramétricas 447

14.1 **Introducción 447**
14.2 **La prueba del signo 447**
14.3 **Pruebas de sumas de rangos 449**
14.4 **Correlación basada en rangos 453**
14.5 **Pruebas de aleatoriedad 455**
14.6 **Las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling 458**
Ejercicios de repaso 461
Términos clave 462

Capítulo 15 El contenido estadístico de los programas de mejoramiento de la calidad 463

15.1 **Programas de mejoramiento de la calidad 463**
15.2 **Inicio de un programa de mejoramiento de la calidad 465**
15.3 **Diseños experimentales para la calidad 467**
15.4 **Control de calidad 469**
15.5 **Gráficos de control por mediciones 471**
15.6 **Gráficos de control por atributos 476**
15.7 **Límites de tolerancia 482**
Ejercicios de repaso 484
Términos clave 486

Capítulo 16 Aplicación a la confiabilidad y a las pruebas del ciclo de vida 487

16.1 **Confiabilidad 487**
16.2 **Distribución del tiempo de falla 489**
16.3 **El modelo exponencial en las pruebas del ciclo de vida 493**
16.4 **El modelo de Weibull en las pruebas del ciclo de vida 496**
Ejercicios de repaso 501
Términos clave 502

Apéndice A **Bibliografía 503**
Apéndice B **Tablas estadísticas 503**
Apéndice C **Uso del software *R* 526**
Introducción a R 526
Ingreso de datos 526
Operaciones aritméticas 527
Estadística descriptiva 527
Distribuciones de probabilidad 528
Cálculos de probabilidad normal 528
Distribuciones de muestreo 528
Intervalos de confianza y pruebas de medias 529
Inferencia acerca de proporciones 529
Regresión 529
Análisis unilateral de varianza (ANOVA) 530
Apéndice D **Respuestas a ejercicios con número impar 531**
Índice 539

PREFACIO

Este libro está diseñado para un curso de probabilidad y estadística dirigido a estudiantes de ingeniería y ciencias. Cada capítulo comienza con un texto introductorio, tiene una lista de términos clave con número de página y termina con un conjunto de pautas estadísticas, para aplicar correctamente los procedimientos y evitar errores comunes. Las fórmulas, los teoremas y las reglas importantes se resaltan con recuadros. Los intervalos de confianza se destacan como el principal procedimiento para realizar inferencias. Sus propiedades se describen cuidadosamente y su interpretación se analiza con frecuencia. Los pasos para la prueba de hipótesis se delinean clara y consistentemente en cada aplicación; y los ejemplos de las pruebas de hipótesis también enfatizan la interpretación y el cálculo de un valor *P*.

El texto se probó ampliamente en cursos para estudiantes universitarios, así como en un grupo de ingenieros que recibían capacitación en fábricas. El autor cubre la mayoría de los primeros ocho capítulos, la regresión en línea recta y la presentación gráfica de diseños factoriales en solo un semestre.

Los antecedentes matemáticos que se esperan por parte del lector son un curso de un año de cálculo, el cual se requiere básicamente para el capítulo 5, que trata de la teoría de distribución básica en el caso continuo, y en las nuevas secciones opcionales del capítulo 6.

En esta octava edición, se consolidan las fortalezas de las ediciones anteriores, al agregar más conjuntos de datos y ejemplos de aplicación de la estadística en investigaciones científicas. Los nuevos conjuntos de datos surgieron de las actividades de consultoría del autor, o bien, en discusiones con científicos e ingenieros sobre sus problemas estadísticos. Los datos de algunas compañías se modificaron; no obstante, conservan todavía todas las características necesarias para ilustrar los métodos estadísticos y el razonamiento requerido para hacer generalizaciones, a partir de los datos recabados en un experimento. En conjunto, hay un gran número de ejemplos y ejercicios nuevos.

La nueva tabla 5.2 resume las distribuciones discreta y continua comunes. Para mejorar tanto la presentación como la legibilidad, el capítulo 7 anterior se dividió en los capítulos 7 y 8 nuevos, donde este último se dedica a las comparaciones. Debido a su popularidad en la práctica de la ingeniería, la estimación de máxima verosimilitud se desarrolló en la sección 7.3, nueva. Se agregó la sección 13.5 para introducir la idea de la metodología de superficie de respuesta mediante un ejemplo.

Una gran mejora es la inclusión de cuatro secciones breves que tratan sobre los fundamentos de un tratamiento ligeramente más matemático de la teoría de la distribución. Motivados por las sugerencias de muchos revisores y usuarios del libro, la sección 5.11 cubre las funciones generadoras de momentos; la sección 6.6, el método de función generadora de momentos; la sección 6.5, las representaciones y relaciones entre las distribuciones de teoría normal; y la sección 6.7, los métodos de transformación para obtener distribuciones muestrales. Cualesquiera de las cuatro últimas secciones pueden omitirse sin afectar la legibilidad ni la comprensión del texto.

Además de tener los conjuntos de datos disponibles en línea en el sitio Web de conjuntos de datos de Pearson (www.pearsonhighered.com/datasets), también se incluyeron más detalles acerca de algunas de las secciones nuevas. Este material cubre los métodos de convolución, y la sección 14.8 y sus tablas respectivas del apéndice B de la edición anterior. Se incluyen ejercicios para que los profesores que deseen incorporar estos temas en sus cursos puedan hacerlo con facilidad.

Para brindar a los estudiantes una noción previa sobre la estadística, la estadística descriptiva se cubre en el capítulo 2. Los capítulos 3 a 6 ofrecen una breve introducción, aunque rigurosa, sobre la teoría de la estadística y, junto con parte del material del capítulo 15, son adecuados para un curso semestral (o trimestral) introductorio de probabilidad y estadística. Los capítulos 7, 8, 9 y 10 constituyen el material fundamental acerca de los

conceptos clave y los métodos elementales de la inferencia estadística. Los capítulos 11, 12 y 13 abarcan una introducción a algunos de los temas estándar, aunque más avanzados, de regresión, análisis de varianza y diseño experimental. El capítulo 14 trata las pruebas de rango no paramétricas y las pruebas de bondad de ajuste. El capítulo 15 destaca las ideas estadísticas clave subyacentes para el mejoramiento de la calidad, y el capítulo 16 examina las ideas asociadas de confiabilidad y ajuste de los modelos del ciclo de vida.

Queremos agradecer a MINITAB (State College, Pennsylvania) por su autorización para incluir comandos y resultados de su software *MINITAB*, así como al Instituto SAS (Gary, Carolina del Norte), por su autorización para incluir resultados de su paquete SAS. El apéndice C presenta una introducción al software R.

Por su contribución a las primeras adiciones, agradecemos a Paul M. Berthouex, Michael Brajac, Smiley Cheng, Don Emer, Jim Evans, Cherilyn Hatfield, David Steiberg y Steve Verrill por sus aportaciones de conjuntos de datos. También agradecemos a Kuo-Tsung Wu, Songyong Sim, Ruoji Li y Erik Johnson por su valiosa colaboración. Quiero agradecer sobre todo a Asit Bannerjee, Robert Blick, Song Jin, Chang Sik Lee, Shiyu Zhou y otros que contribuyeron con conjuntos de datos a esta edición. La edición actual también se benefició significativamente de los revisores puntuales Keith Friedman, University of Texas en Austin y Kathryn Sharpe, Stony Brook University.

Todas las revisiones de esta edición fueron responsabilidad de Richard A. Johnson.

Richard A. Johnson

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

1.1 ¿Por qué estudiar estadística? 1

1.2 Estadística moderna 2

1.3 Estadística e ingeniería 2

1.4 El rol del científico y del ingeniero en el mejoramiento de la calidad 3

1.5 Estudio de caso: inspección visual de datos para mejorar la calidad del producto 3

1.6 Dos conceptos básicos: población y muestra 5

Ejercicios de repaso 10

Términos clave 11

Todo lo que tiene que ver con recolección, procesamiento, análisis e interpretación de datos numéricos pertenece al dominio de la estadística. En ingeniería, esto incluye tareas tan diversas como calcular la longitud promedio de los tiempos muertos en una computadora, recabar y presentar datos acerca del número de individuos que asisten a un seminario sobre energía solar, evaluar la efectividad de productos comerciales, predecir la confiabilidad de un vehículo de lanzamiento y estudiar las vibraciones en las alas de una aeronave.

En las secciones 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 se examina el crecimiento reciente de la estadística; en específico, sus aplicaciones a problemas de ingeniería. La estadística juega un rol importante en el mejoramiento de la calidad de cualquier producto o servicio. Un ingeniero que usa las técnicas descritas en este libro puede volverse mucho más eficaz en todas las fases del trabajo que se relacionan con investigación, desarrollo o producción. En la sección 1.6 inicia la introducción a los conceptos estadísticos, resaltando la distinción entre una población y una muestra.

1.1 ¿Por qué estudiar estadística?

Las respuestas dadas por el análisis estadístico pueden sentar las bases para tomar decisiones o elegir acciones. Los funcionarios de la ciudad, por ejemplo, quizá deseen conocer si el nivel de plomo en el suministro de agua está dentro de los estándares de seguridad. Puesto que no toda el agua puede verificarse, las respuestas deben basarse en la información parcial de las muestras de agua que se recolectan para tal propósito. Como otro ejemplo, un ingeniero civil tiene que determinar la resistencia de los soportes para los generadores en una planta de energía. Algunos de los soportes disponibles pueden someterse a carga de fatiga, mientras sus resistencias brindarán la base para valorar la resistencia de otros soportes que no se someten a las pruebas. Hay que determinar la proporción de todos los soportes disponibles con resistencias que se encuentren por debajo de un límite de diseño.

Cuando se busca información, las ideas estadísticas sugieren un proceso de recolección típico con cuatro pasos fundamentales.

1. **Establecer metas definidas con claridad para la investigación.**
2. **Elaborar un plan de cuáles datos recolectar y cómo recabarlos.**
3. **Aplicar métodos estadísticos adecuados para extraer información a partir de los datos.**
4. **Interpretar la información y extraer conclusiones.**

Se trata de pasos indispensables que ofrecerán un marco de referencia siempre que se desarrollen las ideas clave de la estadística. El razonamiento y los métodos estadísticos le ayudarán a volverse eficiente para obtener información y obtener conclusiones útiles.

1.2 Estadística moderna

El origen de la estadística está en dos áreas de interés que, en la superficie, tienen poco en común: los juegos de azar y lo que ahora se conoce como ciencia política. Los estudios de probabilidad a mediados del siglo XVIII, motivados en gran medida por el interés en los juegos de azar, condujo al tratamiento matemático de los errores de medición y a la teoría que ahora forma los cimientos de la estadística. En el mismo siglo, el interés en la descripción numérica de las unidades políticas (ciudades, provincias, poblados, etcétera) llevó a lo que ahora se conoce como **estadística descriptiva**. Al principio, la estadística descriptiva consistía simplemente en la presentación de datos en tablas y gráficas; en la actualidad, incluye el resumen de datos mediante descripciones numéricas y gráficas.

En décadas recientes, el crecimiento de la estadística se vio en casi cualquier rama de actividad importante, cuya característica más importante en crecimiento ha sido el cambio en el énfasis: de la estadística descriptiva a la **inferencia estadística**. La inferencia estadística se ocupa de la generalización basada en datos muestrales; se aplica a problemas como la estimación de la emisión promedio de contaminantes de un motor a partir de corridas de prueba, el hecho de probar la afirmación de un fabricante sobre la base de mediciones realizadas a muestras de su producto y la predicción del éxito de un vehículo de lanzamiento para poner en órbita un satélite de comunicaciones, de acuerdo con datos muestrales pertenecientes al rendimiento de los componentes de tal vehículo.

Cuando alguien hace una inferencia estadística, es decir, una inferencia que va más allá de la información contenida en un conjunto de datos, siempre debe proceder con cautela. Uno habrá de decidir cuidadosamente cuán lejos hay que ir en la generalización a partir de cierto conjunto de datos, ya sea que tales generalizaciones sean en absoluto razonables o justificables, o bien, que sea aconsejable esperar hasta que existan más datos, etcétera. De hecho, algunos de los problemas más importantes de la inferencia estadística tienen que ver con la valoración de los riesgos y las consecuencias a las que uno estaría expuesto al realizar generalizaciones a partir de datos muestrales. Esto incluye una valoración de las probabilidades de tomar decisiones equivocadas, así como la posibilidad de hacer predicciones incorrectas y la de obtener estimaciones que no reflejen de manera adecuada la situación real.

El tema de la estadística se estudiará como ciencia y cada idea estadística se desarrollará, en la medida de lo posible, a partir de su fundamento probabilístico; cada idea se aplicará a problemas de física o ingeniería tan pronto como se desarrolle. La gran mayoría de los métodos que se usarán para enunciar y resolver dichos problemas pertenecen a los **enfoques de frecuencias** o al **enfoque clásico**, donde las inferencias estadísticas tienen que ver con cantidades fijas, aunque desconocidas. Este enfoque no considera de manera formal los diversos factores subjetivos mencionados anteriormente. Sin embargo, se hará un esfuerzo continuo para lograr que el lector esté consciente de que tales factores subjetivos existen, así como para indicar, siempre que sea posible, qué rol juegan al tomar una decisión final. Se trata de un enfoque de "pan y mantequilla" para la estadística que enseña la materia en la forma en que ha contribuido exitosamente tanto con la ingeniería como con las ciencias naturales y sociales en la última mitad del siglo XX, en los albores del XXI y más allá.

1.3 Estadística e ingeniería

Hay pocas áreas donde la influencia del crecimiento reciente de la ingeniería se haya sentido con mayor fuerza que en la ingeniería y la administración industrial. De hecho, sería muy difícil sobrestimar las contribuciones de la estadística para resolver problemas de producción, del uso efectivo de los materiales y la mano de obra, de la investigación básica y del desarrollo de nuevos productos. Como en otras ciencias, la estadística se ha convertido

en una herramienta vital para los ingenieros. Les permite entender fenómenos sujetos a variación y predecirlos de manera efectiva o controlarlos.

En este texto la atención se dirigirá sobre todo hacia las aplicaciones de ingeniería, pero no se vacilará en hacer referencia también a otras áreas, para enfatizar al lector la gran generalidad de la mayoría de las técnicas estadísticas. El método estadístico que se usa para estimar el coeficiente promedio de expansión térmica de un metal sirve, asimismo, para estimar el tiempo promedio que tarda una secretaria en realizar una labor dada, el grosor promedio del cascarón de un huevo de pelícano o el CI promedio de los estudiantes universitarios de primer año. De igual modo, el método estadístico que se utiliza para comparar la resistencia de dos aleaciones sirve para comparar la efectividad de dos métodos de enseñanza o la calidad de dos repelentes contra insectos.

1.4 El rol del científico y del ingeniero en el mejoramiento de la calidad

En la última mitad del siglo pasado e inicios del presente, Estados Unidos se encontró a sí mismo en un mercado mundial cada vez más competitivo. La competencia alentó una revolución internacional en el mejoramiento de la calidad. Las enseñanzas e ideas de W. Edwards Deming (1900-1993) fueron útiles en el rejuvenecimiento de la industria japonesa. Él destacó que la industria estadounidense, con la finalidad de sobrevivir, debería movilizarse con un compromiso continuo por el mejoramiento de la calidad. Desde el diseño hasta la producción, los procesos necesitan mejorarse de forma continua. El ingeniero y el científico, con sus conocimientos técnicos y armados con habilidades estadísticas básicas en recolección de datos y presentaciones gráficas, podrían ser los principales actores en el logro de dicha meta.

El **mejoramiento de la calidad** se basa en la filosofía de "hacerlo bien la primera vez". Más aún, uno no debería estar contento con cualquier proceso o producto, más bien tiene que seguir buscando formas de mejorarlo. Se enfatizarán los componentes estadísticos clave de cualquier programa de mejoramiento de la calidad. En el capítulo 15 se destacan las cuestiones básicas del mejoramiento de la calidad; además, se presentan algunas de las técnicas estadísticas especializadas para estudiar los procesos de producción. Los diseños experimentales que se analizan en el capítulo 13 también son básicos para el proceso de mejoramiento de la calidad.

Estrechamente relacionadas con las técnicas de mejoramiento de la calidad, se encuentran las técnicas estadísticas desarrolladas para satisfacer las necesidades de **confiabilidad** de los productos enormemente complejos de la tecnología de la era espacial. El capítulo 16 es una introducción a esa área.

1.5 Estudio de caso: Inspección visual de datos para mejorar la calidad del producto

Este estudio[1] ilustra, de manera significativa, las ventajas importantes que se logran al graficar de manera adecuada y supervisar los datos de fabricación. Se trata de una pieza de cerámica que se utiliza en las cafeteras populares. La pieza de cerámica está hecha para llenar la cavidad entre dos moldes de una prensa con una mezcla de arcilla, agua y aceite. Después de presionar, pero antes de que la pieza esté seca hasta endurecerse, se miden las dimensiones críticas. Aquí lo que interesa es la profundidad de la ranura.

Debido a la variación natural descontrolada en la mezcla arcilla-agua-aceite, la condición de la prensa, las diferencias en los operadores, etcétera, uno no esperaría que todas

[1]Cortesía de Don Ermer.

Tabla 1.1 Profundidad de la ranura (en milésimas de pulgada)

Tiempo	6:30	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00
1	214	218	218	216	217	218	218	219
2	211	217	218	218	220	219	217	219
3	218	219	217	219	221	216	217	218
Suma	643	654	653	653	658	653	652	656
$\overline{x}$	214.3	218.0	217.7	217.7	219.3	217.7	217.3	218.7
Tiempo	**10:30**	**11:00**	**11:30**	**12:30**	**1:00**	**1:30**	**2:00**	**2:30**
1	216	216	218	219	217	219	217	215
2	219	218	219	220	220	219	220	215
3	218	217	220	221	216	220	218	214
Suma	653	651	657	660	653	658	655	644
$\overline{x}$	217.7	217.0	219.0	220.0	217.7	219.3	218.3	214.7

las mediciones de ranura fueran exactamente iguales. Es inevitable alguna variación en la profundidad de las ranuras, pero es necesario controlar la profundidad dentro de ciertos límites, con la finalidad de que la pieza ajuste cuando se ensamble.

La profundidad de la ranura se midió en tres partes cerámicas seleccionadas de la producción cada media hora, durante el primer turno de 6 A.M. a 3 P.M. Los datos de la tabla 1.1 se obtuvieron un viernes. La media muestral, o promedio, para la primera muestra de 214, 211 y 218 (milésimas de pulgada) es

$$\frac{214 + 211 + 218}{3} = \frac{643}{3} = 214.3$$

El procedimiento gráfico, llamado gráfica ***X* barra**, consiste en graficar los promedios muestrales contra el tiempo. Tal gráfica indicará cuándo ocurrieron cambios y qué acciones será necesario tomar para corregir el proceso.

A partir de un estudio estadístico anterior, se sabía que el proceso era estable y que variaba alrededor de un valor de 217.5 milésimas de pulgada. Dicho valor se tomará como la línea central de la gráfica *X* barra en la figura 1.1.

$$\text{línea central: } \overline{\overline{x}} = 217.5$$

Más tarde se estableció que el proceso era capaz de elaborar piezas cerámicas generalmente buenas, si la dimensión de la ranura promedio para una muestra permanecía entre ciertos límites de control.

$$\text{Límite de control inferior: LCI} = 215.0$$
$$\text{Límite de control superior: LCS} = 220.0$$

¿Qué dice esta gráfica? La media de 214.3 en la primera muestra, tomada aproximadamente a las 6:30 A.M., está fuera del límite de control inferior. Más aún, una medida de la variación en esta muestra

$$\text{rango} = \text{más grande} - \text{más pequeño} = 218 - 211 = 7$$

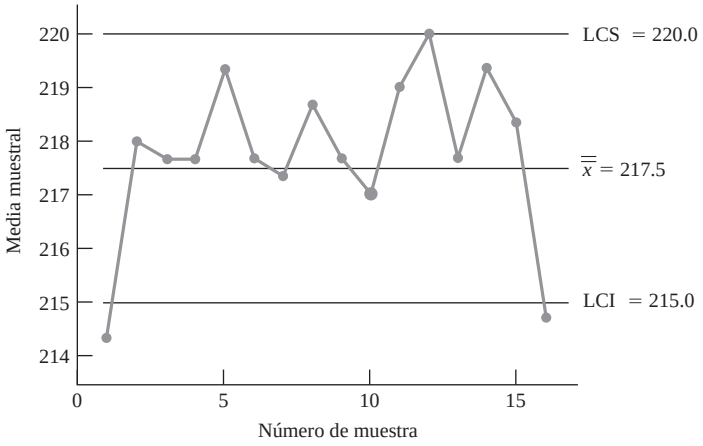


Figura 1.1
Gráfica *X* barra para profundidad

es grande en comparación con las otras. La evidencia sugiere que la prensa todavía no alcanza un estado estacionario. La gráfica de control indica que es necesario calentar la prensa antes de que comience el primer turno a las 6 A.M. La gerencia y los ingenieros implementaron un arranque temprano; como resultado, mejoró el proceso. El operador y el capataz no tienen la autoridad para efectuar dicho cambio. Deming afirmó que 85% o más de nuestros problemas de calidad están en el sistema, así como que el operador y otros responsables de la operación cotidiana son responsables del 15% o menos de los problemas de calidad.

La gráfica *X* barra muestra también que, a lo largo del día, el proceso fue estable, pero un tanto del lado alto, aunque ningún punto estuvo fuera de control hasta la última muestra del día. Aquí ocurrió un desafortunado descuido. La operadora no reportó el valor fuera de control a algún trabajador de preparación o al capataz, porque estaba cerca del final de su turno y el inicio de su fin de semana. También sabía que el trabajador de preparación ya estaba limpiando el área para el final de su turno y que el capataz quizá ya estaba pensando en cruzar la calle al Bar Legión, por algunas bebidas gaseosas, tan pronto terminara el turno. No quiso arruinar los planes de nadie, así que se quedó callada.

El lunes en la mañana, cuando la operadora arrancó la prensa, se rompió uno de los moldes. El costo del molde era de varios miles de dólares, pero este no fue el mayor de los costos. Cuando se llamó a un cliente y se le dijo que habría una demora en la entrega de sus piezas cerámicas, canceló el pedido. Ciertamente la pérdida de un cliente es un asunto costoso. Deming se refiere a este tipo de costo como desconocido e incognoscible; pero, al mismo tiempo, quizá sea el costo más importante derivado de la calidad deficiente.

El viernes la gráfica predijo un problema. Más tarde, se determinó que la dificultad más probable era que la arcilla se secó y se pegó al molde, lo cual ocasionó el rompimiento. La gráfica indicó el problema, pero alguien debía actuar; para que un procedimiento de graficación estadística sea verdaderamente eficaz, hay que entrar en acción.

1.6 Dos conceptos básicos: población y muestra

Los ejemplos anteriores, donde la evaluación de la información real es esencial para adquirir nuevo conocimiento, fomenta el desarrollo del razonamiento y de las herramientas estadísticos que se enseñan en este libro. La mayoría de los experimentos y las investigaciones realizados por los ingenieros en el curso de la investigación, ya sean un fenómeno físico, un proceso de producción o una unidad manufacturada, comparten algunas características comunes.

Un primer paso en cualquier estudio consiste en desarrollar una **propuesta** clara y bien definida. Por ejemplo, un ingeniero mecánico quiere determinar si un nuevo aditivo aumentará la resistencia a la tensión de piezas plásticas, elaboradas en una máquina de moldeo por inyección. El aditivo no solo debería aumentar la resistencia a la tensión, sino que también necesita aumentarla lo suficiente como para tener importancia en ingeniería. Por lo tanto, hace la siguiente propuesta.

Propuesta: Determinar si es posible encontrar una cantidad específica de un aditivo que aumente la resistencia a la tensión de las piezas plásticas en, al menos, 10 libras por pulgada cuadrada.

En cualquier propuesta, trate de evitar palabras como *blando*, *duro*, *suficientemente grande*, etcétera, que son difíciles de cuantificar. La propuesta puede ayudarle a decidir qué datos recopilar. El ingeniero mecánico, por ejemplo, probó dos cantidades diferentes de aditivo y produjo 25 especímenes de la pieza plástica con cada mezcla. Para cada uno de los 50 especímenes, se obtuvo la resistencia a la tensión.

Tienen que recopilarse datos pertinentes. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, a menudo es físicamente imposible o poco factible obtener un conjunto de datos completo. Cuando se obtienen datos de experimentos de laboratorio, sin importar cuánta experimentación se haya realizado, siempre podrían tenerse más. Para recolectar un conjunto exhaustivo de datos, relacionados con el daño que soportan todos los automóviles de cierto modelo en colisión a una rapidez específica, ¡tendría que someter a colisiones a cada auto de dicho modelo que salga de las líneas de producción! En la mayoría de las situaciones, debe trabajarse solo con información parcial. La distinción entre los datos realmente adquiridos y la gran colección de todas las observaciones potenciales es clave para entender la estadística.

La fuente de cada medición se llama **unidad**. Por lo general, se trata de un objeto o una persona. Para enfatizar el término *población* para toda la colección de unidades, a toda la colección se le llama **población de unidades**.

Unidades y población de unidades

unidad: una sola entidad, por lo general, un objeto o una persona, cuyas características son de interés.
población de unidades: colección completa de unidades acerca de la cual se busca información.

Guiada por la propuesta, se tiene una **característica de interés** para cada unidad en la población. La característica, que podría ser un rasgo cualitativo, se conoce como **variable**, si puede expresarse como número.

Es posible que existan muchas características de interés para una población de unidades determinada. En la tabla 1.2 se dan algunos ejemplos.

Para cualquier población existe el valor, por cada unidad, de una característica o una variable de interés. Para una variable o una característica de interés dada, a la colección de valores, evaluada para cada unidad en la población, se le llama **población estadística** o sólo **población**. Esta colección de valores es la población que se tratará en todos los capítulos siguientes. Aquí, a la colección de unidades se le conoce como **población de unidades**, cuando hay necesidad de diferenciarla de la colección de valores.

Población estadística

Una **población estadística** es el conjunto de todas las mediciones (o registros de algún rasgo de calidad) correspondientes a cada unidad en toda la población de unidades, acerca de la cual se busca información.

Por lo general, cualquier enfoque estadístico para aprender acerca de la población comienza por tomar una muestra.

Tabla 1.2 Ejemplos de poblaciones, unidades y variables

Población	Unidad	Variables/características
Todos los alumnos actualmente inscritos en la universidad	alumno	promedio número de créditos horas de trabajo por semana especialidad diestro/zurdo
Todas las tarjetas de circuito impreso fabricadas durante un mes	tarjeta	tipo de defectos número de defectos ubicación de defectos
Todos los restaurantes de comida rápida en el campus	restaurante	número de empleados número de asientos contrata/no contrata
Todos los libros en la biblioteca	libro	costo de sustitución frecuencia de salida reparaciones necesarias

Muestras de una población

Una **muestra** de una población estadística es el subconjunto de mediciones que realmente se recolectan en el curso de una investigación.

EJEMPLO **Variable de interés, población estadística y muestra**

Los transceptores ofrecen comunicación inalámbrica entre componentes electrónicos de productos de consumo, en especial los transceptores de estándares Bluetooth. Para atender la necesidad de una prueba rápida de bajo costo de transceptores, los ingenieros[2] desarrollaron una prueba a nivel de oblea. En uno de los conjuntos de ensayos con 60 dispositivos seleccionados de diferentes lotes de obleas, aprobaron 49 dispositivos.

Identifique la unidad de población, la variable de interés, la población estadística y la muestra.

Solución La unidad de población es una oblea individual, y la población son todas las obleas en lotes disponibles actualmente. Existe cierta arbitrariedad porque se podría usar una población más grande de todas las obleas que llegarían dentro de cierto periodo de tiempo fijo.

La variable de interés es aprobada o rechazada para cada oblea.

La población estadística es la colección de condiciones aprobado/rechazado, una para cada unidad de población.

La muestra es la colección de 60 registros aprobado/rechazado, uno para cada unidad en la muestra. Pueden resumirse por sus totales: 48 aprobados y 12 rechazados. ■

La muestra debe ser tanto representativa de la población como suficientemente grande para contener la información necesaria, para responder las preguntas acerca de la población que son cruciales para la investigación.

[2] G. Srinivasan, F. Taenzler y A. Chatterjee, Loopback DFT for low-costtest of single-VCO-based wireless transceivers, *IEEE Design & Test of Computers* 25 (2008), 150-159.

EJEMPLO **Muestras autoseleccionadas: una mala práctica**

Una revista que presenta lo último en hardware y software de computación para la oficina y el hogar usa un breve cuestionario cerrado en una tarjeta postal. Se pide a los lectores que indiquen si poseen o no nuevos paquetes de software, o bien, productos de hardware específicos. En ediciones anteriores, dicha revista utilizó información similar de las tarjetas que se regresaban para hacer afirmaciones como "40% de los lectores compraron el paquete de software *P*". ¿Esta muestra es representativa de la población de los lectores de la revista?

Solución Claramente es imposible contactar a todos los lectores de la revista, pues no todos son suscriptores. Necesariamente uno debe disponerse a tomar una muestra. Por desgracia, el método utilizado por los editores de la revista no es representativo y está enormemente sesgado. Los lectores que siempre se actualizan y prueban la mayoría del software nuevo tendrán más probabilidad de responder e indicar sus compras. En contraste, quienes no compran el software o el hardware mencionados en la encuesta tendrán poca probabilidad de regresar la tarjeta. Esto es: la proporción de compradores del paquete de software *P*, en la muestra de tarjetas devueltas, probablemente será mucho mayor que la de la población total, que consiste en el registro *compra/no compra* para cada lector. ■

Con el propósito de evitar sesgos debidos a muestras autoseleccionadas, es necesario tomar un rol activo en el proceso de selección.

Uso de una tabla de números aleatorios para seleccionar muestras

La selección de una muestra a partir de una población finita debe hacerse de forma imparcial y objetiva. Sin embargo, escribir los nombres de la unidad en tiras de papel, colocar las tiras en una caja y sacarlas quizá no solo sea problemático, sino que no sería posible una mezcla adecuada. No obstante, la selección es fácil de realizar usando un mecanismo de azar llamado **tabla de números aleatorios**.

Tabla de números aleatorios

Suponga que 10 pelotas numeradas 0, 1, …, 9 se colocan en una urna y se revuelven. Se extrae una y se registra el dígito. Luego se vuelve a colocar, se revuelven las pelotas, se extrae otra y se registra el dígito. Los dígitos en la tabla 7, al final del libro, en realidad se generaron usando un programa de cómputo que simula muy cercanamente este procedimiento. En la tabla 1.3 se incluye una porción de esa tabla.

El mecanismo de azar que generó la tabla de números aleatorios garantiza que cada uno de los dígitos individuales tenga la misma oportunidad de ocurrencia que todos los pares 00, 01, …, 99 tengan la misma oportunidad de ocurrencia, etcétera. Más aún: cualquier colección de dígitos no está relacionada con algún otro dígito en la tabla. Debido a estas propiedades, a los dígitos se les llama aleatorios.

EJEMPLO **Uso de la tabla de dígitos aleatorios**

La semana pasada se fabricaron 80 bombas para desagüe. Use la tabla 1.3 para seleccionar una muestra de tamaño $n = 5$ para probar cuidadosamente y volver a verificar posibles defectos antes de que se envíen al comprador. Seleccione la muestra sin sustitución, de modo que la misma bomba no aparezca dos veces en la muestra.

Solución El primer paso consiste en numerar las bombas de 1 a 80, u ordenarlas de alguna manera para identificarlas. Los dígitos deben seleccionarse dos a la vez, porque el tamaño de la población $N = 80$ es un número de dos dígitos. Comience por seleccionar arbitrariamente

Tabla 1.3 Dígitos aleatorios (porción de la tabla 7)

1306	1189	5731	3968	5606	5084	8947	3897	1636	7810
0422	2431	0649	8085	5053	4722	6598	5044	9040	5121
6597	2022	6168	5060	8656	6733	6364	7649	1871	4328
7965	6541	5645	6243	7658	6903	9911	5740	7824	8520
7695	6937	0406	8894	0441	8135	9797	7285	5905	9539
5160	7851	8464	6789	3938	4197	6511	0407	9239	2232
2961	0551	0539	8288	7478	7565	5581	5771	5442	8761
1428	4183	4312	5445	4854	9157	9158	5218	1464	3634
3666	5642	4539	1561	7849	7520	2547	0756	1206	2033
6543	6799	7454	9052	6689	1946	2574	9386	0304	7945
9975	6080	7423	3175	9377	6951	6519	8287	8994	5532
4866	0956	7545	7723	8085	4948	2228	9583	4415	7065
8239	7068	6694	5168	3117	1568	0237	6160	9585	1133
8722	9191	3386	3443	0434	4586	4150	1224	6204	0937
1330	9120	8785	8382	2929	7089	3109	6742	2468	7025

una fila y una columna. Seleccione el renglón 6 y la columna 21. Al leer los dígitos de las columnas 21 y 22, así como al avanzar hacia abajo, se obtiene

41 75 91 75 19 69 49

Ignore el número 91, ya que es mayor que 80, el tamaño de la población. También se ignora cualquier número cuando aparezca una segunda vez, como el 75, es decir, se sigue leyendo hasta que se seleccionen cinco números diferentes en el rango adecuado. Veamos las cinco bombas numeradas

41 75 19 69 49

que se probarán cuidadosamente y volverán a verificarse por defectos.

Para situaciones que requieren muestras grandes o aplicaciones frecuentes, es más conveniente usar software de cómputo para elegir los números aleatorios. ■

EJEMPLO **Selección de una muestra mediante marcación de dígitos aleatorios**

Suponga que, para el área donde desea realizar una encuesta, hay un solo prefijo telefónico de tres dígitos. Use la tabla 7 de dígitos aleatorios para seleccionar cinco números telefónicos.

Solución Arbitrariamente se decide comenzar en la segunda página de la tabla 7, en la fila 53 y la columna 13. Al leer los dígitos en las columnas 13 a 16, así como al avanzar hacia abajo, se obtiene

5619 0812 9167 3802 4449

Estos cinco números, junto con el prefijo designado, se convierten en los números telefónicos para llamar en la encuesta. Cualquier número telefónico, listado o no listado, tiene la misma oportunidad de seleccionarse. Lo mismo es válido para cada par, cada tripleta, etcétera. Es posible que deba descartar los teléfonos comerciales y extraer otro número de la tabla. Si en el área hay dos prefijos telefónicos, podrían realizarse selecciones separadas para cada prefijo. ■

Sí y no
Sí
1. Cree una propuesta clara, antes de decidir cuáles variables se observarán.
2. Defina cuidadosamente la población de interés.
3. Siempre que sea posible, seleccione muestras con un dispositivo aleatorio o una tabla de números aleatorios.
No
1. No acepte sin cuestionar las muestras autoseleccionadas.

Ejercicios de repaso

1.1 El artículo en una revista para el consumidor pregunta: "¿cuán seguro es el aire en los aviones?", y asegura que la calidad del aire se midió en 158 vuelos distintos, en aerolíneas con sede en Estados Unidos. Sea la variable de interés, una medida numérica de enrarecimiento. Identifique la población y la muestra.

1.2 La presentadora de un programa de radio anunció que quería saber cuál rapero era el favorito entre los estudiantes universitarios de su escuela. Se pidió a los radioescuchas que llamaran y mencionaran a su rapero favorito. Identifique la población, en términos de preferencias, y la muestra. ¿Es probable que la muestra sea representativa? Comente. Describa también cómo obtener una muestra que probablemente sea más representativa.

1.3 Considere la población de todas las computadoras laptop propiedad de los alumnos en su universidad. Usted quiere saber el peso de la laptop.

a) Especifique la unidad de población.

b) Especifique la variable de interés.

c) Especifique la población estadística.

1.4 Identifique la población estadística, la muestra y la variable de interés en cada una de las siguientes situaciones:

a) Para aprender acerca de los salarios iniciales para los ingenieros que se gradúan de una universidad del medio oeste, se pide a 20 ex alumnos de que informen su salario inicial luego de graduarse.

b) Quince chips de memoria para computadora se seleccionan de las mil fabricadas ese día. Se prueban los chips de memoria para computadora y cinco resultan defectuosos.

c) Se midió la resistencia a la tensión en 20 especímenes fabricados con un nuevo material plástico. La intención es aprender acerca de las resistencias a la tensión para todos los especímenes que pudieran fabricarse con el nuevo material plástico.

1.5 Para que los discos duros funcionen adecuadamente, la distancia entre la cabeza de lectura/escritura y el disco debe permanecer entre límites estrechos. De la producción de cada hora, se seleccionan 40 discos y se mide la distancia.

Identifique la unidad de población, la variable de interés, la población estadística y la muestra.

1.6 Diez estudiantes de último año solicitan estar en el equipo que construirá un automóvil de alto kilometraje para competir contra equipos de otras universidades. Use la tabla 7 de dígitos aleatorios para seleccionar a seis de los 10 estudiantes y formar el equipo.

1.7 Consulte los datos de profundidad de la ranura de la tabla 1.1. Después de reparar la máquina, una muestra de tres partes cerámicas nuevas tiene profundidades de ranura de 215, 216 y 213 (milésimas de pulgada).

a) Vuelva a dibujar la gráfica X barra e incluya la media adicional $\bar{x}$.

b) ¿La nueva $\bar{x}$ cae dentro de los límites de control?

1.8 Un fabricante canadiense identificó un diámetro crucial en un barreno de cigüeñal, que debe mantenerse dentro de una tolerancia cercana para que el producto tenga éxito. Cada hora se tomaron muestras de tamaño 4. En la tabla 1.4 se incluyen los valores de las diferencias (medición-especificación), en diezmilésimas de pulgada.

a) Calcule la línea central para una gráfica X barra para las medias de las 24 muestras horarias. La línea central es $\bar{x} = (4.25 - 3.00 - \cdots - 1.50 + 3.25)/24$.

b) ¿El promedio de todos los números de la tabla, 4 para cada hora, es igual que el promedio de los 24 promedios horarios? ¿Debería serlo?

c) Un cálculo por computadora da como resultado los límites de control

$$\text{LCI} = -4.48$$
$$\text{LCS} = 7.88$$

Construya la gráfica X barra. Identifique las horas donde el proceso estuvo fuera de control.

Tabla 1.4 Diferencias (medición – especificación), en diezmilésimas de pulgada

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	10	−6	−1	−8	−14	−6	−1	8	−1	5	2	5
	3	1	−3	−3	−5	−2	−6	−3	7	6	1	3
	6	−4	0	−7	−6	−1	−1	9	1	3	1	10
	−2	−3	−7	−2	2	−6	7	11	7	2	4	4
$\bar{x}$	4.25	−3.00	−2.75	−5.00	−5.75	−3.75	−0.25	6.25	3.50	4.00	2.00	5.50

Hora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	5	6	−5	−8	2	7	8	5	8	−5	−2	−1
	9	6	4	−5	8	7	13	4	1	7	−4	5
	9	8	−5	1	−4	5	6	7	0	1	−7	9
	7	10	−2	0	1	3	6	10	−6	2	7	0
$\bar{x}$	7.50	7.50	−2.00	−3.00	1.75	5.50	8.25	6.50	0.75	1.25	−1.50	3.25

Términos clave

Confiabilidad 3
Enfoques de frecuencias o clásico 2
Estadística descriptiva 2
Gráfica *X* barra 4
Inferencia estadística 2
Mejoramiento de la calidad 3
Muestra 7
Población 6
Población de unidades 6
Población estadística 6
Propuesta 6
Tabla de números aleatorios 8
Unidad 6
Variable 6

CAPÍTULO

2 ORGANIZACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE DATOS

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

2.1 Diagramas de Pareto y diagramas de puntos 12

2.2 Distribuciones de frecuencias 14

2.3 Gráficas de distribuciones de frecuencias 17

2.4 Presentaciones de tallo y hojas 21

2.5 Medidas descriptivas 24

2.6 Cuartiles y percentiles 29

2.7 El cálculo de $\bar{x}$ y s 34

2.8 Estudio de caso: problemas con la agregación de datos 39

Ejercicios de repaso 42

Términos clave 44

Los datos estadísticos obtenidos de encuestas, experimentos o cualquier serie de mediciones con frecuencia son tan numerosos que prácticamente resultan inútiles a menos que se condensen o se reduzcan en forma más adecuada. El capítulo inicia con el uso de gráficas sencillas en la sección 2.1. Las secciones 2.2 y 2.3 tratan con problemas relacionados con el agrupamiento de datos y la presentación de tales agrupamientos de manera gráfica. En la sección 2.4 se estudia una forma relativamente nueva de presentar los datos.

En ocasiones sería muy satisfactorio presentar los datos tal como son y dejarlos hablar por sí mismos; en otras situaciones, podría ser necesario tan solo agrupar los datos y presentar el resultado en forma tabular o gráfica. Sin embargo, la mayoría de las veces los datos deben resumirse aún más, y en las secciones 2.5 a 2.7 se introducen algunos de los tipos de descripciones estadísticas más utilizados.

2.1 Diagramas de Pareto y diagramas de puntos

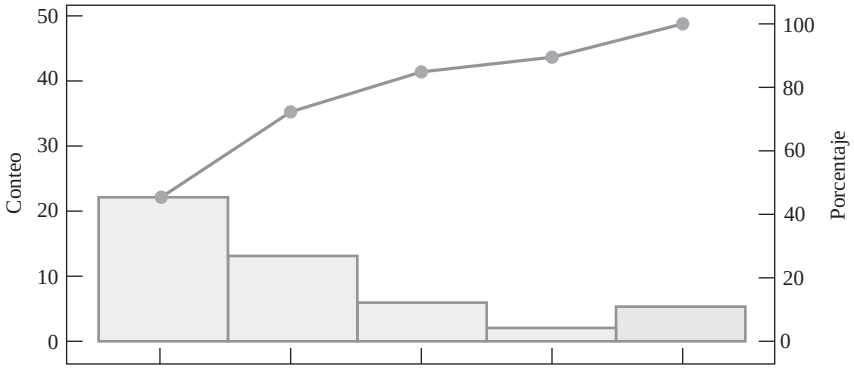
Para resolver problemas de ingeniería es necesario recopilar datos que proporcionen la información vital necesaria. Una vez recabados, tales datos tienen que describirse y analizarse para producir información resumida. Las presentaciones gráficas a menudo son la forma más efectiva de comunicar dicha información. Para ilustrar el poder de las técnicas gráficas, primero se describe un **diagrama de Pareto**. Dicho recurso, que ordena cada tipo de falla o defecto de acuerdo con su frecuencia, ayuda a los ingenieros a identificar defectos importantes y sus causas.

Cuando una compañía identifica un proceso como un candidato para mejoramiento, el primer paso consiste en recolectar datos acerca de la frecuencia de cada tipo de falla. Por ejemplo, para un torno controlado por computadora, cuyo rendimiento estaba por debajo de la tasa de producción promedio, los trabajadores registraron las siguientes causas y sus frecuencias:

fluctuaciones de potencia	6
controlador inestable	22
error del operador	13
herramienta gastada que no fue sustituida	2
otra	5

Los datos se presentan, como un caso especial de una **gráfica de barras** llamado **diagrama de Pareto**, figura 2.1, el cual consiste en ordenar los eventos de mayor a menor. Por lo general, dos o tres elementos representarán más de la mitad de la frecuencia total.

En cuanto al torno, 22 o 100(22/48) = 46% de los casos se deben a un controlador inestable y 22 + 13 = 35 o 100(35/48) = 73% se deben a un controlador inestable o a un error del operador. Estos porcentajes acumulativos se muestran en la figura 2.1, como una línea cuya escala está en el lado derecho del diagrama de Pareto, como se indica nuevamente en la figura 14.2.



Defecto	Inestable	Error	Potencia	Herramienta	Otro
Conteo	22	13	6	2	5
Porcentaje	45.8	27.1	12.5	4.2	10.4
% acumulado	45.8	72.9	85.4	89.6	100.0

Figura 2.1
Un diagrama de Pareto respecto de fallas

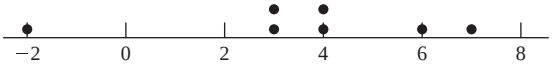
En el contexto del mejoramiento de la calidad, para lograr la mayor influencia, se quieren seleccionar los problemas con mayor frecuencia o vitales para mejorar. Esta gráfica enfatiza visualmente la importancia de reducir la frecuencia del mal comportamiento del controlador. Una meta inicial sería reducirla a la mitad.

Como segundo paso hacia el mejoramiento del proceso, se recopilaron datos acerca de las desviaciones de la rapidez de corte, del valor meta establecido por el controlador. Los siete valores observados de (rapidez de corte) – (meta)

$$3 \quad 6 \quad -2 \quad 4 \quad 7 \quad 4 \quad 3$$

se grafican, como un **diagrama de puntos**, en la figura 2.2. El diagrama de puntos resume visualmente la información de que el torno, por lo general, funciona con rapidez. En los capítulos 13 y 15 se desarrollarán diseños y métodos experimentales eficientes, con la finalidad de identificar los principales factores causales que contribuyen a la variabilidad en una respuesta como la rapidez de corte.

Figura 2.2
Diagrama de puntos de desviaciones en la rapidez de corte



¡Cuando el número de observaciones es pequeño, con frecuencia es difícil identificar algún patrón de variación! No obstante, es buena idea graficar los datos y observar las características inusuales.

EJEMPLO **Los diagramas de puntos exponen los valores atípicos**

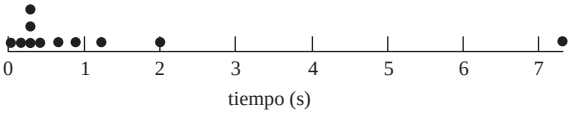
En 1987, los físicos observaron, por primera vez, neutrinos de una supernova que ocurrió afuera del sistema solar. En un lugar de Kamiokande, Japón, se registraron los siguientes tiempos (en segundos) entre neutrinos:

0.107 0.196 0.021 0.283 0.179 0.854 0.58 0.19 7.3 1.18 2.0

Dibuje un diagrama de puntos.

Solución Se grafica al 0.1 de segundo más cercano, para evitar apiñamiento (véase la figura 2.3). Observe la brecha extremadamente larga entre 2.0 y 7.3 segundos. Los estadísticos llaman

Figura 2.3
Diagrama de puntos de tiempo entre neutrinos



a tal observación inusual un **valor atípico**. Por lo general, los valores atípicos merecen más atención. ¿Hubo un error de registro, se perdieron neutrinos en ese largo intervalo de tiempo o hubo dos explosiones separadas en la supernova? En física, preguntas importantes podrían depender de la interpretación correcta de este valor atípico. ■

EJEMPLO

Un diagrama de puntos para múltiples muestras revela diferencias

Los vasos que contienen las reacciones en algunas plantas de energía nuclear consisten en dos componentes hemisféricos soldados juntos. El cobre de las soldaduras puede hacer que se vuelvan frágiles después de años de servicio. Las muestras del material para soldadura de una corrida de producción en una planta tienen los contenidos de cobre 0.27, 0.35, 0.37. Las muestras de la siguiente corrida de producción tuvieron los valores 0.23, 0.15, 0.25, 0.24, 0.30, 0.33, 0.26. Dibuje un diagrama de puntos que resalte las posibles diferencias en las dos corridas de producción del material de soldadura. Si los contenidos de cobre para las dos corridas son diferentes, no deberían combinarse para formar una sola estimación.

Solución Grafique el primer grupo como círculos sólidos y el segundo como círculos abiertos (véase la figura 2.4). Parece improbable que las dos corridas de producción sean iguales, porque los dos valores superiores son de la primera corrida. (En el capítulo 14 se confirma este hecho.) Las dos corridas deberían tratarse por separado.

El contenido de cobre del material para soldadura que se utiliza en la planta de energía se relaciona directamente con la determinación de la vida operativa segura. Combinar la muestra conduciría a una estimación muy poco realista sobre el contenido de cobre, así como a una estimación demasiado grande de la vida segura. ■

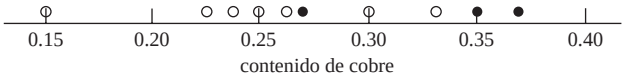


Figura 2.4
Diagrama de puntos del contenido de cobre

Cuando un conjunto de datos consiste en un gran número de observaciones, se toma el enfoque descrito en la siguiente sección. Las observaciones se resumen primero en forma de tabla.

2.2 Distribuciones de frecuencias

Una **distribución de frecuencias** es una tabla que divide un conjunto de datos en un número adecuado de clases (categorías), que muestra también el número de elementos que pertenecen a cada clase. Dicha tabla sacrifica parte de la información contenida en los datos. En vez de conocer el valor exacto de cada elemento, tan solo se sabe que pertenece a cierta clase. Por otro lado, este tipo de agrupamiento a menudo presenta características importantes de los datos y la ganancia en "legibilidad", por lo general, más que compensar la pérdida de información. En lo que sigue, se considerarán sobre todo **distribuciones numéricas**, esto es, distribuciones de frecuencias donde los datos están agrupados de acuerdo con su tamaño. Si los datos están agrupados, según cierta cualidad o atributo, a tal distribución se le conoce como **distribución categórica**.

El primer paso para construir una distribución de frecuencias consiste en decidir cuántas clases usar y elegir los **límites de clase** para cada una, esto es, hay que decidir desde dónde hasta dónde irá cada clase. Hablando de manera general, el número de clases que se usan depende del número de observaciones, aunque rara vez es redituable utilizar menos de 5 o más de 15. La excepción al límite superior es cuando el tamaño del conjunto de datos es

de varios cientos o incluso algunos miles. También depende del rango de los datos; a saber, la diferencia entre la observación más grande y la más pequeña.

Una vez establecidas las clases, se cuenta el número de observaciones en cada clase, llamadas **frecuencias de clase**. La tarea se simplifica si los datos se ordenan primero de menor a mayor.

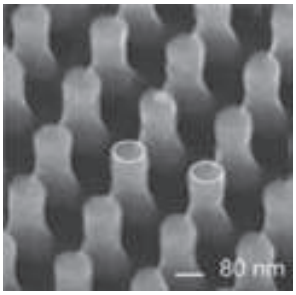


Figura 2.5
Nanopilares

Para ilustrar la construcción de una distribución de frecuencias, considere los datos recolectados en un escenario de nanotecnología (véase el ejercicio 2.44). Ingenieros que fabrican un nuevo multiplicador de electrones de tipo transmisión crearon un arreglo de nanopilares de silicio sobre una membrana de silicio plana. La estructura precisa podría influir en las propiedades eléctricas, de modo que se midieron las alturas de 50 nanopilares en nanómetros (nm), o bien, $10^{-9} \times$ metros. (Véase la figura 2.5.)[1]

245	333	296	304	276	336	289	234	253	292
366	323	309	284	310	338	297	314	305	330
266	391	315	305	290	300	292	311	272	312
315	355	346	337	303	265	278	276	373	271
308	276	364	390	298	290	308	221	274	343

Puesto que la observación más grande es 391, la más pequeña es 221 y el rango es 391 – 221 = 170, se eligen cinco clases con los límites 206-245, 246-285, 286-325, 326-365, 366-405 o las seis clases 216-245, 246-275, …, 366-395. Advierta que, en cualquier caso, **las clases no se traslapan, se acomodan todos los datos y todos tienen el mismo ancho**.

Inicialmente, al decidir acerca de la primea de estas clasificaciones, se cuenta el número de observaciones en cada clase para obtener la distribución de frecuencias:

Límites de clases	Frecuencia
206-245	3
246-285	11
286-325	23
326-365	9
366-405	4
Total	50

Observe que los límites de clase están dados a tantos lugares decimales como los datos originales. Si los datos originales se hubieran dado a un lugar decimal, se habrían utilizado los límites de clase 205.9-245.0, 245.1-285.0, …, 365.1-405.0. Si se redondearon a los 10 nanómetros más cercanos, se habrían usado los límites de clase 210-240, 250-280, 290-320, 330-360, 370-400.

En el ejemplo anterior, los datos acerca de alturas de nanopilares pueden considerarse valores de una variable continua, la que, posiblemente, tendría cualquier valor en un intervalo. No obstante, si se usan clases como 205-245, 245-285, 285-325, 325-365, 365-405, existe la posibilidad de ambigüedades: 245 iría en la primera clase o en la segunda; 285 en la segunda clase o en la tercera, etcétera. Para evitar dicha dificultad, se toma un enfoque alternativo.

Se hace una **convención de puntos extremos**. Para los datos de altura de pilar se toma (205, 245] como la primera clase, (245, 285] como la segunda y así sucesivamente hasta

[1] Datos y fotografía de H. Qin, H. Kim y R. Blick, Nanopillar arrays on semiconductor membranes as electron emission amplifiers, *Nanotechnology* **19** (2008), usada con autorización de IOP Publishing Ltd.

(365, 405]. Esto es, para el conjunto de datos mencionado se adopta la convención de que el punto extremo derecho está incluido, pero el izquierdo no lo está. Para otros conjuntos de datos es preferible invertir la convención de puntos extremos, de modo que el punto extremo izquierdo se incluya, pero no el derecho. Cualquiera que sea la convención de puntos extremos que se adopte, debería aparecer en la descripción de la distribución de frecuencias.

Con la convención de que se incluye el punto extremo derecho, la distribución de frecuencias de los datos de nanopilares es

Altura (nm)	Frecuencia
(205, 245]	3
(245, 285]	11
(285, 325]	23
(325, 365]	9
(365, 405]	4
Total	50

Las **fronteras de clase** son los puntos extremos de los intervalos que especifican cada clase. Como ya se anotó, una vez agrupados los datos, cada observación pierde su identidad en el sentido de que su valor exacto ya no se conoce. Lo anterior ocasionaría dificultades cuando se quieren dar más descripciones de los datos, pero se evitarían al representar cada observación en una clase por su punto medio, llamado **marca de clase**. En general, las marcas de clase de una distribución de frecuencias se obtienen al promediar límites de clase sucesivos o fronteras de clase sucesivas. Si todas las clases de una distribución tienen longitudes iguales, como en el ejemplo, al intervalo común entre cualesquiera marcas de clase sucesivas se les refiere como el **intervalo de clase** de la distribución. Note que el intervalo de clase también se determina con la diferencia entre cualesquiera fronteras de clase sucesivas.

EJEMPLO **Marcas de clase e intervalos de clase para datos agrupados**

Con referencia a la distribución de las alturas de los nanopilares, encuentre *a*) las marcas de clase y *b*) el intervalo de clase.

Solución *a*) Las marcas de clase son

$$\frac{205 + 245}{2} = 225 \qquad \frac{245 + 285}{2} = 265, \quad 305, \quad 345, \quad 385$$

b) El intervalo de clase es 245 – 205 = 40. ■

Hay muchas formas alternativas de distribuciones en las que a veces se agrupan los datos. Las más relevantes, entre estas, son las **distribuciones acumuladas** "menor o igual a", "menor que", "mayor que" o "mayor o igual". Una distribución acumulada "menor o igual a" presenta el número total de observaciones que son menores que los valores dados o iguales a estos. Dichos valores deben ser fronteras de clase, con una convención adecuada de puntos extremos, cuando los datos se agrupen en una distribución de frecuencias.

EJEMPLO **Distribución acumulada de las alturas de nanopilares**

Convierta la distribución de las alturas de los nanopilares en una distribución, de acuerdo con cuántas observaciones son menores que o iguales a 205, menores que o iguales a 245, . . . , menores que o iguales a 405.

Solución Puesto que ninguno de los valores es menor que 205, 3 son menores que o iguales a 245, 3 + 11 = 14 son menores que o iguales a 285, 14 + 23 = 37 son menores que o iguales a 325, 37 + 9 = 46 son menores que o iguales a 365 y los 50 son menores que o iguales a 405, se tiene

Alturas (nm)	Frecuencia acumulada
(205, 245]	3
(245, 285]	14
(285, 325]	37
(325, 365]	46
(365, 405]	50

■

Cuando la convención de puntos extremos para una clase incluye el punto extremo izquierdo, pero no el derecho, la distribución acumulada se convierte en una distribución acumulada "menor que".

Las distribuciones acumuladas "mayor que" y "o mayor" se construyen de igual modo, al agregar las frecuencias, una por una, comenzando en el otro extremo de la distribución de frecuencias. En la práctica, las distribuciones acumuladas "menor que o igual a" se utilizan más ampliamente, por lo cual no es raro referirse a las distribuciones acumuladas "menor o igual" simplemente como **distribuciones acumuladas**.

Si es deseable comparar distribuciones de frecuencias, quizá sea necesario (o al menos ventajoso) convertirlas en **distribuciones porcentuales**. Tan solo divida cada frecuencia de clase entre la frecuencia total (el número total de observaciones en la distribución) y multiplique por 100; de esta forma, se indica qué porcentaje de los datos cae en cada clase de la distribución. Lo mismo sucede con las distribuciones acumuladas y, por lo tanto, las convierte en **distribuciones porcentuales acumuladas**.

2.3 Gráficas de distribuciones de frecuencias

Las propiedades de las distribuciones de frecuencias que se relacionan con su forma se ilustran mejor empleando gráficas; en esta sección se presentan algunas de las formas más comúnmente utilizadas de gráficas de distribuciones de frecuencias y de distribuciones acumuladas.

La forma más usual de presentación gráfica de una distribución de frecuencias es el **histograma**. El histograma de una distribución de frecuencias se construye con rectángulos adyacentes, las alturas de los rectángulos representan las frecuencias de clase y las bases de los rectángulos se extienden entre fronteras de clases sucesivas. En la figura 2.6 se presenta un histograma con los datos de alturas de nanopilares.

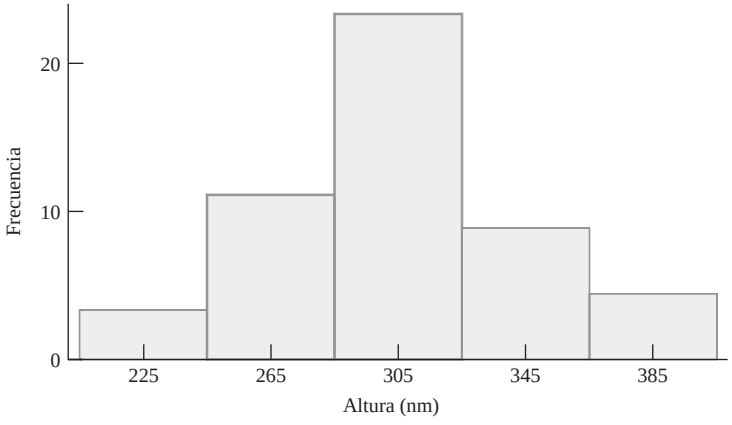


Figura 2.6
Histograma de altura del pilar

Al utilizar la convención de puntos extremos, el intervalo (205, 245] que define la primera clase tiene frecuencia 3, de modo que el rectángulo tiene altura 3; el segundo rectángulo, sobre el intervalo (245, 285], tiene altura 9, etcétera. El rectángulo más alto está sobre el intervalo (285, 325], con altura 23. El histograma tiene un solo pico y es razonablemente simétrico. Casi la mitad del área, que representa la mitad de las observaciones, está sobre el intervalo 285 a 325 nanómetros.

La inspección de la gráfica de una distribución de frecuencias, como un histograma, a menudo presenta características que no son inmediatamente aparentes de los mismos datos. Además del hecho de que tal gráfica presenta una buena imagen general de los datos, también podría enfatizar irregularidades y características inusuales. Por ejemplo, las observaciones atípicas que de alguna manera se ajustan a la imagen general, esto es, el patrón general de variación en los datos puede deberse a errores de medición, falla del equipo y causas similares. Asimismo, el hecho de que un histograma muestre dos o más *picos* (máximos) ofrece información pertinente. La aparición de dos picos implicaría, por ejemplo, un cambio en el proceso que se mide, o bien, que los datos provienen de dos o más fuentes. Con cierta experiencia, uno aprende a detectar tales irregularidades o anomalías, en tanto un ingeniero experimentado se sorprendería igualmente si descubriera que un histograma de una distribución de tiempos de falla del circuito integrado fuera simétrico o si una distribución de tallas de sombrero para hombres estadounidenses fuera bimodal.

En ocasiones, resulta suficiente dibujar un histograma con la finalidad de resolver un problema de ingeniería.

EJEMPLO

Un histograma revela la solución a un problema de operación de molido

Un ingeniero metalúrgico enfrentaba problemas con una operación de molido. La acción de molido se realiza con balines. Después de cierto razonamiento, recolectó una muestra de balines utilizados para el molido, los llevó a casa, los esparció sobre la mesa de su cocina y midió sus diámetros con una regla. En la figura 2.7 se ilustra su histograma. ¿Qué revela el histograma?

Solución El histograma exhibe dos picos distintos, uno para un grupo de balines cuyos diámetros se centran cerca de 25 y el otro centrado cerca de 40.

Al conseguir que su proveedor realice una mejor clasificación, de modo que todos los balines, en esencia, sean del primer grupo, el ingeniero resuelve por completo su problema. Tomar la acción para obtener los datos fue el gran paso. El análisis resultó sencillo. ■

Como indica el siguiente ejemplo concerniente a un sistema de supercomputadoras, no todos los histogramas son simétricos.

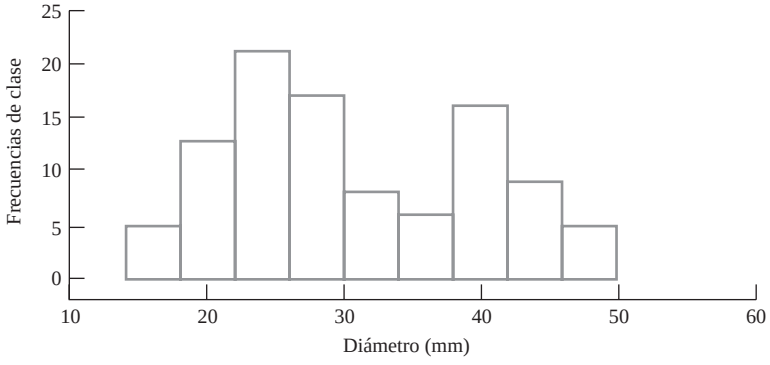


Figura 2.7
Histograma del diámetro de balines

EJEMPLO

Un histograma revela el patrón de datos del sistema de una supercomputadora

Un científico en computación, quien intenta optimizar el rendimiento del sistema, recolecta datos acerca del tiempo, en microsegundos, entre peticiones para un servicio de proceso específico.

2,808	4,201	3,848	9,112	2,082	5,913	1,620	6,719	21,657
3,072	2,949	11,768	4,731	14,211	1,583	9,853	78,811	6,655
1,803	7,012	1,892	4,227	6,583	15,147	4,740	8,528	10,563
43,003	16,723	2,613	26,463	34,867	4,191	4,030	2,472	28,840
24,487	14,001	15,241	1,643	5,732	5,419	28,608	2,487	995
3,116	29,508	11,440	28,336	3,440				

Dibuje un histograma con las clases de igual longitud [0, 10,000), [10,000, 20,000), …, [70,000, 80,000), donde el punto extremo izquierdo está incluido, pero no el punto extremo derecho.

Solución El histograma de estos datos de tiempo entre peticiones, que se ilustra en la figura 2.8, tiene una cola larga hacia la derecha. Advierta que, con esta elección de intervalos de igual longitud, dos clases están vacías. Para enfatizar que todavía es posible observar tiempos entre peticiones en dichos intervalos, es preferible reagrupar los datos de la cola derecha en clases de longitudes distintas (véase el ejercicio 2.62). ■

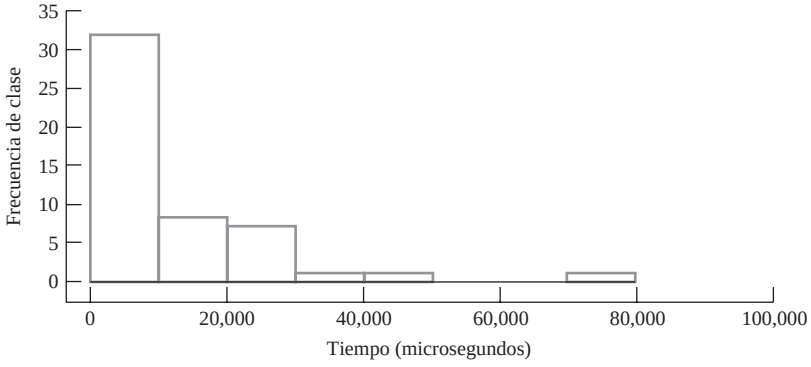


Figura 2.8
Histograma del tiempo entre peticiones

Cuando un histograma se construye a partir de una tabla de frecuencias con clases de distintas longitudes, la altura de cada rectángulo debe cambiar a

$$\text{altura} = \frac{\text{frecuencia relativa}}{\text{ancho}}$$

El área del rectángulo representa, entonces, la frecuencia relativa para la clase y el área total del histograma es 1. A este se le llama **histograma de densidad**.

EJEMPLO

Un histograma de densidad tiene área total 1

En 58 especímenes de una nueva aleación de aluminio, que se desarrolla como material para la siguiente generación de aeronaves, se midió la resistencia a la compresión.

66.4	67.7	68.0	68.0	68.3	68.4	68.6	68.8	68.9	69.0	69.1
69.2	69.3	69.3	69.5	69.5	69.6	69.7	69.8	69.8	69.9	70.0
70.0	70.1	70.2	70.3	70.3	70.4	70.5	70.6	70.6	70.8	70.9
71.0	71.1	71.2	71.3	71.3	71.5	71.6	71.6	71.7	71.8	71.8
71.9	72.1	72.2	72.3	72.4	72.6	72.7	72.9	73.1	73.3	73.5
74.2	74.5	75.3								

Dibuje un histograma de densidad, esto es, un histograma escalado para tener una área total de 1 unidad. Por razones que se volverán evidentes en el capítulo 6, a la escala vertical se le llama **densidad**.

Solución La altura de cada rectángulo es igual a la *frecuencia/ancho relativo*, de modo que las áreas son iguales a la frecuencia relativa. El histograma resultante, construido por computadora, tiene una forma casi simétrica (véase la figura 2.9). También se graficó una curva continua que se aproxima a la forma general. En el capítulo 6 se introducirá esta familia de curvas con forma de campana. ■

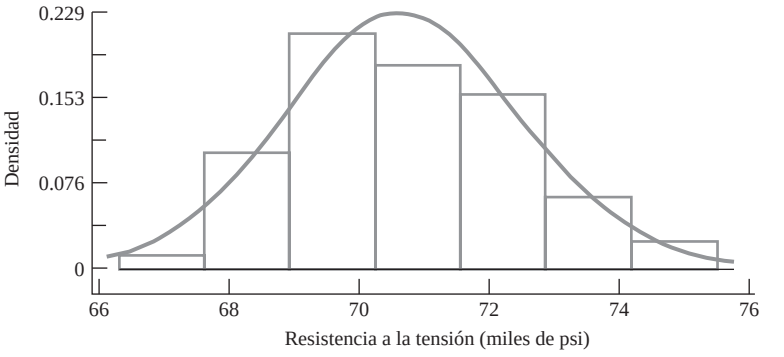


Figura 2.9
Histograma de la resistencia a la tensión de una aleación de aluminio

El ejemplo sugiere que los histogramas, para observaciones que provienen de una escala continua, pueden aproximarse mediante curvas suaves.

Por lo general, las distribuciones acumuladas se presentan gráficamente en forma de **ojivas**, donde se grafican las frecuencias acumuladas en las fronteras de clase. Los puntos resultantes se conectan mediante líneas rectas, como se indica en la figura 2.10, que representa la distribución acumulada "menor que o igual a" de los datos de altura de nanopilares de la página 15. La curva está más inclinada sobre la clase con la mayor frecuencia.

Cuando la convención de puntos extremos para una clase incluye el punto extremo izquierdo, pero no el punto extremo derecho, la ojiva representa una distribución acumulada "menor que".

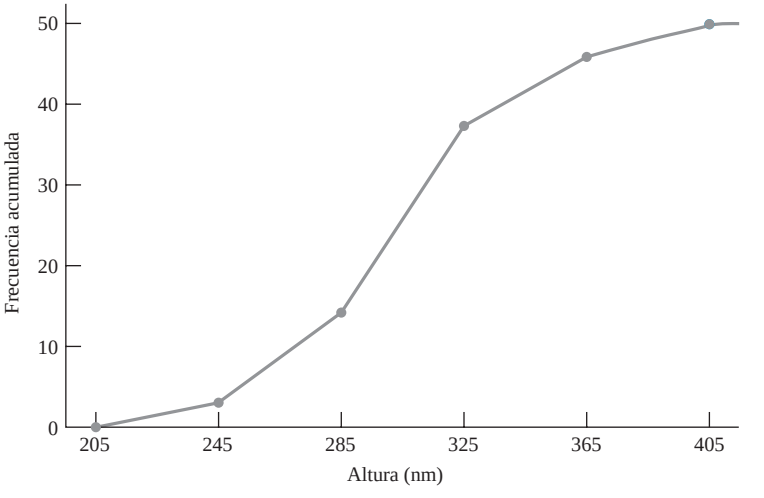


Figura 2.10
Ojiva de alturas de nanopilares

2.4 Presentaciones de tallo y hojas

En las dos secciones anteriores, la atención se dirigió al agrupamiento de conjuntos de datos relativamente grandes, con la finalidad de poner tales datos en una forma manejable. Como se vio, ello implicó cierta pérdida de información. Se han propuesto técnicas similares para las exploraciones preliminares de pequeños conjuntos de datos, lo cual produce una buena imagen general de los datos sin pérdida alguna de información.

Para ilustrar, considere las siguientes lecturas de humedad redondeadas al porcentaje más cercano:

29	44	12	53	21	34	39	25	48	23
17	24	27	32	34	15	42	21	28	37

Al proceder como en la sección 2.2, los datos se agrupan en la siguiente distribución:

Lecturas de humedad	Frecuencia
10-19	3
20-29	8
30-39	5
40-49	3
50-59	1

Si se quiere evitar la pérdida de información inherente en la tabla anterior, se podrían conservar los últimos dígitos de las lecturas dentro de cada clase para obtener

10-19	2 7 5
20-29	9 1 5 3 4 7 1 8
30-39	4 9 2 4 7
40-49	4 8 2
50-59	3

Esto también se escribe como

1	2 7 5		1	2 5 7
2	9 1 5 3 4 7 1 8		2	1 1 3 4 5 7 8 9
3	4 9 2 4 7	o bien,	3	2 4 4 7 9
4	4 8 2		4	2 4 8
5	3		5	3

donde la columna izquierda, el **tallo**, brinda los dígitos de las decenas 10, 20, 30, 40 y 50. Los números en una fila, las hojas, tienen la unidad 1.0. En el último paso, las hojas se escriben en orden ascendente. Los tres números en la primera fila son 12, 15 y 17. A esta tabla se le llama **presentación de tallo y hojas** o simplemente **presentación tallo-hojas.** La columna de la izquierda forma el **tallo** y los números a la izquierda de la línea vertical son las **etiquetas de tallo**, que en el ejemplo son 1, 2, …, 5. Cada número a la derecha de la línea vertical es una **hoja**. No debería haber brechas en el tallo, incluso si no existieran hojas para dicho valor específico.

En esencia, una presentación de tallo y hojas tiene la misma imagen que la cuenta correspondiente, aunque conserva toda la información original. Por ejemplo, si una presentación de tallo y hojas tiene el tallo de dos dígitos

1.2 | 0 2 3 5 8

donde la unidad de hoja = 0.01, los datos correspondientes son 1.20, 1.22, 1.23, 1.25 y 1.28. Si una presentación de tallo y hojas tiene las hojas de dos dígitos

0.3 | 03 17 55 89

donde la unidad del primer dígito de hoja = 0.01, los datos correspondientes son 0.303, 0.317, 0.355 y 0.389.

Hay varias formas en que las presentaciones de tallo y hojas suelen modificarse para satisfacer necesidades específicas (véase los ejercicios 2.25 y 2.26); sin embargo, aquí no se entrará en esos detalles, pues el objetivo es mostrar tan solo una de las técnicas relativamente nuevas, que se presentan con el título general de **análisis exploratorio de datos**.

Ejercicios

2.1 Los accidentes en una planta de papas fritas se clasifican de acuerdo con el área lesionada

dedos	17
ojos	5
brazo	2
pierna	1

Dibuje un diagrama de Pareto.

2.2 Los daños en un molino de papel (en miles de dólares) debidos a roturas se dividen de acuerdo con el producto fabricado.

papel sanitario	132
toallas para manos	85
servilletas	43
otros 12 productos	50

a) Dibuje un diagrama de Pareto.

b) ¿Qué porcentaje de la pérdida ocurre al fabricar:

1) papel sanitario?

2) papel sanitario o toallas para manos?

2.3 Las sondas para medición no invasiva del flujo sanguíneo no deben emitir demasiada energía (miliwatts por centímetro cuadrado). Una muestra de 12 sondas produjo los valores de energía:

9, 10, 6, 7, 9, 7, 9, 6, 8, 5, 10 y 12

Construya un diagrama de puntos.

2.4 Las siguientes 14 mediciones son de la resistencia (en psi) del papel que se va a utilizar en tubos de cartón:

121, 128, 129, 132, 135, 133, 127, 115, 131, 125, 118, 114, 120, 116

Elabore un diagrama de puntos.

2.5 Ingenieros civiles ayudan a que las plantas municipales de tratamiento de aguas residuales funcionen de manera más eficiente, al recolectar datos acerca de la calidad de las aguas residuales. En siete ocasiones, las cantidades de sólidos suspendidos (partes por millón) en una planta fueron

14 12 21 28 30 65 26

Muestre los datos en un diagrama de puntos. Comente sus resultados.

2.6 Jump River Electric atiende una porción de Wisconsin del norte que, como mucha del área está arbolada, es propensa a apagones. Un mes de agosto se presentaron 11 apagones eléctricos. Sus duraciones (en horas) son

2.5 2.0 1.5 3.0 1.0 1.5 2.0 1.5 1.0 10.0 1.0

Muestre los datos en un diagrama de puntos.

2.7 Las fuerzas de rotura (lbf) de gránulos de sal, dados a la décima más cercana, se agrupan en una tabla que tiene las clases [140.0, 160.0), [160.0, 180.0), [180.0, 200.0), [200.0, 220.0), [220.0, 240.0) y [240.0, 260.0), donde se incluye el punto extremo izquierdo, pero no el punto extremo derecho. Determine

a) las marcas de clase

b) el intervalo de clase

2.8 Con referencia al ejercicio anterior, a partir de los datos agrupados, ¿es posible determinar cuántos gránulos tienen fuerza de rotura

a) menor que 160.0?

b) mayor que 160.0?

c) de al menos 220.0?

d) de cuando mucho 240.0?

e) de 220.0 a 260.0, inclusive?

2.9 Las marcas de clase de una distribución de lecturas de temperatura (dadas al grado Celsius más cercano) son 16, 25, 34, 43, 52 y 61. Determine

a) las fronteras de clase

b) el intervalo de clase

2.10 Para aumentar de manera continua la rapidez de las computadoras, los ingenieros eléctricos trabajan en escalas siempre decrecientes. El tamaño de los dispositivos que actualmente experimentan desarrollo se mide en nanómetros (nm), o bien, $10^{-9} \times$ metros. Ingenieros que fabrican un nuevo multiplicador de electrones de

tipo transmisión[2] crearon un arreglo de nanopilares de silicio sobre una membrana de silicio plana. Posteriormente, midieron los diámetros (nm) de 50 pilares.

62	68	69	80	68	79	83	70	74	73
74	75	80	77	80	83	73	79	100	93
92	101	87	96	99	94	102	95	90	98
86	93	91	90	95	97	87	89	100	93
92	98	101	97	102	91	87	110	106	118

Agrupe tales mediciones en una distribución de frecuencias y construya un histograma usando (60, 70], (70, 80], (80, 90], (90, 100], (100, 110], (110, 120], donde se incluya el punto extremo derecho, pero no el punto extremo izquierdo.

2.11 Convierta la distribución obtenida en el ejercicio anterior en una distribución acumulada "menor que o igual a", y grafique su ojiva.

2.12 Los siguientes son tiempos de ignición para ciertos materiales de tapicería expuestos a una flama (dados a la centésima de segundo más cercana):

2.58	2.51	4.04	6.43	1.58	4.32	2.20	4.19
4.79	6.20	1.52	1.38	3.87	4.54	5.12	5.15
5.50	5.92	4.56	2.46	6.90	1.47	2.11	2.32
6.75	5.84	8.80	7.40	4.72	3.62	2.46	8.75
2.65	7.86	4.71	6.25	9.45	12.80	1.42	1.92
7.60	8.79	5.92	9.65	5.09	4.11	6.37	5.40
11.25	3.90	5.33	8.64	7.41	7.95	10.60	3.81
3.78	3.75	3.10	6.43	1.70	6.40	3.24	1.79
4.90	3.49	6.77	5.62	9.70	5.11	4.50	2.50
5.21	1.76	9.20	1.20	6.85	2.80	7.35	11.75

Agrupe dichas cifras en una tabla con un número adecuado de clases iguales y construya un histograma.

2.13 Convierta la distribución obtenida en el ejercicio 2.12 en una distribución acumulada "menor que" y grafique su ojiva.

2.14 En un estudio de dos semanas acerca de la productividad de los trabajadores, se obtuvieron los siguientes datos acerca del número total de piezas aceptables que produjeron 100 trabajadores:

65	36	49	84	79	56	28	43	67	36
43	78	37	40	68	72	55	62	22	82
88	50	60	56	57	46	39	57	73	65
59	48	76	74	70	51	40	75	56	45
35	62	52	63	32	80	64	53	74	34
76	60	48	55	51	54	45	44	35	51
21	35	61	45	33	61	77	60	85	68
45	53	34	67	42	69	52	68	52	47
63	65	55	61	73	50	53	59	41	54
41	74	82	58	26	35	47	50	38	70

Agrupe dichas cifras en una distribución que tenga las clases 20-29, 30-39, 40-49, . . . , y 80-89, luego grafique un histograma usando [20, 30), . . . , [80, 90), donde se incluya el punto extremo izquierdo, pero no el punto extremo derecho.

[2] H. Qin, H. Kim y R. Blick, *Nanotechnology* **19** (2008), 095504. (5pp)

2.15 Convierta la distribución obtenida en el ejercicio 2.14 en una distribución acumulada "menor que" y grafique su ojiva.

2.16 Los siguientes son los números de accidentes automovilísticos que ocurrieron en 60 intersecciones principales en cierta ciudad, durante un fin de semana de 4 de julio en Estados Unidos:

0	2	5	0	1	4	1	0	2	1
5	0	1	3	0	0	2	1	3	1
1	4	0	2	4	1	2	4	0	4
3	5	0	1	3	6	4	2	0	2
0	2	3	0	4	2	5	1	1	2
2	1	6	5	0	3	3	0	0	4

Agrupe los datos en una distribución de frecuencias que muestre qué tan a menudo ocurre cada uno de los valores y dibuje una gráfica de barras.

2.17 Convierta la distribución obtenida en el ejercicio 2.16 en una distribución acumulada "o mayor ", y dibuje su ojiva.

2.18 Las distribuciones categóricas con frecuencia se presentan gráficamente mediante **gráficas de pastel,** donde un círculo se divide en sectores proporcionales en tamaño a las frecuencias (o porcentajes) con las que los datos se distribuyen entre las categorías. Dibuje una gráfica de pastel para representar los siguientes datos, que se obtuvieron en un estudio donde se pidió a 40 conductores que juzgaran la maniobrabilidad de cierta marca de automóvil:

muy buena, buena, buena, adecuada, excelente, buena, buena, buena, muy buena, deficiente, buena, buena, buena, buena, muy buena, buena, adecuada, buena, buena, muy deficiente, muy buena, adecuada, buena, buena, excelente, muy buena, buena, buena, buena, adecuada, adecuada, muy buena, buena, muy buena, excelente, muy buena, adecuada, buena, buena y muy buena.

2.19 El pictograma de la figura 2.11 pretende ilustrar el hecho de que el ingreso per cápita en Estados Unidos se duplicó de $13,000 en 1988 a $26,000 en 2006. ¿Este pictograma transmite una impresión adecuada del cambio real? Si no lo hace, indique cómo podría modificarse.

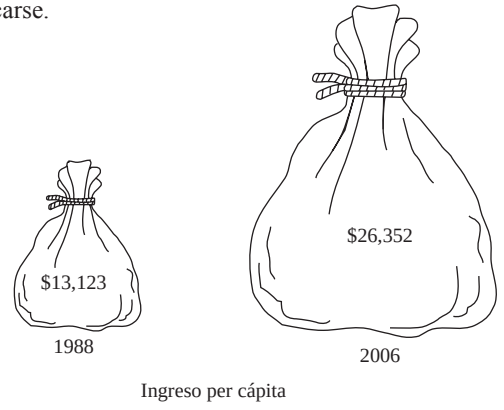


Figura 2.11 Pictograma para el ejercicio 2.19

2.20 Convierta la distribución de las alturas de nanopilares de la página 15 en una distribución que tenga las clases (205, 245], (245, 325], (325, 365], (365, 405], donde se incluya el punto extremo derecho. Dibuje dos histogramas de esta distribución, uno en el que las frecuencias de clase estén dadas por las alturas de los rectángulos y otro donde las frecuencias de clase estén dadas por el área de los rectángulos. Explique por qué el primero de dichos histogramas da una imagen muy engañosa.

2.21 Dado un conjunto de observaciones x_1, x_2, …, y x_n define su **distribución acumulada empírica** como la función cuyos valores $F(x)$ son iguales a la proporción de las observaciones menores que o iguales a x. Grafique la distribución acumulada empírica para las 12 mediciones del ejercicio 2.3.

2.22 Las siguientes son cifras acerca de la producción diaria de pozos petroleros en barriles: 214, 203, 226, 198, 243, 225, 207, 203, 208, 200, 217, 202, 208, 212, 205 y 220. Construya una presentación de tallo y hojas con las etiquetas de tallo 19, 20, …, y 24.

2.23 Las siguientes son determinaciones del flujo máximo anual de un río en metros cúbicos por segundo: 405, 355, 419, 267, 370, 391, 612, 383, 434, 462, 288, 317, 540, 295 y 508. Construya una presentación de tallo y hojas con hojas de dos dígitos.

2.24 Liste los datos que corresponden a los siguientes tallos de presentaciones de tallo y hojas:

a) 1 | 1 2 3 4 5 7 8. Unidad de hoja = 1.0

b) 23 | 0 0 1 4 6. Unidad de hoja = 1.0

c) 2 | 03 18 35 57. Unidad de primer dígito de hoja = 10.0

d) 3.2 | 1 3 4 4 7. Unidad de hoja = 0.01

2.25 Si se quiere construir una presentación de tallo y hojas con más tallos de los que habría de otra manera, se repite cada tallo. Las hojas 0, 1, 2, 3 y 4 se unirían al primer tallo, y las hojas 5, 6, 7, 8 y 9 al segundo. Por lo tanto, para las lecturas de humedad de la página 21 se tendría una **presentación de tallo doble**:

1	2
1	5 7
2	1 1 3 4
2	5 7 8 9
3	2 4 4
3	7 9
4	2 4
4	8
5	3

donde se duplicaría el número de tallos al cortar a la mitad el intervalo cubierto por cada tallo. Construya una presentación de tallo doble con hojas de un dígito para los datos del ejercicio 2.14.

2.26 Si la presentación de tallo doble tiene muy pocos tallos, quizá se desee tener cinco tallos, donde el primero contenga las hojas 0 y 1, el segundo las 2 y 3 y así sucesivamente. La presentación resultante de tallo y hojas se llama **presentación de cinco tallos**.

a) Los siguientes son los CI de 20 solicitantes a un programa de ingeniería universitaria: 109, 111, 106, 106, 125, 108, 115, 109, 107, 109, 108, 110, 112, 104, 110, 112, 128, 106, 111 y 108. Construya una presentación de cinco tallos con hojas de un dígito.

b) Lo siguiente es parte de una presentación de cinco tallos:

53	4 4 4 4 5 5	Unidad de hoja = 1.0
53	6 6 6 7	
53	8 9	
54	1	

Liste las mediciones correspondientes.

2.5 Medidas descriptivas

Histogramas y diagramas de puntos, así como diagramas de tallo y hojas resumen un conjunto de datos de manera gráfica, así que es posible discernir visualmente el patrón general de variación. Ahora se desarrollarán medidas numéricas para describir un conjunto de datos. Para hacerlo, se introduce la notación

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

para una muestra general que consiste en n mediciones. Aquí x_i es la i-ésima observación en la lista, de modo que x_1 representa el valor de la primera medición, x_2 representa el valor de la segunda medición, etcétera.

Dado un conjunto de n mediciones u observaciones, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hay muchas formas en que es posible describir su centro (medio o ubicación central). Entre las más populares se encuentran la **media aritmética** y la **mediana**, aunque en ocasiones se utilizan otros tipos de "promedios" para fines especiales. La media aritmética (o, de forma más sucinta, **media**) se define como la suma de las observaciones dividida entre el tamaño de la muestra.

Media muestral

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Para destacar que esta se basa en un conjunto de observaciones, a menudo $\overline{x}$ se refiere como la **media muestral**.

En ocasiones es preferible utilizar la **mediana** como una medida descriptiva del centro, o la ubicación, de un conjunto de datos. Lo anterior es particularmente válido si se quieren minimizar los cálculos o si se busca eliminar el efecto de valores extremos (muy grandes o muy pequeños). La mediana de n observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puede definirse, de manera holgada, como el valor "más céntrico", una vez que los datos se ordenan según su tamaño. De forma más precisa, si las observaciones se ordenan de acuerdo con su tamaño y n es un número impar, la mediana es el valor de la observación numerada $\frac{n+1}{2}$; si n es un número par, la mediana se define como la media (el promedio) de las observaciones numeradas $\frac{n}{2}$ y $\frac{n+2}{2}$.

Mediana muestral

Ordene las n observaciones de menor a mayor.

$$\begin{aligned} \text{mediana muestral} &= \text{observación en la posición } \frac{n+1}{2}, && \text{si } n \text{ es impar.} \\ &= \text{promedio de dos observaciones} \\ &\quad \text{en las posiciones } \frac{n}{2} \text{ y } \frac{n+2}{2}, && \text{si } n \text{ es par.} \end{aligned}$$

EJEMPLO **Cálculo de la media y la mediana muestrales**

Para controlar los costos, una compañía recaba datos acerca del número semanal de comidas de las cuales se solicita reembolso en las cuentas de gastos. Los números para cinco semanas son

$$15 \quad 14 \quad 2 \quad 27 \quad 13$$

Determine la media y la mediana.

Solución La media es

$$\overline{x} = \frac{15 + 14 + 2 + 27 + 13}{5} = 14.2 \text{ comidas}$$

y, al ordenar los datos de menor a mayor,

$$2 \quad 13 \quad \underbrace{14} \quad 15 \quad 27$$

la mediana es el tercer valor más grande, es decir, 14 comidas.

Tanto la media como la mediana producen, en esencia, el mismo valor central. ■

EJEMPLO **Cálculo de la mediana muestral con tamaño de muestra par**

Un grupo de ingeniería recibe por correo electrónico solicitudes de información técnica sobre ventas y servicio. Los números diarios de correos electrónicos para seis días son

$$11 \quad 9 \quad 17 \quad 19 \quad 4 \quad 15$$

Determine la media y la mediana.

Solución La media es

$$\bar{x} = \frac{11 + 9 + 17 + 19 + 4 + 15}{6} = 12.5 \text{ solicitudes}$$

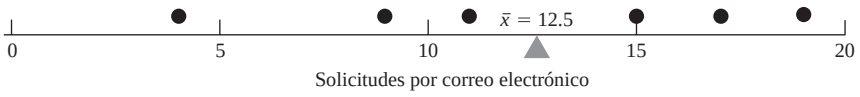
y, al ordenar los datos de menor a mayor,

$$4 \quad 9 \quad \underbrace{11 \quad 15} \quad 17 \quad 19$$

la mediana, la media del tercero y el cuarto valores más grandes, son 13 solicitudes. ■

La media muestral tiene una interpretación física como el punto de equilibrio, o centro de masa, de un conjunto de datos. La figura 2.12 es el diagrama de puntos para los datos sobre el número de solicitudes por correo electrónico dado en el ejemplo anterior. En el diagrama de puntos, cada observación se representa mediante una esfera colocada a la distancia adecuada a lo largo del eje horizontal. Si las esferas se consideran masas con pesos iguales y el eje horizontal sin peso, entonces la media corresponde al centro de inercia o punto de equilibrio de los datos. Esta interpretación de la media muestral, como el punto de equilibrio de las observaciones, se sostiene para cualquier conjunto de datos.

Figura 2.12
La interpretación de la media muestral como punto de equilibrio



Aunque la media y la mediana brindan cada una un solo número para representar todo un conjunto de datos, por lo general se prefiere la media en problemas de estimación y otros problemas de inferencia estadística. Una razón intuitiva para preferir la media es que la mediana no utiliza toda la información contenida en las observaciones.

El siguiente es un ejemplo donde la mediana realmente da una descripción más útil de un conjunto de datos que la media.

EJEMPLO **La mediana no se ve afectada por algunos valores atípicos**

Una empresa pequeña contrató a cuatro ingenieros jóvenes, quienes ganan $70,000 cada uno; el dueño también es ingeniero y gana $160,000. Comente acerca de la afirmación de que, en promedio, la compañía paga $88,000 a sus ingenieros y, en consecuencia, es un buen lugar para trabajar.

Solución La media de los cinco salarios es $88,000, pero difícilmente describe la situación real. Por otro lado, la mediana es $70,000, que es más representativa de lo que gana en la compañía un ingeniero joven. En cuestión de dinero, la empresa no es un buen lugar para los ingenieros jóvenes. ■

Este ejemplo ilustra que siempre existe un peligro inherente cuando se resume un conjunto de datos en términos de un solo número.

Una de las características más importantes de casi cualquier conjunto de datos es que los valores no son todos iguales; de hecho, el grado en que son diferentes, o varían entre sí, es de importancia fundamental en estadística. Medidas como la media y la mediana describen un aspecto importante de un conjunto de datos (su "centro" o su "promedio"); sin embargo, no dicen algo acerca de esta otra característica básica. Observe que la dispersión de un conjunto de datos es pequeña, si los valores se apiñan estrechamente alrededor de su media, y es grande, si los valores se dispersan ampliamente alrededor de su media. Por consiguiente, parecería razonable medir la variación de un conjunto de datos en términos de las cantidades por las cuales los valores se desvían de su media.

Si un conjunto de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiene media $\bar{x}$, a las diferencias

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$$

se les llama **desviaciones de la media**. Entonces, se puede usar el promedio de las desviaciones como una medida de variación en el conjunto de datos. Por desgracia, esto no se hará. Por ejemplo, consulte las observaciones 11, 9, 17, 19, 4, 15, mostradas anteriormente en la figura 2.12, donde $\bar{x} = 12.5$ es el punto de equilibrio. Las seis desviaciones son −1.5, −3.5, 4.5, 6.5, −8.5, 2.5. La suma de desviaciones positivas

$$4.5 + 6.5 + 2.5 = 13.5$$

cancela exactamente la suma de las desviaciones negativas

$$-1.5 - 3.5 - 8.5 = -13.5$$

por lo tanto, la suma de todas las desviaciones es 0.

Como se le pedirá demostrar en el ejercicio 2.50, la suma de las desviaciones siempre es cero. Esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

de modo que la media de las desviaciones siempre es cero. Puesto que las desviaciones suman cero, es necesario eliminar sus signos. El valor absoluto y el cuadrado son dos elecciones naturales. Si se toma su valor absoluto, de modo que cada desviación negativa se trate como positiva, se obtendría una medida de variación. No obstante, para obtener la medida de variación más común, se eleva al cuadrado cada desviación. La **varianza muestral**, s^2, es en esencia el promedio de los cuadrados de las desviaciones de la media, $\bar{x}$, que se define con la siguiente fórmula.

Varianza muestral

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

La razón para dividir entre $n - 1$, en vez de n, es que tan solo hay $n - 1$ desviaciones independientes $x_i - \bar{x}$. Puesto que su suma siempre es cero, el valor de cualquiera en particular siempre es igual al negativo de la suma de las otras $n - 1$ desviaciones. Además, el uso del divisor $n - 1$ da como resultado una estimación que, en promedio, no llevará a una sobrestimación consistente ni a una subestimación consistente.

Si muchas de las desviaciones son grandes en magnitud, o positiva o negativa, sus cuadrados serán grandes y s^2 también lo será. Cuando todas las desviaciones sean pequeñas, s^2 también será pequeña.

EJEMPLO **Cálculo de varianza muestral**

Los tiempos de demora (manejo, montaje y colocación de herramientas) para cortar 6 partes en un torno paralelo son 0.6, 1.2, 0.9, 1.0, 0.6 y 8 minutos. Calcule s^2.

Solución Primero se calcula la media:

$$\bar{x} = \frac{0.6 + 1.2 + 0.9 + 1.0 + 0.6 + 0.8}{6} = 0.85$$

Luego se establece el trabajo requerido para encontrar $\sum (x_i - \bar{x})^2$ en la siguiente tabla:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0.6	− 0.25	0.0625
1.2	0.35	0.1225
0.9	0.05	0.0025
1.0	0.15	0.0225
0.6	− 0.25	0.0625
0.8	− 0.05	0.0025
5.1	0.00	0.2750

Se divide 0.2750 entre 6 – 1 = 5 para calcular

$$s^2 = \frac{0.2750}{5} = 0.055 \text{ (minuto)}^2$$

Al calcular la suma de las desviaciones en la segunda columna, se obtiene una comprobación del trabajo. En otros conjuntos de datos, esta suma debería ser 0 hasta el error de redondeo. ■

Advierta que las unidades de s^2 no son las de las observaciones originales. Los datos son tiempos de demora en minutos, pero s^2 tiene la unidad (minuto)^2. En consecuencia, se define la **desviación estándar** de n observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como la raíz cuadrada de su varianza; a saber,

Desviación estándar muestral

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

La desviación estándar es, por mucho, la medida de variación generalmente más útil. Su ventaja sobre la varianza es que se expresa en las mismas unidades que las observaciones.

EJEMPLO **Cálculo de desviación estándar muestral**

Con referencia al ejemplo anterior, calcule s.

Solución A partir del ejemplo anterior, $s^2 = 0.055$. Tome la raíz cuadrada para obtener

$$s = \sqrt{0.055} = 0.23 \text{ minuto}$$ ■

La desviación estándar s tiene una interpretación burda como la distancia promedio desde una observación hasta la media muestral.

La desviación estándar y la varianza son medidas de **variación absoluta**, es decir, miden la cantidad de variación real en un conjunto de datos y dependen de la escala de medición. Para comparar la variación en varios conjuntos de datos, por lo general es deseable usar una medida de **variación relativa**; por ejemplo, el **coeficiente de variación**, que ofrece la desviación estándar como un porcentaje de la media.

Coeficiente de variación

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

EJEMPLO **El coeficiente de variación para comparar precisión relativa**

Las mediciones hechas con un micrómetro del diámetro de un cojinete de bolas tienen una media de 3.92 mm y una desviación estándar de 0.0152 mm, en tanto que las mediciones realizadas con otro micrómetro de la longitud sin estirar de un resorte tienen una media de 1.54 pulgadas y una desviación estándar de 0.0086 pulgadas. ¿Cuál de esos dos instrumentos de medición es relativamente más preciso?

Solución Para el primer micrómetro, el coeficiente de variación es

$$V = \frac{0.0152}{3.92} \cdot 100 = 0.39\%$$

y para el segundo micrómetro el coeficiente de variación es

$$V = \frac{0.0086}{1.54} \cdot 100 = 0.56\%$$

Por ende, las mediciones hechas con el primer micrómetro son relativamente más precisas. ■

En esta sección, la discusión se limitó a la media, la mediana, la varianza y la desviación estándar; sin embargo, hay muchas otras formas de describir conjuntos de datos.

2.6 Cuartiles y percentiles

Además de la mediana, que divide en mitades un conjunto de datos, se pueden considerar otros puntos de división. Cuando un conjunto ordenado de datos se divide en cuartos, a los puntos de división resultante se les llama **cuartiles** muestrales. El **primer cuartil**, Q_1, es un valor que tiene un cuarto, o 25%, de las observaciones por debajo de su valor. El primer cuartil también es el 25º **percentil** muestral $P_{0.25}$. De manera más general, el 100 p-ésimo percentil muestral se define del modo siguiente.

Percentiles muestrales

El 100 p-ésimo percentil muestral es un valor tal que al menos 100p% de las observaciones están en este valor, o por debajo de él, y al menos $100(1 - p)$% están en este valor, o por arriba de él.

Como en el caso de la mediana, que es el percentil 50º, esto quizá no defina exclusivamente un percentil. La convención es tomar un valor observado para el percentil muestral, a menos que dos valores adyacentes satisfagan ambos la definición. En este último caso, tome su media, que coincide con el procedimiento para obtener la mediana cuando el tamaño muestral sea par. (La mayoría de los programas de cómputo interpolan linealmente entre los dos valores adyacentes. Para tamaños muestrales moderados o grandes, la convención específica que se usa para ubicar un percentil muestral entre las dos observaciones es intrascendente.)

La siguiente regla simplifica el cálculo de los percentiles muestrales.

Cómo calcular el 100 p-ésimo percentil muestral:

1. Ordene las n observaciones de menor a mayor.

2. Determine el producto np.

Si np no es un entero, redondéelo al siguiente entero y determine el valor ordenado correspondiente.

Si np es un entero, por decir k, calcule la media de la k-ésima y las $(k + 1)$-ésimas observaciones ordenadas.

Los cuartiles son los percentiles 25, 50 y 75.

Cuartiles muestrales

primer cuartil	Q_1 = percentil 25
segundo cuartil	Q_2 = percentil 50
tercer cuartil	Q_3 = percentil 75

EJEMPLO **Cálculo de percentiles de los datos de la altura de nanopilares**

Obtenga los cuartiles y el percentil 93 para los datos de la altura de nanopilares de la página 15.

Solución Las alturas ordenadas de los nanopilares son

221	234	245	253	265	266	271	272	274	276
276	276	278	284	289	290	290	292	292	296
297	298	300	303	304	305	305	308	308	309
310	311	312	314	315	315	323	330	333	336
337	338	343	346	355	364	366	373	390	391

De acuerdo con la regla de cálculo, $np = 50\left(\frac{1}{4}\right) = 12.5$, que se redondea a 13. El primer cuartil es la 13ª observación ordenada

$$Q_1 = 278 \quad \text{nm}$$

Como $p = \frac{1}{2}$ para el segundo cuartil, o mediana,

$$np = 50\left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

que es un entero. Por lo tanto, se promedian los valores ordenados 25 y 26

$$Q_2 = \frac{304 + 305}{2} = 304.5 \text{ nm}$$

El tercer cuartil es la observación 38, $Q_3 = 330$ nm. También se podría comenzar en el mayor valor y contar hacia abajo hasta la posición 13.

Para obtener el percentil 93, se determina que $np = 50 \times 0.93 = 46.5$, que se redondea a 47. Al contar a la posición 47, se obtiene

$$P_{0.93} = 366 \text{ nm}$$

El percentil 93 brinda una descripción útil en cuanto al más alto de los nanopilares. Solo 7% de los pilares medidos tienen una altura mayor que 366 nm.

En el contexto de la monitorización de los pilares altos, también se registra que la altura máxima medida fue de 391 nm. ■

Las observaciones **mínima** y **máxima** ofrecen, además, información concerniente a la cantidad de variabilidad presente en un conjunto de datos. En conjunto, describen el intervalo que contiene todos los valores observados, cuya longitud es el

rango = máximo – mínimo

Se debe tener cuidado al interpretar el rango, pues una sola observación grande o pequeña podría inflar su valor significativamente.

La cantidad de variación en la parte media de los datos se describe con el

rango intercuartílico = tercer cuartil – primer cuartil = $Q_3 - Q_1$

EJEMPLO **Cálculo de rango y rango intercuartílico para datos de nanopilares**

Obtenga el rango y el rango intercuartílico para las alturas de los datos de nanopilares en el ejemplo anterior.

Solución El mínimo = 221. A partir del ejemplo anterior, el máximo = 391, $Q_1 = 278$ y $Q_3 = 330$.

$$\text{rango} = \text{máximo} - \text{mínimo} = 391 - 221 = 170 \text{ nm}$$

$$\text{rango intercuartílico} = Q_3 - Q_1 = 330 - 278 = 52 \text{ nm}$$ ■

Diagramas de caja

La información de resumen contenida en los cuartiles se destaca en una presentación gráfica llamada **diagrama de caja**. La mitad central de los datos, que se extiende desde el primero hasta el tercer cuartiles, se ilustra mediante un rectángulo. La mediana se identifica con una barra dentro de esta caja. Una línea se extiende desde el tercer cuartil hasta el máximo y otra línea se extiende desde el primer cuartil hasta el mínimo. (Para grandes conjuntos de datos, las líneas solo pueden extenderse hasta los percentiles 95 y 5.)

La figura 2.13 presenta el diagrama de caja para los datos de la altura de nanopilares. La simetría que se ve en el histograma también es evidente en este diagrama de caja.

Un **diagrama de caja modificado** identifica los valores atípicos y reduce su efecto sobre la forma del diagrama de caja. La línea exterior se extiende a la observación más grande solo si no está muy alejada del tercer cuartil, esto es, para que la línea se extienda

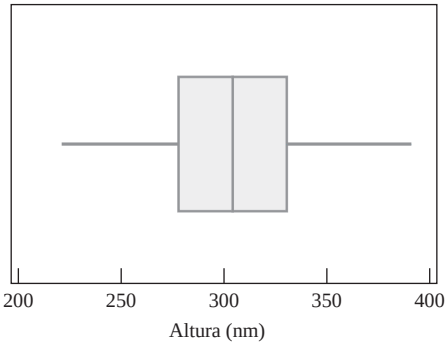


Figura 2.13
Diagrama de caja para los datos de la altura de nanopilares

a la observación más grande, debe estar dentro de 1.5 × unidades (rango intercuartílico) de Q_3. La línea desde Q_1 se extiende hasta la menor observación, si está dentro del mismo límite. De otro modo, la línea se extiende hacia las siguientes observaciones más extremas, si cae dentro de este intervalo.

EJEMPLO

Diagrama de caja modificado: aislamiento de posibles valores atípicos

Construya un diagrama de caja modificado para los datos de tiempo entre neutrinos (véase la página 13).

0.021 0.107 0.179 0.190 0.196 0.283 0.580 0.854 1.18 2.00 7.30

Construya un diagrama de caja modificado.

Solución Puesto que $n/4 = 11/4 = 2.75$, el primer cuartil es el tercer tiempo ordenado 0.179 y $Q_3 = 1.18$, de modo que el rango intercuartílico es 1.18 – 0.179 = 1.001. Más aún, 1.5 × 1.001 = 1.502, y la menor observación está más cerca que esto a $Q_1 = 0.179$, pero

$$\text{máximo} - Q_3 = 7.30 - 1.18 = 6.12$$

supera 1.502 = 1.5 × (rango intercuartílico).

Como se indica en la figura 2.14, la línea a la derecha se extiende hasta 2.00, la observación más extrema dentro de 1.502 unidades, pero no hasta la observación más grande, que parece aislada de la línea. ■

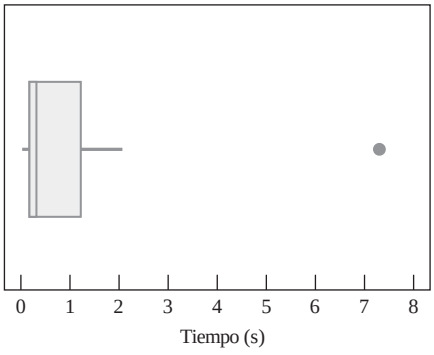


Figura 2.14
Diagrama de caja modificado para los datos de neutrinos

Los diagramas de caja son muy útiles para comparaciones que se muestran gráficamente entre conjuntos de observaciones. Son fáciles de entender y tienen un alto impacto visual.

EJEMPLO

Múltiples diagramas de caja pueden revelar diferencias y similitudes

En ocasiones, con componentes más bien complicados como unidades de disco duro o chips de memoria de acceso aleatorio (RAM) para computadoras, la calidad se cuantifica como un índice con valor meta de 100. Comúnmente, un índice de calidad se basará en las desviaciones de varias características físicas de sus especificaciones de ingeniería. La figura 2.15 ilustra el índice de calidad en 4 plantas manufactureras.

Comente acerca de las relaciones entre la calidad en diferentes plantas.

Solución Es claro, por la gráfica, que la planta 2 necesita reducir su variabilidad, así como que las plantas 2 y 4 requieren mejorar su nivel de calidad. ■

Esta sección se concluye con una advertencia. En ocasiones existe una tendencia en el tiempo que es la característica más importante de los datos. Dicha característica se perdería por completo si el conjunto de datos se resumiera en un diagrama de puntos, una

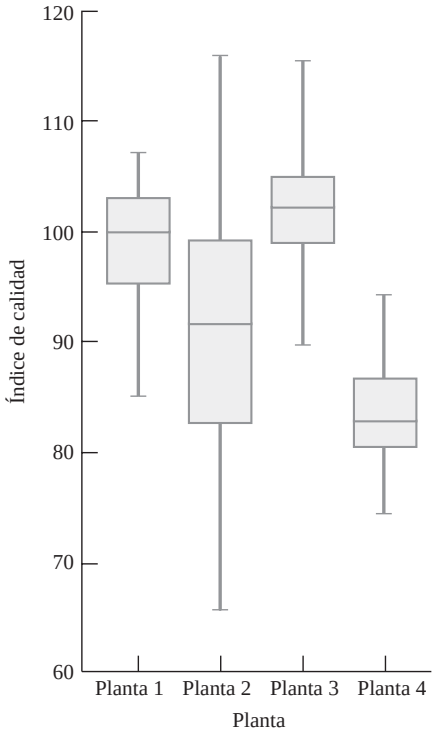


Figura 2.15
Diagrama de caja del índice de calidad

presentación de tallo y hojas o un diagrama de caja. En cierto caso, una importante firma internacional compró dos máquinas idénticas para medir rápidamente el grosor del material y probar su resistencia. Las máquinas fueron costosas, pero mucho más rápidas que el actual procedimiento de prueba. Antes de enviar una a Estados Unidos y la otra a Europa, los ingenieros necesitaban confirmar que las dos máquinas produjeran resultados consistentes. Después de una comparación fallida, los ingenieros siguieron trabajando con la máquina problemática durante un par de meses. En la segunda serie de ensayos comparativos, el valor promedio de esta máquina fue adecuado, aunque afortunadamente los valores individuales se graficaron como en la figura 2.16. La gráfica de tiempo dejó en claro que la tendencia era la característica principal, no el promedio, que era un resumen deficiente. La máquina de prueba requirió más trabajo.

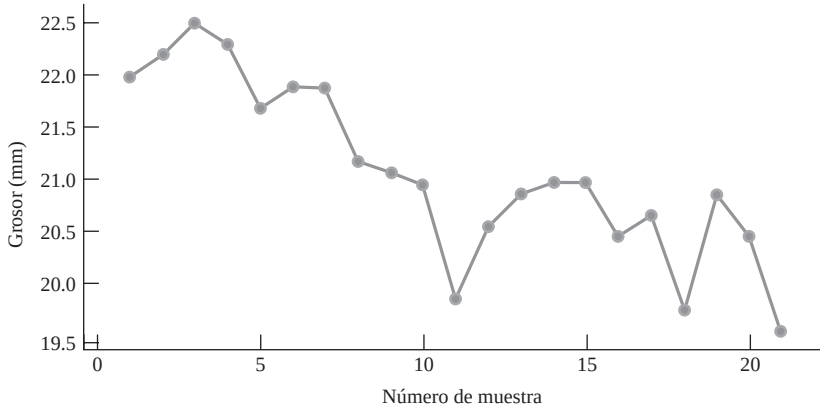


Figura 2.16
La máquina de medición de grosor muestra tendencia

2.7 El cálculo de $\bar{x}$ y s

En esta sección se analizan métodos al calcular $\bar{x}$ y s para **datos brutos** (no agrupados), así como para datos agrupados. Dichos métodos son muy adecuados para pequeñas calculadoras de bolsillo y son rápidos. También son precisos, salvo en casos extremos donde, por decir, los datos únicamente difieren en el séptimo dígito o en superiores.

El cálculo de $\bar{x}$ para datos no agrupados no impone problema alguno; solo se tienen que sumar los valores de las observaciones y dividir entre n. Por otro lado, el cálculo de s^2 por lo general es engorroso si se utiliza directamente la fórmula que define s^2 en la página 27. En vez de ello, se debería utilizar la forma algebraicamente equivalente que requiere menos trabajo para evaluar con una calculadora.

Varianza (fórmula para calculadora de bolsillo)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1}$$

(En el ejercicio 2.51, se le pedirá demostrar que esta fórmula es, de hecho, equivalente a la de la página 27.) Esta expresión para varianza es sin $\bar{x}$, lo cual reduce el error por redondeo.

EJEMPLO **Cálculo de varianza usando la fórmula de calculadora de bolsillo**

Determine la media y la desviación estándar de las siguientes millas por galón (mpg), obtenidas en 20 corridas de prueba realizadas en carreteras urbanas con un automóvil de tamaño intermedio:

19.7	21.5	22.5	22.2	22.6
21.9	20.5	19.3	19.9	21.7
22.8	23.2	21.4	20.8	19.4
22.0	23.0	21.1	20.9	21.3

Solución Con una calculadora, se encuentra que la suma de tales cifras es 427.7 y que la suma de sus cuadrados es 9,173.19. En consecuencia,

$$\bar{x} = \frac{427.7}{20} = 21.39 \text{ mpg}$$

y

$$s^2 = \frac{9{,}173.19 - (427.7)^2/20}{19} = 1.412$$

y se sigue que $s = 1.19$ mpg. Al calcular las sumas necesarias, por lo general se conservan todos los lugares decimales, pero, al final, como en este ejemplo, se suele redondear a un decimal más del que se tenía en los datos originales. ■

Véase el ejercicio 2.58 para un cálculo por computadora. Este es el procedimiento recomendado, ya que es fácil comprobar la precisión de los datos ingresados y el cálculo está libre de errores humanos. Más importante aún: el cálculo de varianza puede hacerse usando el cuadrado de las desviaciones $x_i - \bar{x}$, en vez de los cuadrados de las observaciones x_i, lo cual es numéricamente más estable.

No hace muchos años, una de las principales razones para agrupar datos fue simplificar el cálculo de descripciones, como la media y la desviación estándar. Con el fácil acceso a calculadoras estadísticas y computadoras, este ya no es más el caso; no obstante, aquí se estudiará el cálculo de $\bar{x}$ y s a partir de datos agrupados, ya que algunos datos (por

ejemplo, de publicaciones gubernamentales) quizás estén disponibles únicamente en forma agrupada.

Para calcular $\bar{x}$ y s a partir de datos agrupados, se deben hacer ciertas suposiciones acerca de la distribución de los valores dentro de cada clase. Si todos los valores dentro de una clase se representan mediante la marca de clase correspondiente, se escribe ahora la suma de las x y la suma de sus cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i$$

donde x_i es la marca de clase de la i-ésima clase, f_i es la frecuencia de clase i-ésima correspondiente y k es el número de clases en la distribución. Al sustituir estas sumas en la fórmula para $\bar{x}$ y la fórmula para calcular s^2, se obtiene

Media y varianza (datos agrupados)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2 / n}{n-1}$$

EJEMPLO **Cálculo de media y varianza a partir de datos agrupados**

Use la distribución que se obtuvo en la página 16 para calcular la media, la varianza y la desviación estándar de los datos de las alturas de los nanopilares.

Solución Al registrar las marcas de clase y las frecuencias de clase en las primeras dos columnas, así como los productos $x_i f_i$ y $x_i^2 f_i$ en la tercera y cuarta columnas, se tiene

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
225	3	675	151,875
265	11	2,915	772,475
305	23	7,015	2,139,575
345	9	3,105	1,071,225
385	4	1,540	592,900
Total	50	15,250	4,728,050

Entonces, la sustitución en la fórmula da como resultado

$$\bar{x} = \frac{15,250}{50} = 305.0$$

y

$$s^2 = \frac{4,728,050 - 15,250^2/50}{49} = 1,567.3 \qquad \text{de modo que} \qquad s = 39.6$$

Para fines de comparación, los datos originales tienen media = 305.6 y desviación estándar = 37.0. ■

Ejercicios

2.27 En cada una de las siguientes situaciones, ¿su valor debería estar cerca del promedio o de un valor atípico? Si es un valor atípico, ¿tendría que ser muy grande o muy pequeño?

a) Ingreso en su primer empleo.

b) Su calificación en el examen final de física.

c) Su peso en 10 años.

2.28 En cada una de las siguientes situaciones, ¿su valor debería estar cerca del promedio o de un valor atípico? Si es un valor atípico, ¿tendría que ser muy grande o muy pequeño?

a) El tiempo que tarde en completar una práctica de laboratorio la próxima semana.

b) El conteo de sus leucocitos.

2.29 ¿La influencia de un solo valor atípico es mayor en la media o en la mediana? Explique su respuesta.

2.30 ¿La influencia de un solo valor atípico es mayor en el rango de la muestra o en el rango intercuartílico? Explique su respuesta.

2.31 Con referencia al ejercicio 1.8 del capítulo 1, se observa que la muestra de 4 desviaciones (observación – especificación) durante la segunda hora para un diámetro crítico del barreno del cigüeñal son

$$-6 \qquad 1 \qquad -4 \qquad -3$$

diezmilésimas de pulgada. Para estas cuatro desviaciones

a) calcule la media muestral $\bar{x}$;

b) calcule la desviación estándar muestral s.

c) En promedio, ¿el orificio es muy grande o muy pequeño?

2.32 El fresado láser puede resultar en una deposición de detritos en una superficie blanco y causar dificultades cuando este se emplea para microestructuración. Ingenieros mecánicos[3] han experimentado con decapado seguido por pulido electroquímico. Para tres especímenes de prueba, la rugosidad de la superficie disminuyó 0.91, 0.99 y 0.98 (μm).

a) Calcule la media muestral $\bar{x}$.

b) Calcule la desviación estándar muestral s.

2.33 Ingenieros[4] desarrollaron una cápsula robótica miniaturizada para exploración de un tracto gastrointestinal humano. Una solución novedosa usa paletas impulsadas por motor. El mejor diseño de los ingenieros funcionó durante algunos ensayos y, luego, desechos cubrieron la punta de una patita, lo cual afectó negativamente el desempeño. Después de limpiarlo, la siguiente prueba del dispositivo resultó en

35 37 38 34 30 24 13

distancias cubiertas (mm/min).

a) Calcule la distancia media muestral.

b) ¿La media muestral brinda un buen resumen de estas pruebas? Si no, escriba una oración o dos para resumir con más precisión.

2.34 Un contrato para el mantenimiento de las locomotoras de mucha potencia de un ferrocarril nacional se otorgó a una importante compañía privada. Después de un año de experiencia con el programa de mantenimiento, los encargados del programa creyeron que podían hacerse grandes mejoras en la confiabilidad de las locomotoras. Para documentar el estatus actual, recopilaron datos acerca del costo de los materiales para reconstruir motores de tracción. Use los siguientes datos para

a) calcular la media muestral $\bar{x}$;

b) calcular la desviación estándar de la muestra s.

Costos de los materiales para reconstruir motores de tracción (miles de dólares):

1.41	1.70	1.03	0.99	1.68	1.09	1.68	1.94
1.53	2.25	1.60	3.07	1.78	0.67	1.76	1.17
1.54	0.99	0.99	1.17	1.54	1.68	1.62	0.67
0.67	1.78	2.12	1.52	1.01			

2.35 Si la remuneración anual media pagada a los ejecutivos *senior* de tres firmas de ingeniería es de $175,000, ¿uno de ellos puede recibir $550,000?

2.36 Los registros muestran que, en Phoenix, Arizona, la temperatura máxima diaria normal para cada mes es 65, 69, 74, 84, 93, 102, 105, 102, 98, 88, 74 y 66 grados Fahrenheit. Verifique que la media de estas cifras es 85 y comente acerca de la afirmación de que, en Phoenix, la temperatura máxima diaria promedio es de muy agradables 85 grados.

2.37 Con frecuencia, la salida de un instrumento es una forma de onda. Con la intención de desarrollar una medida numérica de cercanía, científicos pidieron a 11 expertos observar dos formas de onda en la misma gráfica, así como dar un número entre 0 y 1 para cuantificar cuán bien concuerdan las dos formas de onda.[5] Los números de concordancia para un par de formas de onda son

0.50 0.40 0.04 0.45 0.65 0.40 0.20 0.30 0.60 0.45

a) Calcule la media muestral $\bar{x}$.

b) Calcule la desviación estándar de la muestra s.

[3] T. Dobrev, D. Pham y S. Dimov, Techniques for improving surface quality after laser milling. *Proc. IMechE, 222 Part B: J. Engineering Manufacture* (2008), 55-65.

[4] M. Quirini y S. Scapellato, Design and fabrication of a motorlegged capsule for the active exploration of the gastrointestinal tract. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* (2008) **13**, 169-179.

[5] L. Schwer, Validation metrics for response histories: Perspectives and case studies. *Engineering with Computers* **23** (2007), 295-309.

2.38 Con referencia al ejercicio anterior, encuentre s usando

a) la fórmula que define s;

b) la fórmula de calculadora de bolsillo para s.

2.39 Los siguientes son los números de minutos que una persona debe esperar un autobús para ir a trabajar en 15 días laborales:

10 1 13 9 5 9 2 10 3 8 6 17 2 10 15

a) Encuentre la media.

b) Encuentre la mediana.

c) Dibuje un diagrama de caja.

2.40 Con referencia al ejercicio anterior, encuentre s^2 usando

a) la fórmula que define s^2;

b) la fórmula de calculadora de bolsillo para s^2.

2.41 El material fabricado de manera continua, antes de cortarse y enrollarse en grandes rollos, debe monitorizarse en su grosor (calibre). Una muestra de 10 mediciones en papel, en milímetros, dio como resultado

32.2 32.0 30.4 31.0 31.2 31.2 30.3 29.6 30.5 30.7

Encuentre la media y los cuartiles para esta muestra.

2.42 Para las cuatro observaciones 9 7 15 5

a) calcule las desviaciones $(x_i - \bar{x})$ y compruebe que suman 0;

b) calcule la varianza y la desviación estándar.

2.43 Con referencia al ejercicio 2.14 de la página 23, dibuje un diagrama de caja.

2.44 Una compañía experimenta un problema crónico de soldadura defectuosa con un ensamble de tubo de desagüe. Cada ensamble fabricado se prueba contra fugas en un tanque de agua. Se recopilaron datos sobre la brecha entre la brida y la tubería, para 6 ensambles defectuosos que tenían fuga y 6 ensambles buenos que aprobaron la prueba contra fugas.

Con fuga	0.290	0.104	0.207	0.145	0.104	0.124

a) Calcule la media de la muestra $\bar{x}$.

b) Calcule la desviación estándar de la muestra s.

2.45 Consulte el ejercicio 2.44. Las mediciones para 6 ensambles que no tenían fuga fueron

Buenos	0.207	0.124	0.062	0.301	0.186	0.124

a) Calcule la media de la muestra $\bar{x}$.

b) Calcule la desviación estándar de la muestra s.

c) ¿Parece haber una diferencia sustancial en la brecha entre los ensambles que tenían fuga y aquellos que no la tenían? El grupo de mejoramiento de la calidad dirigió su atención a las variables en el proceso de soldadura.

2.46 Encuentre la media y la desviación estándar de las 20 lecturas de humedad de la página 21, usando

a) los datos brutos (no agrupados);

b) la distribución obtenida en dicho ejemplo.

2.47 Utilice la distribución del ejercicio 2.10 en la página 22, para encontrar la media y la varianza de los diámetros de los nanopilares.

2.48 Utilice la distribución obtenida en el ejercicio 2.12, de la página 23, para encontrar la media y la desviación estándar de los tiempos de ignición. Determine también el coeficiente de variación.

2.49 Utilice la distribución obtenida en el ejercicio 2.14, de la página 23, para encontrar el coeficiente de variación de los datos de productividad.

2.50 Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

para cualquier conjunto de observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.51 Demuestre que la fórmula para calcular s^2, de la página 34, es equivalente a la utilizada para definir s^2, en la página 27.

2.52 Si los datos se codifican de modo que $x_i = c \cdot u_i + a$, demuestre que $\bar{x} = c \cdot \bar{u} + a$ y $s_x = |c| \cdot s_u$.

2.53 Para encontrar la **mediana** de una distribución obtenida para n observaciones, primero se determina la clase en que debe caer la mediana. Entonces, si hay j valores en esta clase y k valores abajo de ella, la mediana se localiza a $\frac{(n/2) - k}{j}$ del camino en esta clase, mientras que para obtener la mediana se multiplica esta fracción por el intervalo de clase y el resultado se suma a la frontera inferior de la clase, en la cual debe caer la mediana. Este método se basa en la suposición de que las observaciones en cada clase están "dispersas de manera uniforme" a lo largo del intervalo de clase y, por consiguiente, se cuenta $\frac{n}{2}$ de las observaciones, en vez de $\frac{n+1}{2}$, como en la página 25.

Para ilustrar, consultemos los datos de altura de los nanopilares en la página 15 y la distribución de frecuencias en la página 16. Puesto que $n = 50$, puede verse que la mediana debe caer en la clase (285, 325], que contiene $j = 23$ observaciones. La clase tiene ancho 40 y hay $k = 3 + 11 = 14$ valores por debajo de ella, de modo que la mediana es

$$285 + \frac{25 - 14}{23} \times 40 = 264.13$$

a) Use la distribución obtenida en el ejercicio 2.10, en la página 22, para encontrar la mediana de los diámetros de los nanopilares agrupados.

b) Use la distribución obtenida en el ejercicio 2.12, de la página 23, para encontrar la mediana de los tiempos de ignición agrupados.

2.54 Para cada una de las siguientes distribuciones, decida si es posible encontrar la media y la mediana. Explique sus respuestas.

a)

Grado	Frecuencia
40-49	5
50-59	18
60-69	27
70-79	15
80-89	6

b)

CI	Frecuencia
menor que 90	3
90-99	14
100-109	22
110-119	19
mayor que 119	7

c)

Peso	Frecuencia
110 o menos	41
101-110	13
111-120	8
121-130	3
131-140	1

2.55 Para encontrar el primer y tercer cuartiles Q_1 y Q_3 para datos agrupados, se procede como en el ejercicio 2.53, pero se cuentan $\frac{n}{4}$ y $\frac{3n}{4}$ de las observaciones, en vez de $\frac{n}{2}$.

a) Con referencia a la distribución de los datos de la altura de los nanopilares de la página 15 y a la distribución de frecuencias de la página 16, encuentre Q_1, Q_3 y el rango intercuartílico.

b) Encuentre Q_1 y Q_3 para la distribución de los datos de tiempo de ignición obtenidos en el ejercicio 2.12.

2.56 Si k conjuntos de datos consisten, respectivamente, de $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ observaciones y tienen las medias $n_1, n_2, \ldots, n_k$, entonces, la media general de todos los datos está dada por la fórmula

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

a) Los salarios anuales promedio pagados a gerentes de alto nivel en tres compañías son \$164,000, \$172,000 y \$169,000. Si los números respectivos de los ejecutivos de alto nivel en dichas compañías son 4, 15 y 11, encuentre el salario promedio pagado a esos 30 ejecutivos.

b) En una clase de ingeniería nuclear hay 22 estudiantes de primer año, 18 de último año y 10 graduados. Si los de primer año promedian 71 en el examen de medio semestre, los de último año promedian 78 y los graduados promedian 89, ¿cuál será la media para toda la clase?

2.57 La fórmula para el ejercicio anterior es un caso especial de la siguiente fórmula para la **media ponderada**:

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

donde w_i es un peso que indica la importancia relativa de la i-ésima observación.

a) Si un profesor cuenta el examen final en un curso cuatro veces más que cada examen de 1 hora, ¿cuál es la calificación promedio ponderada de un estudiante, que recibió calificaciones de 69, 75, 56 y 72 en cuatro exámenes de 1 hora y una calificación de examen final de 78?

b) De 2004 a 2010, el costo de los alimentos en cierta ciudad aumentó en 60%, el costo de la vivienda aumento en 30% y el costo del transporte aumentó en 40%. Si el trabajador asalariado promedio gastó 24% de su ingreso en alimentos, 33% en vivienda y 15% en transporte, ¿cuál es el aumento porcentual combinado en el costo total de dichos rubros?

2.58 Los programas de cómputo modernos sustituyen en gran medida el tedio de realizar cálculos estadísticos. *MINITAB* es un programa común y fácil de utilizar. El uso de la computadora se ilustra con los comandos de *MINITAB*. Otros programas fáciles de manejar tienen una estructura de comandos bastante similar.

La madera que se emplea en la construcción de edificios debe monitorizarse en cuanto a su resistencia. Datos para la resistencia de piezas de madera de 2 × 4, en libras por pulgada cuadrada, se proporcionan en el archivo 2-58.txt. Se dan los comandos básicos que calculan n, $\overline{x}$ y s, así como los cuartiles.

Los comandos de sesión requieren que los datos se establezcan en la primera columna, C1, de la hoja de cálculo de *MINITAB*. También se incluye el comando para crear un diagrama de caja.

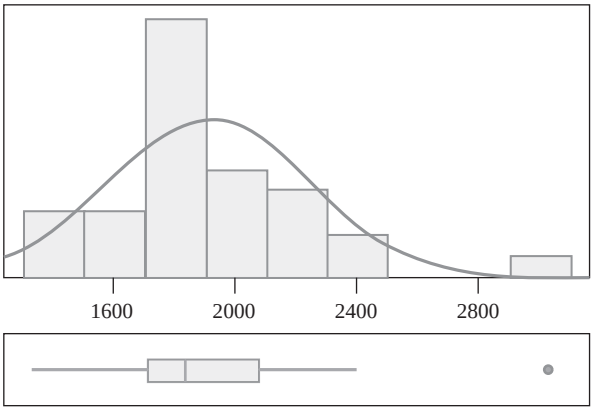
Data en 2-58.txt
Escriba *strength* en
Dialog box:
Stat> Basic Statistics > Descriptive Statistics
Haga clic en *strength* in **Variables**.
Haga click en **OK**.

Output (parcial)

Variable	N	Mean	Median	StDev
Strength	30	1908.8	1863.0	327.1

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
Strength	1325.0	2983.0	1711.5	2071.8

Resumen para resistencia (*strength*)



Mean	1908.8
StDev	327.1
Variance	107004.3
Skewness	1.11841
Kurtosis	2.88335
N	30
Minimum	1325.0
1st Quartile	1711.5
Median	1863.0
3rd Quartile	2071.8
Maximum	2983.0

Figura 2.17
14 resultados de *MINITAB*

Use *MINITAB*, o algún otro software estadístico, para encontrar $\bar{x}$ y s para

a) los tiempos de decaimiento de la página 140;

b) los tiempos entre peticiones de la página 19.

2.59 (Más cálculo y gráficas de *MINITAB*.) Con las observaciones acerca de la resistencia (en libras por pulgada cuadrada) de las piezas de madera de 2×4 ya establecidas en C1, la secuencia de elecciones y clics produce un resumen incluso más completo (véase la figura 2.17).

Stat> Basic Statistics > Graphical Summary
Escriba *strength* en **Variables**. Haga clic en **OK**.

Los datos ordenados de resistencia son

1325 1419 1490 1633 1645 1655 1710 1712 1725 1727 1745 1828 1840 1856 1859 1867 1889 1899 1943 1954 1976 2046 2061 2104 2168 2199 2276 2326 2403 2983

A partir de los datos ordenados,

a) obtenga los cuartiles;

b) construya un histograma, luego ubique la media, la mediana, Q_1 y Q_3 en el eje horizontal;

c) repita los incisos *a*) y *b*) con los datos de aleación de aluminio de la página 19.

2.8 Estudio de caso: Problemas con la agregación de datos

Conforme los tableros de circuitos y otros componentes avanzan a lo largo de la superficie de montaje de la línea de ensamble tecnológico de una compañía, se recolecta una cantidad significativa de datos por cada ensamble.[6] Los datos se registran en varias fases de la fabricación, en una base de datos de rastreo serial, mediante terminales de computadora ubicadas en la fábrica. Los datos incluyen el número de serie del tablero, el tipo de defecto, el número de defectos y su ubicación. Aquí el reto consiste en transformar una gran cantidad de datos en información manejable y útil. Cuando hay varios productos y se recopilan muchos datos de cada uno, la gestión de los registros y la extracción de datos adecuados para el mejoramiento del producto deben hacerse de manera correcta.

Originalmente, se hizo un intento por comprender esta gran base de datos mediante *agregación*, o agrupamiento, de los datos de todos los productos, así como realizando un análisis de los datos, ¡como si se tratara de un producto! Esta fue una práctica deficiente que disminuyó la resolución de la información obtenida de la base de datos. Los productos en la línea de ensamble variaban en complejidad, madurez, método de procesamiento y tamaño del lote.

Para conocer las dificultades causadas por la agregación, considere la producción de una semana típica, donde se fabricaron 100 tableros de circuito impreso del producto A, 40 tableros del producto B y 60 tableros del producto C. Después de un proceso de soldadura

[6] Cortesía de Don Ermer.

por onda, se reportaron un total de 40 defectos de soldadura. Lo anterior se traduce en un promedio general de 400/200 = 2 defectos por tablero. Era práctica de esta compañía circular el promedio agregado semanal a lo largo de la planta de la fábrica, para revisión y comentarios. Entonces era responsabilidad del operador tomar acciones de acuerdo con el reporte *equivocado*. Con el tiempo, se hizo evidente que tal proceso era ineficiente para mejorar la calidad.

Sin embargo, mayor análisis de estos datos sobre una base de producto por producto reveló que los productos A, B y C en realidad contribuían con 151, 231 y 18 defectos. Por consiguiente, el número de defectos por tablero era 1.51, 5.78 y 0.30 para los productos A, B y C, respectivamente. La figura 2.18 ilustra correctamente el número promedio de defectos. El producto C tiene una tasa de defectos significativamente menor, y el producto B, una tasa de defectos significativamente mayor, en relación con el promedio agregado incorrecto. Estos últimos también son los tableros más complejos.

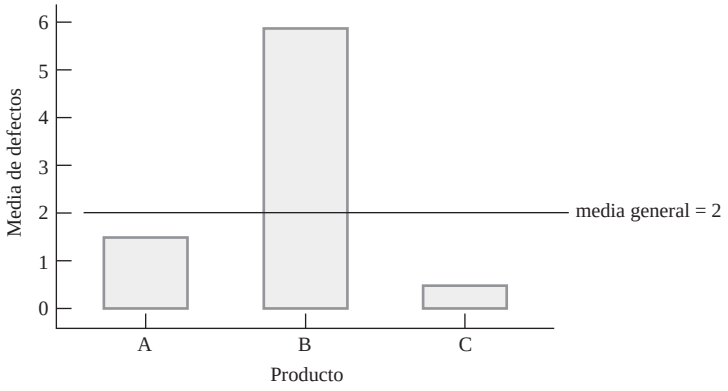


Figura 2.18
Número promedio de defectos por tipo de producto

Dichos datos pertenecen al número de defectos que ocurrieron cuando los tableros se soldaron por onda, después de una fase de ensamble. El siguiente paso era implementar gráficas de control para el número de defectos por cada uno de los tres productos. Los números de defectos para el producto B fueron

10	8	8	4	6	8	8	10	6	7	4	2	4	5	5
5	2	11	6	6	5	7	3	4	3	2	6	5	1	7
3	1	1	5	4	5	12	13	11	8					

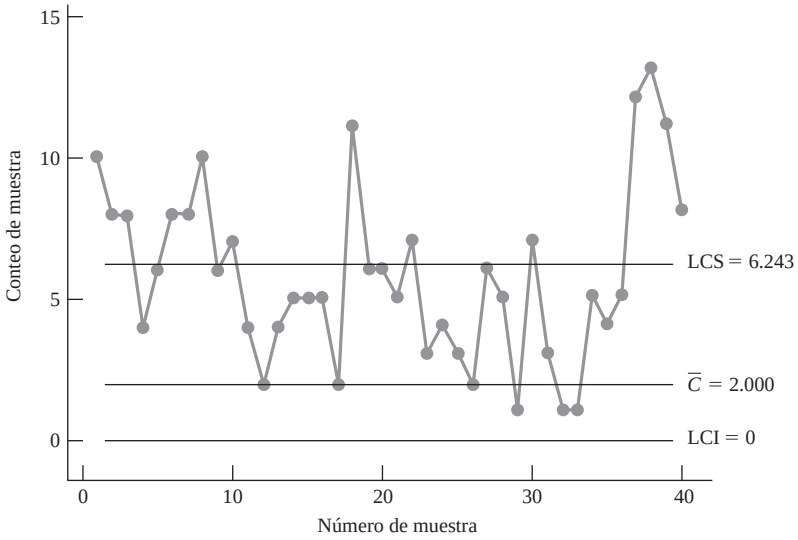
La gráfica de control adecuada es una gráfica de tiempo, donde los números de serie del producto o la muestra están en el eje horizontal, mientras el número de defectos correspondiente se ubican en el eje vertical. En esta gráfica C, la línea central etiquetada $\overline{C}$ es el número promedio de defectos sobre todos los casos en la gráfica. Las líneas punteadas son los límites de control establecidos a tres desviaciones estándar en torno a la línea central. (Por razones que se explican en la sección 15.6, se utiliza $\sqrt{\overline{C}}$, en vez de s, cuando los datos son números de defectos.)

$$\text{LCI} = \overline{C} - 3\sqrt{\overline{C}}$$

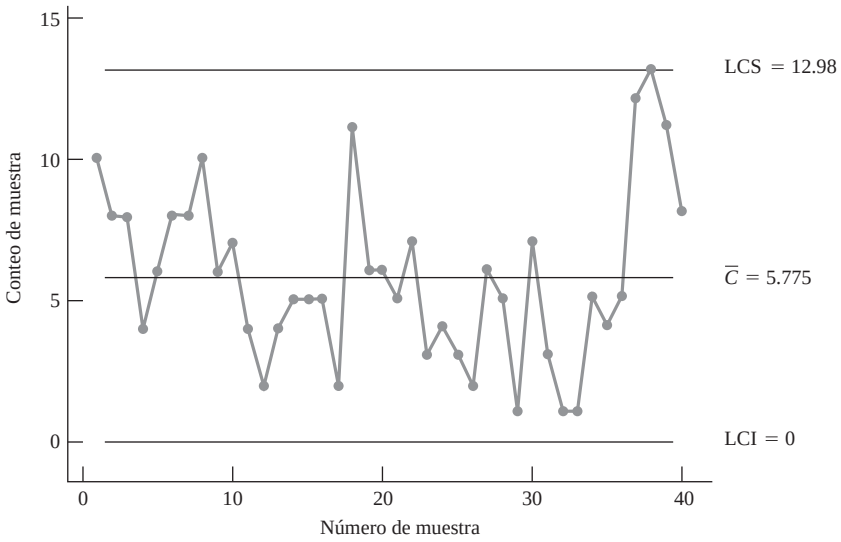
$$\text{LCS} = \overline{C} + 3\sqrt{\overline{C}}$$

La figura 2.19*a*) brinda un gráfico C construido para el producto B, pero donde la línea central se calcula de manera incorrecta a partir de los datos agregados es $\overline{C} = 2.0$, lo cual es demasiado bajo; por lo tanto, es el límite de control superior 6.24. El límite de control inferior es negativo, así que se usa 0. Parece como si muchas de las observaciones estuvieran fuera de control porque superan el límite de control superior.

Cuando el gráfico C se construye de manera correcta sobre la base de los datos del producto B solo, la línea central es $\overline{C}$ = 231/40 = 5.775 y el límite de control superior es



a) Gráfica *C* incorrecta



b) Gráfica *C* correcta

Figura 2.19
Gráficas *C* para defectos

12.98. De nuevo, el límite de control inferior es negativo, así que se usa 0. A partir de la figura 2.19*b*), la gráfica *C* correcta, el proceso de soldadura por onda para el producto B parece estar en control, excepto por el momento 38, cuando se observaron 13 defectos.

Con los datos segregados en productos, se construyeron gráficas separadas para cada uno de los tres productos. Con este nuevo panorama de la interpretación de los datos, surgieron algunas oportunidades de mejoramiento que anteriormente se disfrazaron con la agregación. Por ejemplo, al reducir las dimensiones de una almohadilla eléctrica se logró una reducción significativa en el número de puentes de soldadura entre pines. Este mismo cambio de diseño se agregó a todas las especificaciones de tablero y se obtuvieron mejoras en todos los productos.

En resumen, la agregación de datos de diferentes productos o, más generalmente, de diferentes fuentes, puede llevar a conclusiones incorrectas y enmascarar oportunidades

para mejorar la calidad. Segregar los datos por producto, aunque inicialmente consume más tiempo, podría conducir a significativa reducción en desperdicios y en costos de fabricación.

Sí y no

Sí

1. Grafique los datos como un diagrama de puntos o un histograma para valorar el patrón general de datos.
2. Calcule los estadísticos de resumen (media muestral, desviación estándar y cuartiles), para describir el conjunto de datos.

No

1. No calcule rutinariamente estadísticos de resumen sin identificar observaciones inusuales, que pudieran tener influencia inadecuada sobre los valores de los estadísticos.

Ejercicios de repaso

2.60 A partir de 2,000 chips de computadora inspeccionados por el fabricante, se registraron los siguientes números de defectos.

orificios sin abrir	182
orificios muy grandes	55
conexiones deficientes	31
tamaño incorrecto del chip	5
otro	7

Dibuje una gráfica de Pareto.

2.61 Elabore

a) una tabla de frecuencias con los datos de resistencia de la aleación de aluminio de la página 19, usando las clases [66.0, 67.5), [67.5, 69.0), [69.0, 70.5), [70.5, 72.0), [72.0, 73.5), [73.5, 75.0), [75.0, 76.5), donde se excluyen los puntos extremos derechos;

b) un histograma empleando la tabla de frecuencias del inciso *a*).

2.62 Elabore

a) una tabla de frecuencias con los datos de tiempo entre peticiones de la página 19, usando los intervalos [0, 2,500), [2,500, 5,000), [5,000, 10,000), [10,000, 20,000), [20,000, 40,000), [40,000, 60,000), [60,000, 80,000), donde se incluye el punto extremo izquierdo, pero no el punto extremo derecho;

b) un histograma usando la tabla de frecuencias del inciso *a*). (Note que los intervalos no son iguales, así que iguale la altura del rectángulo con la frecuencia relativa dividida entre el ancho.)

2.63 El célebre experimento de Henry Cavendish (1731-1810) proporcionó evidencia directa de la ley de gravitación universal de Newton. En el experimento, se determinaron las masas de objetos a partir de su peso, en tanto que la fuerza de atracción medida se usó para calcular la densidad de la Tierra. Los valores de la densidad de la Tierra, en orden temporal por fila, son

5.36	5.29	5.58	5.65	5.57	5.53	5.62	5.29
5.44	5.34	5.79	5.10	5.27	5.39	5.42	5.47
5.63	5.34	5.46	5.30	5.75	5.68	5.85	

(*Fuente: Philosophical Transactions* 17 (1798): 469.)

a) Encuentre la media y la desviación estándar.

b) Determine la mediana, Q_1 y Q_3.

c) Grafique las observaciones contra el orden temporal. ¿Hay alguna tendencia evidente?

2.64 J. J. Thomson (1856-1940) descubrió el electrón al aislar partículas con carga negativa, en las cuales midió su razón masa/carga. Esta razón parecía ser constante sobre una amplia gama de condiciones experimentales; en consecuencia, podría ser la característica de una nueva partícula. Sus observaciones, de dos tubos de rayos catódicos diferentes, que usaban aire como gas, son

Tubo 1	0.57	0.34	0.43	0.32	0.48	0.40	0.40
Tubo 2	0.53	0.47	0.47	0.51	0.63	0.61	0.48

(*Fuente: Philosophical Magazine* 44; 5 (1897): 293.)

a) Dibuje un diagrama de puntos con puntos sólidos para las observaciones del tubo 1, así como círculos para las observaciones del tubo 2.

b) Calcule la media y la desviación estándar para las observaciones del tubo 1.

c) Calcule la media y la desviación estándar para las observaciones del tubo 2.

2.65 Con referencia al ejercicio 2.64,

a) calcule mediana, máximo, mínimo y rango para las observaciones del tubo 1;

b) calcule mediana, máximo, mínimo y rango para las observaciones del tubo 2.

2.66 A. A. Michelson (1852-1931) realizó muchas series de mediciones de la rapidez de la luz. Con la técnica del espejo giratorio, obtuvo

12 30 30 27 30 39 18 27 48 24 18

para las diferencias

(rapidez de la luz en el aire) – (229,700) km/s

(*Fuente: The Astrophysical Journal* 65 (1927): 11.)

a) Elabore un diagrama de puntos.

b) Encuentre la mediana y la media. Localice ambos en el diagrama de puntos.

c) Determine la varianza y la desviación estándar.

2.67 Con referencia al ejercicio 2.66,

a) encuentre los cuartiles;

b) encuentre mínimo, máximo, rango y rango intercuartílico;

c) dibuje un diagrama de caja.

2.68 Un ingeniero civil monitorea la calidad del agua, midiendo la cantidad de sólidos suspendidos en una muestra de agua de río. Durante 11 fines de semana, observó

14 12 21 28 30 63 29 63 55 19 20

sólidos suspendidos (partes por millón).

a) Dibuje un diagrama de puntos.

b) Encuentre la mediana y la media. Localice ambas en el diagrama de puntos.

c) Determine la varianza y la desviación estándar.

2.69 Con referencia al ejercicio 2.68,

a) encuentre los cuartiles;

b) encuentre mínimo, máximo, rango y rango intercuartílico;

c) construya un diagrama de caja.

2.70 Con referencia a los datos de resistencia de la aleación de aluminio en el ejemplo de la página 19,

a) encuentre los cuartiles;

b) determine mínimo, máximo, rango y rango intercuartílico;

c) calcule el percentil 10 y el percentil 20.

2.71 Con referencia al ejercicio 2.70, dibuje un diagrama de caja.

2.72 Con referencia a los datos de resistencia de la aleación de aluminio del ejemplo de la página 19, elabore una presentación de tallo y hojas.

2.73 Durante la fabricación de discos duros, debe controlarse la altura entre el disco y la cabeza. Un fabricante registró

0.239	0.246	0.245	0.243	0.239	0.241
0.248	0.246	0.243	0.242	0.251	0.246

Encuentre

a) la media muestral;

b) la desviación estándar muestral;

c) el coeficiente de variación.

d) Mediciones de un disco duro más grande tienen media muestral 0.280 y desviación estándar 0.05. ¿Cuál es relativamente más variable?

2.74 Con referencia a los datos de resistencia de la madera del ejercicio 2.59, el software estadístico *SAS* dio el resultado de la figura 2.20. Con estos resultados,

a) identifique la media y la desviación estándar, luego compare dichas respuestas con los valores dados en el ejercicio 2.59;

b) dibuje un diagrama de caja.

UNIVARIATE PROCEDURE
VARIABLE = STRENGTH

Moments

N	30	Sum Wgts	30
Mean	1908.767	Sum	57263
Std Dev	327.115	Variance	107004.3
Skewness	1.118406	Kurtosis	2.883349
USS	1.124E8	CSS	3103123
CV	17.13751	Std Mean	59.72276

Quantiles (Def = 5)

100%	Max	2983	99%	2983
75%	Q3	2061	95%	2403
50%	Med	1863	90%	2301
25%	Q1	1712	10%	1561.5
0%	Min	1325	5%	1419
			1%	1325

Range	1658
Q3-Q1	349

Figura 2.20 Resultados de SAS seleccionados para describir los datos de resistencia de la madera del ejercicio 2.59

2.75 Ingenieros civiles deben monitorear el flujo en ríos donde se genera electricidad. Las siguientes son las tasas de flujo medias diarias, en millones de galones por día (MGD), en el río Namekagon en el mes de mayo durante 47 años.

602.0	517.5	572.5	392.4	505.8	547.5	389.1	497.2
794.8	657.6	904.7	595.5	611.9	482.9	698.6	606.7
986.4	567.7	400.1	634.9	448.4	479.1	1156.0	718.5
575.6	743.3	1146.0	461.6	644.0	480.8	429.1	626.9
833.9	889.0	752.6	516.5	817.2	895.8	572.2	563.7
679.3	738.0	618.9	390.8	550.9	425.9	760.6	

a) Obtenga los cuartiles.

b) Determine el percentil 90.

c) Construya un histograma.

2.76 La National Highway Traffic Safety Administration informó la velocidad relativa (redondeada a las 5 mph más cercanas) de los automóviles involucrados en accidentes para un año. Los porcentajes a diferentes velocidades fueron:

20 mph o menos	2.0%
25o 30 mph	29.7%
35o 40 mph	30.4%
45o 50 mph	16.5%
55 mph	19.2%
60 o 65 mph	2.2%

a) A partir de estos datos, ¿se puede concluir que es seguro conducir a alta velocidad? ¿Por qué?

b) ¿Por qué la mayoría de los accidentes ocurren en los rangos de 35 o 40 mph y de 25 o 30 mph?

c) Construya un histograma de densidad usando los puntos extremos 0, 22.5, 32.5, 42.5, 52.5, 57.5, 67.5 para los intervalos.

2.77 Dado un resumen de cinco números,

mínimo Q_1 Q_2 Q_3 máximo

¿es posible determinar si un valor atípico está presente o no? Explique su respuesta.

2.78 Dada una presentación de tallo y hojas, ¿es posible determinar si un valor atípico está presente o no? Explique su respuesta.

2.79 Al recorrer la misma sección de la autopista interestatal en 11 días diferentes, un conductor registró el número de automóviles detenidos por la patrulla de caminos:

0 1 3 0 2 0 1 0 2 1 0

a) Elabore un diagrama de puntos.

b) Hay una cola larga a la derecha. Es posible que la media muestral sea mayor que la mediana. Calcule la media y la mediana muestrales, luego compare las dos mediciones centrales. Comente.

2.80 Un estudio experimental de las características de automatización del combustible biodiesel[7] se dirigió a reducir la contaminación producida por los motores diesel. El combustible biodiesel es reciclable y de bajas emisiones. Un aspecto del estudio es el tamaño de la gotita (μm) inyectada en el motor, a una distancia fija desde la boquilla. A partir de los datos dados por los autores respecto del tamaño de gotita, se considera una muestra de tamaño 41, que ya está ordenada.

2.1	2.2	2.2	2.3	2.3	2.4	2.5	2.5	2.5	2.8
2.9	2.9	2.9	3.0	3.1	3.1	3.2	3.3	3.3	3.3
3.4	3.5	3.6	3.6	3.6	3.7	3.7	4.0	4.2	4.5
4.9	5.1	5.2	5.3	5.7	6.0	6.1	7.1	7.8	7.9
8.9									

a) Agrupe dichos tamaños de la gotita y obtenga una tabla de frecuencias usando [2, 3), [3, 4), [4, 5) como las primeras tres clases, pero intente con clases más grandes para los otros casos. Aquí se incluye el punto extremo izquierdo, aunque no el punto extremo derecho.

b) Construya un histograma de densidad.

c) Obtenga $\bar{x}$ y s^2.

d) Obtenga los cuartiles.

[7] H. Kim, H. Suh, S. Park y C. Lee, An experimental and numerical investigation of atomization characteristics of biodiesel, dimethyl ether, and biodiesel-ethanol blended fuel, *Energy and Fuels*, **22** (2008), 2091–2098.

Términos clave

Análisis exploratorio de datos 22
Coeficiente de variación 29
Convención de puntos extremos 15
Cuartil 29
Datos brutos 34
Densidad 20
Desviación de la media 27
Desviación estándar 28
Diagrama de caja 31
Diagrama de caja modificado 31
Diagrama de Pareto 12
Diagrama de puntos 13
Distribución acumulada 16
Distribución acumulada empírica 24
Distribución categórica 14
Distribución de frecuencias 14
Distribución numérica 14
Distribución porcentual 17
Distribución porcentual acumulada 17
Etiqueta del tallo 21
Frecuencia de clase 15
Frontera de clase 16
Gráfica de barras 12
Gráfica de pastel 23
Histograma 17
Histograma de densidad 19
Hoja 21
Intervalo de clase 16
Límite de clase 14
Marca de clase 16
Máximo 31
Media 24
Media aritmética 24
Media muestral 25
Media ponderada 38
Mediana 24-25
Mínimo 31
Ojiva 20
Percentil 29
Presentación de cinco tallos 24
Presentación de tallo doble 24
Presentación de tallo y hojas 21
Primer cuartil 29
Rango 31
Rango intercuartílico 31
Tallo 21
Valor atípico 14
Variación absoluta 28
Variación relativa 28
Varianza 27
Varianza muestral 27

CAPÍTULO 3

PROBABILIDAD

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

3.1 Espacios y eventos muestrales 45

3.2 Conteo 49

3.3 Probabilidad 55

3.4 Los axiomas de la probabilidad 57

3.5 Algunos teoremas elementales 60

3.6 Probabilidad condicional 66

3.7 Teorema de Bayes 72

Ejercicios de repaso 78

Términos clave 80

En el estudio de la probabilidad hay básicamente tres clases de preguntas: **1.** ¿Qué se quiere decir cuando se indica que la probabilidad de un evento es, por decir, 0.50, 0.02 o 0.81? **2.** En la práctica real, ¿cómo se determinan o se miden los números que se llaman probabilidades? **3.** ¿Cuáles son las reglas matemáticas que deben obedecer las probabilidades?

Después de algunos preliminares matemáticos en las secciones 3.1 y 3.2, se estudian las dos primeras clases de preguntas en la sección 3.3 y el tercer tipo de pregunta, en las secciones 3.4 a 3.7.

3.1 Espacios y eventos muestrales

La probabilidad permite medir la ocurrencia en el resultado de cualquier experimento, cuyo resultado exacto no se pueda predecir con certeza. Sin embargo, antes de estudiar la probabilidad, es necesario especificar el espacio de resultados y los eventos sobre los cuales se definirá.

En estadística, un conjunto de resultados posibles al realizar un experimento se conoce como **espacio muestral**, porque generalmente consiste en todas las cosas que podrían suceder cuando se toma una muestra. Los espacios muestrales, por lo común se denotan con la letra S. Para evitar malas interpretaciones acerca de las palabras *experimento* y *resultado*, como se les utilizó aquí, debería entenderse que los estadísticos usan dichos términos en un sentido muy amplio. Un **experimento** puede consistir en el simple proceso de indagar si un interruptor está encendido o apagado, en determinar el tiempo que tarda un automóvil en acelerar a 30 millas por hora o en el arduo y difícil proceso de encontrar la masa de un electrón. Por ende, el **resultado** de un experimento quizá sea una simple elección entre dos posibilidades: ser el resultado de una medición o un conteo directos, o bien, ser una respuesta obtenida después de mediciones y cálculos exhaustivos.

Cuando se estudian los resultados de un experimento, por lo general se identifican las diversas posibilidades con números, puntos o algún otro tipo de símbolo. Por ejemplo, si cuatro contratistas entran en una licitación por un contrato para la construcción de una autopista, y con a, b, c y d se denota que se concede a los señores Adam, Brown, Clark o Dean, respectivamente, entonces el espacio muestral para este experimento es el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$.

Asimismo, cuando una agencia gubernamental debe decidir dónde ubicar dos nuevas instalaciones de investigación en cómputo y que (por alguna razón) es de interés indicar cuántas de ellas se localizarán en Texas y cuántas en California, el espacio muestral se escribiría como

$$S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$$

donde la primera coordenada es el número de instalaciones de investigación que se ubicarán en Texas, mientras la segunda coordenada es el número que se ubicará en California. Geométricamente, este espacio muestral se representa en la figura 3.1, de donde es evidente, por ejemplo, que en dos de las seis posibilidades Texas y California tendrán igual número de las nuevas instalaciones de investigación.

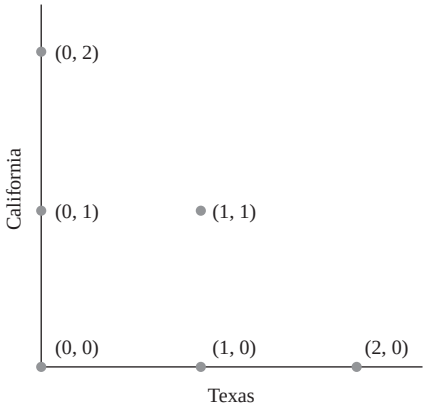


Figura 3.1
Espacio muestral para el número de nuevas instalaciones de investigación en cómputo que se ubicarán en Texas y California

El uso de puntos, en vez de letras o números, tiene la ventaja de que facilita la visualización de las diversas posibilidades y acaso descubra algunas características especiales que muchos de los resultados tendrían en común.

Por lo general, los espacios muestrales se clasifican de acuerdo con el número de elementos (puntos) que contienen. En los dos ejemplos anteriores, los espacios muestrales tienen cuatro y seis elementos, por lo cual a ambos se les refiere como **espacios muestrales finitos**. Otros ejemplos de espacios muestrales finitos son las diversas formas en que pueden seleccionarse el presidente y el vicepresidente de entre los 25 miembros de un sindicato local, y las varias formas en que un estudiante puede responder las 12 preguntas de un examen de verdadero-falso. Como se observa en la página 50, el primero de dichos espacios muestrales tiene 600 elementos, y el otro, 4,096.

Los siguientes son ejemplos de espacios muestrales que no son finitos. Si las personas que verifican la emisión de óxido de nitrógeno en los automóviles están interesadas en el número de vehículos que habrán de inspeccionar antes de observar el primero que no cumple con las regulaciones ambientales gubernamentales, podría ser el primero, el segundo, …, el decimoquinto, …, y por lo que se sabe, pueden verificarse miles de automóviles antes de encontrar uno que no cumpla con las regulaciones ambientales. Al no saber qué tan lejos deben ir, en un ejemplo como este es adecuado tomar el espacio muestral como todo el conjunto de los números naturales, de los cuales hay un infinito contable. Para ir un paso más allá, si estuvieran interesados en la emisión de óxido de nitrógeno de un automóvil, dado en gramos por milla, el espacio muestral tendría que consistir en todos los puntos sobre una escala continua (cierto intervalo sobre la línea de números reales), de los que existe un continuo.

En general, se dice que un espacio muestral es un **espacio muestral discreto** si tiene un número finito o infinito contable de elementos. Si los elementos (puntos) de un espacio muestral constituyen un continuo (por ejemplo, todos los puntos en una línea, todos los puntos en un segmento de línea o todos los puntos en un plano), se afirma que el espacio muestral es un **espacio muestral continuo**.

En el resto de este capítulo solo se considerarán espacios muestrales discretos, pero principalmente finitos.

En estadística, a cualquier subconjunto de un espacio muestral se le llama **evento**. Por subconjunto se entiende cualquier parte de un conjunto, incluido todo el conjunto y, de manera trivial, un conjunto llamado **conjunto vacío**, que se denota $\varnothing$, que no tiene elementos en absoluto. Por ejemplo, con referencia a la figura 3.1,

$$C = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

es el evento que, entre ellas, Texas y California tendrán una de las dos instalaciones de investigación,

$$D = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$$

es el evento de que Texas no obtendrá ninguna de las dos instalaciones de investigación y

$$E = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

es el evento de que Texas y California tendrán igual número de instalaciones. Note que los eventos C y E no tienen elementos en común: son **eventos mutuamente excluyentes**.

En muchos problemas de probabilidad, uno está interesado en los eventos que pueden expresarse en términos de dos o más eventos al formar **uniones**, **intersecciones** y **complementos**. Aunque seguramente el lector debe estar familiarizado con dichos términos, se repasará brevemente que, si A y B son cualesquier dos conjuntos en un espacio muestral S, su unión $A \cup B$ es el subconjunto de S que contiene todos los elementos que están en A, en B o en ambos; su intersección $A \cap B$ es el subconjunto de S que contiene todos los elementos que están en ambos, A y B, y el complemento $\overline{A}$ de A es el subconjunto de S que contiene todos los elementos de S que no están en A.

EJEMPLO **Combinación de eventos por unión, intersección y complemento**

Con referencia al espacio muestral de la figura 3.1 y los eventos C, D y E recién definidos, mencione los resultados que comprenden cada uno de los siguientes eventos; asimismo, exprese los eventos con palabras:

a) $C \cup E$;
b) $C \cap D$;
c) $\overline{D}$.

Solución

a) Puesto que $C \cup E$ contiene todos los elementos que están en C, en E o en ambos,

$$C \cup E = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$

es el evento de que ni Texas ni California obtendrán las dos nuevas instalaciones de investigación.

b) Puesto que $C \cap E$ contiene todos los elementos que están tanto en C como en D,

$$C \cap D = \{(0, 1)\}$$

es el evento de que Texas no conseguirá ninguna de las dos nuevas instalaciones y California obtendrá solo una.

c) Puesto que $\overline{D}$ contiene todos los elementos del espacio muestral que no están en D,

$$\overline{D} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$$

es el evento de que Texas obtendrá, al menos, una de las nuevas instalaciones de investigación en computación. ■

Los espacios y eventos muestrales, en particular las relaciones entre eventos, a menudo se representan con **diagramas de Venn**, como en las figuras 3.2 a 3.4. En cada caso, el espacio muestral se representa mediante un rectángulo, en tanto que los eventos se representan mediante regiones dentro del rectángulo, por lo general con círculos o partes de círculos. Las regiones sombreadas de los cuatro diagramas de Venn, de la figura 3.2, representan el evento A, el complemento del evento A, la unión de los eventos A y B, así como la intersección de los eventos A y B.

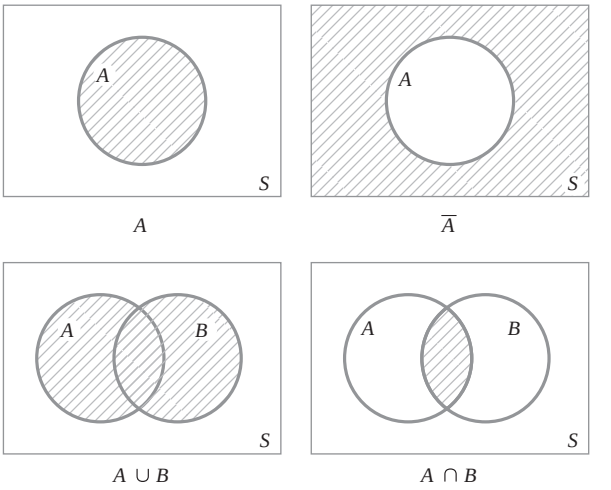


Figura 3.2
Diagramas de Venn que muestran el complemento, la unión y la intersección

EJEMPLO **Relación de regiones en diagramas de Venn para eventos**

Si A es el evento de que cierto estudiante tome un curso de cálculo y B es el evento de que el estudiante tome un curso de mecánica aplicada, ¿qué eventos se representan con las regiones sombreadas de los cuatro diagramas de Venn de la figura 3.2?

Solución La región sombreada del primer diagrama representa el evento de que el estudiante toma un curso de cálculo, la del segundo diagrama representa el evento de que el estudiante no toma un curso de cálculo, la del tercer diagrama representa el evento de que el estudiante toma un curso de cálculo y/o un curso de mecánica aplicada, mientras la del cuarto diagrama representa el evento de que el estudiante toma un curso de cálculo y un curso de mecánica aplicada. ■

Los diagramas de Venn se usan frecuentemente para verificar relaciones entre conjuntos; por consiguiente, hacen innecesario ofrecer pruebas formales con base en el álgebra de conjuntos. Para ilustrar, se demuestra que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, lo cual expresa el hecho de que el complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos. Para comenzar, note que la región sombreada del primer diagrama de Venn de la figura 3.3 representa el conjunto $\overline{A \cup B}$ (compare este diagrama con el tercer diagrama de la figura 3.2). La región achurada-cruzada del segundo diagrama de Venn, de la figura 3.3, se obtuvo al sombrear la región que representa $\overline{A}$, con líneas que van en una dirección, mientras que la que representa $\overline{B}$, con líneas que van en otra dirección. De esta manera, la región achurada-cruzada representa la intersección de $\overline{A}$ y $\overline{B}$, de donde se observa que es idéntica a la región sombreada del primer diagrama de Venn de la figura 3.3.

Cuando se tienen tres eventos, se dibujan los círculos como en la figura 3.4. En este diagrama, los círculos dividen el espacio muestral en ocho regiones, numeradas del 1 al 8, y es fácil determinar si los eventos correspondientes son partes de A o $\overline{A}$, B o $\overline{B}$ y C o $\overline{C}$.

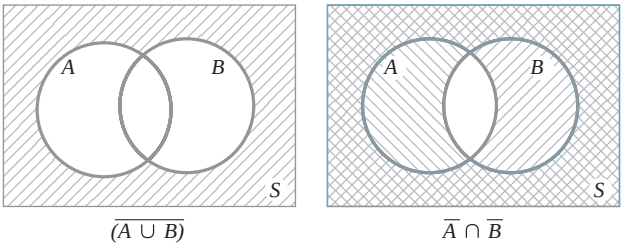


Figura 3.3
Uso de diagramas de Venn para demostrar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

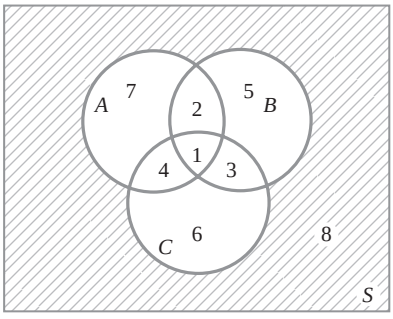


Figura 3.4
Diagrama de Venn

EJEMPLO **Relación de eventos con regiones del diagrama de Venn**

Un fabricante de motores pequeños se interesa por tres clases principales de defectos. Si A es el evento de que el tamaño del eje es muy grande, B es el evento de que los devanados son inadecuados y C el evento de que las conexiones eléctricas no sean satisfactorias, exprese con palabras cuáles eventos se representan mediante las siguientes regiones del diagrama de Venn de la figura 3.4:

a) región 2

b) regiones 1 y 3, juntas

c) regiones 3, 5, 6 y 8, juntas

Solución

a) Puesto que dicha región está contenida en A y en B, pero no en C, representa el evento de que el eje es muy grande y los devanados inadecuados; no obstante, las conexiones eléctricas son satisfactorias.

b) Puesto que esta región es común a B y a C, representa el evento de que los devanados son inadecuados y las conexiones eléctricas no son satisfactorias.

c) Puesto que esta es toda la región afuera de A, representa el evento de que el tamaño del eje no es demasiado grande. ■

3.2 Conteo

A veces suele ser muy difícil, o al menos tedioso, determinar el número de elementos en un espacio muestral al tratar de enlistar cada uno de los elementos del conjunto S. Para ilustrar, suponga que todos los automóviles usados y nuevos en una ciudad grande pueden clasificarse como de millajes bajo, medio o alto; precios moderado o alto, y ser baratos, en promedio o costosos de operar. ¿En cuántas formas puede clasificarse un automóvil usado?

Evidentemente, hay muchas posibilidades; un automóvil usado puede tener bajo millaje actual y un precio moderado, así como ser barato de operar, no tener millaje bajo ni alto, ser de precio alto y tener un costo promedio de operación y así sucesivamente. Al continuar de esta forma, es posible mencionar las 18 posibilidades, pero existe la probabilidad de que se omitan al menos una o dos.

Para manejar sistemáticamente este tipo de problemas, es útil dibujar un **diagrama de árbol**, como el de la figura 3.5, donde las tres alternativas para millaje actual se denotan con M_1, M_2 y M_3, donde M_1 es millaje bajo. El precio es P_1 o P_2, donde P_1 es moderado; y las tres alternativas para costos de operación se denotan con C_1, C_2 y C_3, donde C_1 es barato. Al seguir una ruta dada de izquierda a derecha por las ramas del árbol, se obtiene una clasificación específica; a saber, un elemento particular del espacio muestral. Se observa que, en conjunto, hay 18 posibilidades.

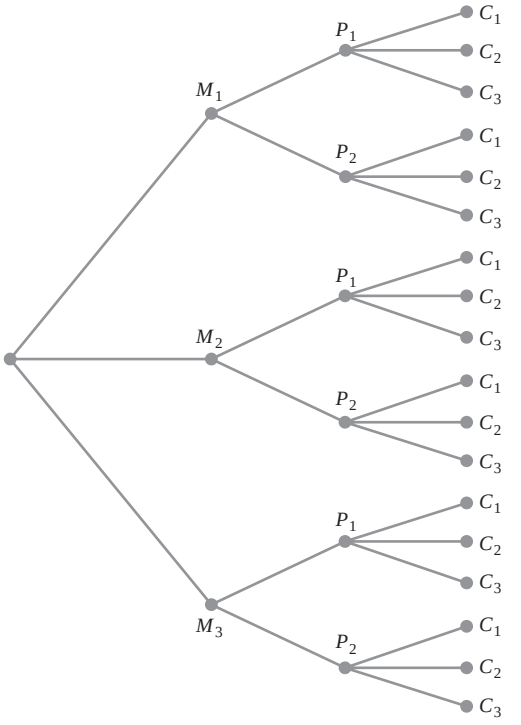


Figura 3.5
Tres diagramas para automóviles usados

Este resultado también podría obtenerse al observar que hay tres ramas M, que cada rama M se divide en dos ramas P y que cada rama P se divide en tres ramas C. Por lo tanto, existen $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ combinaciones de ramas o de rutas. Tal resultado es un caso especial del siguiente teorema, generalmente llamado teorema fundamental de conteo.

Multiplicación de opciones

Teorema 3.1 Si los conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_k$, contienen, respectivamente, $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elementos, hay $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ formas de elegir primero un elemento de A_1, luego un elemento de A_2, $\cdots$ y finalmente un elemento de A_k.

En el ejemplo, se tiene $n_1 = 3, n_2 = 2$ y $n_3 = 3$; por lo tanto, $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ posibilidades.

EJEMPLO **La regla de la multiplicación para $k = 2$ fases de opciones**

¿En cuántas formas diferentes un sindicato local con 25 miembros puede elegir a un vicepresidente y a un presidente?

Solución Puesto que el vicepresidente puede elegirse de 25 formas y, posteriormente, el presidente en 24 formas, existen en conjunto $25 \cdot 24 = 600$ formas en las cuales es posible hacer la elección total. ■

EJEMPLO **La regla de la multiplicación con $k = 12$ fases de opciones**

Si una prueba consiste en 12 preguntas de verdadero-falso, ¿en cuántas formas diferentes un estudiante puede marcar el examen con una respuesta a cada pregunta?

Solución Dado que cada pregunta puede responderse en dos formas, hay en conjunto

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 4{,}096 \text{ posibilidades}$$ ■

EJEMPLO **Determinación del tamaño de un experimento**

Un fabricante enfrenta dificultades para obtener lecturas consistentes de resistencia a la tensión entre tres máquinas ubicadas, respectivamente, en el piso de producción, en el laboratorio de investigación y en el laboratorio de control de calidad. También hay cuatro técnicos posibles (Tom, Joe, Ken y Carol), quienes operan, al menos, una de las máquinas de prueba con regularidad.

a) ¿Cuántos pares operador-máquina deben incluirse en el diseño de un experimento donde cada individuo opere cada máquina?

b) Si se requiere que cada par operador-máquina pruebe ocho especímenes, ¿cuántos especímenes de prueba se requieren para el procedimiento completo? *Nota:* un especimen se destruye cuando se mide su resistencia a la tensión.

Solución *a*) Existen $n_1 = 4$ operadores y $n_2 = 3$ máquinas, de modo que se requieren $4 \cdot 3 = 12$ pares.

b) Existen $n_3 = 8$ especímenes de prueba requeridos para cada par operador-máquina, de modo que se requieren $8 \cdot 12 = 96$ especímenes de prueba para el diseño del experimento. ■

Como en el primero de estos tres ejemplos, la regla para la multiplicación de opciones a menudo se utiliza cuando se hacen varias elecciones a partir de un conjunto y se está interesado por el orden con que se realizan. En general, si se eligen r objetos de un conjunto de n objetos distintos, cualquier arreglo u orden particular de dichos objetos se llama **permutación**. Por ejemplo, 4 1 2 3 es una permutación de los primeros cuatro enteros positivos, y Maine, Vermont y Connecticut es una permutación, un arreglo ordenado específico, de tres de los seis estados de la región de Nueva Inglaterra.

Para encontrar una fórmula para el número total de permutaciones de r objetos seleccionados, de un conjunto de n objetos distintos, observe que la primera selección se realiza a partir de todo el conjunto de n objetos, la segunda selección se hace de los $n - 1$ objetos restantes después de realizar la primera selección, … y la r-ésima selección se hace a partir de los $n - (r - 1) = n - r + 1$ objetos restantes después de realizar las primeras $r - 1$ selecciones. Por lo tanto, por la regla de la multiplicación de opciones, el número total de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$.

Puesto que los productos de enteros consecutivos surgen en muchos problemas relacionados con las permutaciones u otros tipos de selecciones especiales, será conveniente presentar aquí la **notación factorial**, donde $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, …, y, en general, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Además, para hacer varias fórmulas de aplicación más general, sea $0! = 1$ por definición.

Al expresar la fórmula para $_nP_r$, en términos de factoriales, multiplique y divida entre $(n - r)!$ para obtener

$$_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Para resumir:

Número de permutaciones de *n* objetos tomados *r* a la vez

Teorema 3.2 El número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

o bien, en notación factorial,

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Advierta que la segunda fórmula también es válida para $r = 0$.

EJEMPLO **El número de formas para ensamblar chips en un controlador**

Un mecanismo de control electrónico requiere 5 chips de memoria distintos, pero intercambiables. ¿En cuántas formas puede ensamblarse este mecanismo al colocar los 5 chips en las 5 posiciones dentro del controlador?

Solución Para $n = 5$ y $r = 5$; la primera fórmula da como resultado

$$_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

y la segunda fórmula,

$$_5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 120$$

La primera fórmula para $_nP_r$, por lo general es más fácil de usar, a menos que se utilice una calculadora que directamente dé resultados factoriales y/o razones de factoriales. ■

Existen muchos problemas en los cuales se debe encontrar el número de formas en que r objetos pueden seleccionarse a partir de un conjunto de n objetos; sin embargo, no hay que preocuparse por el orden con que se realiza la selección. Por ejemplo, quizá se quiera saber en cuántas formas es posible elegir 3 de 20 ayudantes de laboratorio para ayudar en un experimento. En general, hay $r!$ permutaciones de cualesquiera r objetos que se seleccionan de un conjunto de n objetos distintos. Por consiguiente, las $_nP_r$ permutaciones de r objetos, seleccionados de un conjunto de n objetos, contienen cada conjunto de r objetos $r!$ veces. Por lo tanto, para encontrar el número de formas en que r objetos pueden seleccionarse de un conjunto de n objetos distintos, también llamado el número de **combinaciones** de n objetos tomados r a la vez y denotado con $_nC_r$ o $\binom{n}{r}$, se divide $_nP_r$ entre $r!$ y se obtiene

Número de combinaciones de *n* objetos tomados *r* a la vez

Teorema 3.3 El número de formas en que r objetos pueden seleccionarse a partir de un conjunto de n objetos distintos es

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

o bien, en notación factorial,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLO **Evaluación de una combinación**

¿En cuántas formas diferentes pueden elegirse 3 de 20 ayudantes de laboratorio para colaborar con un experimento?

Solución Para $n = 20$ y $r = 3$, la primera fórmula para $\binom{n}{r}$ da como resultado

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1{,}140$$

■

EJEMPLO **Selección de máquinas para un experimento**

Es necesario realizar un estudio de calibración para saber si las lecturas en 15 máquinas de prueba dan resultados similares. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse 3 de las 15 para la investigación inicial?

Solución

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455 \text{ formas}$$

Note que seleccionar cuáles 3 máquinas usar es lo mismo que seleccionar cuáles 12 no incluir, es decir, de acuerdo con la segunda fórmula,

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{15!}{3!\,12!} = \binom{15}{3}$$

■

EJEMPLO **El número de selecciones de nuevos investigadores**

¿En cuántas formas distintas el director de un laboratorio de investigación puede elegir a 2 químicos de entre 7 solicitantes, y a 3 físicos de entre 9 solicitantes?

Solución Los 2 químicos se eligen en $\binom{7}{2} = 21$ formas y los 3 físicos en $\binom{9}{3} = 84$ formas. Por la regla de la multiplicación, la selección completa puede hacerse en $21 \cdot 84 = 1{,}764$ formas.

■

Ejercicios

3.1 Un ingeniero ambiental sospecha de contaminación por mercurio en un área que contiene tres lagos y dos ríos. Verificará los cinco para indicios de contaminación por mercurio.

a) Exprese cada resultado usando dos coordenadas, de modo que (2, 1); por ejemplo, represente el evento de que dos de los lagos y uno de los ríos estarán contaminados. Dibuje un diagrama, similar al de la figura 3.1, que muestre los 12 resultados en el espacio muestral.

b) Si R es el evento de que igualmente tanto lagos como ríos están contaminados, T es el evento de que ninguno de los ríos esté contaminado y U es el evento de que menos lagos que ríos están contaminados, exprese simbólicamente cada uno de dichos eventos al mencionar sus elementos.

3.2 Con referencia al ejercicio 3.1, ¿cuál de los tres pares de eventos, R y T, R y U y T y U, son mutuamente excluyentes?

3.3 Con referencia al ejercicio 3.1, mencione los resultados que comprendan cada uno de los siguientes eventos, y también exprese con palabras los eventos.

a) $R \cup U$

b) $R \cap T$

c) $\overline{T}$

3.4 Con referencia al espacio muestral de la figura 3.1, exprese con palabras cada uno de los siguientes eventos.

a) $F = \{(1, 0), (1, 1)\}$

b) $G = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

c) $F \cap G$

3.5 Para construir espacios muestrales para experimentos donde se trata con datos no numéricos, a menudo se codifican las diversas alternativas al asignarles números. Por ejemplo, si a un mecánico se le pregunta si trabajar en cierto modelo de automóvil es muy fácil, fácil, promedio, difícil o muy difícil, puede asignarse a dichas alternativas los códigos 1, 2, 3, 4 y 5. Si $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{4, 5\}$, exprese simbólicamente, y también con palabras, cada uno de los siguientes resultados al mencionar sus elementos.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cup \overline{B}$

d) $\overline{C}$

3.6 Con referencia al ejercicio 3.5, ¿cuál de los tres pares de eventos, A y B, A y C y B y C, son mutuamente excluyentes?

3.7 Dos profesores y 3 asistentes graduados son responsables de la supervisión de un laboratorio de física, y al menos un profesor y un asistente graduado tienen que estar presentes en todo momento.

a) Con dos coordenadas, de modo que (1, 3); por ejemplo, represente el evento de que un profesor y 3 asistentes graduados están presentes; dibuje un diagrama similar al de la figura 3.1, que incluya los puntos del espacio muestral correspondiente.

b) Describa con palabras los eventos que se representan mediante $B = \{(1, 3), (2, 3)\}$, $C = \{(1, 1), (2, 2)\}$ y $D = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

c) Con referencia al inciso *b*), exprese simbólicamente $C \cup D$ al mencionar sus elementos, también exprese este evento con palabras.

d) Con referencia al inciso *b*), ¿B y D son mutuamente excluyentes?

3.8 Para cada uno de los siguientes experimentos, indique si sería adecuado usar un espacio muestral finito, infinito o continuo.

a) La cantidad de radiación cósmica a la que se exponen los pasajeros durante un vuelo transcontinental se mide utilizando un contador adecuado.

b) Se eligen 5 de los miembros de una sociedad profesional con 12,600 integrantes, para funcionar en un comité de nominación.

c) Se realiza un experimento para medir el calor de vaporización de un líquido desconocido.

d) Se realiza un estudio para determinar cuántos de los 450 accidentes de aviación tienen como causa principal un error del piloto.

e) Se efectúan mediciones para determinar el contenido de uranio de cierta veta.

f) En una prueba de resistencia, se suelta un reloj varias veces desde un edificio alto hasta que deja de funcionar.

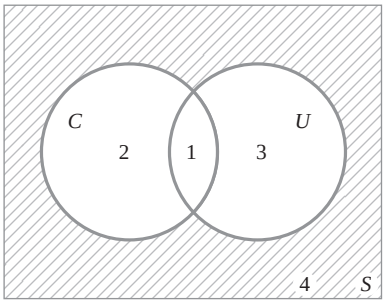


Figura 3.6
Diagrama de Venn para los ejercicios 3.9 y 3.10

3.9 En la figura 3.6, C es el evento de que una veta contenga cobre y U es el evento de que contenga uranio. Explique con palabras qué eventos se representan con las regiones 1, 2, 3 y 4.

3.10 Con referencia al ejercicio 3.9, ¿qué eventos se representan mediante

a) las regiones 1 y 3 juntas;

b) las regiones 3 y 4 juntas;

c) las regiones 1, 2 y 3 juntas?

3.11 Con referencia a la figura 3.4, ¿qué eventos se representan mediante

a) la región 5;

b) las regiones 4 y 6 juntas;

c) las regiones 7 y 8 juntas;

d) las regiones 1, 2, 3 y 5 juntas?

3.12 Con referencia a la figura 3.4, ¿qué regiones o combinaciones de regiones representan los eventos de que un motor tendrá

a) ninguno de los principales defectos;

b) un eje grande y devanados inadecuados;

c) un eje grande y/o devanados inadecuados, pero sus conexiones eléctricas son satisfactorias;

d) un eje grande y los devanados inadecuados, y/o las conexiones eléctricas no son satisfactorias?

3.13 Utilice diagramas de Venn para verificar que

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cup (A \cap B) = A$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

d) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.14 Un inspector de edificios debe verificar el alambrado en un nuevo edificio de apartamentos ya sea el lunes, el martes, el miércoles o el jueves, y a las 8 A.M., a la 1 P.M. o a las 2 P.M. Dibuje un diagrama de árbol que ilustre las diversas formas en que el inspector puede programar la inspección del alambrado del nuevo edificio de apartamentos.

3.15 Si los 5 finalistas en un torneo internacional de voleibol son España, Estados Unidos, Uruguay, Portugal y Japón, elabore un diagrama de árbol que muestre los diferentes posibles finalistas del primero y el segundo lugares.

3.16 Un dispositivo biomecánico para emergencias médicas puede operar 0, 1 o 2 veces por noche. Construya un diagrama de árbol para demostrar que existen 10 formas diferentes en que puede operar un total de 6 veces durante 4 noches.

3.17 En un kit de óptica hay 6 lentes cóncavos, 4 lentes convexos y 3 prismas. ¿En cuántas formas puede elegir uno de los lentes cóncavos, uno de los lentes convexos y uno de los prismas?

3.18 Una computadora de propósito especial tiene 2 interruptores, cada uno de los cuales puede colocarse en 3 posiciones diferentes, y 1 interruptor que puede colocarse en 2 posiciones. ¿En cuántas formas pueden colocarse los interruptores de la computadora?

3.19 Un grupo de ingeniería consiste en 6 hombres y 4 mujeres.

a) ¿Cuántos diferentes equipos de proyecto pueden formarse, que consistan en 2 hombres y 2 mujeres?

b) Si 2 mujeres tienen al mismo novio y rehúsan estar en el mismo equipo juntas, ¿cuántos diferentes equipos de proyecto pueden formarse que consistan en 2 hombres y 2 mujeres?

3.20 Si hay 9 autos en una carrera, ¿en cuántas formas diferentes pueden colocarse primero, segundo y tercero?

3.21 ¿En cuántas formas ordenadas un director de televisión puede programar 6 comerciales diferentes, durante los 6 cortes asignados a comerciales en la transmisión del primer periodo de un juego de hockey?

3.22 Si entre n objetos, k son iguales y los otros son todos distintos, el número de permutaciones de tales n objetos tomados en conjunto es $n!/k!$.

a) ¿Cuántas permutaciones existen de las letras de la palabra en inglés *class*?

b) ¿En cuántas formas el director de televisión del ejercicio 3.21 puede llenar los 6 cortes asignados a comerciales, si hay 4 comerciales diferentes, de los cuales uno debe mostrarse 3 veces, mientras que cada uno de los otros debe mostrarse solo una vez?

3.23 Determine el número de formas en que un fabricante puede elegir 2 de 15 ubicaciones para un nuevo almacén.

3.24 Si el orden no importa, ¿en cuántas formas diferentes pueden elegirse 4 de 18 brazos robóticos para un trabajo especial de soldadura?

3.25 Un cartón de 12 baterías recargables contiene una que es defectuosa. ¿En cuántas formas un inspector puede elegir 3 de las baterías y

a) sacar la que está defectuosa;

b) no sacar la que está defectuosa?

3.26 Con referencia al ejercicio 3.25, suponga que dos de las baterías están defectuosas. ¿En cuántas formas el inspector puede elegir 3 de las baterías y sacar

a) ninguna de las baterías defectuosas;

b) una de las baterías defectuosas;

c) las dos baterías defectuosas?

3.27 El departamento de abastecimiento tiene 8 motores eléctricos diferentes y 5 interruptores de arranque diferentes. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse 2 motores y 2 interruptores, para un experimento concerniente a una antena de rastreo?

3.3 Probabilidad

Hasta el momento, tan solo se ha estudiado lo que es posible en una situación determinada; ahora se irá un paso adelante: se examinará también lo que es probable y lo que es improbable. Históricamente, la forma más antigua para medir incertidumbres es el **concepto clásico de probabilidad**, que se desarrolló originalmente en conexión con los juegos de azar. Se aplica cuando todos los posibles resultados son igualmente probables.

El concepto clásico de probabilidad

Si hay m posibilidades igualmente probables, de las cuales una debe ocurrir y s se consideran como favorables, o como "éxito", entonces la probabilidad de un "éxito" está dada por $\frac{s}{m}$.

En la aplicación de esta regla, los términos *favorable* y *éxito* se usan de manera flexible: favorable puede significar que un televisor no funcione y éxito, que alguien pesque un resfriado.

EJEMPLO **Cartas bien barajadas tienen igual probabilidad de seleccionarse**

¿Cuál es la probabilidad de extraer un as de un mazo de 52 cartas bien barajado?

Solución Hay $s = 4$ ases entre las $m = 52$ cartas, así que se tiene

$$\frac{s}{m} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

■

Aunque en la mayoría de los juegos de azar se encuentran posibilidades iguales, el concepto clásico de probabilidad también se aplica a una amplia gama de situaciones donde se usan dispositivos de juego para hacer selecciones aleatorias; por decir, cuando las labores se asignan a los auxiliares de investigación según la suerte, cuando los animales de laboratorio se eligen para un experimento de modo que tengan la misma posibilidad de resultar seleccionados, o bien, cuando se eligen piezas de una máquina lavadora para su inspección, de modo que cada parte producida tenga la misma oportunidad de ser seleccionada.

EJEMPLO **La selección aleatoria resulta en el caso de igual probabilidad**

La siguiente generación de cápsulas inalámbricas miniaturizadas, con locomoción activa, requerirá dos motores eléctricos en miniatura[1] para maniobrar cada cápsula. Suponga que se fabricaron 10 motores, pero que, a pesar de las pruebas realizadas en los motores individuales, 2 no funcionarán satisfactoriamente cuando se coloquen en una cápsula.

Para fabricar una cápsula nueva, se seleccionarán 2 motores al azar (esto es: cada par de motores tiene la misma posibilidad de resultar elegido). Encuentre la probabilidad de que

a) ambos motores operarán satisfactoriamente en la cápsula;

b) un motor operará satisfactoriamente y el otro no lo hará.

Solución *a*) Hay $\binom{10}{2} = 45$ formas igualmente probables de elegir 2 de los 10 motores, de modo que $m = 45$.

El número de resultados favorables es el número de formas en que dos motores buenos pueden seleccionarse de entre ocho:

$$s = \binom{8}{2} = 28$$

de modo que la probabilidad de que ambos motores funcionarán de manera satisfactoria en la cápsula es

$$\frac{s}{m} = \frac{28}{45}$$

o aproximadamente 0.622.

b) El número de resultados favorables es el número de formas en que pueden seleccionarse un motor satisfactorio y uno insatisfactorio, o bien,

$$s = \binom{8}{1}\binom{2}{1} = 8 \cdot 2 = 16$$

Se sigue que la probabilidad es

$$\frac{s}{m} = \frac{16}{45} = 0.356$$

■

[1] M. Quirini *et al.*, Design and fabrication of a motor legged capsule for the active exploration of the gastrointestinal tract, IEEE/ASME *Transactions on Mechatronics* (2008), **13**, 169-179.

Una gran desventaja del concepto clásico de probabilidad es su limitada aplicabilidad, pues existen muchas situaciones en que las diversas posibilidades no pueden considerarse todas como igualmente probables. Este sería el caso, por ejemplo, si uno se interesa por la pregunta de si lloverá el día siguiente, si el lanzamiento de un misil será exitoso, si un motor recientemente diseñado funcionará durante al menos 1,000 horas o si cierto candidato ganará una elección.

Entre los diversos conceptos de probabilidad, el que se sostiene más ampliamente es la **interpretación de frecuencias**.

La interpretación de frecuencias de la probabilidad

> La probabilidad de un evento (o resultado) es la proporción de veces en que el evento ocurrirá a largo plazo en experimentos repetidos.

Si se dice que hay una probabilidad de 0.78 de que un avión de Nueva York a Boston llegará a tiempo, se entiende que tales vuelos llegan a tiempo 78% de las veces. Asimismo, cuando el servicio meteorológico predice que hay un 40% de posibilidad de lluvia (que la probabilidad es 0.40), ello significa que, con las mismas condiciones meteorológicas, lloverá 40% de las veces. De manera más general, se considera que un evento tiene una probabilidad de, por decir, 0.90, en el mismo sentido en que podría decirse que en clima frío un automóvil arrancará 90% de las veces. No es posible garantizar que sucederá en cualquier ocasión específica (el auto puede arrancar y luego no arrancar), pero si se llevan registros durante un largo periodo de tiempo, se encontrará que la proporción de "éxitos" es muy cercana a 0.90.

De acuerdo con la interpretación de frecuencias de la probabilidad, se estima la probabilidad de un evento al observar qué fracción del tiempo ocurrieron eventos similares en el pasado.

EJEMPLO

Aproximación a la probabilidad mediante la frecuencia relativa a largo plazo

Si los registros muestran que 294 de 300 aisladores cerámicos probados soportaron cierto choque térmico, ¿cuál es la probabilidad de que algún aislador no probado soportará el choque térmico?

Solución Entre los aisladores probados, $\frac{294}{300} = 0.98$ soportaron el choque térmico, cuya cifra se usa como estimación de la probabilidad. ■

Un punto de vista alternativo consiste en interpretar las probabilidades como *evaluaciones personales* o *subjetivas*. Tales **probabilidades subjetivas** expresan la fortaleza de la creencia personal, en cuanto a las incertidumbres involucradas, y se aplican sobre todo cuando hay poca o ninguna evidencia directa, de modo que no hay más posibilidad que considerar evidencia colateral (indirecta), suposiciones educadas y quizás intuición, así como otros factores subjetivos. Las probabilidades subjetivas se determinan mejor al referirse a la toma de riesgos, o situaciones de apuesta, como se explicará en el ejercicio 3.53.

3.4 Los axiomas de la probabilidad

En esta sección se definen matemáticamente las probabilidades como los valores de **funciones aditivas de conjuntos**. Como el lector probablemente esté más familiarizado con funciones para las cuales los elementos del dominio y el rango son todos números, primero se dará un ejemplo muy sencillo donde los elementos del dominio son conjuntos, mientras que los elementos del rango son enteros no negativos, es decir, una **función conjunto** que asigna, a cada subconjunto A de un espacio muestral finito S, el número de elementos en A, que se escribe $N(A)$. Suponga que 500 piezas de maquinaria se inspeccionan antes de

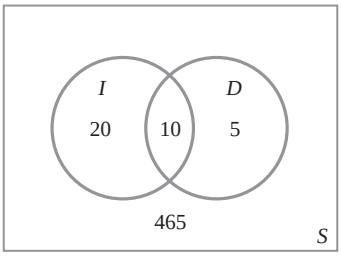


Figura 3.7
Clasificación de 500 piezas de maquinaria

embarcarse, que I denota una pieza de maquinaria ensamblada de manera inadecuada, D denota que contiene uno o más componentes defectuosos, mientras la distribución de las 500 piezas de maquinaria entre las diversas categorías es como se ilustra en el diagrama de Venn de la figura 3.7.

Los números en la figura 3.7 son $N(I \cap \overline{D}) = 20$, $N(I \cap D) = 10$, $N(\overline{I} \cap D) = 5$ y $N(I \cap \overline{D}) = 465$. Con estos valores, y el hecho de que la función conjunto es **aditiva** (lo cual significa que el número que designa a la unión de dos subconjuntos sin elementos en común es la suma de los números asignados a los subconjuntos individuales), puede determinarse el valor de $N(A)$ para cualquier otro subconjunto A de S. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} N(\overline{I}) &= N(\overline{I} \cap D) + N(\overline{I} \cap \overline{D}) = 5 + 465 = 470 \\ N(I \cup D) &= N(I \cap \overline{D}) + N(I \cap D) + N(\overline{I} \cap D) \\ &= 20 + 10 + 5 = 35 \\ N(\overline{I} \cup D) &= N(I \cap D) + N(\overline{I} \cap D) + N(\overline{I} \cap \overline{D}) \\ &= 10 + 5 + 465 = 480 \end{aligned}$$

y

$$N(D) = N(I \cap D) + N(\overline{I} \cap D) = 10 + 5 = 15$$

Al utilizar el concepto de función aditiva de un conjunto, ahora se explicará qué se entiende por la probabilidad de un evento. Dado un espacio muestral finito S y un evento A en S, se define $P(A)$, la probabilidad de A, como el valor de una función aditiva de conjunto que satisface las siguientes tres condiciones.

Axiomas de probabilidad para un espacio muestral finito

Axioma 1	$0 \leq P(A) \leq 1$ para cada evento A en S.
Axioma 2	$P(S) = 1$.
Axioma 3	Si A y B son eventos mutuamente excluyentes en S, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

El primer axioma indica que las probabilidades son números reales en el intervalo de 0 a 1, ambos inclusive. El segundo axioma afirma que al espacio muestral, como un todo, se le asigna una probabilidad de 1. Puesto que S contiene todos los resultados posibles, y uno de ellos siempre debe ocurrir, es cierto que S ocurra. El tercer axioma afirma que las funciones de probabilidad deben ser aditivas: la probabilidad de la unión es la suma de las dos probabilidades cuando los dos eventos no tienen resultados en común.

Los axiomas para una teoría matemática no requieren demostrarse, pero si tal teoría se aplicara al mundo físico debería probarse de alguna manera que los axiomas son "realistas". Por ende, se demostrará que los tres postulados son consistentes con el concepto clásico de probabilidad y la interpretación de frecuencias.

En cuanto al primer axioma concierne, las fracciones de la forma $\frac{s}{m}$, donde $0 \leq s \leq m$ y m es un entero positivo, no pueden ser negativas o mayores que 1; lo mismo también es válido para la proporción del tiempo que un evento ocurrirá. Para demostrar que el segundo axioma es consistente con el concepto clásico de probabilidad y la interpretación de frecuencia para una serie larga de experimentos repetidos, solo se tiene que observar que, para el espacio muestral total,

$$P(S) = \frac{m}{m} = 1$$

y que algún resultado debe ocurrir 100% de las veces. En cuanto al tercer axioma, si

$$P(A) = \frac{s_1}{m}, \quad P(B) = \frac{s_2}{m}$$

mientras A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = \frac{s_1 + s_2}{m} = P(A) + P(B)$$

Además, si un evento ocurre en proporción 0.36 o 36% de las veces, otro evento ocurre 41% de las veces y ambos eventos son mutuamente excluyentes, entonces uno o el otro ocurrirá en proporción $0.36 + 0.41 = 0.7$, o bien, 77%.

Antes de seguir adelante, es importante destacar que los axiomas de probabilidad no indican cómo asignar probabilidades a los diversos resultados de un experimento, simplemente restringen las formas en que pueden hacerse. En la práctica real, las probabilidades se asignan sobre la base de la experiencia anterior, sobre la base de un análisis cuidadoso de las condiciones subyacentes al experimento, sobre la base de evaluaciones subjetivas, o bien, sobre la base de suposiciones; por decir, la suposición común de que todos los resultados son equiprobables.

EJEMPLO **Comprobación de posibles asignaciones de probabilidad**

Si un experimento tiene los tres resultados posibles y mutuamente excluyentes A, B y C, compruebe en cada caso si la asignación de probabilidades es permisible:

a) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(C) = \frac{1}{3}$
b) $P(A) = 0.64$, $P(B) = 0.38$ y $P(C) = -0.02$
c) $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.52$ y $P(C) = 0.26$
d) $P(A) = 0.57$, $P(B) = 0.24$ y $P(C) = 0.19$

Solución

a) La asignación de probabilidades es permisible, porque los valores están todos en el intervalo de 0 a 1 y su suma es $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

b) La asignación no es permisible porque $P(C)$ es negativa.

c) La asignación no es permisible porque $0.35 + 0.52 + 0.26 = 1.13$, que es mayor que 1.

d) La asignación es permisible porque los valores están todos en el intervalo de 0 a 1 y su suma es $0.57 + 0.24 + 0.19 = 1$. ■

El enfoque en el último ejemplo se extiende a cualquier experimento donde el espacio muestral S sea discreto, de modo que los resultados pueden ordenarse en secuencia. Una cantidad de la probabilidad p_i se asigna al i-ésimo resultado, donde

$$0 \leq p_i \quad \text{y} \quad \sum_{\text{todos los resultados en } S} p_i = 1$$

entonces, la probabilidad de cualquier evento A se define como

$$P(A) = \sum_{\text{todos los resultados en } A} p_i$$

Cuando la probabilidad se asigna de esta forma, siempre se satisfacen los axiomas de probabilidad.

De manera intuitiva, puede considerarse que el científico comienza con una cantidad unitaria de arcilla (probabilidad) y coloca una proporción p_1 en el primer resultado, p_2 en el segundo resultado y así sucesivamente. A algunos resultados se les puede asignar una gran cantidad y a otros cantidades menores. La cantidad unitaria total de arcilla (probabilidad) se asigna a los resultados en el espacio muestral. Entonces, a un evento A se le asigna toda la arcilla (probabilidad) asignada a cada resultado en A.

3.5 Algunos teoremas elementales

Con el uso de la inducción matemática, el tercer axioma de la probabilidad se puede extender para incluir cualquier número de eventos mutuamente excluyentes; en otras palabras, es posible demostrar lo siguiente.

Generalización del tercer axioma de probabilidad

Teorema 3.4 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes en un espacio muestral S, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

En el siguiente capítulo, se verá cómo debe modificarse el tercer axioma de probabilidad, de modo que los axiomas también se apliquen a espacios muestrales que no son finitos.

EJEMPLO **Suma de probabilidades para eventos mutuamente excluyentes**

La probabilidad de que un servicio de prueba del consumidor calificará un nuevo aditamento anticontaminante para automóviles como muy deficiente, deficiente, adecuado, bueno, muy bueno o excelente, son 0.07, 0.12, 0.17, 0.32, 0.21 y 0.11. ¿Cuáles son las probabilidades de que calificará el aditamento

a) muy deficiente, deficiente, adecuado o bueno;

b) bueno, muy bueno o excelente?

Solución Puesto que las probabilidades son todas mutuamente excluyentes, la sustitución directa en la fórmula del teorema 3.4 da como resultado

$$0.07 + 0.12 + 0.17 + 0.32 = 0.68$$

para el inciso *a*) y

$$0.32 + 0.21 + 0.11 = 0.64$$

para el inciso *b*). ■

Como es posible demostrar que un espacio muestral de n puntos (resultados) tiene 2^n subconjuntos, parecería que el problema de especificar una función de probabilidad (a saber, una probabilidad para cada subconjunto o evento) fácilmente puede volverse muy tediosa. De hecho, para $n = 20$ ya hay más de 1 millón de posibles eventos. Por fortuna, esta tarea se simplifica considerablemente con el siguiente teorema:

Regla para calcular la probabilidad de un evento

Teorema 3.5 Si A es un evento en el espacio muestral finito S, entonces $P(A)$ es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales que comprenden A.

Para probar este teorema, sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ los n resultados que comprenden el evento A, de modo que se puede escribir $A = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$. Puesto que las E son resultados individuales y mutuamente excluyentes, por el teorema 3.4 se tiene

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \\ &= P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) \end{aligned}$$

lo que completa la prueba.

EJEMPLO **Uso de un diagrama de Venn para visualizar cálculos de probabilidad**

Consulte el ejemplo de clasificación de automóviles usados de la página 49. Suponga que las probabilidades de los 18 resultados son como se muestran en la figura 3.8 (que, excepto por las probabilidades, es idéntica a la figura 3.5).

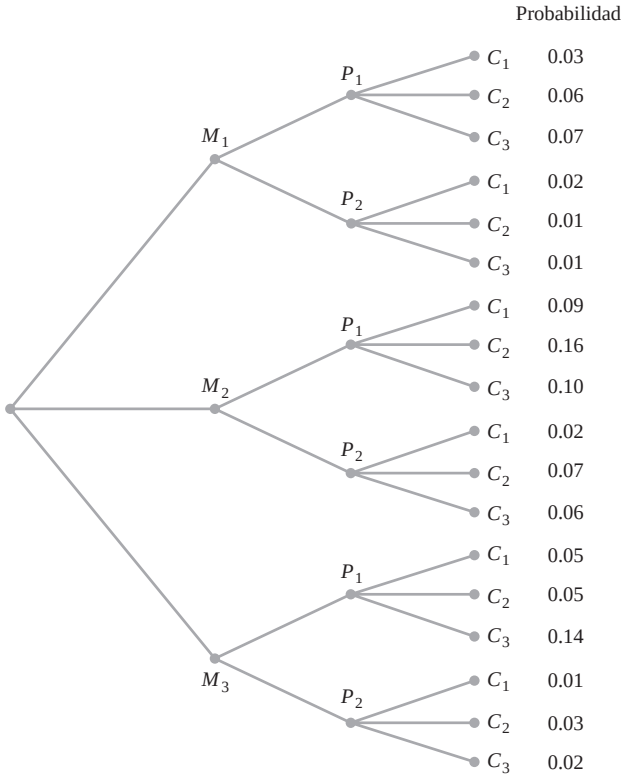


Figura 3.8
Clasificaciones de automóviles usados y sus probabilidades

Determine $P(M_1)$, $P(P_1)$, $P(C_3)$, $P(M_1 \cap P_1)$ y $P(M_1 \cap C_3)$.

Solución Al sumar las probabilidades de los resultados que comprenden los eventos respectivos, se obtiene

$$\begin{aligned}
P(M_1) &= 0.03 + 0.06 + 0.07 + 0.02 + 0.01 + 0.01 = 0.20 \\
P(P_1) &= 0.03 + 0.06 + 0.07 + 0.09 + 0.16 + 0.10 + 0.05 \\
&\quad\ 0.05 + 0.14 = 0.75 \\
P(C_3) &= 0.07 + 0.01 + 0.10 + 0.06 + 0.14 + 0.02 = 0.40 \\
P(M_1 \cap P_1) &= 0.03 + 0.06 + 0.07 = 0.16
\end{aligned}$$

y

$$P(M_1 \cap C_3) = 0.07 + 0.01 = 0.08$$

■

En el teorema 3.4 se vio que el tercer axioma de probabilidad puede extenderse para incluir más de dos eventos mutuamente excluyentes. Otra extensión útil e importante de este axioma permite determinar la probabilidad de la unión de cualesquiera dos eventos en *S,* sin importar si son o no mutuamente excluyentes. Para motivar el teorema que sigue, considere el diagrama de Venn de la figura 3.9, que trata de las ofertas de empleo recibidas por los recién graduados de la facultad de ingeniería. Las letras *I* y *G* representan una oferta laboral de la industria y una oferta laboral del gobierno, respectivamente.

Del diagrama de Venn, se sigue que

$$\begin{aligned}
P(I) &= 0.18 + 0.12 = 0.30 \\
P(G) &= 0.12 + 0.24 = 0.36
\end{aligned}$$

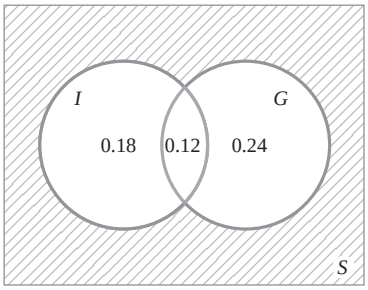


Figura 3.9
Diagrama de Venn para ofertas laborales

y

$$P(I \cup G) = 0.18 + 0.12 + 0.24 = 0.54$$

Es posible sumar las diversas probabilidades, porque representan eventos mutuamente excluyentes.

De haber usado erróneamente el tercer axioma de probabilidad para calcular $P(I \cup G)$, se habría obtenido $P(I) + P(G) = 0.30 + 0.36$, que supera el valor correcto por 0.12. Este error resulta de sumar en $P(I \cap G)$ dos veces, una vez en $P(I) = 0.30$ y una vez en $P(G) = 0.36$; podría corregirse al restar 0.12 de 0.66. Por ende, se obtendría

$$\begin{aligned} P(I \cup G) &= P(I) + P(G) - P(I \cap G) \\ &= 0.30 + 0.36 - 0.12 \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

lo cual concuerda, como debiera, con el resultado obtenido anteriormente.

En línea con esta motivación, ahora se enunciará y probará el siguiente teorema:

Regla general de suma para probabilidad

Teorema 3.6 Si A y B son cualesquiera eventos en S, entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para probar este teorema, se utilizan las identidades de los incisos *c*) y *d*) del ejercicio 3.13, para obtener

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= [P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})] \\ &\quad + [P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

donde, en la tercera línea, se suma y resta $P(A \cap B)$. Note que, cuando A y B son mutuamente excluyentes, de modo que $P(A \cap B) = 0$, el teorema 3.6 se reduce al tercer axioma de la probabilidad. Por tal razón, al tercer axioma de probabilidad en ocasiones se le conoce como **regla especial de suma**.

EJEMPLO **Uso de la regla general de suma para probabilidad**

Con referencia al ejemplo de los automóviles usados de la página 49, encuentre la probabilidad de que un auto tendrá alto millaje o será costoso de operar; a saber, $P(M_1 \cup C_3)$.

Solución Al usar los resultados obtenidos en la página 61, $P(M_1) = 0.20$, $P(C_3) = 0.40$ y $P(M_1 \cap C_3) = 0.08$, se sustituye en la regla general de suma del teorema 3.6 para obtener

$$\begin{aligned} P(M_1 \cup C_3) &= P(M_1) + P(C_3) - P(M_1 \cap C_3) \\ &= 0.20 + 0.40 - 0.08 \\ &= 0.52 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO **La probabilidad de requerir reparación bajo garantía**

Si las probabilidades son 0.87, 0.36 y 0.29 de que, mientras está cubierto por la garantía, un automóvil nuevo requerirá reparaciones en el motor, en la transmisión o en ambos, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que un auto requerirá una u otra o ambos tipos de reparaciones con la garantía?

Solución Al sustituir dichos valores, dados en la fórmula del teorema 3.6, se obtiene

$$0.87 + 0.36 - 0.29 = 0.94$$ ■

Observe que la regla general de suma, teorema 3.6, puede generalizarse aún más, de modo que se aplique a más de dos eventos (véase el ejercicio 3.49).

Al utilizar los axiomas de probabilidad, es posible derivar muchos otros teoremas que juegan roles importantes en aplicaciones. Por ejemplo, se demostrará lo siguiente:

Regla de probabilidad del complemento

Teorema 3.7 Si A es cualquier evento en S, entonces, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Para probar este teorema, se usa el hecho de que A y $\overline{A}$ son mutuamente excluyentes por definición, y que $A \cup \overline{A} = S$ (a saber, que entre ellos A y $\overline{A}$ contienen todos los elementos en S). Por lo tanto, es posible escribir

$$\begin{aligned} P(A) + P(\overline{A}) &= P(A \cup \overline{A}) \\ &= P(S) \\ &= 1 \end{aligned}$$

de modo que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Como caso especial, se encuentra que $P(\varnothing) = 1 - P(S) = 0$, pues el conjunto vacío $\varnothing$ es el complemento de S.

EJEMPLO **Uso de la regla de probabilidad del complemento**

Con referencia al ejemplo de automóviles usados de la página 49 y los resultados de la página 61, determine

a) la probabilidad de que un auto usado no tendrá bajo millaje;

b) la probabilidad de que un auto usado o no tendrá bajo millaje o no será costoso de operar.

Solución Mediante la regla del complemento,

a) $P(\overline{M}_1) = 1 - P(M_1) = 1 - 0.20 = 0.80$

b) Puesto que $\overline{M}_1 \cup \overline{C}_3 = \overline{M_1 \cap C_3}$, de acuerdo con la identidad del inciso *a*) del ejercicio 3.13, por la regla del complemento se obtiene

$$P(\overline{M}_1 \cup \overline{C}_3) = 1 - P(M_1 \cap C_3) = 1 - 0.08 = 0.92$$ ■

Ejercicios

3.28 *a*) Un fabricante de refrigeradores vendió 2,756 unidades de un nuevo modelo, de los cuales 287 requirieron reparaciones mientras estaba vigente la garantía. Estime la probabilidad de que una nueva unidad, que acaba de venderse, requerirá reparaciones con la garantía. Explique su razonamiento.

b) El año pasado, 8,400 estudiantes presentaron solicitudes para los 6,000 boletos estudiantiles para la temporada (abono) disponibles para juegos de fútbol. El próximo año usted presentará la solicitud y le gustaría estimar la probabilidad de recibir un boleto de temporada. Ofrezca su estimación y

comente acerca de un factor que podría influir en su estimación.

3.29 Cuando se lanzan un par de dados equilibrados, ¿cuáles son las probabilidades de obtener

a) 7;

b) 11;

c) 7 u 11;

d) 3;

e) 2 o 12;

f) 2, 3 o 12?

3.30 Una lotería vende boletos numerados del 00001 al 50000. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número que sea divisible entre 200?

3.31 Una agencia de renta de automóviles tiene 18 autos compactos y 12 autos de tamaño mediano. Si cuatro de los vehículos se seleccionan al azar para una verificación de seguridad, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos de cada tipo?

3.32 Entre los primeros 842 hornos de convección vendidos a los consumidores, 143 requirieron algún ajuste durante el periodo de garantía. Estime la probabilidad de que un horno de convección recientemente comprado necesitará algún ajuste durante el periodo de garantía.

3.33 En un grupo de 160 estudiantes de ingeniería graduados, 92 se inscribieron en un curso avanzado de estadística, 63 se inscribieron en un curso de investigación de operaciones y 40 se inscribieron en ambos. ¿Cuántos de esos estudiantes no están inscritos en algún curso?

3.34 Entre 150 personas entrevistadas como parte de un estudio de transportación urbana masiva, algunas vivían a más de 3 millas del centro de la ciudad (A), algunas ahora conducen regularmente su propio auto al trabajo (B) y algunas con gusto cambiarían al transporte público masivo si estuviera disponible (C). Use la información proporcionada en la figura 3.10 para determinar

a) $N(A)$;

b) $N(B)$;

c) $N(C)$;

d) $N(A \cap B)$;

e) $N(A \cap C)$;

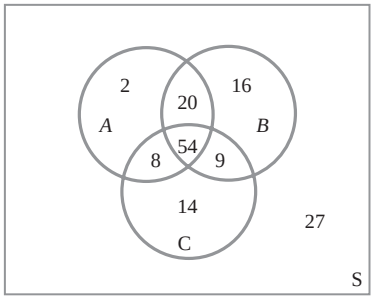


Figura 3.10 Diagrama para el ejercicio 3.34

f) $N(A \cap B \cap C)$;

g) $N(A \cup B)$;

h) $N(B \cup C)$;

i) $N(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$;

j) $N[B \cap (A \cup C)]$.

3.35 Un experimento tiene los cuatro posibles resultados mutuamente excluyentes A, B, C y D. Compruebe si las siguientes asignaciones de probabilidad son permisibles:

a) $P(A) = 0.38$, $P(B) = 0.16$, $P(C) = 0.11$, $P(D) = 0.35$;

b) $P(A) = 0.31$, $P(B) = 0.27$, $P(C) = 0.28$, $P(D) = 0.16$;

c) $P(A) = 0.32$, $P(B) = 0.27$, $P(C) = -0.06$, $P(D) = 0.47$;

d) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{8}$, $P(D) = \frac{1}{16}$;

e) $P(A) = \frac{5}{18}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, $P(D) = \frac{2}{9}$.

3.36 Con referencia al ejercicio 3.1, suponga que los puntos (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1) y (3, 2) tienen las probabilidades 0.060, 0.012, 0.006, 0.067, 0.014, 0.092, 0.260, 0.027, 0.080, 0.166, 0.110 y 0.106.

a) Verifique que esta asignación de probabilidades sea permisible.

b) Encuentre las probabilidades de los eventos R, T y U dados en el inciso *b*) de dicho ejercicio.

c) Calcule las probabilidades de que ninguno, uno o los dos ríos estén contaminados.

3.37 Con referencia al ejercicio 3.7, suponga que a cada punto (i, j) del espacio muestral se asigna la probabilidad $\frac{15/28}{i + j}$.

a) Verifique que esta asignación de probabilidades sea permisible.

b) Encuentre las probabilidades de los eventos B, C y D descritos en el inciso *b*) de dicho ejercicio.

c) Determine las probabilidades de que uno, dos o tres de los estudiantes graduados supervisarán el laboratorio de física.

3.38 Explique por qué debe haber un error en cada uno de los siguientes enunciados:

a) La probabilidad de que una muestra mineral contendrá plata es de 0.38 y la probabilidad de que no contendrá plata es de 0.52.

b) La probabilidad de que una operación de taladrado tendrá éxito es de 0.34 y la probabilidad de que no tendrá éxito es de −0.66.

c) Una persona que repara acondicionadores de aire afirma que la probabilidad de que el compresor esté bien es de 0.82, que el motor de ventilador esté bien es de 0.64 y que ambos están bien es de 0.41.

3.39 Consulte los incisos *c*) y *d*) del ejercicio 3.13 para demostrar que

a) $P(A \cap B) \leq P(A)$;

b) $P(A \cup B) \geq P(A)$.

3.40 Explique por qué debe haber un error en cada uno de los siguientes enunciados:

a) La probabilidad de que un estudiante obtendrá A en un curso de geología es de 0.3 y la probabilidad de que obtendrá A o B es de 0.27.

b) Una compañía trabaja en la construcción de dos centros comerciales; la probabilidad de que el más grande se completará a tiempo es de 0.35 y la probabilidad de que ambos se completarán a tiempo es de 0.42.

3.41 Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, $P(A) = 0.26$ y $P(B) = 0.45$, encuentre

a) $P(\overline{A})$;

b) $P(A \cup B)$;

c) $P(A \cap \overline{B})$;

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3.42 Con referencia al ejercicio 3.34, suponga que el cuestionario que llena una de las 150 personas se comprobará dos veces. Si se elige de tal forma que cada cuestionario tenga una probabilidad de $\frac{1}{150}$ de ser seleccionado, determine las probabilidades de que la persona

a) viva a más de 3 millas del centro de la ciudad;

b) conduzca regularmente su auto al trabajo;

c) no viva a más de 3 millas del centro de la ciudad, ni querría cambiar al transporte público masivo si estuviera disponible;

d) conduzca regularmente su auto al trabajo, pero con gusto cambiaría al transporte público masivo si estuviera disponible.

3.43 El departamento de policía de un campus necesita bicicletas nuevas para su personal de patrullaje; las probabilidades son 0.17, 0.22, 0.03, 0.29, 0.21 y 0.08 de que comprará Bianshe, Cannonhill, Fishim, Giante, Trec o HT. Encuentre las probabilidades de que comprará

a) Cannonhill o Trec;

b) Bianshe, Giante o Trec;

c) Fishim o Trec;

d) Cannonhill, Giante o HT.

3.44 Las probabilidades de que una estación de televisión recibirá 0, 1, 2, 3, …, 8 o al menos 9 quejas, después de transmitir un programa controvertido, son respectivamente 0.01, 0.03, 0.07, 0.15, 0.19, 0.18, 0.14, 0.12, 0.09 y 0.02. ¿Cuáles son las probabilidades de que, después de transmitir tal programa, la estación recibirá

a) cuando mucho 4 quejas;

b) al menos 6 quejas;

c) de 5 a 8 quejas?

3.45 Si cada punto del espacio muestral de la figura 3.11 representa un resultado que tiene la probabilidad $\frac{1}{32}$, encuentre

a) $P(A)$;

b) $P(B)$;

c) $P(A \cap B)$;

d) $P(A \cup B)$;

e) $P(\overline{A} \cap B)$;

f) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

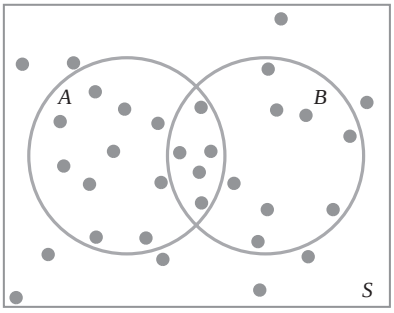


Figura 3.11 Diagrama para el ejercicio 3.45

3.46 La probabilidad de que un chip de circuito integrado tendrá grabado defectuoso es de 0.06, la probabilidad de que tendrá un defecto por agrietamiento es de 0.03 y la probabilidad de que tendrá ambos defectos es de 0.02.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un chip recientemente fabricado tendrá ya sea un defecto de grabado o uno por agrietamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un chip recientemente fabricado no tendrá defectos?

3.47 La probabilidad de que un nuevo aeropuerto obtendrá un premio por su diseño es de 0.16, la probabilidad de que obtendrá un premio por el uso eficiente de materiales es de 0.24 y la probabilidad de que obtendrá ambos premios es de 0.11.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtendrá al menos uno de los dos premios?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtendrá solo uno de los dos premios?

3.48 Dados $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.65$ y $P(A \cap B) = 0.12$, encuentre

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(\overline{A} \cap B)$;

c) $P(A \cap \overline{B})$;

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

3.49 Es posible demostrar que, para cualesquiera tres eventos A, B y C, la probabilidad de que al menos uno de ellos ocurrirá está dada por

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Verifique que esta fórmula sea válida para las probabilidades de la figura 3.12.

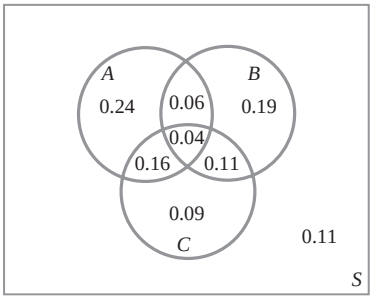


Figura 3.12 Diagrama para el ejercicio 3.49

3.50 Suponga que, en el mantenimiento de un gran archivo de registros médicos para propósitos de seguros, la probabilidad de un error en el procesamiento es de 0.0010, la probabilidad de un error en el llenado es de 0.0009, la probabilidad de un error en la recuperación de datos es de 0.0012, la probabilidad de un error en el procesamiento así como en el llenado es de 0.0002, la probabilidad de un error en el procesamiento así como en la recuperación de datos es de 0.0003 y la probabilidad de un error en el procesamiento y el llenado así como en la recuperación de datos es de 0.0001. ¿Cuál es la probabilidad de cometer al menos uno de dichos errores?

3.51 Si la probabilidad del evento A es p, entonces la **probabilidad** de que ocurrirá están dadas por la razón de p a $1 - p$. Por lo general, la probabilidad se da como una razón de dos enteros positivos que no tienen factor común, y si un evento es más probable que no ocurra a que ocurra se acostumbra dar la probabilidad de que no ocurrirá, en vez de la probabilidad de que ocurrirá. ¿Cuál es la probabilidad a favor o en contra de la ocurrencia de un evento si su probabilidad es

a) $\frac{4}{7}$; *b*) 0.05; *c*) 0.80?

3.52 Use la definición del ejercicio 3.51 para demostrar que, si la probabilidad para la ocurrencia del evento A son a a b, donde a y b son enteros positivos, entonces

$$p = \frac{a}{a + b}$$

3.53 La fórmula del ejercicio 3.52 con frecuencia se usa para determinar probabilidades subjetivas. Por ejemplo, si un solicitante para un empleo "siente" que las probabilidades son 7 a 4 de obtener el puesto, la probabilidad subjetiva que el solicitante asigna a la obtención del empleo es

$$p = \frac{7}{7 + 4} = \frac{7}{11}$$

a) Si un empresario cree que las probabilidades son 3 a 2 de que un nuevo negocio tendrá éxito (por decir, al apostar \$300 contra \$200 de que triunfará), ¿qué probabilidad subjetiva asigna a su éxito?

b) Si un estudiante quiere apostar \$30 contra \$10, pero no \$40 contra \$10, de que obtendrá una calificación aprobatoria en cierto curso, ¿qué dice esto acerca de la probabilidad subjetiva que el estudiante asigna a la obtención de una calificación aprobatoria en el curso?

3.54 Las probabilidades subjetivas pueden satisfacer o no el tercer axioma de probabilidad. Cuando lo hacen, se dice que son **consistentes**; cuando no lo hacen, no se debieran tomar con demasiada seriedad.

a) El proveedor de equipo óptico delicado cree que las probabilidades son 7 a 5 contra un embarque llegue tarde, así como de 11 a 1 contra que no llegue en absoluto. Más aún, considera que hay una posibilidad de 50/50 (las probabilidades son 1 a 1) de que tal embarque o llegará tarde o no llegará en absoluto. ¿Las probabilidades correspondientes son consistentes?

b) Existen dos Ferraris en una carrera, por lo que un experto siente que las probabilidades contra su triunfo son, respectivamente, 2 a 1 y 3 a 1. Más aún, afirma que hay una posibilidad menos que par de que alguno de los dos Ferrari ganará. Discuta la consistencia de dichas afirmaciones.

3.6 Probabilidad condicional

Como se definió la probabilidad, es significativo preguntar la probabilidad de un evento tan solo si se hace referencia a un espacio muestral S dado. Preguntar la probabilidad de que un ingeniero gane al menos \$90,000 al año no tiene sentido, a menos que se especifique si se hace referencia a todos los ingenieros en el hemisferio occidental, a todos los ingenieros en Estados Unidos, a todos en una industria específica, a todos los afiliados con una universidad, etcétera. Por ende, cuando se utiliza el símbolo $P(A)$ para la probabilidad de A, en realidad significa la probabilidad de A dado algún espacio muestral S. Puesto que la elección de S en ningún caso siempre es evidente y como existen problemas en los cuales,

uno se interesa en las probabilidades de A con respecto a más espacios muestrales que uno, la notación $P(A|S)$ sirve para dejar en claro que uno se refiere a un espacio muestral determinado S. $P(A|S)$ se lee como la probabilidad condicional de A en relación con S; por ello, cualquier probabilidad es una probabilidad condicional. Desde luego, se usa la notación simplificada $P(A)$ siempre que la elección de S se comprenda claramente.

Para ilustrar algunas de las ideas conectadas con las probabilidades condicionales, considere de nuevo las 500 piezas de maquinaria de las que algunas están ensambladas de manera inadecuada y algunas contienen uno o más componentes defectuosos, como se indica en la figura 3.7. Si supone probabilidades iguales en la selección de una de las piezas de maquinaria para inspección, se observará que la probabilidad de obtener una parte con uno o más componentes defectuosos es

$$P(D) = \frac{10 + 5}{500} = \frac{3}{100}$$

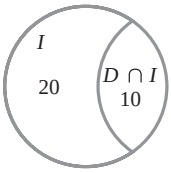


Figura 3.13
Espacio muestral reducido

Para comprobar si la probabilidad es la misma si la elección está restringida a las piezas de maquinaria ensambladas de manera inadecuada, únicamente se tiene que observar el espacio muestral reducido de la figura 3.13 y suponer que cada una de las 30 piezas ensambladas inadecuadamente tiene la misma posibilidad de resultar seleccionada. Por lo tanto,

$$P(D \mid I) = \frac{N(D \cap I)}{N(I)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

y se observa que la probabilidad de obtener una pieza de maquinaria con uno o más componentes defectuosos aumentó de $\frac{3}{100}$ a $\frac{1}{3}$. Note que, si divide entre $N(S)$ el numerador y el denominador de la fórmula anterior para $P(D \mid I)$ por $N(S)$, se obtiene

$$P(D \mid I) = \frac{\dfrac{N(D \cap I)}{N(S)}}{\dfrac{N(I)}{N(S)}} = \frac{P(D \cap I)}{P(I)}$$

donde $P(D \mid I)$ está dada por la razón de $P(D \cap I)$ a $P(I)$.

Al observar este ejemplo de otra forma, advierta que, con respecto al espacio muestral total S, se tiene

$$P(D \cap I) = \frac{10}{500} = \frac{1}{50} \qquad \text{y} \qquad P(\overline{D} \cap I) = \frac{20}{500} = \frac{2}{50}$$

si supone, como antes, que cada una de las 500 piezas de maquinaria tiene la misma posibilidad de resultar seleccionada. Por consiguiente, las probabilidades de que la pieza de maquinaria seleccionada contendrá o no uno o más componentes defectuosos, dado que está ensamblada inadecuadamente, deberían estar en la proporción 1 a 2. Como las probabilidades de D y $\overline{D}$ en el espacio muestral reducido deben sumar 1, se sigue que

$$P(D \mid I) = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad P(\overline{D} \mid I) = \frac{2}{3}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido antes. Esto explica por qué, en el último paso, se tiene que dividir entre $P(I)$:

$$P(D \mid I) = \frac{P(D \cap I)}{P(I)}$$

La división entre $P(I)$, o multiplicación por $1/P(I)$, toma en cuenta el factor de proporcionalidad, que iguala a 1 la suma de las probabilidades sobre el espacio muestral reducido.

Continuando con estas observaciones, se elabora la siguiente definición general:

Probabilidad condicional

Si A y B son eventos cualesquiera de S y $P(B) \neq 0$, la probabilidad condicional de A dado B es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EJEMPLO

Cálculo de una probabilidad condicional

Si la probabilidad de que un sistema de comunicación tendrá alta fidelidad es 0.81, así como la probabilidad de que tendrá alta fidelidad y alta selectividad es 0.18, ¿cuál es la probabilidad de que un sistema con alta fidelidad también tendrá alta selectividad?

Solución Si A es el evento de que un sistema de comunicación tenga alta selectividad y B es el evento de que tenga alta fidelidad, entonces, $P(B) = 0.81$ y $P(A \cap B) = 0.18$, por lo que la sustitución en la fórmula da como resultado

$$P(A \mid B) = \frac{0.18}{0.81} = \frac{2}{9}$$

■

EJEMPLO

La probabilidad condicional de que un automóvil usado tenga bajo millaje dado que es costoso de operar

Con referencia al ejemplo del auto usado, para el que las probabilidades de los resultados individuales se dan en la figura 3.8, utilice los resultados de la página 61 para obtener $P(M_1 \mid C_3)$.

Solución Puesto que se tiene $P(M_1 \cap C_3) = 0.08$ y $P(C_1) = 0.40$, la sustitución en la fórmula para probabilidad condicional da como resultado

$$P(M_1 \mid C_3) = \frac{P(M_1 \cap C_3)}{P(C_3)} = \frac{0.08}{0.40} = 0.20$$

Es interesante destacar que el valor de la probabilidad condicional aquí obtenida, $P(M_1 \mid C_3) = 0.20$, es igual al valor para $P(M_1)$, obtenido en la página 61. Lo anterior significa que la probabilidad de que un auto usado tenga bajo millaje es la misma si es costoso de operar o no. Se dice que M_1 es **independiente** de C_3. Como se pide al lector verificar en el ejercicio 3.59, también se sigue de los resultados de la página 61 que M_1 no es independiente de P_1; a saber, bajo millaje se relaciona con el precio del automóvil. ■

En general, si A y B son cualesquiera dos eventos en un espacio muestral S, se dice que ***A* es independiente de *B* si y solo si *P*(*A* | *B*) = *P*(*A*)**, pero, como se puede demostrar que B es independiente de A siempre que A sea independiente de B, simplemente se suele decir que ***A* y *B* son eventos independientes**.

Regla general de multiplicación de probabilidad

Teorema 3.8 Si A y B son eventos cualesquiera de S, entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) \quad \text{si} \quad P(A) \neq 0 \\ &= P(B) \cdot P(A \mid B) \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0 \end{aligned}$$

La segunda de estas reglas se obtiene directamente de la definición de probabilidad condicional al multiplicar ambos lados por $P(B)$; la primera se obtiene de la segunda al intercambiar las letras A y B.

EJEMPLO **Uso de la regla general de multiplicación de probabilidad**

El supervisor de un grupo de 20 trabajadores de la construcción quiere obtener la opinión de 2 de ellos (seleccionados al azar), acerca de ciertas nuevas regulaciones en seguridad. Si 12 trabajadores favorecen las nuevas regulaciones y los otros 8 están contra ellas, ¿cuál es la probabilidad de que los dos trabajadores elegidos por el supervisor estarán en contra de las nuevas regulaciones de seguridad?

Solución Suponiendo probabilidades iguales para cada selección (lo que se entiende por selecciones al azar), la probabilidad de que el primer trabajador seleccionado estará contra las nuevas regulaciones de seguridad es $\frac{8}{20}$ y la probabilidad de que el segundo trabajador seleccionado estará contra las nuevas regulaciones de seguridad, dado que el primero esté contra ellas, es $\frac{7}{19}$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es

$$\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$$

■

En el caso especial, donde A y B son independientes, de modo que $P(A \mid B) = P(A)$, el teorema 3.8 conduce al siguiente resultado:

Regla especial del producto de probabilidad

Teorema 3.9 Dos eventos A y B son independientes, si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por ende, la probabilidad de que dos eventos independientes ocurrirán ambos es simplemente el producto de sus probabilidades. En ocasiones, esta regla se utiliza como la definición de independencia. Se aplica aun cuando $P(A)$ o $P(B)$ o ambos son iguales a 0. En cualquier caso, puede usarse para determinar si dos eventos dados son independientes.

EJEMPLO **Los resultados para partes no relacionadas de un experimento pueden tratarse como independientes**

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras en dos lanzamientos de una moneda equilibrada?

Solución Puesto que la probabilidad de cara es $\frac{1}{2}$ para cada lanzamiento y los dos lanzamientos son independientes, la probabilidad es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

■

EJEMPLO **Independencia y selección con y sin reemplazo**

Dos cartas se extraen al azar de un mazo ordinario de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases si

a) la primera carta se sustituye antes de sacar la segunda carta;
b) la primera carta no se sustituye antes de sacar la segunda carta?

Solución *a*) Puesto que hay cuatro ases entre las 52 cartas, se tiene

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b) Puesto que solo hay tres ases entre las 51 cartas que restan, después de sacar un as del mazo, se tiene

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

Observe que

$$\frac{1}{221} \neq \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}$$

de modo que se viola la independencia cuando el muestreo se realiza sin reemplazo. ■

EJEMPLO **Comprobación de si dos eventos son independientes con una probabilidad asignada**

Si $P(C) = 0.65$, $P(D) = 0.40$ y $P(C \cap D) = 0.24$, ¿los eventos C y D son independientes?

Solución Dado que $P(C) \cdot P(D) = (0.65)(0.40) = 0.26$ y no 0.24, los dos eventos no son independientes. ■

En los ejemplos anteriores, se usaron las probabilidades asignadas para verificar si dos eventos son independientes. El concepto de independencia se utiliza a menudo cuando se asignan probabilidades a eventos que tratan partes no relacionadas de un experimento.

EJEMPLO **Asignación de probabilidad de eventos independientes**

Sea A el evento de qué materia prima está disponible cuando se necesita y B el evento de que el tiempo de maquinado de una pieza es menor que 1 hora. Si $P(A) = 0.8$ y $P(B) = 0.7$, asigne probabilidad al evento $A \cap B$.

Solución Puesto que los eventos A y B tratan pasos no relacionados en el proceso de fabricación, se invoca independencia y se hace la asignación

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$ ■

La regla especial del producto puede extenderse fácilmente, de modo que se aplique a más de dos eventos independientes; nuevamente, se multiplican todas las probabilidades individuales.

EJEMPLO **La regla especial del producto de probabilidad extendida**

¿Cuál es la probabilidad de no obtener algún 6 en cuatro lanzamientos de un dado equilibrado?

Solución La probabilidad es $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1{,}296}$ ■

Para tres o más eventos dependientes, la regla de multiplicación se vuelve más complicada, como se ilustra en el ejercicio 3.70.

EJEMPLO **La probabilidad de señalar falsamente un problema de contaminación**

Muchas compañías deben monitorizar las aguas residuales que se descargan de sus plantas en los ríos y las vías fluviales. En algunos estados es legal que ciertas sustancias tengan límites de calidad del agua que estén por abajo del límite de detección, L, para el método actual de medición. Se considera que las aguas residuales satisfacen el límite de calidad, si cualquier espécimen de prueba está por abajo del límite de detección L. De otro modo, se declarará que no cumple con el límite de calidad. Suponga que el agua no contiene el

contaminante de interés, pero que la variabilidad en el análisis químico todavía da una posibilidad de 1% de que una medición en un espécimen de prueba superará L.

a) Encuentre la probabilidad de que ningún par de especímenes de prueba, ambos libres del contaminante, fallarán para acatar la reglamentación.

b) Si cada semana, durante dos años, se toma un espécimen de prueba y todos están libres del contaminante, encuentre la probabilidad de que ninguno de los especímenes de prueba fallará en acatar la reglamentación.

c) Comente acerca del razonamiento incorrecto de tener un límite fijo de detección, sin importar cuántas pruebas se realicen.

Solución *a*) Si las dos muestras no se toman muy cerca en el tiempo o el espacio, se les trata como independientes. Use la regla especial de producto para determinar la probabilidad de que ambas acaten la reglamentación:

$$0.99 \times 0.99 = 0.9801$$

b) Al tratar como independientes los resultados para diferentes semanas,

$$(0.99)^{104} = 0.35$$

de modo que, incluso con excelente calidad del agua, casi siempre hay dos tercios de posibilidades de que, al menos una vez, la calidad del agua se declarará en desacato con la reglamentación.

c) Con este tipo de legislación, ninguna compañía querría recolectar especímenes de prueba más de, acaso, una vez al año. Lo anterior está en oposición directa con la idea científica de que más información es mejor que menos información, acerca de la calidad del agua. Tiene que hacerse algún esfuerzo para permitir mayores límites cuando las pruebas sean más frecuentes. ■

EJEMPLO

Uso de la probabilidad para comparar la precisión de dos esquemas para enviar mensajes

Ingenieros eléctricos consideran dos sistemas alternativos para enviar mensajes. Un mensaje consiste en una palabra que es ya sea 0 o 1. Sin embargo, debido a ruido aleatorio en el canal, un 1 que se transmite podría recibirse como 0 y viceversa. Esto es: hay una pequeña probabilidad, p, de que

$$P[\text{Un 1 transmitido se reciba como 0}] = p$$
$$P[\text{Un 0 transmitido se reciba como 1}] = p$$

Un esquema es enviar un solo dígito. El mensaje es corto pero quizá no sea confiable. Un segundo esquema es repetir el dígito seleccionado tres veces en sucesión. En el extremo receptor, se utilizará la regla mayoritaria para decodificar. Esto es: cuando se reciba 101, 110, 011 o 111, se interpretará que se envió 1.

a) Evalúe la probabilidad de que un 1 transmitido se recibirá como 1, con el esquema de tres dígitos, cuando $p = 0.01$, 0.02 o 0.05. Compare esto con el esquema donde un solo dígito se transmite como una palabra. Trate los resultados para diferentes dígitos como independientes.

b) Suponga que un mensaje, que consiste en las dos palabras, un 1 seguido por 0, se transmite usando el esquema de tres dígitos. ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje total se decodificará correctamente considerando la regla de mayoría con $p = 0.05$? Compare con el esquema donde un solo dígito se transmite como una palabra.

Solución *a*) Se transmiten los tres dígitos 111. Por independencia, la secuencia 111 tiene probabilidad $(1 - p)(1 - p)(1 - p)$ de recibirse como 111. Además, la probabilidad de recibir

011 es $p(1-p)(1-p)$, de modo que la probabilidad de exactamente un 0 entre los tres recibidos es $3p(1-p)^2$. Al usar la regla de mayoría,

$$P[\text{Correcto}] = P[1 \text{ transmitido recibido como } 1] = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$$

p	0.01	0.02	0.05
P[Correcto]	0.9997	0.9988	0.9928

Las tres probabilidades están considerablemente por arriba de las probabilidades 0.99, 0.98 y 0.95, respectivamente, correspondientes al esquema de un solo dígito.

b) Tanto las palabras 1 como 0 deben recibirse correctamente. Como en el inciso *a*), la probabilidad de que un 0 se reciba correctamente también es 0.9928. En consecuencia, al usar independencia, la probabilidad de que el mensaje total se reciba correctamente es $(0.9928)^2 = 0.986$. Esto mejora sobre el esquema donde dígitos individuales se envían para cada palabra, ya que dicho esquema solo tiene la probabilidad $(0.95)^2 = 0.903$ de recibir correctamente el mensaje total.

La redundancia ayuda a mejorar la precisión, pero es necesario transmitir más dígitos, lo cual resulta en un rendimiento total significativamente menor. ■

3.7 Teorema de Bayes

Las reglas generales de multiplicación son útiles para resolver muchos problemas, donde el resultado final de un experimento depende de los resultados de varias etapas intermedias. Suponga, por ejemplo, que una planta ensambladora recibe sus reguladores de voltaje de tres proveedores diferentes, 60% del proveedor B_1, 30% del proveedor B_2 y 10% del proveedor B_3. En otras palabras, las probabilidades de que algún regulador de voltaje recibido por la planta provenga de estos tres proveedores son de 0.60, 0.30 y 0.10. Suponga, asimismo, que 95% de los reguladores de voltaje de B_1, 80% de los de B_2 y 65% de los de B_3 se desempeñan de acuerdo con las especificaciones. Además, le gustaría conocer la probabilidad de que algún regulador de voltaje recibido por la planta se desempeñará de acuerdo con las especificaciones.

Si A denota el evento de que un regulador de voltaje recibido por la planta se desempeña de acuerdo con las especificaciones, así como que B_1, B_2 y B_3 son los eventos de que proviene de los respectivos proveedores, se escribe

$$\begin{aligned} A &= A \cap [B_1 \cup B_2 \cup B_3] \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \end{aligned}$$

donde B_1, B_2 y B_3 son eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir. Se sigue que $A \cap B_1$, $A \cap B_2$ y $A \cap B_3$ también son mutuamente excluyentes. Por la generalización del tercer axioma de probabilidad en la página 60,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Entonces, si se aplica la segunda de las reglas generales de multiplicación a $P(A \cap B_1)$, $P(A \cap B_2)$ y $P(A \cap B_3)$, se obtiene

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)$$

y la sustitución de los valores numéricos determinados da como resultado

$$\begin{aligned} P(A) &= (0.60)(0.95) + (0.30)(0.80) + (0.10)(0.65) \\ &= 0.875 \end{aligned}$$

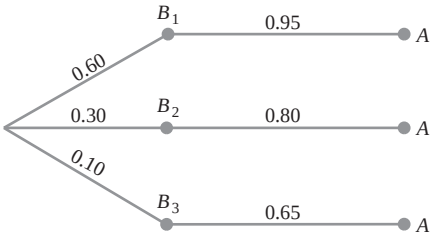


Figura 3.14
Diagrama de árbol para el ejemplo que trata con tres proveedores de reguladores de voltaje

para la probabilidad de que cualquier regulador de voltaje recibido por la planta dada se desempeñará de acuerdo con las especificaciones.

Para visualizar este resultado, solo se tiene que construir un diagrama de árbol como el de la figura 3.14, donde la probabilidad del resultado final está dada por la suma de los productos de las probabilidades correspondientes a cada rama del árbol.

En el ejemplo anterior, únicamente hubo 3 posibilidades en la fase intermedia, pero, si hay n posibilidades mutuamente excluyentes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ en la etapa intermedia, un argumento similar conducirá al siguiente resultado, en ocasiones llamado **regla de eliminación** o **regla de probabilidad total**:

Regla de probabilidad total

Teorema 3.10 Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

El diagrama de árbol, como el de la figura 3.15, donde la probabilidad del resultado final nuevamente está dada por la suma de los productos de las probabilidades correspondientes a cada rama del árbol, explica gráficamente el cálculo.

Para considerar un problema que está estrechamente relacionado con el recién discutido, suponga que se quiere conocer la probabilidad de que un regulador de voltaje específico, que se sabe se desempeña de acuerdo con las especificaciones, provino del proveedor B_3. Simbólicamente, se desea conocer el valor de $P(B_3 \mid A)$; para encontrar una fórmula para tal probabilidad, primero se escribe

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)}$$

Entonces, al sustituir $P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)$ para $P(A \cap B_3)$ y $\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$ para $P(A)$, en concordancia con los teoremas 3.8 y 3.10, se obtiene

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

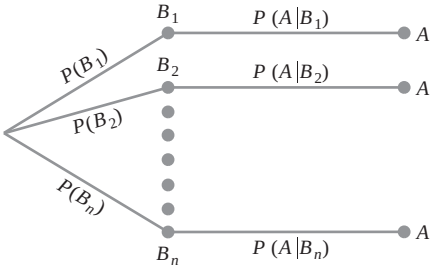


Figura 3.15
Diagrama de árbol para la regla de eliminación

que expresa $P(B_3 \mid A)$, en términos de las probabilidades dadas. Al sustituir los valores de la página 72 (o de la figura 3.14), finalmente se obtiene

$$P(B_3 \mid A) = \frac{(0.10)(0.65)}{(0.60)(0.95) + (0.30)(0.80) + (0.10)(0.65)} = 0.074$$

Advierta que la probabilidad de que un regulador de voltaje lo proporcione B_3 disminuye de 0.10 a 0.074 una vez que se sabe que se desempeña de acuerdo con las especificaciones.

El método utilizado para resolver el ejemplo anterior se puede generalizar fácilmente para obtener la siguiente fórmula, llamada **teorema de Bayes**:

Teorema de Bayes

Teorema 3.11 Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, entonces,

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$.

Observe que la expresión en el numerador es la probabilidad de alcanzar A vía la r-ésima rama del árbol y que la expresión en el denominador es la suma de las probabilidades de alcanzar A vía las n ramas del árbol.

El teorema de Bayes brinda una fórmula para encontrar la probabilidad de que el "efecto" A fuera "causado" por el evento B_r. En el ejemplo, se encontró la probabilidad de que un regulador de voltaje aceptable fuera fabricado por el proveedor B_3. Las probabilidades $P(B_i)$ se conocen como probabilidades *a priori,* de las "causas" B_i y, en la práctica, generalmente es difícil asignarles valores numéricos. Durante muchos años, el teorema de Bayes se observó con suspicacia, ya que se utilizaba con la suposición, a menudo errónea, de que todas las probabilidades *a priori* eran iguales. Buena parte de la controversia que alguna vez rodeó al teorema de Bayes se aclaró al descubrir que las probabilidades $P(B_i)$ deben determinarse por separado, en cada caso, de la naturaleza del problema, de preferencia sobre la base de conocimiento específico o de experiencia anterior.

EJEMPLO **Uso del teorema de Bayes**

Cuatro técnicos efectúan reparaciones regularmente cuando ocurren averías en una línea de producción automatizada. Janet, quien atiende 20% de las averías, hace una reparación incompleta 1 vez en 20; Tomás, quien atiende 60% de las averías, hace una reparación incompleta 1 vez en 10; Georgina, quien atiende 15% de las averías, realiza una reparación incompleta 1 vez en 10, y Pedro, quien atiende 5% de las averías, hace una reparación incompleta 1 vez en 20. Para el siguiente problema con la línea de producción, que se diagnosticó como debido a una reparación inicial que estaba incompleta, ¿cuál es la probabilidad de que esta reparación inicial fuera realizada por Janet?

Solución Sea A el evento de que la reparación inicial estuviera incompleta, B_1 que la reparación inicial fuera realizada por Janet, B_2 que fuera realizada por Tomás, B_3 que fuera realizada por Georgina y B_4 que fuera realizada por Pedro.

Al sustituir las diversas probabilidades en la fórmula del teorema 3.11,

$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0.20)(0.05)}{(0.20)(0.05) + (0.60)(0.10) + (0.15)(0.10) + (0.05)(0.05)} = 0.114$$

es de interés notar que, aunque Janet realiza una reparación incompleta tan solo 1 en 20 veces; a saber, 5% de las averías que ella atiende, más del 11% de las reparaciones incompletas, son su responsabilidad. ■

Ejercicios

3.55 Con referencia a la figura 3.7, encuentre $P(I \mid D)$ y $P(I \mid \overline{D})$, si supone que originalmente cada una de las 500 piezas de maquinaria tienen la misma posibilidad de ser elegidas para inspección.

3.56 *a*) ¿Esperaría usted que la probabilidad de que un automóvil seleccionado al azar necesitará grandes reparaciones en el siguiente año sea menor, permanezca igual o aumente, si se le indica que ya tiene alto millaje? Explique.

b) ¿Esperaría que la probabilidad de que un estudiante de último año seleccionado al azar conozca la segunda ley de la termodinámica es menor, permanece igual o aumenta, si la persona seleccionada tiene especialidad en ingeniería mecánica? Explique.

c) En el inciso *a*), identifique los dos eventos con símbolos A y B, así como la probabilidad condicional de interés.

3.57 Con referencia al ejercicio 3.34 y la figura 3.10, suponga que cada una de las 150 personas tiene la misma posibilidad de resultar seleccionada, determine las probabilidades de que

a) viva a más de 3 millas del centro de la ciudad, dado que gustosamente cambiaría a transporte público;

b) conduzca regularmente su automóvil al trabajo, dado que vive a más de 3 millas del centro de la ciudad;

c) no querría cambiar a transporte público, dado que regularmente no conduce su auto al trabajo.

3.58 Con referencia a la figura 3.12, determine

a) $P(A \mid B)$;

b) $P(B \mid \overline{C})$;

c) $P(A \cap B \mid C)$;

d) $P(B \cup C \mid \overline{A})$;

e) $P(A \mid B \cup C)$;

f) $P(A \mid B \cap C)$;

g) $P(A \cap B \cap C \mid B \cap C)$;

h) $P(A \cap B \cap C \mid B \cup C)$.

3.59 Con referencia al ejemplo de autos usados y las probabilidades dadas en la figura 3.8, determine

a) $P(M_1 \mid P_1)$ y compare su valor con el de $P(M_1)$;

b) $P(C_3 \mid P_2)$ y compare su valor con el de $P(C_3)$;

c) $P(M_1 \mid P_1 \cap C_3)$ y compare su valor con el de $P(M_1)$.

3.60 Con referencia al ejercicio 3.47, encuentre las probabilidades de que el aeropuerto conseguirá el premio de diseño, dado que

a) consigue el premio por el uso eficiente de materiales;

b) no consigue el premio por el uso eficiente de materiales.

3.61 Pruebe que $P(A \mid B) = P(A)$ implica que $P(B \mid A) = P(B)$, a condición de que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$.

3.62 Si las probabilidades son 0.98, 0.96 y 095 de que una botella de jabón recientemente fabricada estará libre de defectos importantes y libre de imperfecciones leves, así como libre de defectos importantes e imperfecciones leves, respectivamente, encuentre la probabilidad de que una botella

a) que está libre de defectos importantes, también estará libre de imperfecciones leves;

b) que está libre de imperfecciones leves, también estará libre de defectos importantes.

3.63 Dado que $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.24$, verifique que

a) $P(A \mid B) = P(A)$;

b) $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$;

c) $P(B \mid A) = P(B)$;

d) $P(B \mid \overline{A}) = P(B)$.

3.64 Entre las 24 facturas preparadas por un departamento de contabilidad, 4 contienen errores, mientras que las otras no los tienen. Si se eligen al azar 2 de dichas facturas, ¿cuáles son las probabilidades de que

a) ambas contendrán errores;

b) ninguna contendrá un error?

3.65 Entre 60 piezas para reparación de automóviles cargadas en un camión en San Francisco, 45 están destinadas para Seattle y 15 para Vancouver. Si dos de las partes se descargan en Portland por error y la "selección" es aleatoria, ¿cuáles son las probabilidades de que

a) ambas partes deberían ir a Seattle;

b) ambas partes deberían ir a Vancouver;

c) una debería ir a Seattle y una a Vancouver?

3.66 Los dígitos aleatorios se seleccionarán con el uso de un generador de números aleatorios (los 100 pares de dígitos son igualmente probables). Encuentre las probabilidades de conseguir

a) dos 5;

b) primero un 5 y luego un dígito menor que 5.

3.67 Si $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.45$ y $P(A \cap B) = 0.27$, ¿A y B son independientes?

3.68 Si las posibilidades son 5 a 3 de que un evento M no ocurrirá, 2 a 1 de que el evento N ocurrirá y 4 a 1 de que no ocurrirán ambos, ¿los dos eventos M y N son independientes?

3.69 Encuentre las probabilidades de conseguir

a) ocho caras en fila (seguidas) con una moneda equilibrada;

b) tres 3 y luego un 4 o un 5 en cuarto lanzamientos de un dado equilibrado;

c) cinco preguntas de opción múltiple respondidas correctamente, si para cada pregunta la probabilidad de responderla correctamente es $\frac{1}{3}$.

3.70 Para tres o más eventos que no sean independientes, la probabilidad de que todos ocurrirán se obtiene al multiplicar la probabilidad de que uno de los eventos ocurrirá, por la probabilidad de que un segundo de los eventos ocurrirá dado que el primer evento ocurrió, por la probabilidad de que un tercero de los eventos ocurrirá, dado que los dos primeros eventos hayan ocurrido y así sucesivamente. Por ejemplo, para tres eventos se escribe

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

y se encuentra que la probabilidad de extraer sin sustitución tres ases en fila de un mazo ordinario de 52 cartas es

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5{,}525}$$

a) Si seis balas, de las cuales tres son de salva, se insertan al azar en una arma de fuego, ¿cuál es la probabilidad de que las primeras tres balas disparadas sean todas de salva?

b) En cierta ciudad, durante el mes de mayo, la probabilidad de que a un día lluvioso seguirá otro día lluvioso es de 0.80, y la probabilidad de que a un día soleado siga un día lluvioso es de 0.60. Si se supone que cada día se clasifica como lluvioso o soleado, y que el clima en cualquier día dado tan solo depende del clima del día anterior, encuentre la probabilidad de que en la ciudad dada a un día lluvioso en mayo le sigan dos días lluviosos más, luego un día soleado y finalmente otro día lluvioso.

c) Una tienda por departamentos que factura la cuentas corrientes de los clientes una vez al mes encontró que, si un cliente paga oportunamente un mes, la probabilidad de que también pagará oportunamente el mes siguiente es de 0.90; sin embargo, si un cliente no paga oportunamente un mes, la probabilidad de que pagará oportunamente el mes siguiente solo es de 0.50. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que pagó oportunamente un mes no pagará oportunamente los tres meses siguientes?

d) Si 5 de los 12 camiones de reparto de una compañía no cumplen con los estándares de emisión y 4 de los 12 camiones se eligen al azar para inspección, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cumpla con los estándares de emisiones?

3.71 En una planta de electrónicos, se sabe por experiencias pasadas que la probabilidad es de 0.83 de que un nuevo trabajador que asistió al programa de capacitación de la compañía cumplirá con las cuotas de producción y que la probabilidad correspondiente es de 0.35 para un nuevo trabajador que no asistió al programa de capacitación de la compañía. Si 80% de todos los nuevos trabajadores asisten al programa de capacitación, ¿cuál es la probabilidad de que un nuevo trabajador cumplirá con las cuotas de producción?

3.72 Con referencia al ejercicio anterior, encuentre la probabilidad de que un nuevo trabajador que cumple con las cuotas de producción asistió al programa de capacitación de la compañía.

3.73 Una firma de consultoría renta automóviles de tres agencias, 20% de la agencia D, 20% de la agencia E y 60% de la agencia F. Si 10% de los autos de D, 12% de los autos de E y 4% de los autos de F tienen neumáticos en mal estado, ¿cuál es la probabilidad de que la firma tendrá un vehículo con neumáticos en mal estado?

3.74 Con referencia al ejercicio 3.73, ¿cuál es la probabilidad de que un automóvil con neumáticos en mal estado, rentado por la firma, provenga de la agencia F?

3.75 Use la información del diagrama de árbol de la figura 3.16 para determinar el valor de

a) $P(A)$;

b) $P(B \mid A)$;

c) $P(B \mid \overline{A})$.

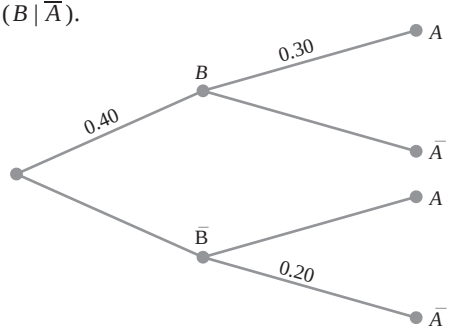


Figura 3.16 Diagrama para el ejercicio 3.75

3.76 Con referencia al ejemplo de la página 72, encuentre las probabilidades de que un regulador de voltaje que se desempeña de acuerdo con las especificaciones provenga

a) del proveedor B_1;

b) del proveedor B_2.

3.77 Con referencia al ejemplo de la página 74, para un problema diagnosticado como debido a una reparación inicial incompleta, encuentre la probabilidad de que la reparación inicial la haya realizado

a) Tomás;

b) Georgina;

c) Pedro.

3.78 Dos firmas, V y W, consideran participar en la licitación de un trabajo de construcción de carreteras, que puede asignarse o no, dependiendo de las cantidades de las ofertas. La firma V envía una oferta y la probabilidad es $\frac{3}{4}$ de que obtendrá el trabajo, siempre que la firma W no haga una oferta. La probabilidad es $\frac{3}{4}$ de que W hará una oferta y, si lo hace, la probabilidad de que V obtendrá el trabajo solo es de $\frac{1}{3}$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que V obtendrá el trabajo?

b) Si V obtiene el trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que W no haya hecho una oferta?

3.79 Ingenieros encargados de mantener la flotilla nuclear deben verificar continuamente la corrosión, dentro de las tuberías que forman parte de los sistemas de enfriamiento. La condición interna de las tuberías no puede observarse directamente, pero una prueba no destructiva ofrecería un indicio de posible corrosión. Esta prueba no es infalible. La prueba tiene probabilidad de 0.7 de detectar corrosión cuando está presente, pero también tiene probabilidad 0.2 de indicar falsamente corrosión interna. Suponga que 0.1 es la probabilidad de que alguna sección de tubería tenga corrosión interna.

a) Determine la probabilidad de que una sección de tubería tenga corrosión interna, dado que la prueba indica su presencia.

b) Determine la probabilidad de que una sección de tubería tenga corrosión interna, dado que la prueba sea negativa.

3.80 Un fabricante de tableros de circuitos impresos de la costa este expone todos los tableros terminados a una prueba de verificación automatizada en línea. Durante un periodo, se completaron 900 tableros y 890 pasaron la prueba. La prueba no es infalible. De 30 tableros intencionalmente fabricados para tener defectos apreciables, 25 fueron detectados por la prueba. Use las frecuencias relativas para aproximar las probabilidades condicionales necesarias a continuación.

a) Proporcione un valor aproximado para P[Prueba aprobada | el tablero tiene defectos].

b) Explique por qué su respuesta al inciso *a*) puede ser muy pequeña.

c) Proporcione un valor aproximado para la probabilidad de que un tablero fabricado tendrá defectos. Con la finalidad de responder la pregunta, se necesita información acerca de la probabilidad condicional de que un tablero bueno fallará la prueba. Es importante conocer esto, pero no estaba disponible al momento en que se requirió una respuesta. Para proceder, suponga que esta probabilidad es cero.

d) Aproxime la probabilidad de que un tablero tenga defectos, dado que aprobó la prueba automatizada.

Sí y no

Sí

1. Comience por crear un espacio muestral S que especifique todos los resultados posibles.
2. Siempre asigne a los eventos probabilidades que satisfagan los axiomas de probabilidad. En el caso discreto, los resultados posibles pueden ordenarse en secuencia. Entonces, los axiomas se satisfacen automáticamente cuando la probabilidad p_i se asigna al i-ésimo resultado, donde

$$0 \leq p_i \quad \text{y} \quad \sum_{\text{todos los resultados en } S} p_i = 1$$

y la probabilidad de cualquier evento A se define como

$$P(A) = \sum_{\text{todos los resultados en } A} p_i$$

3. Combine las probabilidades de los eventos de acuerdo con las reglas de la probabilidad.

Regla general de suma: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regla del complemento: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Regla general de multiplicación: $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$ si $P(A) \neq 0$
$= P(B)P(A \mid B)$ si $P(B) \neq 0$

Probabilidad condicional: $P(A \mid B) = \dfrac{(PA \cap B)}{P(B)}$ (si)$P/B = 0$

No

1. No confunda eventos independientes con eventos mutuamente excluyentes. Cuando A y B son mutuamente excluyentes, tan solo uno de ellos puede ocurrir. Su intersección está vacía; por lo tanto, tiene probabilidad de 0.
2. No asigne probabilidad a $A \cap B$ de acuerdo con la regla especial del producto

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

a menos que las condiciones de independencia se mantengan. La independencia es posible cuando los eventos A y B pertenecen a partes físicamente no relacionadas de un sistema grande, así como si no hay causas comunes que afecten conjuntamente la ocurrencia de ambos eventos.

Ejercicios de repaso

3.81 *a*) En una reciente comprobación aleatoria de 300 libros alojados en la biblioteca de ingeniería, 27 estaban en préstamo. Para un libro seleccionado al azar el día de hoy, ¿cuál es la probabilidad de que actualmente esté en préstamo?

b) El año pasado, 380 estudiantes solicitaron ingresar a 28 lugares del internado administrado por la universidad. El próximo año usted solicitará uno de los 28 lugares del internado y le gustaría estimar la probabilidad de recibirlo. Proporcione su estimación y comente un factor que influya en su estimación.

3.82 Un vendedor de sustancias químicas industriales tiene cuatro clientes en Sacramento, a quienes puede visitar o no en un viaje de 2 días a esta ciudad. No visitará a alguno de dichos clientes más de una vez.

a) Con dos coordenadas, de modo que (2, 1), por ejemplo, represente el evento de que visitará a dos de sus clientes el primer día y a uno el segundo día, dibuje un diagrama similar al de la figura 3.1, que incluya los puntos del espacio muestral correspondiente.

b) Mencione los puntos del espacio muestral que constituye los eventos A, B y C de que visitará a los cuatro clientes, de que visitará a más de sus clientes el primer día que el segundo día y de que visitará al menos a tres de sus clientes el segundo día.

c) ¿Cuál de los tres pares de eventos, A y B, B y C o A y C, son mutuamente excluyentes?

3.83 Con referencia al ejercicio anterior, exprese simbólicamente cada uno de los siguientes eventos al mencionar sus elementos; también expréselo con palabras:

a) $\overline{A}$;

b) $A \cup B$;

c) $A \cap C$;

d) $\overline{A} \cap B$.

3.84 Use diagramas de Venn para verificar que

c) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$;

b) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$.

3.85 La calidad del sonido envolvente de cuatro sistemas de películas digitales se clasifica como superior, promedio o inferior, pero solo interesa cuántos de los sistemas obtienen cada una de dichas clasificaciones. Dibuje un diagrama de árbol que muestre las 12 posibilidades diferentes.

3.86 En cuatro posiciones fijas, a lo largo de una tubería, se conectarán unidades de alarma. ¿En cuántas formas pueden conectarse las cuatro unidades de alarma disponibles con las cuatro posiciones a lo largo de la tubería?

3.87 ¿En cuántas formas pueden asignarse a un nuevo proyecto dos de siete ingenieros químicos?

3.88 Con referencia al ejemplo de motores para cápsulas miniaturizadas de la página 56, suponga que están disponibles 20 motores y que 4 no funcionarán de manera satisfactoria cuando se coloquen en una cápsula. Si los científicos quieren fabricar dos cápsulas, con dos motores cada una, encuentre la probabilidad de que, entre los cuatro motores seleccionados al azar,

a) los cuatro funcionarán de manera satisfactoria;

b) tres funcionarán satisfactoriamente y uno no lo hará así.

3.89 Dados $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.20$, encuentre

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(\overline{A} \cap B)$;

c) $P(A \cap \overline{B})$;

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

e) ¿A y B son independientes?

3.90 En una muestra de 446 automóviles detenidos en un congestionamiento vial en la carretera, tan sólo 67 de los conductores tenían puesto su cinturón de seguridad. Estime la probabilidad de que un conductor detenido en dicha carretera tendrá puesto su cinturón de seguridad.

3.91 El gerente de marketing informó al ingeniero en jefe, en cuanto a una encuesta relacionada con la herramienta de limpieza portátil de la compañía. Afirma que, entre los 200 clientes encuestados, 165 dijeron que el producto era confiable, 117 dijeron que era fácil de usar, 88 dijeron que era tanto confiable como fácil de usar y 33 dijeron que no era confiable ni fácil de usar. Explique por qué el ingeniero en jefe debería cuestionar esta afirmación.

3.92 Si las probabilidades de que un cohete lanzador de satélites explotará durante el despegue o le fallará su sistema localizador en el vuelo son 0.0002 y 0.0005, encuentre las probabilidades de que tal cohete

a) no explotará durante el despegue;

b) explotará durante el despegue o le fallará su sistema localizador durante el vuelo;

c) ni explotará durante el despegue ni le fallará su sistema localizador durante el vuelo.

3.93 Dados $P(A) = 0.20$, $P(B) = 0.45$ y $P(A \cap B) = 0.09$, verifique que

a) $P(A \mid B) = P(A)$;

b) $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$;

c) $P(B \mid A) = P(B)$;

d) $P(B \mid \overline{A}) = P(B)$.

3.94 Si los eventos A y B son independientes y $P(A) = 0.45$ y $P(B) = 0.30$, determine

a) $P(A \cap B)$;

b) $P(A \mid B)$;

c) $P(A \cup B)$;

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3.95 La siguiente tabla de frecuencias presenta la clasificación de 58 vertederos en un estado, de acuerdo con su concentración de las tres sustancias químicas peligrosas: arsénico, bario y mercurio.

		Bario			
		Alta		Baja	
		Mercurio		Mercurio	
		Alta	Baja	Alta	Baja
Arsénico	Alta	1	3	5	9
	Baja	4	8	10	18

Si un vertedero se selecciona al azar, encuentre la probabilidad de que tenga

a) alta concentración de mercurio;

b) alta concentración de bario y baja concentración de arsénico y mercurio;

c) altas concentraciones de cualesquiera dos de los químicos y baja concentración del tercero;

d) alta concentración de cualquier químico y baja concentración de los otros dos.

3.96 Remítase al ejercicio 3.95. Dado que un vertedero, seleccionado al azar, se encuentra con una alta concentración de bario, ¿cuál es la probabilidad de que su concentración sea

a) alta en mercurio?

b) baja tanto en arsénico como en mercurio?

c) alta en arsénico o en mercurio?

3.97 Una explosión en un tanque de almacenamiento de gas natural licuado en el proceso de reparación pudo haber ocurrido como resultado de electricidad estática, mal funcionamiento del equipo eléctrico, una llama abierta en contacto con vapor o una acción intencional (sabotaje industrial). Las entrevistas con los ingenieros que intervienen en el análisis de los riesgos condujeron a estimaciones de que tal explosión ocurriría con probabilidad de 0.25 como resultado de electricidad estática, de 0.20 como resultado de mal funcionamiento del equipo eléctrico, de 0.40 como resultado de una llama abierta y de 0.75 como resultado de acción intencional. Dichas entrevistas también produjeron estimaciones subjetivas de las probabilidades *a priori* de tales cuatro causas de 0.30, 0.40, 0.15 y 0.15, respectivamente. ¿Cuál fue la causa más probable de la explosión?

3.98 Un ingeniero quiere movilizarse a través del país de la ciudad A a la ciudad B para trabajar. En días diferentes, envía una carta de presentación y un currículum vitae a tres compañías diferentes en la ciudad B. Suponga que una carta enviada de la ciudad A a la ciudad B tiene una probabilidad de 0.7 de llegar a la ciudad B dentro de 3 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de las 3 cartas llegarán a la ciudad B dentro de 3 días?

b) Si las tres cartas se envían juntas en el mismo tiempo y lugar, ¿cómo cambia su respuesta al inciso *a*)? Explique.

3.99 Amy viaja de ida y vuelta al trabajo por dos rutas diferentes, A y B. Si llega a casa por la ruta A, entonces, no llegará a casa después de las 6 P.M. con probabilidad de 0.8; pero si regresa a casa por la ruta B, entonces no llegará a casa después de las 6 P.M. con probabilidad de 0.7. En el pasado, la proporción de tiempos de que Amy tome la ruta A era de 0.4.

a) ¿Qué proporción de las veces Amy llega a casa a las 6 P.M. o antes?

b) Si Amy llega a casa después de las 6 P.M. hoy, ¿cuál es la probabilidad de que tomara la ruta B?

Términos clave

Axiomas de probabilidad 58
Combinación 52
Complemento 47
Concepto clásico de probabilidad 55
Conjunto vacío 46
Consistencia de probabilidades 66
Diagrama de árbol 49
Diagrama de Venn 47
Espacio muestral 45
Espacio muestral continuo 46
Espacio muestral discreto 46
Espacio muestral finito 46
Evento 46
Eventos independientes 68
Eventos mutuamente excluyentes 47
Experimento 45
Función aditiva de conjuntos 57
Función conjunto 57
Interpretación de frecuencia 57
Intersección 47
Multiplicación de opciones 50
Notación factorial 51
Permutación 51
Probabilidad 66
Probabilidad condicional 68
Probabilidad subjetiva 57
Regla de probabilidad del complemento 63
Regla de probabilidad total 73
Regla especial de suma 62
Regla especial del producto 69
Regla general de multiplicación 68
Regla general de suma 62
Resultado 45
Teorema de Bayes 74
Unión 47

CAPÍTULO 4

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

4.1 Variables aleatorias 81

4.2 La distribución binomial 85

4.3 La distribución hipergeométrica 89

4.4 La media y la varianza de una distribución de probabilidad 93

4.5 El teorema de Chebyshev 100

4.6 La aproximación de Poisson a la distribución binomial 104

4.7 Procesos de Poisson 107

4.8 Las distribuciones geométrica y binomial negativa 109

4.9 La distribución multinomial 111

4.10 Simulación 113

Ejercicios de repaso 116

Términos clave 118

En la mayoría de los problemas estadísticos, uno se interesa por un número o unos cuantos números que se asocian con los resultados de los experimentos. En la inspección de productos fabricados se podría estar interesado solamente en el número de elementos defectuosos; en el análisis de una prueba de carretera de cierto vehículo, quizá se esté interesado tan solo en la velocidad promedio y el consumo promedio de combustible; y en el estudio del desempeño de una batería recargable en miniatura se estaría interesado solamente en su potencia y duración. Todos esos números se asocian con situaciones que implican, de alguna manera, un elemento de azar; en otras palabras: son valores de variables aleatorias.

En el estudio de las variables aleatorias, por lo general, uno está interesado en sus distribuciones de probabilidad; es decir, las probabilidades que toman los diversos valores de la variable aleatoria en su rango. A la introducción a las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad en la sección 4.1, sigue una discusión de varias distribuciones de probabilidad especiales en las secciones 4.2, 4.3, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9, así como descripciones de las características más importantes de las distribuciones de probabilidad en las secciones 4.4 y 4.5.

4.1 Variables aleatorias

Para ser más explícito acerca del concepto de una variable aleatoria, consulte nuevamente el ejemplo de los automóviles usados de la página 49 y las probabilidades correspondientes que se muestran en la figura 3.8. Ahora se hará referencia a M_1 (millaje actual bajo), P_1 (precio moderado) y C_1 (costo de operación bajo), como los atributos preferidos. Suponga que solo se está interesado en el número de atributos preferidos que tendrá un auto usado. Para encontrar las probabilidades de que un vehículo usado obtenga 0, 1, 2 o 3 atributos preferidos, consulte la figura 4.1, que es parecida a la figura 3.8 del capítulo 3, excepto que para cada resultado se indica el número de atributos preferidos. Al sumar las respectivas probabilidades, se encuentra que, para 0 atributos preferidos, la probabilidad es

$$0.07 + 0.06 + 0.03 + 0.02 = 0.18$$

y para un atributo preferido la probabilidad es

$$0.01 + 0.01 + 0.16 + 0.10 + 0.02 + 0.05 + 0.14 + 0.01 = 0.50$$

Para dos atributos preferidos, la probabilidad es

$$0.06 + 0.07 + 0.02 + 0.09 + 0.05 = 0.29$$

y para tres atributos preferidos la probabilidad es de 0.03.

Tales resultados se resumen como en la siguiente tabla, donde x denota un posible número de atributos preferidos.

x	0	1	2	3
Probabilidad	0.18	0.50	0.29	0.03

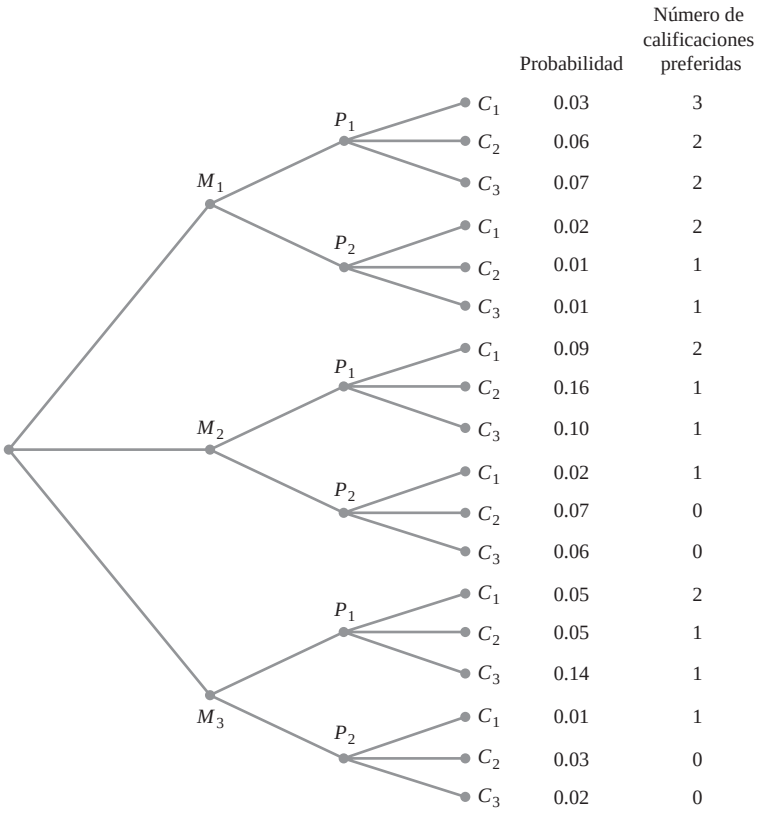


Figura 4.1
Automóviles usados y número de atributos preferidos

Los números 0, 1, 2 y 3 en esta tabla son valores de una **variable aleatoria**: el número de atributos preferidos. Correspondiente a cada resultado elemental en el espacio muestral, hay exactamente un valor x para esta variable aleatoria. Esto es, la variable aleatoria puede considerarse como una función definida sobre los elementos del espacio muestral. Así es como se definen las variables aleatorias en general; son funciones definidas sobre los elementos de un espacio muestral.

Variables aleatorias

Una **variable aleatoria** es cualquier función que asigna un valor numérico a cada posible resultado del espacio muestral.

El valor numérico debería elegirse para cuantificar una característica importante del resultado.

Las variables aleatorias se denotan mediante letras mayúsculas X, Y, etcétera, para distinguirlas de sus posibles valores dados en minúsculas x, y.

Para encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria tomará cualquier valor dentro de su rango, se procede como en el ejemplo anterior. De hecho, la tabla que se obtiene presenta otra función, llamada **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria. Para denotar los valores de una distribución de probabilidad, se usarán símbolos como $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(y)$, $h(z)$, etcétera. Estrictamente hablando, es la función $f(x) = P(X = x)$ que asigna la probabilidad a cada posible resultado x la que se llama distribución de probabilidad. Sin embargo, se sigue la práctica común de también llamar $f(x)$ a la distribución de probabilidad, con el entendimiento de que se refiere a la función, y que el rango de valores x forma parte de la definición.

Las variables aleatorias, por lo general, se clasifican de acuerdo con el tipo numérico de valores que pueden asumir. En este capítulo la discusión se limitará a **variables aleatorias discretas**, que solamente pueden tomar un número finito, o bien, un infinito contable de valores; las **variables aleatorias continuas** se estudiarán en el capítulo 5.

Siempre que sea posible, trate de expresar las distribuciones de probabilidad mediante ecuaciones; de otro modo, tiene que proporcionar una tabla que muestre realmente la correspondencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades asociadas. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{1}{6} \qquad \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

da la distribución de probabilidad para el número de puntos que se obtienen con un dado equilibrado.

Desde luego, no toda función definida por los valores de una variable aleatoria sirven como distribución de probabilidad. Puesto que los valores de las distribuciones de probabilidad son probabilidades y siempre debe ocurrir un valor de una variable aleatoria, se sigue que, si $f(x)$ es una distribución de probabilidad, entonces,

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{para toda } x$$

y

$$\sum_{\text{toda } x} f(x) = 1$$

Distribuciones de probabilidad

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X es una lista de los posibles valores de X junto con sus probabilidades

$$f(x) = P[X = x]$$

La distribución de probabilidad siempre satisface las condiciones

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{\text{toda } x} f(x) = 1$$

EJEMPLO **Comprobación para no negatividad y probabilidad total igual a uno**

Compruebe si las siguientes expresiones sirven como distribuciones de probabilidad:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ para $x = 1, 2, 3, 4$

b) $h(x) = \dfrac{x^2}{25}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$

Solución

a) Esta función no sirve como distribución de probabilidad porque $f(1)$ es negativa.

b) La función no sirve como distribución de probabilidad porque la suma de las cinco probabilidades es $\frac{6}{5}$ y no 1. ■

A menudo es útil visualizar las distribuciones de probabilidad mediante gráficas como las de la figura 4.2. La que está a la izquierda se llama **histograma de probabilidad**; las

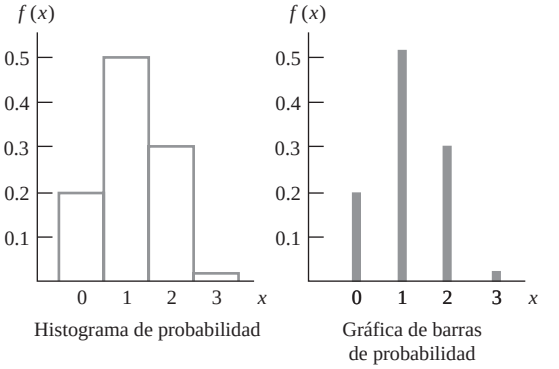


Figura 4.2
Gráficas de la distribución de probabilidad del número de atributos preferidos

áreas de los rectángulos son iguales a las probabilidades correspondientes, de modo que sus alturas son proporcionales a las probabilidades. Las bases se tocan, de modo que no hay espacios entre los rectángulos que representan los valores sucesivos de la variable aleatoria. La que está a la derecha se llama **gráfica de barras**; las alturas de los rectángulos también son proporcionales a las probabilidades correspondientes, pero son estrechas y su ancho no es significativo.

Como se verá más adelante en este capítulo, existen muchos problemas en los cuales no tan solo se está interesado en la probabilidad $f(x)$ de que el valor de una variable aleatoria sea x, sino también en la probabilidad $F(x)$ de que el valor de una variable aleatoria sea menor que o igual a x. De manera específica,

$$F(x) = P[X \leq x] \quad \text{para toda } -\infty < x < \infty$$

y a la función $F(x)$ se le conoce como la **función de distribución acumulada** o solo **función de distribución** de la variable aleatoria. Para cualquier valor x, se suma, o acumula, toda la probabilidad asignada a dicho valor y a valores menores.

Con referencia al ejemplo del automóvil usado y con base en los cálculos de la tabla en la página 81, se tiene

x	0	1	2	3
$F(x)$	0.18	0.68	0.97	1.00

para la función de distribución acumulada del número de atributos preferidos.

La distribución acumulada salta las cantidades en $f(x) = 0, 1, 2, 3$ y es constante entre los valores en la tabla, como se ilustra en la figura 4.3. Los puntos sólidos enfatizan el hecho de que $F(x)$ toma el valor superior en los saltos y esto la hace continua desde la derecha.

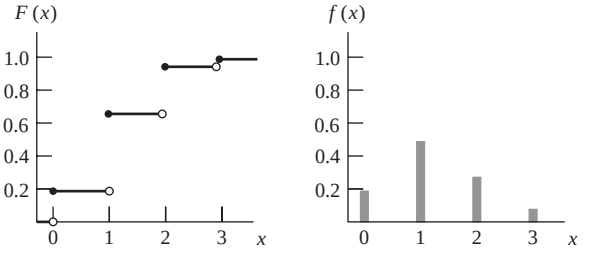


Figura 4.3
La distribución acumulada tiene saltos que corresponden a $f(x) = P[X = x]$

4.2 La distribución binomial

Muchos problemas estadísticos tratan con las situaciones conocidas como **ensayos repetidos**. Por ejemplo, quizá se quiera conocer la probabilidad de que 1 de 5 remaches se romperá en una prueba de tensión, la probabilidad de que 9 de 10 reproductores de DVD operarán durante al menos 1,000 horas, la probabilidad de que 45 de 300 conductores detenidos en un control carretero usarán cinturón de seguridad o la probabilidad de que 66 de 200 telespectadores (entrevistados por un servicio de *rating*) recordarán cuáles productos se anunciaron en cierto programa. Al tomar el lenguaje de los juegos de azar, se dice que en cada uno de estos ejemplos uno está interesado en la probabilidad de obtener x **éxitos** en n **ensayos** o, en otras palabras, x éxitos y $n - x$ fracasos en n intentos.

Existen características comunes a cada uno de los ejemplos. Todos están compuestos de una serie de ensayos, a los que se les conoce como **ensayos Bernoulli**, si se cumplen las siguientes suposiciones.

1. **Solo hay dos posibles resultados para cada ensayo** (arbitrariamente llamados "éxito" y "fracaso", sin inferir que un éxito sea deseable necesariamente).
2. **La probabilidad del éxito es la misma para cada ensayo**.
3. **Los resultados de los diferentes ensayos son independientes**.

Si no se cumplen las suposiciones, no se aplica la teoría desarrollada.

EJEMPLO

Comprobación de lo adecuado de las suposiciones de los ensayos Bernoulli

¿Los siguientes pueden tratarse como ensayos Bernoulli? Los conductores detenidos en un control carretero se verificarán para fracaso en el uso del cinturón de seguridad.

Solución Solo hay dos resultados, y al hecho de no usar cinturón de seguridad se le denominará éxito. (Éxito en este contexto no significa logro positivo en la vida.)

Si todos los automóviles se tratan igual, sus conductores tendrían todos la misma probabilidad de no utilizar el cinturón de seguridad. Si los conductores se agrupan por edades, acaso se necesiten diferentes probabilidades para personas abajo de 20, que para las de 30 a 40 años de edad. Entonces, no se tendrían ensayos Bernoulli.

Los resultados acerca de usar cinturón de seguridad, para diferentes conductores, deberían ser independientes. No hay causa común obvia. Si alguien atrapado sin cinturón de seguridad informara a los autos entrantes acerca del punto de revisión, ello introduciría dependencia. ■

En los problemas que se estudian en esta sección, se agrega la suposición adicional de que el número de ensayos es fijo de antemano.

4. **Existe un número fijo n de ensayos Bernoulli realizados**.

EJEMPLO

Distribución de probabilidad binomial $n = 3$

Cuando se interrumpe una torre de interconexión para servicio de telefonía inalámbrica, rápidamente se convierte en una costosa proposición para la compañía telefónica, y el costo aumenta con el tiempo en que es inoperable. De los registros de la compañía, se postula que la probabilidad es de 0.90 de que la interrupción puede repararse en una hora. Para las siguientes tres interrupciones, en diferentes días y diferentes torres,

a) Mencione todos los posibles resultados en términos de éxito, S, reparado en una hora, y fracaso, F, que no se repara en una hora.
b) Encuentre la distribución de probabilidad del número de éxitos, X, entre las 3 reparaciones.

Solución *a*) Escriba *FSS* para el resultado donde la primera reparación no se hace en una hora, y la segunda y tercera son exitosas. Los $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados posibles se ordenan sistemáticamente del modo siguiente:

FFF	*FFS*	*FSS*	*SSS*
	FSF	*SFS*	
	SFF	*SSF*	
$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$

donde el número de éxitos X es el mismo para cada resultado en una columna. Este valor se registra en el fondo de la columna.

b) Los resultados de las reparaciones en diferentes días y diferentes torres deberían ser independientes. Además, la probabilidad de éxito de 0.90 es la misma para cada reparación. Por lo tanto, la probabilidad de que $X = 0$ es $0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.001$. A continuación, la probabilidad de *FFS* es $0.1 \times 0.1 \times 0.9 = 0.009$, y tanto *SFS* como *FSS* tienen la misma probabilidad. En consecuencia, la probabilidad de que $X = 1$ es $3 \times 0.009 = 0.027$. Observe que el número de resultados donde $X = 1$ es justo el número de formas de seleccionar 1 o 3 ensayos para una *S* y los otros es *F*.
Mediante un razonamiento similar, la probabilidad de que $X = 2$ es

$$3\,(0.1 \times 0.9 \times 0.9) = 0.243 = \binom{3}{2}(0.9)^2\,(0.1)^1$$

Finalmente, la probabilidad de que $X = 3$, ninguna reparación tarda una hora, es

$$0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.729 = \binom{3}{3}(0.9)^3\,(0.1)^0$$

Todas estas probabilidades se expresan con la fórmula

$$f(x) = P(X = x) = \binom{3}{x}(0.9)^x\,(0.1)^{3-x} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, 3$$

Esta es la distribución de probabilidad para una variable aleatoria binomial, cuando la probabilidad de éxito es $p = 0.9$ y hay $n = 3$ ensayos. ■

Sea X la variable aleatoria que iguala el número de éxitos en n ensayos. Para obtener las probabilidades concernientes a X, se procede del modo siguiente: si p y $1 - p$ son las probabilidades de éxito y fracaso en algún ensayo, entonces la probabilidad de obtener x éxitos y $n - x$ fracasos, en algún orden específico, es $p^x(1-p)^{n-x}$. Claramente, en este producto de p y $(1 - p)$ hay un factor p para cada éxito, un factor $1 - p$ para cada fracaso. Los x factores p y $n - x$ factores $1 - p$ se multiplican juntos en virtud de la regla de multiplicación generalizada para más de dos eventos independientes. Puesto que esta probabilidad se aplica a cualquier punto del espacio muestral que representa x éxitos y $n - x$ fracasos (en algún orden específico), tan solo se tiene que contar cuántos puntos de este tipo existen y, luego, multiplicar $p^x(1-p)^{n-x}$ por esto. Es evidente que el número de formas en que se pueden seleccionar x ensayos en los cuales debe haber un éxito es $\binom{n}{x}$, el número de combinaciones de x objetos seleccionados de un conjunto de n objetos y, por ende, se llega al siguiente resultado:

Distribución binomial

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Esta distribución de probabilidad se llama **distribución binomial** porque, para $x = 0, 1, 2, \ldots$, y n, los valores de las probabilidades son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[p + (1-p)]^n$; por la misma razón, las cantidades combinatorias $\binom{n}{x}$ se conocen como **coeficientes binomiales**. En realidad, la ecuación anterior define una familia de distribuciones de probabilidad, donde cada miembro se caracteriza por un valor dado del **parámetro** p y el número de ensayos n.

EJEMPLO **Evaluación de probabilidades binomiales**

Se afirma que en 60% de todas las instalaciones de calefacción solar, la facturación del servicio se reduce en al menos un tercio. En concordancia, ¿cuáles son las probabilidades de que tal factura se reducirá en al menos un tercio en

a) cuatro de cinco instalaciones;
b) al menos cuatro de cinco instalaciones?

Solución *a*) Al sustituir $x = 4$, $n = 5$ y $p = 0.60$ en la fórmula para la distribución binomial, se obtiene

$$b(4; 5, 0.60) = \binom{5}{4}(0.60)^4(1 - 0.60)^{5-4}$$
$$= 0.259$$

b) Y al sustituir $x = 5$, $n = 5$ y $p = 0.60$ en la fórmula para la distribución binomial,

$$b(5; 5, 0.60) = \binom{5}{5}(0.60)^5(1 - 0.60)^{5-5}$$
$$= 0.078$$

y la respuesta es $b(4; 5, 0.60) + b(5; 5, 0.60) = 0.259 + 0.078 = 0.337$. ■

Si n es grande, el cálculo de probabilidades binomiales se volvería muy tedioso. Muchos programas de software estadístico tienen comandos de distribución binomial (véase los ejercicios 4.30 y 4.31), así como algunas calculadoras estadísticas. De otro modo, sería conveniente consultar tablas especiales. La tabla 1 al final del libro proporciona los valores de

$$B(x; n, p) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n, p) \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

para $n = 2$ a $n = 20$ y $p = 0.05, 0.10, 0.15, \ldots, 0.90, 0.95$. Se tabularon las **probabilidades acumuladas** en vez de los valores de $b(x; n, p)$, porque los valores de $B(x; n, p)$ son los que se necesitan con más frecuencia en aplicaciones estadísticas. Sin embargo, note que los valores de $b(x; n, p)$ pueden obtenerse al restar las entradas adyacentes en la tabla 1. Puesto que las dos probabilidades acumuladas $B(x; n, p)$ y $B(x-1; n, p)$ difieren por el término individual $b(x; n, p)$

$$b(x; n, p) = B(x; n, p) - B(x - 1; n, p)$$

donde $B(-1) = 0$. Los siguientes ejemplos ilustran el uso directo de la tabla 1 y de esta relación.

EJEMPLO **Evaluación de probabilidades binomiales acumuladas**

Si la probabilidad es de 0.05 de que cierta columna de doble perfil caerá bajo una carga axial dada, ¿cuáles son las probabilidades de que, entre 16 de tales columnas,

a) cuando mucho caerán dos;
b) al menos caerán cuatro?

Solución *a*) La tabla 1 muestra que $B(2; 16, 0.05) = 0.9571$.

b) Puesto que

$$\sum_{x=4}^{16} b(x; 16, 0.05) = 1 - B(3; 16, 0.05)$$

La tabla 1 da como resultado $1 - 0.9930 = 0.0070$. ■

EJEMPLO

Cómo encontrar una probabilidad binomial utilizando probabilidades binomiales acumuladas

La fabricación de grandes paneles de LCD de alta definición es difícil, y una proporción moderadamente elevada tiene demasiados pixeles defectuosos para pasar la inspección. Si la probabilidad de que un panel de LCD no pasará la inspección es de 0.3, ¿cuál será la probabilidad de que 6 de 18 paneles, seleccionados al azar de la producción, no pasarán la inspección?

Solución Al usar la relación para probabilidades acumuladas y luego observar dichas probabilidades en la tabla 1, se obtiene

$$\begin{aligned} b(6, 18, 0.30) &= B(6, 18, 0.30) - B(5, 18, 0.30) \\ &= 0.7217 - 0.5344 \\ &= 0.1873 \end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la distribución binomial en un problema de toma de decisiones.

EJEMPLO

Una probabilidad binomial para guiar la toma de decisiones

Un fabricante de discos duros externos afirma que tan solo 10% de sus dispositivos requieren reparaciones dentro del periodo de garantía de 12 meses. Si 5 de 20 de sus discos requirieron reparaciones dentro del primer año, ¿esa tendencia apoya o refuta su afirmación?

Solución Encuentre primero la probabilidad de que 5 o más de 20 de los discos requerirán reparaciones dentro de un año, cuando la probabilidad de que alguno requerirá reparaciones dentro de un año es de 0.10. Al usar la tabla 1, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^{20} b(x; 20, 0.10) &= 1 - B(4; 20, 0.10) \\ &= 1 - 0.9568 \\ &= 0.0432 \end{aligned}$$

Dado que esta probabilidad es muy pequeña, parecería razonable rechazar la afirmación del fabricante de discos duros. ■

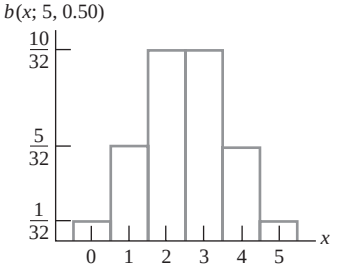


Figura 4.4
Distribución binomial simétrica con $n = 5$ y $p = 0.50$

En las figuras 4.4 y 4.5 se incluye información importante acerca de la forma de la distribución binomial. Primero, si $p = 0.50$, la ecuación para distribución binomial es

$$b(x; n, 0.50) = \binom{n}{x} (0.5)^n$$

y como

$$\binom{n}{n-x} = \binom{n}{x}$$

se sigue que $b(x; n, 0.50) = b(n - x; n, 0.50)$. Para cualquier n, la distribución binomial con $p = 0.5$ es una **distribución simétrica**. Ello significa que los histogramas de probabilidad de tales distribuciones binomiales son simétricos, como se ilustra en la figura 4.4. Sin

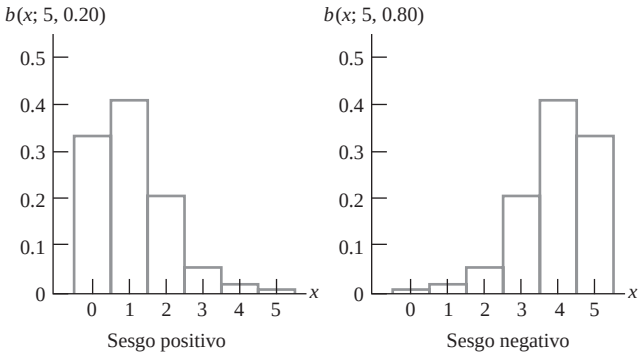


Figura 4.5
Distribuciones binomiales sesgadas con $n = 5$ y $p = 0.20$ y $p = 0.80$

embargo, note que si p es menor que 0.50, es más probable que X será pequeña en vez de grande, en comparación con $n/2$, y que lo opuesto es cierto si p es mayor que 0.50. Lo anterior se ilustra en la figura 4.5, que presenta los histogramas de distribuciones binomiales con $n = 5$ y $p = 0.20$ y $p = 0.80$. Dos son imágenes especulares una de otra, como se verifica de manera más general en el ejercicio 4.7.

Finalmente, una distribución de probabilidad que tiene un histograma de probabilidad como alguno de los que se presentan en la figura 4.5 se dice que es una **distribución sesgada** o de cola larga. Se dice que es una **distribución con sesgo positivo** si la cola está hacia la derecha, y se dice que tiene **sesgo negativo** si la cola está a la izquierda.

4.3 La distribución hipergeométrica

Suponga que usted está interesado en el número de defectos en una muestra de n unidades, extraídas sin sustitución de un lote que contiene N unidades, de las cuales a son defectuosas. Sea que la muestra se extrae de tal forma que en cada extracción sucesiva, cualquiera cantidad de unidades que queden en el lote tiene la misma posibilidad de resultar seleccionadas. La probabilidad de que la primera extracción será una unidad defectuosa es $\frac{a}{N}$, pero para la segunda extracción es $\frac{a-1}{N-1}$ o bien $\frac{a}{N-1}$, dependiendo de si la primera unidad que se extrajo es defectuosa o no. Por consiguiente, los ensayos no son independientes, la cuarta suposición que subyace a la distribución binomial no se satisface, y la distribución binomial no se aplica. Note que la distribución binomial se aplicaría si se hace **muestreo con reemplazo**; a saber, si cada unidad seleccionada por la muestra se sustituye antes de extraer la siguiente.

Para resolver el problema del **muestreo sin reemplazo** (esto es, como originalmente se formuló el problema), proceda del modo siguiente: los x éxitos (defectos) pueden elegirse en $\binom{a}{x}$ formas, los $n - x$ fracasos (sin defectos) pueden elegirse en $\binom{N-a}{n-x}$ formas y, por lo tanto, x éxitos y $n - x$ fracasos pueden elegirse en $\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}$ formas. Además, n objetos pueden elegirse de un conjunto de N objetos en $\binom{N}{n}$ formas, y todas las posibilidades se consideran como igualmente probables, entonces se sigue que, para

Distribución hipergeométrica

$$h(x; n, a, N) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para } x = 0, 1, \ldots, n$$

muestreo sin reemplazo, la probabilidad de obtener "x éxitos en n ensayos" es donde x no puede superar a y $n - x$ no puede superar $N - a$. Esta ecuación define la **distribución hipergeométrica**, cuyos parámetros son el tamaño muestral n, el tamaño del lote (o tamaño de población) N, y el número de "éxitos" en el lote a.

EJEMPLO **Cálculo de una probabilidad usando la distribución hipergeométrica**

Una compañía con base en Internet que vende accesorios con descuento para teléfonos celulares a menudo embarca un número excesivo de productos defectuosos. La compañía necesita un mejor control de calidad. Suponga que tiene a la mano 20 cargadores para automóvil idénticos, pero que 5 están defectuosos. Si la compañía decide seleccionar al azar 10 de dichos artículos, ¿cuál es la probabilidad de que 2 de los 10 estarán defectuosos?

Solución Al sustituir $x = 2$, $n = 10$, $a = 5$ y $N = 20$ en la fórmula para la distribución hipergeométrica, se obtiene

$$h(2; 10, 5, 20) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{10 \times 6{,}435}{184{,}756} = 0.348$$

■

En el ejemplo anterior, n no es pequeño en comparación con N, y si se hubiera cometido el error de usar la distribución binomial con $n = 10$ y $p = \frac{5}{20} = 0.25$ para calcular la probabilidad de dos defectuosos, el resultado habría sido 0.282, que es muy pequeño. Sin embargo, cuando n es pequeño en comparación con N, menor que $\frac{N}{10}$, la composición del lote no se ve afectada seriamente al extraer la muestra sin reemplazo, por lo que la distribución binomial con los parámetros n y $p = \frac{a}{N}$ darán como resultado una buena aproximación.

EJEMPLO **Comparación numérica de las distribuciones hipergeométrica y binomial**

Repita el ejemplo anterior pero con 100 cargadores de automóvil, de los cuales 25 son defectuosos, usando

a) la fórmula para la distribución hipergeométrica;
b) la fórmula para la distribución binomial como una aproximación.

Solución *a*) Al sustituir $x = 2$, $n = 10$, $a = 25$ y $N = 100$ en la fórmula para la distribución hipergeométrica,

$$h(2; 10, 25, 100) = \frac{\binom{25}{2}\binom{75}{8}}{\binom{100}{10}} = 0.292$$

b) Al sustituir $x = 2$, $n = 10$ y $p = \frac{25}{100} = 0.25$ en la fórmula para la distribución binomial,

$$b(2; 10, 0.25) = \binom{10}{2}(0.25)^2(1 - 0.25)^{10-2}$$
$$= 0.282$$

■

Observe que la diferencia entre los dos valores únicamente es de 0.010. En general, se demuestra que $h(x; n, a, N)$ tiende a $b(x; n, p)$ con $p = \frac{a}{N}$ cuando $N \to \infty$, y una buena regla empírica consiste en usar la distribución binomial como aproximación a la distribución hipergeométrica si $n \leq \frac{N}{10}$.

Aunque se introdujo la distribución hipergeométrica en conexión con un problema de inspección por muestreo, tiene muchas otras aplicaciones. Por ejemplo, se utiliza para encontrar la probabilidad de que 3 de 12 amas de casa prefieran el detergente de marca A a la marca B, si se eligen de entre 200 amas de casa, de entre quienes 40 en realidad prefieren la marca A a la marca B. Asimismo, puede usarse en conexión con un problema de seleccionar diamantes industriales, algunos de los cuales tienen cualidades superiores y algunos de los cuales no las tienen, o en conexión con un problema de muestreo de devoluciones de impuesto sobre la renta, donde a entre N devoluciones solicitadas contienen deducciones cuestionables, etcétera.

Ejercicios

4.1 Suponga que una probabilidad de $\frac{1}{12}$ se asigna a cada punto del espacio muestral del inciso *a*) del ejercicio 3.1 en la página 53. Encuentre la distribución de probabilidad del número total de lagos y ríos que están contaminados.

4.2 Un experimento consiste en cuatro lanzamientos de una moneda. Al denotar los resultados (H = cara; T = cruz) *HHTH, THTT*, …, y suponer que los 16 resultados son igualmente probables, determine la distribución de probabilidad para el número total de caras.

4.3 Determine si las siguientes pueden ser distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria, que únicamente puede tomar los valores 1, 2, 3 y 4.

a) $f(1) = 0.16$, $f(2) = 0.28$, $f(3) = 0.28$ y $f(4) = 0.28$;

b) $f(1) = 0.24$, $f(2) = 0.24$, $f(3) = 0.24$ y $f(4) = 0.24$;

c) $f(1) = 0.37$, $f(2) = 0.31$, $f(3) = 0.34$ y $f(4) = -0.02$.

4.4 Compruebe si las siguientes pueden definir distribuciones de probabilidad, y explique sus respuestas.

a) $f(x) = \frac{x}{14}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$

b) $f(x) = \frac{3 - x^2}{4}$ para $x = 0, 1, 2$

c) $f(x) = \frac{1}{5}$ para $x = 5, 6, 7, 8, 9$

d) $f(x) = \frac{2x + 1}{50}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5$

4.5 Dado que $f(x) = \frac{k}{2^x}$ es una distribución de probabilidad para una variable aleatoria que puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, 3$ y 4, encuentre k.

4.6 Con referencia al ejercicio 4.5, encuentre una expresión para la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria.

4.7 Demuestre que $b(x; n, p) = b(n - x; n, 1 - p)$.

4.8 Demuestre que $B(x; n, p) = 1 - B(n - x - 1; n, 1 - p)$.

4.9 ¿Las suposiciones de los ensayos Bernoulli parecen cumplirse? Explique. Si se cumplen las suposiciones, identifique el éxito y la probabilidad de interés.

a) Una compañía que mide *ratings* de televisión usa su equipo electrónico para verificar una muestra de hogares alrededor de la ciudad, y saber cuáles tienen un televisor sintonizado en el discurso del alcalde en el canal local.

b) Entre las 6 plantas de energía nuclear en un estado, 2 tuvieron serias transgresiones en los últimos cinco años. Se seleccionarán 2 plantas al azar, una después de la otra, y el resultado de interés es una transgresión seria en los últimos cinco años.

4.10 ¿Qué condiciones para la distribución binomial, si hay alguna, no se cumple en las siguientes situaciones?

a) Para cada una de las ocho instalaciones de producción de una compañía, registre si la semana pasada hubo un accidente o no. La instalación más grande tiene tres veces el número de trabajadores de producción que la instalación más pequeña.

b) Para cada uno de tres turnos, el número de unidades producidas se comparará con el promedio a largo plazo de 560 y se determinará si la producción supera las 560 unidades o no. El segundo turno conocerá el resultado del primero antes de comenzar a trabajar, y el tercer turno iniciará con el conocimiento de cómo se desempeñaron los primeros dos turnos.

4.11 ¿Qué condiciones para la distribución binomial, si hay alguna, no se cumplen en las siguientes situaciones?

a) El número de individuos que tienen un resfriado en una reunión familiar a la que asisten 30 personas.

b) Entre los 8 proyectores del departamento, 2 no funcionan de manera adecuada pero no están marcados

como defectuosos. Se seleccionan dos y se registra el número de los que no funcionan adecuadamente.

4.12 Utilice la tabla 1 para determinar

a) $B(8; 16, 0.40)$;

b) $b(8; 16, 0.40)$;

c) $B(9; 12, 0.60)$;

d) $b(9; 12, 0.60)$;

e) $\sum_{k=6}^{20} b(k; 20, 0.15)$;

f) $\sum_{k=6}^{9} b(k; 9, 0.70)$.

4.13 Use la tabla 1 para calcular

a) $B(7; 19, 0.45)$;

b) $b(7; 19, 0.45)$;

c) $B(8; 10, 0.95)$;

d) $b(8; 10, 0.95)$;

e) $\sum_{k=4}^{10} b(k; 10, 0.35)$;

f) $\sum_{k=2}^{4} b(k; 9, 0.30)$.

4.14 Vuelva a resolver el problema de decisión de la página 88, y suponga que tan solo 3 de los 20 discos duros requieren reparaciones dentro del primer año.

4.15 El error humano se da como la razón del 75% de todos los accidentes en una planta. Use la fórmula para la distribución binomial y determine la probabilidad de que el error humano se dará como la razón para dos de los siguientes cuatro accidentes.

4.16 Si la probabilidad es de 0.40 de que el vapor se condensará en un tubo de aluminio de pared delgada a 10 atm de presión, use la fórmula para la distribución binomial con la finalidad de encontrar la probabilidad de que, con las condiciones enunciadas, el vapor se condensará en 4 de 12 tales tubos.

4.17 Durante una etapa en la fabricación de chips de circuitos integrados, debe aplicarse un recubrimiento. Si 70% de los chips reciben un recubrimiento suficientemente grueso, use la tabla 1 para encontrar las probabilidades de que, entre 15 chips:

a) al menos 12 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos;

b) cuando mucho 6 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos;

c) exactamente 10 tendrán recubrimientos suficientemente gruesos.

4.18 La probabilidad de que el nivel de ruido de un amplificador de banda ancha superará 2 dB es de 0.05. Use la tabla 1 para encontrar las probabilidades de que entre 12 de tales amplificadores, el nivel de ruido de

a) uno superará los 2 dB;

b) cuando mucho dos superará los 2 dB;

c) dos o más superarán los 2 dB.

4.19 Una cooperativa agrícola afirma que 90% de las sandías embarcadas están maduras y listas para comerse. Encuentre las probabilidades de que entre 18 sandías embarcadas

a) las 18 están maduras y listas para comerse;

b) al menos 16 están maduras y listas para comerse;

c) cuando mucho 14 están maduras y listas comerse.

4.20 Un ingeniero de control de calidad quiere verificar si (en concordancia con las especificaciones) 95% de los componentes electrónicos embarcados por su compañía están en buena condición operativa. Para este propósito, selecciona al azar 15 de cada lote grande listo para embarcarse, y aprueba el lote si los componentes seleccionados están en buena condición operativa; de otro modo, se verifica cada uno de los componentes en el lote. Encuentre las probabilidades de que el ingeniero de control de calidad cometerá el error de

a) retener un lote para mayor inspección, aun cuando 95% de los componentes estén en buena condición operativa;

b) aprobar un lote sin mayor inspección, aun cuando tan solo 90% de los componentes estén en buena condición operativa;

c) aprobar un lote sin mayor inspección, aun cuando tan solo 80% de los componentes estén en buenas condiciones.

4.21 Un procesador de alimentos afirma que cuando mucho 10% de sus frascos de café instantáneo contiene menos café del que indica en la etiqueta. Para someter a prueba esta afirmación, se seleccionan al azar 16 frascos de su café instantáneo y se pesan los contenidos; su afirmación se acepta si menos de 3 de los frascos contienen menos café del indicado en la etiqueta. Determine las probabilidades de que la afirmación del procesador de alimentos se aceptará, cuando el porcentaje real de sus frascos que contienen menos café del indicado en la etiqueta es

a) 5%; *b*) 10%; *c*) 15%; *d*) 20%.

4.22 Consulte el ejercicio 4.2.

a) Determine la distribución de probabilidad acumulada $F(x)$.

b) Grafique la distribución de probabilidad de $f(x)$ como una gráfica de barras y abajo de ella grafique $F(x)$.

4.23 Cuatro radios de emergencia están disponibles para trabajadores de rescate, pero uno no funciona de manera adecuada. A una misión de rescate se llevan dos radios seleccionados al azar. Sea X el número de los que funcionan adecuadamente entre los dos.

a) Determine la distribución de probabilidad $f(x)$ de X.

b) Determine la distribución de probabilidad acumulada $F(x)$ de X.

c) Grafique $f(x)$ como una gráfica de barras y abajo de ella grafique $F(x)$.

4.24 Entre los 12 colectores solares en exhibición en una feria comercial, 9 son colectores de cama plana y los otros son colectores de concentración. Si una persona que visita la feria selecciona al azar 4 de los colectores solares para comprobación, ¿cuál es la probabilidad de que 3 de ellos serán colectores de cama plana?

4.25 Un ingeniero de control de calidad inspecciona una muestra aleatoria de 3 baterías de cada lote de 24 baterías automotrices listas para embarcarse. Si tal lote contiene 6 baterías con pequeños defectos, ¿cuáles son las probabilidades de que la muestra del inspector contendrá

a) ninguna de las baterías con defectos?

b) tan solo una de las baterías con defectos?

c) al menos dos de las baterías con defectos?

4.26 Si 6 de 18 nuevos edificios en una ciudad contravienen el código de construcción, ¿cuál es la probabilidad de que un inspector de edificios, que selecciona al azar 4 de los nuevos edificios para inspección, elegirá

a) ninguno de los edificios que contraviene el código de construcción?

b) 1 de los nuevos edificios que contraviene el código de construcción?

c) 2 de los nuevos edificios que contravienen el código de construcción?

d) al menos 3 de los nuevos edificios que contravienen el código de construcción?

4.27 Entre las 16 ciudades que una sociedad profesional considera para sus próximas 3 convenciones anuales, 7 están en la parte occidental de Estados Unidos. Para evitar discusiones, la selección se deja al azar. Si ninguna de las ciudades puede elegirse más de una vez, ¿cuáles son las probabilidades de que

a) ninguna de las convenciones se realice en la zona oeste de Estados Unidos?

b) todas las convenciones se realicen en la zona oeste de Estados Unidos?

4.28 Un embarque de 120 alarmas contra robo contiene 5 que son defectuosas. Si 3 de dichas alarmas se seleccionan al azar y se embarcan a un cliente, encuentre la probabilidad de que el cliente obtendrá una unidad mala al usar

a) la fórmula para distribución hipergeométrica;

b) la fórmula para la distribución binomial como una aproximación.

4.29 Entre los 300 empleados de una compañía, 240 son miembros del sindicato, mientras que los otros no lo son. Si 8 de los empleados se eligen por lote para trabajar en el comité que administra el fondo de pensión, encuentre la probabilidad de que 5 de ellos serán miembros del sindicato, mientras que los otros no lo son, usando

a) la fórmula para distribución hipergeométrica;

b) la fórmula para distribución binomial como una aproximación.

4.30 Las probabilidades binomiales pueden calcularse usando *MINITAB*.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability Distribution > Binomial
Elija **Probability**.
Ingrese 7 en **Number of trials** y .33 en **Probability of success**.
Elija **Input constant** e ingrese 2.
Haga clic en **OK**.

Salida:

Binomial con $n = 7$ y $p = 0.330000$

x	$P(X = x)$
2.00	0.3088

Encuentre las probabilidades binomiales con $n = 27$ y $p = 0.47$.

4.31 Las probabilidades binomiales acumuladas pueden calcularse usando *MINITAB*.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability Distribution > Binomial
Elija **Cumulative Distribution**.
Ingrese 7 en **Number of trials** y .33 en **Probability of success**.
Elija **Input constant** e ingrese 2.
Haga clic en **OK**.

Salida:

Binomial con $n = 7$ y $p = 0.330000$

x	$P(X <= x)$
2.00	0.5783

Encuentre las probabilidades binomiales acumuladas con $n = 27$ y $p = 0.47$.

4.4 La media y la varianza de una distribución de probabilidad

Además de las distribuciones binomial e hipergeométrica, hay muchas otras distribuciones de probabilidad que tienen aplicaciones importantes en ingeniería. Sin embargo, antes de avanzar más, se estudiarán algunas características generales de las distribuciones de probabilidad.

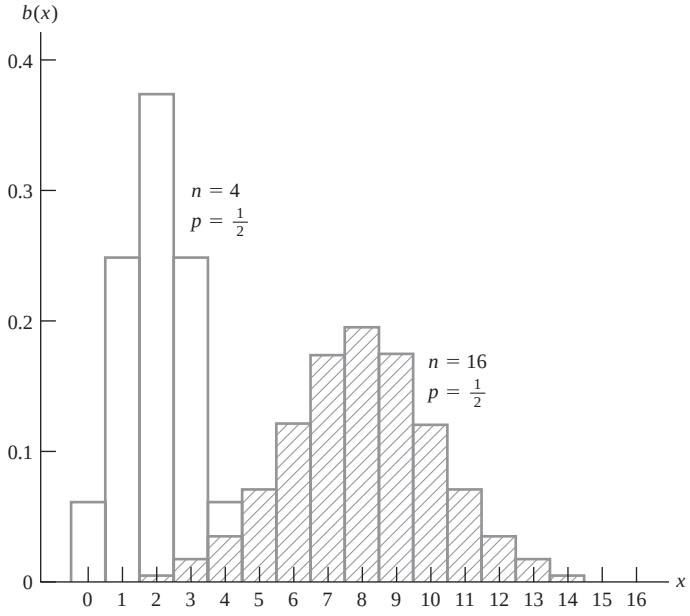


Figura 4.6
Histogramas de probabilidad de dos distribuciones binomiales

Una de tales características, la de la simetría o **asimetría** de una distribución de probabilidad, se ilustró en las figuras 4.4 y 4.5; otras dos características son aparentes en la figura 4.6, que ilustra los histogramas de probabilidad para dos distribuciones binomiales. Una de dichas distribuciones binomiales tiene los parámetros $n = 4$ y $p = ½$, y la otra tiene los parámetros $n = 16$ y $p = ½$. En esencia, esas dos distribuciones de probabilidad difieren en dos aspectos. La primera distribución de probabilidad tiene centro en torno a $x = 2$, mientras que la otra (cuyo histograma está sombreado) tiene centro en torno a $x = 8$, y se dice que las dos distribuciones difieren en su **centro**. Otra distinción es que el histograma de la segunda distribución es más amplio, y se dice que las dos distribuciones difieren en **variación**. Para hacer más específicas tales comparaciones, en esta sección se introducirán dos de las medidas estadísticas más importantes, que describen la ubicación central y la variación de una variable aleatoria con distribución de probabilidad: la **media** y la **varianza**, respectivamente.

La media de una variable aleatoria X es simplemente la expectativa matemática de una variable que tiene distribución de probabilidad $f(x)$. Si una variable aleatoria X toma los valores $x_1, x_2, \ldots,$ o x_k, con las probabilidades $f(x_1), f(x_2), \ldots,$ y $f(x_k)$, su expectativa matemática o valor esperado es

$$x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \cdots + x_k \cdot f(x_k) = \sum \text{(valor)} \times \text{(probabilidad)}$$

con la notación $\sum$. Por ende, es posible escribir

Media de distribución de probabilidad discreta

$$\mu = \sum_{\text{toda } x} x \cdot f(x)$$

donde la media se denota con la letra griega μ (*mu*). La media de una distribución de probabilidad mide su centro en el sentido de un promedio o, con analogía con la física, en el sentido de un centro de gravedad. Note que la fórmula anterior para μ es, de hecho, la del **primer momento con respecto al origen** de un sistema discreto de masas $f(x)$, ordenado sobre una línea recta sin peso a distancias x del origen. Aquí no se tiene que

dividir entre

$$\sum_{\text{toda } x} f(x)$$

como se hace en la fórmula usual para la coordenada x del centro de gravedad, ya que por definición la suma es igual a 1.

EJEMPLO **El número medio de caras en tres lanzamientos**

Encuentre la media de la variable aleatoria que representa el número de caras obtenidas en 3 lanzamientos con una moneda equilibrada.

Solución Las probabilidades para 0, 1, 2 o 3 caras son $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}$ y $\frac{1}{8}$ como puede verificarse con facilidad al contar posibilidades igualmente probables o al usar la fórmula para la distribución binomial con $n = 3$ y $p = \frac{1}{2}$. Por consiguiente,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$ ■

EJEMPLO **El número medio de atributos preferidos en automóviles usados**

Con referencia al ejemplo del auto usado y las probabilidades dadas en la página 82, encuentre la media de la variable aleatoria del número de atributos preferidos.

Solución Al sustituir $x = 0, 1, 2$ y 3, y las correspondientes probabilidades en la fórmula para μ,

$$\begin{aligned}\mu &= 0(0.18) + 1(0.50) + 2(0.29) + 3(0.03)\\ &= 1.17\end{aligned}$$ ■

Al regresar a la segunda distribución de probabilidad de la figura 4.6, se podría encontrar su media al calcular todas las probabilidades necesarias (o al observarlas en la tabla 1) y sustituirlas en la fórmula para μ. Sin embargo, si se reflexiona un momento, se argumentaría que existe una posibilidad de 50-50 para un éxito en cada ensayo, hay 16 ensayos, y parecería razonable esperar 8 caras y 8 cruces (en el sentido de una expectativa matemática). De igual modo, se puede argumentar que, si una distribución binomial tiene los parámetros $n = 200$ y $p = 0.20$, se esperaría un éxito 20% de las veces y, en consecuencia, en promedio $200(0.20) = 40$ éxitos en 200 ensayos. De hecho, estos dos valores son correctos y en general se demuestra que

Media de la distribución binomial

$$\boxed{\mu = n \cdot p}$$

para la media de una variable aleatoria binomial. Si desea probar esta fórmula, sustituya la expresión que define $b(x; n, p)$ en la fórmula para μ, y obtiene

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Entonces, al usar el hecho de que

$$\frac{x}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}$$

y $n! = n(n-1)!$, y al factorizar n y p,

$$\mu = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

donde la suma comienza con $x = 1$, ya que el sumando original es cero para $x = 0$. Si ahora se hace $y = x - 1$ y $m = n - 1$, entonces,

$$\mu = np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!}\, p^{y}(1-p)^{m-y}$$

y esta última suma se reconoce como aquella de todos los términos de la distribución binomial con los parámetros m y p. Por lo tanto, esta suma es igual a 1 y se sigue que $\mu = np$.

EJEMPLO

Uso de $\mu = np$ para encontrar la media del número de caras en tres lanzamientos

Encuentre la media de la variable aleatoria del número de caras obtenidas en 3 lanzamientos de una moneda equilibrada.

Solución Para una distribución binomial con $n = 3$ y $p = \frac{1}{2}$, se tiene $\mu = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, lo cual concuerda con el resultado obtenido en la página 95. ■

Desde luego, la fórmula $\mu = np$ se aplica únicamente a distribuciones binomiales, pero para otras distribuciones especiales, es posible, de igual manera, expresar la media en términos de sus parámetros. Por ejemplo, para la media de la distribución hipergeométrica con los parámetros n, a y N, se escribe

Media de la distribución hipergeométrica

$$\mu = n \cdot \frac{a}{N}$$

En el ejercicio 4.43, al lector se le pedirá derivar esta fórmula con un método similar al que se utilizó para derivar la fórmula para la media de una distribución binomial.

EJEMPLO

Uso de la fórmula para la media de una distribución hipergeométrica

Con referencia al ejemplo de la página 90, donde 5 de 20 cargadores de automóvil eran defectuosos, encuentre la media de variable aleatoria que es el número de defectos en una muestra de 10 cargadores elegidos al azar para inspección.

Solución Al sustituir $n = 10$, $a = 5$ y $N = 20$ en la fórmula anterior para μ, se obtiene

$$\mu = 10 \cdot \frac{5}{20} = 2.5$$

En otras palabras, si se inspeccionan 10 de tales cargadores, se esperarían 2.5 defectos, donde *esperaría* se interpreta en el sentido de que representa el número de defectos promedio a largo plazo, si 10 cargadores se seleccionan repetidamente de 20 cargadores, de los cuales 5 son defectuosos. ■

Para estudiar la segunda de las dos propiedades de las distribuciones de probabilidad mencionadas en la página 94, su variación, consulte nuevamente las dos distribuciones de probabilidad de la figura 4.6. Para aquella donde $n = 4$, hay una probabilidad alta de obtener valores cercanos a la media, aunque para la que tiene $n = 16$, hay una alta probabilidad de obtener

valores dispersos sobre distancias considerables alejadas de la media. Al usar esta propiedad, parecería razonable medir la variación de una distribución de probabilidad con la cantidad

$$\sum_{\text{toda } x} (x - \mu) \cdot f(x)$$

a saber, la cantidad promedio por la que los valores de la variable aleatoria se desvían de la media. No obstante, desafortunadamente

$$\begin{aligned}\sum_{\text{toda } x} (x - \mu) \cdot f(x) &= \sum_{\text{toda } x} x \cdot f(x) - \sum_{\text{toda } x} \mu \cdot f(x) \\ &= \mu - \mu \cdot \sum_{\text{toda } x} f(x) = \mu - \mu = 0\end{aligned}$$

esta expresión siempre es igual a cero. Sin embargo, dado que uno realmente está interesado en la magnitud de las desviaciones $x - \mu$ y no en sus signos, ello sugiere que se promedian los valores absolutos de dichas desviaciones de la media. De hecho, esto proporcionaría una medida de variación; no obstante, en terrenos meramente teóricos es preferible trabajar, en cambio, con los cuadrados de las desviaciones de la media. Dichas cantidades también son no negativas, y su promedio es indicativo de la dispersión de una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. Por ende, la **varianza** de una variable aleatoria X que tiene una distribución de probabilidad $f(x)$, se define como

Varianza de distribución de probabilidad

$$\sigma^2 = \sum_{\text{toda } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

donde σ^2 es la varianza poblacional y s^2 es la *varianza muestral*. Esta medida no tiene las mismas unidades (o dimensión) que los valores de la variable aleatoria, pero se podría ajustar esto al tomar la raíz cuadrada. Lo anterior resulta en una medida de variación que se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria. La **desviación estándar** se define como

Desviación estándar de distribución de probabilidad

$$\sigma = \sqrt{\sum_{\text{toda } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x)}$$

EJEMPLO

Cálculo de las desviaciones estándar de dos distribuciones de probabilidad

Compare las desviaciones estándar de las dos variables aleatorias con distribuciones de probabilidad de la figura 4.6, en la página 94.

Solución Puesto que $\mu = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ para la distribución binomial con $n = 4$ y $p = \frac{1}{2}$, se encuentra que la varianza de esta distribución de probabilidad es

$$\begin{aligned}\sigma^2 = {} & (0 - 2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (1 - 2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (2 - 2)^2 \cdot \frac{6}{16} \\ & + (3 - 2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (4 - 2)^2 \cdot \frac{1}{16} = 1\end{aligned}$$

y, por lo tanto, que su desviación estándar es $\sigma = 1$. Asimismo, puede demostrarse que, para la otra distribución, $\sigma = 2$, y se encuentra que la segunda distribución (sombreada) con la mayor dispersión también tiene la mayor desviación estándar. ■

Dada cualquier distribución de probabilidad, siempre es posible calcular σ^2 sustituyendo las probabilidades correspondientes $f(x)$ en la fórmula que define la varianza. Sin embargo, como en el caso de la media, este trabajo se simplifica en una medida considerable cuando se trata con tipos especiales de distribuciones. Por ejemplo, puede demostrarse que la varianza de la distribución binomial con los parámetros n y p está dada por la fórmula

Varianza de distribución binomial

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

EJEMPLO **Uso de la fórmula para varianza de la distribución binomial**

Verifique el resultado enunciado en el ejemplo anterior, que $\sigma = 2$ para la distribución binomial con $n = 16$ y $p = \frac{1}{2}$.

Solución Al sustituir $n = 16$ y $p = \frac{1}{2}$ en la fórmula para la varianza de una distribución binomial, se tiene

$$\sigma^2 = 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

y, por lo tanto, $\sigma = \sqrt{4} = 2$. ■

La varianza de la distribución hipergeométrica con los parámetros n, a y N está dada por la fórmula

Varianza de distribución hipergeométrica

$$\sigma^2 = n\frac{a}{N}\left(1 - \frac{a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

EJEMPLO **Uso de la fórmula para varianza de la distribución hipergeométrica**

Con referencia al ejemplo de la página 90, en el que 5 de 20 cargadores estaban defectuosos, encuentre la desviación estándar de la distribución de probabilidad del número de defectuosos en una muestra de 10 elegidos al azar para inspección.

Solución Sustituyendo $n = 10$, $a = 5$ y $N = 20$ en la fórmula para la varianza de una distribución hipergeométrica, se tiene

$$\sigma^2 = 10\,\frac{5}{20}\left(1 - \frac{5}{20}\right)\left(\frac{20-10}{20-1}\right) = \frac{75}{76}$$

y, por consiguiente, $\sigma = \sqrt{75/76} = 0.99$. ■

Cuando primero se definió la varianza de una distribución de probabilidad, quizá al lector se le haya ocurrido que la fórmula parecía exactamente como la que se emplea en física para definir segundos momentos, o momentos de inercia. De hecho, en estadística se acostumbra definir al ***k*-ésimo momento con respecto al origen** como

$$\mu'_k = \sum_{\text{toda } x} x^k \cdot f(x)$$

y el ***k*-ésimo momento con respecto a la media** como

$$\mu_k = \sum_{\text{toda } x} (x - \mu)^k \cdot f(x)$$

Por lo tanto, la media μ es el primer momento con respecto al origen, y la varianza σ^2 es el segundo momento con respecto a la media. En estadística frecuentemente se usan momentos de orden superior para proporcionar mayores descripciones de las distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, el tercer momento con respecto a la media (dividido entre σ^3 para hacer esta medida independiente de la escala de medición) sirve para describir la asimetría de una distribución; de igual manera, el cuarto momento con respecto a la media (dividido entre σ^4) sirve para describir su "forma puntiaguda" o **curtosis**. Para determinar los momentos con respecto a la media, por lo general, es más fácil expresar los momentos con respecto a la media en términos de momentos con respecto al origen y, luego, calcular los momentos necesarios con respecto a la media. Por ende, para el segundo momento con respecto a la media, se tiene la importante fórmula

Fórmula de cálculo para la varianza

$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$$

que al lector se le pedirá probar en el inciso *a*) del ejercicio 4.49; el inciso *b*) de dicho ejercicio pertenece a una fórmula similar para expresar μ_3 en términos de momentos con respecto al origen.

EJEMPLO **Cálculo de la varianza usando la fórmula de cálculo alternativa**

Use la fórmula de cálculo anterior para determinar la varianza de la variable aleatoria del número de puntos obtenidos con un dado equilibrado.

Solución Puesto que $f(x) = \frac{1}{6}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6, se tiene

$$\begin{aligned}
\mu &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{7}{2} \\
\mu_2' &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{91}{6}
\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

■

EJEMPLO **La media y la varianza del número de direcciones incorrectas**

Como parte de un proyecto para mejoramiento de la calidad enfocado en la entrega de correo a una oficina dentro de una gran compañía, se recopilaron datos acerca del número de direcciones diferentes que tenían que cambiarse, de modo que el correo pudiera redirigirse al buzón correcto. La distribución, dada en las dos primeras columnas de la siguiente tabla, describe el número de redirecciones por entrega. Calcule la media y la varianza.

Solución Determine las columnas $x\,f(x)$ y $x^2 f(x)$

x	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2 f(x)$
0	.05	.0	0.0
1	.20	.2	0.2
2	.45	.9	1.8
3	.20	.6	1.8
4	.10	.4	1.6
Total		2.1	5.4

de modo que $\mu = 2.1$ y $\sigma^2 = 5.4 - (2.1)^2 = 0.990$. ■

4.5 El teorema de Chebyshev

Anteriormente en este capítulo se usaron ejemplos para demostrar cómo la desviación estándar mide la variación de una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$; esto es, cómo refleja la concentración de probabilidad en la vecindad de la media. Si σ es grande, hay una probabilidad correspondientemente mayor de conseguir valores más alejados de la media. De manera formal, la idea se expresa mediante el siguiente teorema.

Teorema de Chebyshev

Teorema 4.1 Si una distribución de probabilidad tiene media μ y desviación estándar σ, la probabilidad de obtener un valor que se desvíe de μ por al menos $k\sigma$ es cuando mucho $\dfrac{1}{k^2}$.

De manera simbólica,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

donde $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ es la probabilidad asociada con el conjunto de resultados para el cual x, el valor de una variable aleatoria que tiene la distribución de probabilidad dada, es tal que $|x - \mu| \geq k\sigma$.

Por ende, la probabilidad de que una variable aleatoria tomará un valor que se desvíe (difiera) de la media por, al menos, 2 desviaciones estándar es cuando mucho $\frac{1}{4}$, la probabilidad de que tomará un valor que se desvíe de la media por, al menos, 5 desviaciones estándar es cuando mucho $\frac{1}{25}$, y la probabilidad de que tomará un valor que se desvía de la media por 10 desviaciones estándar o más es menor que o igual a $\frac{1}{100}$.

Para probar este teorema, considere cualquier distribución de probabilidad $f(x)$, que tiene media μ y varianza σ^2. Al dividir la suma que define la varianza en tres partes, como se indica en la figura 4.7, se tiene

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{\text{toda } x} (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \sum_{R_1} (x - \mu)^2 f(x) + \sum_{R_2} (x - \mu)^2 f(x) + \sum_{R_3} (x - \mu)^2 f(x)\end{aligned}$$

donde R_1 es la región en que $x \leq \mu - k\sigma$, R_2 es la región en que $\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma$ y R_3 es la región en que $x \geq \mu + k\sigma$. Puesto que $(x - \mu)^2 f(x)$ no puede ser negativo, la suma

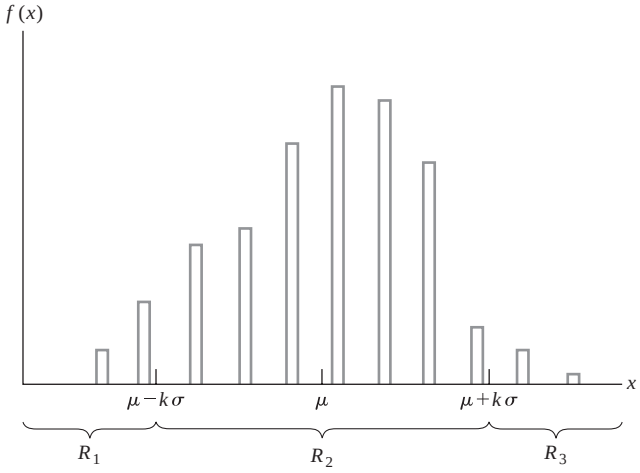


Figura 4.7
Diagrama para probar el teorema de Chebyshev

sobre la región R_2 es no negativa, y sin ella la suma de las regiones R_1 y R_3 es menor que o igual a σ^2; es decir,

$$\mu^2 \geq \sum_{R_1} (x-\mu)^2 f(x) + \sum_{R_3} (x-\mu)^2 f(x)$$

Pero $x - \mu \leq -k\sigma$ en la región R_1 y $x - \mu \geq k\sigma$ en la región R_3, de modo que en cualquier caso $|x - \mu| \geq k\sigma$; por lo tanto, en ambas regiones $(x-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$. Si ahora en cada suma se sustituye $(x-\mu)^2$ por $k^2\sigma^2$, un número menor que o igual a $(x-\mu)^2$, se obtiene la desigualdad

$$\sigma^2 \geq \sum_{R_1} k^2\sigma^2 f(x) + \sum_{R_1} k^2\sigma^2 f(x)$$

o bien,

$$\frac{1}{k^2} \geq \sum_{R_1} f(x) + \sum_{R_3} f(x)$$

Puesto que

$$\sum_{R_1} f(x) + \sum_{R_3} f(x)$$

representa la probabilidad asignada a la región $R_1 \cup R_3$, a saber, $P(|X-\mu| \geq k\sigma)$; esto completa la prueba de teorema 4.1.

Para obtener una forma alternativa del teorema de Chebyshev, note que el evento $|x - \mu| < k\sigma$ es el complemento del evento $|x - \mu| \geq k\sigma$; por consiguiente, la probabilidad de obtener un valor que se desvía de μ por menos que $k\sigma$ es al menos $1 - \frac{1}{k^2}$.

EJEMPLO **Una probabilidad acotada usando el teorema de Chebyshev**

El número de clientes que visitan la sala de exhibición de un vendedor de automóviles el sábado en la mañana es una variable aleatoria con $\mu = 18$ y $\sigma = 2.5$. ¿Con qué probabilidad se puede afirmar que habrá más de 8 pero menos de 28 clientes?

Solución Sea X el número de clientes. Puesto que

$$k = \frac{28-18}{2.5} = \frac{18-8}{2.5} = 4$$

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \text{y} \quad P(8 < X < 28) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}$$ ■

Teóricamente hablando, la característica más importante del teorema de Chebyshev es que se aplica a cualquier distribución de probabilidad para la cual existen μ y σ. Sin embargo, en cuanto concierne a las aplicaciones, generalmente esta también es su mayor debilidad: tan solo ofrece un límite superior (a menudo uno muy pobre) a la probabilidad de obtener un valor que se desvía de la media por k desviaciones estándar o más. Por ejemplo, es posible afirmar, en general, que la probabilidad de obtener un valor que difiera de la media por, al menos, 2 desviaciones estándar es cuando mucho 0.25; mientras que la correspondiente probabilidad exacta para la distribución binomial con $n = 16$ y $p = \frac{1}{2}$ solo es 0.0768: "cuando mucho 0.25" es correcto, pero ello no indica que la probabilidad real puede ser tan pequeña como 0.0768.

Un resultado importante se obtiene si se aplica el teorema de Chebyshev a la distribución binomial, cuando el número de ensayo es grande. Para ilustrar este resultado, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **Teorema de Chebyshev con un número grande de ensayos Bernoulli**

Demuestre que para 40,000 lanzamientos de una moneda equilibrada, la probabilidad es, al menos, de 0.99 de que la proporción de caras caerá entre 0.475 y 0.525.

Solución Dado que

$$\mu = 40{,}000 \cdot \frac{1}{2} = 20{,}000 \qquad \sigma = \sqrt{40{,}000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 100$$

y

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.99$$

da como resultado $k = 10$, la forma alternativa del teorema de Chebyshev indica que la probabilidad es, al menos, de 0.99 de que obtendrá entre $20{,}000 - 10(100) = 19{,}000$ y $20{,}000 + 10(100) = 21{,}000$ caras. Por lo tanto, la probabilidad es, al menos, de 0.99 de que la proporción de caras caerá entre

$$\frac{19{,}000}{40{,}000} = 0.475 \qquad \text{y} \qquad \frac{21{,}000}{40{,}000} = 0.525$$

■

En correspondencia, al lector se le pedirá demostrar, en el ejercicio 4.47, que para 1,000,000 de lanzamientos de una moneda equilibrada, la probabilidad es, al menos, de 0.99 de que la proporción de caras caerá entre 0.495 y 0.505, y dichos resultados sugieren que, cuando n es grande, las posibilidades son que la proporción de caras estará muy cerca de $p = \frac{1}{2}$. Cuando se formula para cualquier distribución binomial con los parámetros n y p, este resultado se conoce como **ley de los grandes números**.

Ejercicios

4.32 Suponga que las probabilidades son 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1 de que habrá 0, 1, 2 o 3 fallas eléctricas en cierta ciudad durante el mes de julio. Emplee las fórmulas que definen μ y σ^2 para encontrar

a) la media de esta distribución de probabilidad;

b) la varianza de esta distribución de probabilidad.

4.33 Use la fórmula para calcular σ^2 y resuelva nuevamente el inciso *b*) del ejercicio anterior.

4.34 La siguiente tabla indica las probabilidades de que cierta computadora funcionará mal 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 veces cualquier día:

Número de mal funcionamiento: x	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad: $f(x)$	0.17	0.29	0.27	0.16	0.07	0.03	0.01

Use las fórmulas que definen μ y σ para encontrar

a) la media de esta distribución de probabilidad;

b) la desviación estándar de esta distribución de probabilidad.

4.35 Use la fórmula para calcular σ^2 y resuelva nuevamente el inciso *b*) del ejercicio anterior.

4.36 Encuentre la media y la varianza de la distribución de probabilidad uniforme dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \qquad \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots, n$$

[*Sugerencia:* la suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$, y la suma de sus cuadrados es $n(n + 1)(2n + 1)/6$.]

4.37 Encuentre la media y la varianza de la distribución binomial con $n = 4$ y $p = 0.70$ utilizando

a) la tabla 1 y las fórmulas que definen μ y σ^2;

b) las fórmulas especiales para la media y la varianza de una distribución binomial.

4.38 Como se verifica fácilmente mediante la fórmula para la distribución binomial (o al mencionar las 32 posibilidades), las probabilidades de obtener 0, 1, 2, 3, 4 o 5 caras en cinco lanzamientos de una moneda equilibrada son

$$\frac{1}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{32}$$

Encuentre la media de esta distribución de probabilidad usando

a) la fórmula que define μ;

b) la fórmula especial para la media de una distribución binomial.

4.39 Con referencia al ejercicio 4.38, encuentre la varianza de la distribución de probabilidad usando

a) la fórmula que define σ^2;

b) la fórmula de cálculo para σ^2;

c) la fórmula especial para la varianza de una distribución binomial.

4.40 Si 95% de ciertos neumáticos radiales de alto desempeño duran al menos 30,000 millas, encuentre la media y la desviación estándar de la distribución del número de dichos neumáticos, entre 20 seleccionadas al azar, que duren al menos 30,000 millas, usando

a) la tabla 1, la fórmula que define μ y la fórmula para calcular σ^2;

b) las fórmulas especiales para la media y la varianza de una distribución binomial.

4.41 Encuentre la media y la desviación estándar de la distribución de cada una de las siguientes variables aleatorias (que tienen distribuciones binomiales):

a) El número de caras obtenidas en 676 lanzamientos de una moneda equilibrada.

b) El número de 4 obtenidos en 720 lanzamientos de un dado equilibrado.

c) El número de defectuosas en una muestra de 600 piezas fabricadas por una máquina, cuando la probabilidad es de 0.04 de que alguna de las piezas esté defectuosa.

d) El número de estudiantes entre 800 entrevistados a quienes no les gustan los alimentos que se sirven en la cafetería de la universidad, cuando la probabilidad es de 0.65 de que a alguno de ellos no le gusten tales alimentos.

4.42 Encuentre la media y la desviación estándar de la distribución hipergeométrica con los parámetros $n = 3$, $a = 4$ y $N = 8$

a) al calcular primero las probabilidades necesarias y, luego, usando las fórmulas que definen μ y σ;

b) al usar las fórmulas especiales para la media y la varianza de una distribución hipergeométrica.

4.43 Pruebe la fórmula para la media de la distribución hipergeométrica con los parámetros n, a y N; a saber, $\mu = n \cdot \frac{a}{N}$.

[*Sugerencia:* utilice la identidad

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{s}{k-r} = \binom{m+s}{k}$$

que puede obtenerse al igualar los coeficientes de x^k en $(1 + x)^m(1 + x)^s$ y en $(1 + x)^{m+s}$.]

4.44 Construya una tabla que muestre los límites superiores proporcionados por el teorema de Chebyshev, para las probabilidades de obtener valores que difieran de la media por al menos 1, 2 y 3 desviaciones estándar y, también, las probabilidades correspondientes para la distribución binomial con $n = 16$ y $p = \frac{1}{2}$.

4.45 Sobre el rango de piezas cilíndricas fabricadas en un torno controlado por computadora, la desviación estándar de los diámetros es de 0.002 milímetros.

a) ¿Qué dice el teorema de Chebyshev acerca de la probabilidad de que una nueva pieza estará dentro de 0.006 unidades de la media μ para dicha labor?

b) Si las 400 piezas elaboradas durante la labor, ¿aproximadamente qué proporción espera que se encontrará en el intervalo del inciso *a*)?

4.46 En 1 de 6 casos, el material para los chalecos a prueba de balas falla para satisfacer estándares de perforación. Si se prueban 405 especímenes, ¿qué dice el teorema de Chebyshev acerca de la probabilidad de obtener cuando mucho 30 o más que 105 casos que no satisfagan los estándares de perforación?

4.47 Demuestre que, para 1 millón de lanzamientos de una moneda equilibrada, la probabilidad es al menos de 0.99 de que la proporción de caras caerá entre 0.495 y 0.505.

4.48 ¿Cuántas veces tiene que lanzar una moneda equilibrada para poder afirmar, con una probabilidad de cuando mucho 0.01, que la diferencia entre la proporción de caras y 0.50 será al menos de 0.04?

4.49 Pruebe que

a) $\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$;

b) $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' \cdot \mu + 2\mu^3$.

4.6 La aproximación de Poisson a la distribución binomial

La distribución de Poisson a menudo sirve como modelo para conteos que no tienen una cota superior natural. La **distribución de Poisson**, con media λ (lambda), tiene probabilidades dadas por

Distribución de Poisson

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots \qquad \lambda > 0$$

Cuando n es grande y p es pequeña, las probabilidades binomiales frecuentemente se aproximan usando medias de la distribución de Poisson con λ igual al producto np. Antes de justificar esta aproximación, se indica que $x = 0, 1, 2, \ldots$ significa que existe un número infinito contable de posibilidades, y ello requiere la modificación del tercer axioma de probabilidad dado en la página 58. En su lugar se sustituye el siguiente axioma.

Modificación del tercer axioma de probabilidad

Axioma 3' Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una secuencia finita o infinita de eventos mutuamente excluyentes en S, entonces,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Los otros postulados siguen invariables. Para verificar que $P(S) = 1$ para esta fórmula, se utiliza el axioma 3′ y se escribe

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Puesto que la serie infinita en la expresión a la derecha es la serie de Maclaurin para e^{λ}, se sigue que

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Ahora se demostrará que, cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$, mientras $np = \lambda$ sigue constante, la forma límite de la distribución binomial es la distribución de Poisson dada anteriormente. Primero sustituya $\frac{\lambda}{n}$ para p en la fórmula para la distribución binomial y simplifique la expresión resultante; por ende, se tiene

$$\begin{aligned} b(x;n,p) &= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!\,n^x}(\lambda)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}(\lambda)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \end{aligned}$$

Si ahora se hace $n \to \infty$, se encuentra que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \to 1$$

y que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}\right]^{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to e^{-\lambda}$$

Por lo tanto, la distribución binomial $b(x; n, p)$ tiende a

$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Esto completa la prueba; la distribución a la que se llega se llama **distribución de Poisson**, como ya se indicó en la página 104.

Como la distribución de Poisson tiene muchas aplicaciones importantes, además de aproximar las probabilidades binomiales (véase la sección 4.7), se ha tabulado extensamente. La tabla 2 al final del libro presenta los valores de las probabilidades

$$F(x; \lambda) = \sum_{k=0}^{x} f(k; \lambda)$$

para valores de λ en incrementos variables de 0.02 a 25, y su uso es muy similar al de la tabla 1. Las probabilidades de Poisson también se calculan en muchos programas de software estadístico (véase los ejercicios 4.70 y 4.71).

Los siguientes son algunos ejemplos que ilustran la aproximación de Poisson de probabilidades binomiales. Una regla empírica aceptable consiste en utilizar esta aproximación si $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$; si $n \geq 100$, por lo general, la aproximación es excelente en tanto $np \leq 10$.

EJEMPLO **Comparación de las probabilidades de Poisson y binomiales**

Se sabe que 5% de los libros encuadernados en cierta máquina tienen defectos del proceso. Encuentre la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados por esta máquina tendrán defectos del proceso usando

a) la fórmula para la distribución binomial;

b) la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

Solución *a*) Al sustituir $x = 2$, $n = 100$ y $p = 0.05$ en la fórmula para la distribución binomial,

$$b(2; 100, 0.05) = \binom{100}{2}(0.05)^2(0.95)^{98} = 0.081$$

b) Al sustituir $x = 2$ y $\lambda = 100(0.05) = 5$ en la fórmula para la distribución de Poisson, se obtiene

$$f(2; 5) = \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} = 0.084$$

Es de interés destacar que la diferencia entre los dos valores obtenidos (el error que se cometería al usar la aproximación de Poisson) tan solo es de 0.003. [Si se usara la tabla 2 en vez de una calculadora para obtener e^{-5}, se obtendría $f(2; 5) = F(2; 5) - F(1; 5) = 0.125 - 0.040 = 0.085$.] ■

EJEMPLO **Una aproximación de Poisson a las probabilidades binomiales**

Un fabricante de maquinaria pesada tiene 3,840 grandes generadores en el campo que están dentro del periodo de garantía. Si la probabilidad es 1/1,200 de que alguno fallará durante el año dado, encuentre las probabilidades de que 0, 1, 2, 3, 4, … de los generadores fallarán durante el año dado.

Solución Se podría usar la distribución binomial cuando esté disponible el software adecuado. Sin embargo, el número esperado es pequeño y el número de generadores es grande, de modo que es válida la aproximación de Poisson. Tome

$$\lambda = 3{,}840 \cdot \frac{1}{1{,}200} = 3.2$$

Al consultar la tabla 2 con $\lambda = 3.2$, y al usar la identidad $f(x; \lambda) = F(x; \lambda) - F(x - 1; \lambda)$, se obtienen los resultados que se muestran en el histograma de probabilidad de la figura 4.8. ■

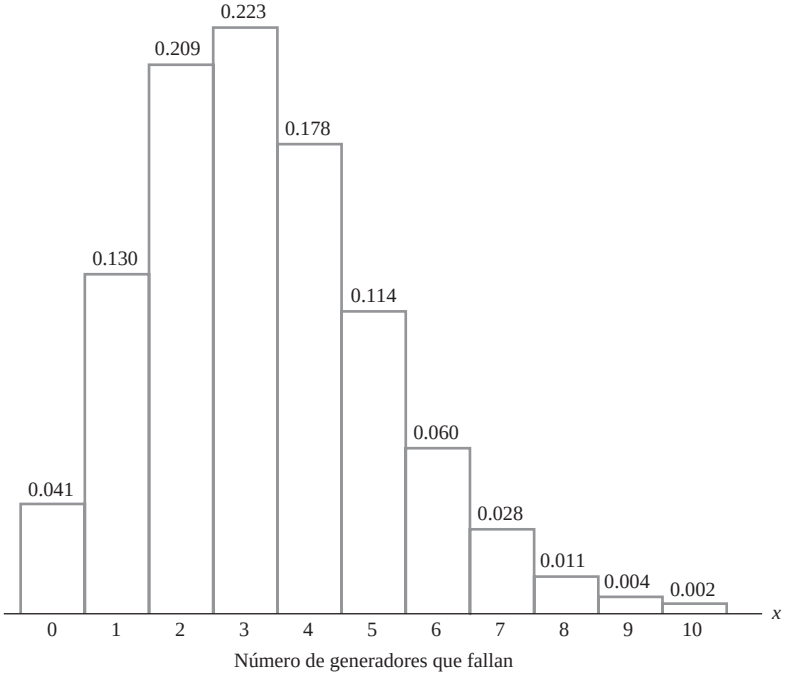


Figura 4.8
Histograma de probabilidad de distribución de Poisson con $\lambda = 3.2$

Al usar un método similar al empleado en la página 95 para derivar la fórmula para la media de la distribución binomial de X, se demuestra que la media y la varianza de la distribución de Poisson de X son λ.

Media y varianza de la distribución de Poisson

$$\mu = \lambda \qquad \text{y} \qquad \sigma^2 = \lambda$$

El primero de estos resultados realmente debería esperarse, pues en la justificación de la aproximación de Poisson a la distribución binomial, se hizo $\lambda = np$. Para la varianza se escribe $\sigma^2 = np(1 - p) = \lambda(1 - p)$, que tiende a λ conforme $p \to 0$.

EJEMPLO **Una distribución de Poisson para conteos de partículas**

Durante un periodo de 10 minutos, un contador registra un promedio de 1.3 partículas gamma por milisegundo, provenientes de una sustancia radiactiva. Para una buena aproxi-

mación, la distribución del conteo, X, de partículas gamma durante el siguiente milisegundo es de Poisson. Determine *a*) λ, *b*) la probabilidad de una o más partículas gamma y *c*) la varianza.

Solución

a) La media de la distribución de Poisson es λ, así que $\lambda = 1.3$ para concordar con el promedio a largo plazo.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1.3} = 0.727$.

c) La varianza de la de Poisson también es igual a λ, de modo que $\sigma^2 = 1.3$. ■

4.7 Procesos de Poisson

En general, un **proceso aleatorio** es un proceso físico que total o parcialmente está controlado por algún tipo de mecanismo al azar. Puede ser una secuencia de lanzamientos repetidos de una moneda, las mediciones de la calidad de los productos fabricados provenientes de una línea de ensamble, las vibraciones de las alas de los aviones, el ruido de una señal de radio, o cualquiera de muchos otros fenómenos. Lo que caracteriza a tales procesos es su dependencia del tiempo, es decir, el hecho de que ciertos eventos ocurran o no (dependiendo del azar) a intervalos de tiempo regulares, o a lo largo de intervalos de tiempo continuos.

En esta sección se tratará con procesos que tienen lugar durante intervalos de tiempo o espacio continuos, como la ocurrencia de imperfecciones en una tela de tamiz que se produce de manera continua, el registro de radiación mediante un contador Geiger, la llegada de llamadas telefónicas a un tablero virtual, o el paso de automóviles a través de un dispositivo de conteo electrónico. Ahora se demostrará que el modelo matemático que se utiliza para describir muchas situaciones como éstas es la distribución de Poisson. Para encontrar la probabilidad de x éxitos durante un intervalo de tiempo de longitud T, el intervalo se divide en n partes iguales de longitud Δt, de modo que $T = n \cdot \Delta t$, y se supone que

1. La probabilidad de un éxito durante un intervalo de tiempo muy pequeño Δt está dada por $\alpha \cdot \Delta t$.
2. La probabilidad de más de un éxito durante tal intervalo de tiempo pequeño Δt es despreciable.
3. La probabilidad de un éxito durante tal intervalo de tiempo no depende de lo que ocurre antes de ese tiempo.

Lo cual significa que se satisfacen las suposiciones subyacentes a la distribución binomial, y la probabilidad de x éxitos en el intervalo de tiempo T está dada por la probabilidad binomial $b(x; n, p)$ con

$$n = \frac{T}{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad p = \alpha \cdot \Delta t$$

Entonces, al seguir el argumento de la página 104, se encuentra que, cuando $n \to \infty$, la probabilidad de x éxitos durante el intervalo de tiempo T está dada por la correspondiente probabilidad de Poisson con el parámetro

$$\lambda = n \cdot p = \frac{T}{\Delta t} \cdot (\alpha \cdot \Delta t) = \alpha T$$

Puesto que λ es la media de esta distribución de Poisson, note que α es el número promedio (media) de éxitos por unidad de tiempo.

EJEMPLO **Cálculo de probabilidades concernientes a cheques malos**

Si un banco recibe en promedio $\alpha = 6$ cheques malos por día, ¿cuáles son las probabilidades de que recibirá

a) 4 cheques malos cualquier día dado?

b) 10 cheques malos durante cualesquiera 2 días consecutivos?

Solución *a*) Al sustituir $x = 4$ y $\lambda = \alpha T = 6 \cdot 1 = 6$ en la fórmula para la distribución de Poisson,

$$f(4; 6) = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{1{,}296(0.00248)}{24} = 0.134$$

b) Aquí $\lambda = \alpha \cdot 2 = 12$, así que se quiere encontrar $f(10; 12)$. Se escribe

$$\begin{aligned} f(10; 12) &= F(10; 12) - F(9; 12) \\ &= 0.347 - 0.242 \\ &= 0.105 \end{aligned}$$

donde los valores de $F(10; 12)$ y $F(9; 12)$ se obtuvieron de la tabla 2. ■

EJEMPLO **Cálculo de las probabilidades de imperfecciones**

En la inspección de la placa de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, 0.2 imperfecciones se marcan por minuto, en promedio. Encuentre las probabilidades de marcar

a) una imperfección en 3 minutos;

b) al menos dos imperfecciones en 5 minutos;

c) cuando mucho una imperfección en 15 minutos.

Solución Consulte en cada caso la tabla 2,

a) Con $\lambda = (0.2) \cdot 3 = 0.6$,

$$\begin{aligned} F(1; 0.6) - F(0; 0.6) &= 0.878 - 0.549 \\ &= 0.329 \end{aligned}$$

b) Con $\lambda = (0.2) \cdot 5 = 1.0$,

$$\begin{aligned} 1 - F(1; 1.0) &= 1 - 0.736 \\ &= 0.264 \end{aligned}$$

c) Con $\lambda = (0.2) \cdot 15 = 3.0$

$$F(1; 3.0) = 0.199$$ ■

La distribución de Poisson tiene muchas aplicaciones importantes en problemas de *colas*, donde se estaría interesado, por ejemplo, en el número de clientes que llegan por servicio a una cafetería, el número de barcos o camiones que llegan a descargar a un muelle receptor, el número de aviones que llegan a un aeropuerto, etcétera. Por ende si, en promedio, 0.3 clientes llegan por minuto a una cafetería, entonces la probabilidad de que exactamente 3 clientes llegarán durante un lapso de 5 minutos es

$$F(3; 1.5) - F(2; 1.5) = 0.934 - 0.809 = 0.125$$

y si, en promedio, 3 camiones llegan por hora a descargar a un almacén, entonces, la probabilidad de que cuando mucho 20 llegarán durante un día de 8 horas es

$$F(20; 24) = 0.243$$

Además si, en promedio, 14.5 aviones llegan por día a un aeropuerto privado, entonces, la probabilidad de que el número de llegadas en cualquier día estará en alguna parte entre 12 a 15, ambos valores inclusive, es

$$F(15; 14.5) - F(11; 14.5) = 0.619 - 0.220 = 0.399$$

4.8 Las distribuciones geométrica y binomial negativa

En la página 46 se indicó que se necesitaría un espacio muestral contablemente infinito, si se estuviera interesado en el número de automóviles que deben inspeccionar las personas, hasta encontrar uno cuya emisión de óxido de nitrógeno no cumpla con los estándares gubernamentales. Para tratar este tipo de problema en general, suponga que, en una secuencia de ensayos, usted está interesado en el número del ensayo en que ocurre el primer éxito. Se satisfacen las tres suposiciones para los ensayos Bernoulli, pero no la suposición adicional subyacente a la distribución binomial. En otras palabras, n no es fija.

Claramente, si el primer éxito es dar con el x-ésimo ensayo, debe estar precedido por $x - 1$ fracasos y, si la probabilidad de un éxito es p, la probabilidad de $x - 1$ fracasos en $x - 1$ ensayos es $(1 - p)^{x-1}$. Entonces, si se multiplica esta expresión por la probabilidad p de un éxito en el x-ésimo ensayo, se encuentra que la probabilidad de obtener el primer éxito en el x-ésimo ensayo está dada por

Distribución geométrica

$$g(x; p) = p(1 - p)^{x-1} \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Esta distribución de probabilidad se llama **distribución geométrica** y, como al lector se le pedirá verificar en el ejercicio 4.68 de la página 111, su media es

Media de distribución geométrica

$$\mu = \frac{1}{p}$$

EJEMPLO **Cálculo de una probabilidad usando la distribución geométrica**

Si la probabilidad de que cierto tipo de dispositivo de medición mostrará deriva excesiva es de 0.05, ¿cuál es la probabilidad de que el sexto dispositivo de medición sometido a prueba será el primero en mostrar deriva excesiva?

Solución Al sustituir $x = 6$ y $p = 0.05$ en la fórmula para la distribución geométrica, se obtiene

$$\begin{aligned} g(6; 0.05) &= (0.05)(1 - 0.05)^{6-1} \\ &= 0.039 \end{aligned}$$

■

La **distribución binomial negativa** describe el número total de ensayos Bernoulli, X, para obtener un número específico r de éxitos. Cuando $r = 1$, la binomial negativa se reduce a la distribución geométrica. Dado que, si el r-ésimo éxito ocurre en el ensayo número x, debe ser que $r - 1$ éxitos ocurrieron en los primeros $x - 1$ ensayos, y el último ensayo es un éxito. Entonces, la distribución de probabilidad es el producto de la probabilidad binomial $b(r - 1; x - 1, p)$ y p.

Distribución binomial negativa

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1 - p)^{x-r} \quad \text{para } x = r, r + 1, \ldots$$

Ejercicios

4.50 Pruebe que, para la distribución de Poisson,

$$\frac{f(x+1;\lambda)}{f(x;\lambda)} = \frac{\lambda}{x+1}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$

4.51 Use la fórmula de recursión del ejercicio 4.50 para calcular el valor de la distribución de Poisson con $\lambda = 3$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$, y 9, y dibuje el histograma de probabilidad de esta distribución. Verifique sus resultados consultando la tabla 2.

4.52 Use la tabla 2 para encontrar

a) $F(4;7)$; *b*) $f(4;7)$; *c*) $\sum_{k=6}^{19} f(k;8)$.

4.53 Use la tabla 2 para encontrar

a) $F(9;12)$; *b*) $f(9;12)$; *c*) $\sum_{k=3}^{12} f(k;7.5)$.

4.54 Use la distribución de Poisson para aproximar la probabilidad binomial $b(3; 100, 0.03)$.

4.55 En una ciudad dada, 6% de todos los conductores reciben al menos una multa por estacionarse mal por año. Use la aproximación de Poisson para la distribución binomial y determine las probabilidades de que, entre 80 conductores (elegidos al azar en esta ciudad):

a) 4 recibirán al menos una multa por estacionarse mal en algún año dado;

b) al menos 3 recibirán al menos una multa por estacionarse mal en algún año dado;

c) algunos entre 3 y 6, incluyendo ambos valores, recibirán al menos una multa por estacionarse mal en algún año dado.

4.56 Si 0.8% de los fusibles entregados a un arsenal están defectuosos, use la aproximación de Poisson para determinar la probabilidad de que 4 fusibles estarán defectuosos en una muestra aleatoria de 400.

4.57 El número de rayos gamma emitidos por segundo por cierta sustancia radiactiva es una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson con $\lambda = 5.8$. Si un instrumento de registro se vuelve inoperante cuando existen más de 12 rayos por segundo, ¿cuál es la probabilidad de que este instrumento se vuelva inoperante durante algún segundo dado?

4.58 Un ingeniero consultor recibe, en promedio, 0.7 solicitudes por semana. Si el número de solicitudes sigue un proceso de Poisson, encuentre la probabilidad de que

a) en una semana dada, habrá al menos 1 solicitud;

b) en un periodo dado de 4 semanas, habrá al menos 3 solicitudes.

4.59 En un mostrador de registro, los clientes llegan a un promedio de 1.5 por minuto. Encuentre las probabilidades de que

a) cuando mucho 4 llegarán en algún minuto dado;

b) al menos 3 llegarán durante un intervalo de 2 minutos;

c) cuando mucho 15 llegarán durante un intervalo de 6 minutos.

4.60 Una compañía renta tiempo en una computadora por periodos de t horas, por los cuales recibe \$600 por hora. El número de veces que la computadora se descompone durante t horas es una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson con $\lambda = (0.8)t$, y si la computadora se descompone x veces durante t horas, cuesta $50x^2$ dólares arreglarla. ¿Cómo debería la compañía seleccionar t con la finalidad de maximizar su ganancia esperada?

4.61 En una "prueba de tortura", un interruptor de luz se enciende y se apaga hasta que falla. Si la probabilidad de que el interruptor fallará cualquier tiempo que se enciende o se apaga es de 0.001, ¿cuál es la probabilidad de que el interruptor fallará *después* de que se haya encendido o apagado 1,200 veces? Suponga que se satisfacen las condiciones subyacentes a la distribución geométrica. [*Sugerencia:* utilice la fórmula para el valor de una progresión geométrica infinita.]

4.62 Un monitor automatizado del peso detecta latas de bebida sin rellenar con probabilidad 0.98. ¿Cuál es la probabilidad de que falle en detectar una lata sin rellenar por primera vez, cuando encuentra la 10a lata sin rellenar?

4.63 Una compañía fabrica robots de propósito especial, cuyos registros muestran que la probabilidad de que uno de sus nuevos robots requerirá reparaciones durante las pruebas de confirmación es de 0.10. ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo robot que construya en un mes sea el primero en requerir reparaciones?

4.64 Con referencia al ejercicio 4.63, encuentre la probabilidad de que el duodécimo robot construido en un mes sea el segundo en requerir reparaciones.

4.65 Durante un proceso de ensamblado, las piezas llegan tal y como se necesitan. Sin embargo, en una estación, la probabilidad de que una pieza defectuosa llegará en un periodo de una hora es de 0.01. Encuentre la probabilidad de que

a) exactamente 1 pieza defectuosa llegue en un lapso de 4 horas;

b) 1 o más piezas defectuosas lleguen en un lapso de 4 horas;

c) exactamente 1 pieza defectuosa llegue en un lapso de 4 horas y exactamente 1 pieza defectuosa llegue en el lapso de las siguientes 4 horas.

4.66 La llegada de camiones a una estación recolectora es un proceso de Poisson con una tasa media de arribo de 2 por hora.

a) Encuentre la probabilidad de que exactamente 5 camiones lleguen en un periodo de dos horas.

b) Encuentre la probabilidad de que 8 o más camiones lleguen en un periodo de dos horas.

c) Encuentre la probabilidad de que exactamente 2 camiones lleguen en un periodo de una hora y exac-

tamente 3 camiones lleguen en el siguiente periodo de una hora.

4.67 El número de fallas en un cable de fibra óptica sigue un proceso de Poisson con un promedio de 0.6 por 100 pies.

a) Encuentre la probabilidad de exactamente 2 fallas en un cable de 200 pies.

b) Encuentre la probabilidad de exactamente 1 falla en los primeros 100 pies y exactamente 1 falla en los segundos 100 pies.

4.68 Al diferenciar con respecto a p en ambos lados de la ecuación

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = 1$$

demuestre que la distribución geométrica

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots$$

tiene la media $1/p$.

4.69 Use las fórmulas que definen μ y σ^2 para mostrar que la media y la varianza de la distribución de Poisson son ambas iguales a λ.

4.70 Las probabilidades de Poisson pueden calcularse usando *MINITAB*.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability Distribution > Poisson
Elija **Probability**.
Elija **Input constant** e ingrese 2. Escriba 1.64 en **Mean**.
Haga clic en **OK**.

Salida:

Poisson con mu = 1.64000

x	$P(X = x)$
2.00	0.2609

Encuentre las probabilidades de Poisson para $x = 2$ y $x = 3$ cuando

a) $\lambda = 2.73$; *b*) $\lambda = 4.33$.

4.71 Las probabilidades acumuladas de Poisson pueden calcularse usando *MINITAB*.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability Distribution > Poisson
Elija **Cumulative Distribution**.
Elija **Input constant** e ingrese 2. Escriba 1.64 en **Mean**.
Haga clic en **OK**.

Salida:

Poisson con mu = 1.64000

x	$P(X <= x)$
2.00	0.7730

Encuentre las probabilidades de Poisson acumuladas para $x = 2$ y $x = 3$, cuando

a) $\lambda = 2.73$; *b*) $\lambda = 4.33$.

4.9 La distribución multinomial

Una generalización inmediata de la distribución binomial surge cuando cada ensayo puede tener más de dos resultados posibles. Esto ocurre, por ejemplo, cuando un producto fabricado se clasifica como superior, promedio o deficiente, cuando el desempeño de un estudiante se califica A, B, C, D o F, o cuando un experimento se juzga exitoso, no exitoso o no concluyente. Para tratar ese tipo de problema en general, considere el caso donde existen n ensayos independientes, donde cada ensayo permite k resultados mutuamente excluyentes, cuyas probabilidades respectivas son

$$p_1, p_2, \ldots, p_k \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Al referirse a los resultados como de primer tipo, segundo tipo, …, y k-ésimo tipo, se deberá estar interesado en la probabilidad $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de obtener x_1 resultados del primer tipo, x_2 resultados del segundo tipo, …, y x_k resultados del k-ésimo tipo, con

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

Al usar argumentos similares a los que se emplearon para derivar la ecuación para la distribución binomial de la sección 4.2, puede demostrarse que la probabilidad deseada está dada por

Distribución multinomial

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

para $x_i = 0, 1, \ldots, n$ para cada i, pero con la x_i sometida a la restricción

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

La **distribución de probabilidad conjunta**, cuyos valores están dados por dichas probabilidades, se llama **distribución multinomial**; debe su nombre al hecho de que, para los diversos valores de las x_i, las probabilidades están dadas por los términos correspondientes de la expansión multinomial de $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n$.

EJEMPLO **Cálculo de una probabilidad usando la distribución multinomial**

Las probabilidades de que la bombilla de cierto tipo de proyector durará menos de 40 horas de uso continuo, entre 40 a 80 horas de uso continuo, o más de 80 horas de uso continuo, son 0.30, 0.50 y 0.20. Encuentre la probabilidad de que, entre ocho de tales bombillas, 2 durarán menos de 40 horas, 5 durarán entre 40 a 80 horas y 1 durará más de 80 horas.

Solución Sustituyendo $n = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, $p_1 = 0.30$, $p_2 = 0.50$ y $p_3 = 0.20$ en la fórmula,

$$\begin{aligned} f(2, 5, 1) &= \frac{8!}{2!5!1!}(0.30)^2(0.50)^5(0.20)^1 \\ &= 0.0945 \end{aligned}$$

■

Ejercicios

4.72 Suponga que las probabilidades son, respectivamente, 0.40, 0.40 y 0.20 de que conducir en la ciudad cierto tipo de automóvil importado promediará menos de 22 millas por galón, entre 22 a 25 millas por galón, o más de 25 millas por galón. Encuentre la probabilidad de que, entre 12 de tales autos probados, 4 promediarán menos de 22 millas por galón, 6 promediarán entre 22 y 25 millas por galón y 2 promediarán más de 25 millas por galón.

4.73 Como puede demostrarse fácilmente, las probabilidades de obtener 0, 1 o 2 caras con un par de monedas equilibradas son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir 2 caras dos veces, 1 cara y 1 cruz tres veces y 2 caras una vez en 6 lanzamientos de un par de monedas equilibradas?

4.74 Suponga que las probabilidades son 0.89, 0.09 y 0.02, de que el acabado en un automóvil nuevo se calificará como aceptable, fácilmente reparable o inaceptable. Encuentre la probabilidad de que, entre 20 autos pintados una mañana, 17 tengan acabados aceptables, 2 tengan acabados reparables y 1 acabado sea inaceptable.

4.75 Con el mismo tipo de razonamiento que en la derivación de la fórmula para la distribución hipergeométrica, se puede derivar una fórmula que sea análoga a la distribución multinomial, pero que se aplique a muestreo sin reemplazo. Un conjunto de N objetos contiene a_1 objetos del primer tipo, a_2 objetos del segundo tipo, …, y a_k objetos del k-ésimo tipo, de modo que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = N$. El número de formas en las que se pueden seleccionar x_1 objetos del primer tipo, x_2 objetos del segundo tipo, …, y x_k objetos del k-ésimo tipo está dado por el producto del número de formas en que puede seleccionar x_1 de los a_1 objetos del primer tipo, x_2 de los a_2 objetos del segundo tipo, …, y x_k de los a_k objetos del k-ésimo tipo. Por consiguiente, la probabilidad de obtener tantos objetos de cada tipo es simplemente este producto, dividido entre el número total de formas en las cuales $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ objetos pueden seleccionarse del conjunto total de N objetos.

a) Escriba una fórmula para la probabilidad de obtener x_1 objetos del primer tipo, x_2 objetos del segundo tipo, …, y x_k objetos del k-ésimo tipo.

b) Si 20 bloques de vidrio defectuosos incluyen 10 que tienen grietas pero no se decoloraron, 7 que se decoloraron pero no tienen grietas y 3 que tienen grietas y se decoloraron, ¿cuál es la probabilidad de que, entre 6 de los bloques elegidos al azar para verificación ulterior, 3 solo tendrán grietas, 2 solo estarán decolorados y 1 tendrá grietas así como decoloración?

4.10 Simulación

En años recientes se han aplicado técnicas de simulación a muchos problemas en diversas ciencias, y si los procesos que se simulan incluyen un elemento de azar, dichas técnicas se conocen como **métodos de Monte Carlo**. Muy a menudo, el uso de la simulación de Monte Carlo elimina el costo de construir y operar equipo costoso; se utiliza, por ejemplo, en el estudio de colisiones de fotones con electrones, la dispersión de neutrones y fenómenos similares complicados. Los métodos de Monte Carlo también son útiles en situaciones donde es imposible la experimentación directa, por decir, en estudios de la dispersión de una epidemia de cólera que, desde luego, no puede inducirse experimentalmente en poblaciones humanas. Además, las técnicas de Monte Carlo en ocasiones se aplican a la solución de problemas matemáticos que no pueden resolverse por medios directos, o donde una solución directa sea demasiado costosa o requiera mucho tiempo.

Un ejemplo clásico del uso de los métodos de Monte Carlo en la solución de un problema de matemáticas puras es la determinación de π (la razón de la circunferencia de un círculo con su diámetro) por medios probabilísticos. A principios del siglo XVIII, el naturalista francés George de Buffon probó que, si una aguja muy fina de longitud a se lanza al azar sobre un tablero marcado con líneas paralelas equidistantes, la probabilidad de que la aguja se intersecará con una de las líneas es $2a/\pi b$, donde b es la distancia entre las líneas paralelas. Lo que es notable acerca de este hecho es que implica la constante $\pi = 3.1415926\ldots$, que en geometría elemental se aproxima mediante las circunferencias de polígonos regulares encerrados en un círculo de radio $\frac{1}{2}$. El resultado de Buffon implica que, si tal aguja realmente se lanza muchas veces, la proporción de las veces que cruza una de las líneas ofrece una estimación de $2a/\pi b$ y, por lo tanto, una estimación de π, pues se conocen a y b. Los primeros experimentos de este tipo dieron como resultado una estimación de 3.1596 (con base en 5,000 ensayos) y una estimación de 3.155 (con base en 3,204 ensayos) a mediados del siglo XIX.

Aunque los métodos de Monte Carlo en ocasiones se basan en dispositivos de juego reales (por ejemplo, la aguja que se lanza en la estimación de π), por lo general es conveniente emplear los llamados **dígitos aleatorios** o **números aleatorios** generados por software de computadora. Se ilustrará una aplicación con el uso de una tabla de números aleatorios, que consiste en muchas páginas donde los dígitos de 0, 1, 2, …, y 9 se establecen en forma "aleatoria", de modo muy parecido a como aparecerían si se generaran uno a la vez mediante un dispositivo de juego que diera a cada dígito igual probabilidad de ser seleccionado. En realidad, también podría construir dicha tabla usted mismo (por decir, al sacar repetidamente de un sombrero tiras de papel numeradas o al usar una peonza construida de manera perfecta); no obstante, en la práctica tales tablas usualmente se generan mediante computadoras.

Aunque las tablas de números aleatorios se construyen de modo que los dígitos pueden considerarse como valores de una variable aleatoria que tiene la distribución uniforme discreta $f(x) = \frac{1}{10}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$, o 9, sirven para simular valores de cualquier variable aleatoria discreta e incluso variables aleatorias continuas.

Para ilustrar el uso de una tabla de números aleatorios, simule, por decir, el lanzamiento de tres monedas equilibradas. La distribución para el número de caras es

Número de caras	Probabilidad
0	$1/8 = 0.125$
1	$3/8 = 0.375$
2	$3/8 = 0.375$
3	$1/8 = 0.125$

Dado que las probabilidades en tal distribución están dadas a tres lugares decimales, use números aleatorios de tres dígitos. El esquema es asignar 125 (o un octavo) de los 1,000 números aleatorios de 000 a 999 a 0 caras, 375 (o tres octavos) a 1 cara, 375 (o tres octavos) a 2 caras, y 125 (o un octavo) a 3 caras.

Se utiliza el siguiente esquema:

Número de caras	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Números aleatorios
0	0.125	0.125	000-124
1	0.375	0.500	125-449
2	0.375	0.875	500-874
3	0.125	1.000	875-999

La columna de **probabilidades acumuladas** se agregó para facilitar la asignación de los números aleatorios. Observe que, en cada caso, el último dígito aleatorio es uno menos que el número formado por los tres dígitos decimales de la probabilidad acumulada correspondiente.

Con este esquema, si arbitrariamente se usan las columnas vigésimo segunda, vigésimo tercera y vigésimo cuarta de la primera página de la tabla 7, comenzado con la sexta fila y yendo hacia abajo de la página, se obtiene 197, 365, 157, 520, 946, 951, 948, 568, 586 y 089, y esto se interpreta como 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2 y 0 caras.

El método ilustrado aquí con referencia a un juego de azar puede usarse para simular observaciones de cualquier variable aleatoria con una distribución de probabilidad dada.

Sin embargo, en la práctica, es mucho más eficiente usar software de cómputo común con base en este esquema.

EJEMPLO **Simulación de la llegada de automóviles a una caseta de cobro**

Suponga que las probabilidades son 0.082, 0.205, 0.256, 0.214, 0.134, 0.067, 0.028, 0.010, 0.003 y 0.001 de que 0, 1, 2, 3, …, o 9 automóviles llegarán a una caseta de cobro de una carretera, durante cualquier intervalo de un minuto temprano en la tarde.

Use software de computadora para simular la llegada de los autos a la caseta durante 20 intervalos de un minuto temprano en la tarde.

Solución Se ilustra usando *MINITAB* con los valores establecidos en C1 y las probabilidades en C2.

Datos:
C1: 0, 1, . . . , 9
C2: 0.082, 0.205, . . . , 0.001

Cuadro de diálogo:
Calc > Random Data > Discrete
Escriba 20 después de **Generate**. Escriba *C*3 abajo de **Store**. Escriba *C*1 en **Values in:**. Escriba *C*2 en **Probabilities in**. Haga clic en **OK**.

Salida:

4	1	5	4	1	2	5	0	1	4
3	3	1	0	1	1	2	5	1	2

Suponga que usted está interesado en un evento un tanto complejo, por decir, 11 o más automóviles llegan en al menos un intervalo de tres minutos, entre los 20 intervalos de un minuto. Es asunto simple repetir la simulación de 20 periodos de un minuto 100 veces. La probabilidad de que 11 o más autos lleguen en, al menos, un intervalo de tres minutos se estima mediante la proporción de veces que ocurre el evento. En la muestra sencilla de tamaño 20 presente aquí, dicho evento no ocurre. ■

Ejercicios

4.76 Simule lanzar una moneda.

a) Para una moneda equilibrada, genere 100 lanzamientos.

b) Para una moneda con probabilidad de caras de 0.8, genere 100 lanzamientos.

4.77 Las probabilidades de que un vendedor de software de computadora hará 0, 1, 2, 3, 4 o 5 ventas en cualquier día son 0.14, 0.28, 0.27, 0.18, 0.09 y 0.04.

a) Simule las ventas del vendedor en 25 días.

b) Repita la simulación de ventas en 25 días un total de 100 veces. Estime la probabilidad de que las ventas en tres días consecutivos sean mayores que 9.

4.78 Dependiendo de la disponibilidad de piezas, una compañía puede fabricar 3, 4, 5 o 6 unidades de ciertos artículos por semana, con probabilidades correspondientes de 0.10, 0.40, 0.30 y 0.20. Las probabilidades de que habrá una demanda semanal de 0, 1, 2, 3, …, u 8 unidades son, respectivamente, 0.05, 0.10, 0.30, 0.30, 0.10, 0.05, 0.05, 0.04 y 0.01. Si una unidad se vende durante la semana cuando se fabrica, generará una ganancia de $100; esta ganancia se reduce en $20 por cada semana que se almacena una unidad. Simule la operación de esta compañía para 50 semanas consecutivas y estime su ganancia semanal esperada.

Sí y no

Sí

1. Tenga en mente que cualquier esquema para asignar un valor numérico a cada resultado posible debería cuantificar una característica del resultado que sea importante para el científico. Esto es: cualquier variable aleatoria tiene que aportar información pertinente acerca del resultado.
2. Describa el comportamiento azaroso de una variable aleatoria discreta x mediante su función de distribución de probabilidad

$$f(x) = P[X = x] \qquad \text{para cada posible valor } x$$

3. Resuma una distribución de probabilidad, o la variable aleatoria, mediante su

$$\text{media:} \quad \mu = \sum_{\text{todo } x} x \cdot f(x)$$

$$\text{varianza:} \quad \sigma^2 = \sum_{\text{todo } x} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

4. Utilice una familia especial de distribuciones, por ejemplo, la distribución binomial

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \qquad \text{para } x = 0, 1, \ldots, n$$

que tenga media np y varianza $np(1-p)$, si las suposiciones subyacentes son razonables. La distribución hipergeométrica puede mantenerse cuando se hace muestreo sin reemplazo de una colección finita de unidades, cada una de las cuales es uno de dos tipos posibles. Estará bien aproximada por la binomial cuando el tamaño muestral n sea una pequeña fracción del tamaño de la población N.

5. Para conteos cuyos posibles valores no tengan un límite superior específico, considere la distribución de Poisson

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots \qquad \lambda > 0$$

que tenga media λ y varianza λ. Necesita comprobar que la distribución de Poisson sea razonable. La media y la varianza de la muestra deberían ser aproximadamente del mismo tamaño.

No

1. Nunca aplique la distribución binomial a conteos, sin verificar primero que se sostengan las condiciones para los ensayos Bernoulli: ensayos independientes con la misma probabilidad de éxito para cada ensayo. Si las condiciones se satisfacen, entonces la distribución binomial es adecuada para el número de éxitos en un número fijo de ensayos.
2. Nunca use la fórmula $np(1-p)$ para la varianza de un conteo de éxitos, sin comprobar que los ensayos sean independientes.

Ejercicios de repaso

4.79 Un fabricante de teléfonos digitales tiene la siguiente distribución de probabilidad para el número de defectos por teléfono:

x	$f(x)$
0	.89
1	.07
2	.03
3	.01

a) Determine la probabilidad de 2 o más defectos.

b) ¿Un teléfono seleccionado al azar es más probable que tenga 0 defectos, o 1 o más defectos?

4.80 Al revisar el uso reciente de las salas de conferencias en una firma de consultoría, un ingeniero industrial determinó la siguiente distribución de probabilidad para el número de solicitudes para una sala de conferencias por medio día:

x	$f(x)$
0	.07
1	.15
2	.45
3	.25
4	.08

a) Actualmente, el edificio tiene dos salas de conferencias. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de solicitudes superará el número de salas para medio día determinado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos salas de conferencias no se utilizarán por completo en medio día determinado?

c) ¿Cuántas salas de conferencias adicionales se requieren, de manera que la probabilidad de negar una solicitud no sea de más de 0.10?

4.81 Consulte el ejercicio 4.80 y obtenga

a) la media; *b*) la varianza; *c*) la desviación estándar para el número de solicitudes por sala de conferencias.

4.82 Determine si las siguientes expresiones pueden ser distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria que tome tan solo los valores de 0, 1 y 2:

a) $f(0) = 0.34 \quad f(1) = 0.34$ y $f(2) = 0.34$.

b) $f(0) = 0.2 \quad f(1) = 0.6$ y $f(2) = 0.2$.

c) $f(0) = 0.7 \quad f(1) = 0.4$ y $f(2) = -0.1$.

4.83 Compruebe si las siguientes expresiones pueden definir distribuciones de probabilidad y explique sus respuestas.

a) $f(x) = \dfrac{x}{10}$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) $f(x) = \frac{1}{3}$, para $x = -1, 0, 1$.

c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$, para $x = 0, 1, 2, 3$.

4.84 Un jugador de básquetbol encesta 90% de sus tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que falle la primera vez en el séptimo tiro?

4.85 Si la probabilidad de que una falla de un proceso de producción automatizado superará 2 minutos es de 0.20, encuentre la probabilidad de que 3 de 8 fallas del proceso superarán 2 minutos, usando *a*) la fórmula para la distribución binomial; *b*) la tabla 1.

4.86 Si la probabilidad es de 0.85 de que la batería para cámara digital completamente cargada tomará 150 o más fotografías, encuentre las probabilidades de que entre 18 de tales baterías

a) 16 tomarán 150 fotografías o más;

b) al menos 14 tomarán 150 fotografías o más;

c) cuando mucho 2 no tomarán 150 fotografías o más.

4.87 En 16 experimentos que estudian el comportamiento eléctrico de células individuales, 12 usan microelectrodos hechos de metal y los otros 4 usan microelectrodos hechos con tubos de vidrio. Si 2 de los experimentos concluyen por razones financieras y se seleccionan al azar, ¿cuáles son las probabilidades de que

a) ninguno use microelectrodos hechos con tubo de vidrio?

b) solo uno use microelectrodos hechos con tubo de vidrio?

c) ambos usen microelectrodos hechos con tubo de vidrio?

4.88 Como puede verificarse fácilmente mediante la fórmula para distribución binomial, las probabilidades de obtener 0, 1, 2 o 3 caras en 3 lanzamientos de una moneda, cuya probabilidad de caras es de 0.4, son 0.216, 0.432, 0.288 y 0.064. Encuentre la media de esta distribución de probabilidad usando

a) la fórmula que define μ;

b) la fórmula especial para la media de una distribución binomial.

4.89 Con referencia al ejercicio 4.88, encuentre la varianza de la distribución de probabilidad usando

a) la fórmula que define σ^2;

b) la fórmula especial para la varianza de una distribución binomial.

4.90 Encuentre la media y la desviación estándar de la distribución de cada una de las siguientes variables aleatorias (que tienen distribuciones binomiales):

a) El número de caras en 440 lanzamientos de una moneda equilibrada.

b) El número de 6 en 300 lanzamientos de un dado equilibrado.

c) El número de defectos en una muestra de 700 partes fabricadas por una máquina, cuando la probabilidad sea de 0.03 de que alguna de las piezas esté defectuosa.

4.91 Use la distribución de Poisson para aproximar la probabilidad binomial $b(1; 100, 0.02)$.

4.92 Con referencia al ejercicio 4.87, encuentre la media y la varianza de la distribución del número de microelectrodos hechos de tubo de vidrio, usando

a) las probabilidades obtenidas en dicho ejercicio;

b) las fórmulas especiales para la media y la varianza de una distribución hipergeométrica.

4.93 El número diario de pedidos levantados por el departamento de partes de un taller de reparaciones es una variable aleatoria con $\mu = 142$ y $\sigma = 12$. De acuerdo con el teorema de Chebyshev, ¿con qué probabilidad se puede afirmar que en cualquier día se levantarán entre 82 y 202 pedidos?

4.94 Los registros muestran que la probabilidad es de 0.00004 de que a un automóvil se le pinchará un neumático mientras conduce a través de cierto túnel. Use la fórmula para la distribución de Poisson y aproxime la probabilidad de que al menos a 2 de 10,000 autos que pasan a través del túnel se les pinchará un neumático.

4.95 El número de descomposturas semanales de una computadora es una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con $\lambda = 0.2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora operará sin una descompostura durante 3 semanas consecutivas?

4.96 Un fabricante determina que una pantalla de HDTV grande tiene probabilidades de 0.8, 0.15, 0.05, respectivamente, de colocarse en las categorías aceptable, defecto menor o defecto mayor. Si se inspeccionan 3 HDTV,

a) encuentre la probabilidad de que 2 sean aceptables y 1 tenga un defecto menor;

b) encuentre la distribución marginal del número en defecto menor;

c) compare su respuesta en el inciso *b*) con las probabilidades binomiales $b(x; 3, 0.15)$. Comente.

4.97 Suponga que las probabilidades son 0.2466, 0.3452, 0.2417, 0.1128, 0.0395, 0.0111, 0.0026 y 0.0005 de que habrá 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7 derrames contaminantes en los Grandes Lagos cualquier día. Simule el número de derrames contaminantes en los Grandes Lagos en 30 días.

4.98 Un candidato invitado para una visita tiene probabilidad de 0.6 de ser contratado. Sea X el número de candidatos que visitan antes de contratar a 2. Encuentre

a) $P(X \leq 4)$;

b) $P(X \geq 5)$.

Términos clave

Coeficiente binomial 87
Curtosis 99
Desviación estándar 97
Distribución binomial 87
Distribución binomial negativa 109
Distribución con sesgo negativo 89
Distribución con sesgo positivo 89
Distribución de Poisson 104
Distribución de probabilidad 83
Distribución de probabilidad conjunta 112
Distribución geométrica 109
Distribución hipergeométrica 89
Distribución multinomial 111
Distribución sesgada 89
Distribución simétrica 88
Ensayos Bernoulli 85
Ensayos repetidos 85
Función de distribución 84
Función de distribución acumulada 84
Gráfica de barras 84
Histograma de probabilidad 83
k-ésimo momento con respecto a la media 99
k-ésimo momento con respecto al origen 98
Ley de los grandes números 102
Media 94
Métodos de Monte Carlo 113
Muestreo con reemplazo 89
Muestreo sin reemplazo 89
Números aleatorios 113
Parámetro 87
Probabilidad acumulada 87
Proceso aleatorio 107
Teorema de Chebyshev 100
Variable aleatoria 82
Variable aleatoria discreta 83
Varianza 97

CAPÍTULO 5

DENSIDADES DE PROBABILIDAD

Los espacios muestrales continuos y las variables aleatorias continuas surgen cuando se trata con cantidades que se miden en una escala continua; por ejemplo, cuando se miden la velocidad de un automóvil, la cantidad de alcohol en la sangre de un ser humano, la eficiencia de un recolector solar o la resistencia a la tensión de una nueva aleación.

En este capítulo aprenderá cómo determinar y trabajar con probabilidades relacionadas con espacios muestrales continuos y variables aleatorias continuas. A la introducción a las densidades de probabilidad en la sección 5.1 sigue una discusión de la distribución normal en las secciones 5.2 y 5.3, y varias otras densidades de probabilidad especiales en las secciones 5.4 a 5.9. Los problemas que incluyen más de una variable aleatoria se examinan en la sección 5.10. La sección 5.11 presenta el método de función generadora de momentos, una herramienta para encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. En la sección 5.12 se introduce un método para comprobar si una distribución normal parece generar un conjunto de datos.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

5.1 Variables aleatorias continuas 119
5.2 La distribución normal 125
5.3 La aproximación normal a la distribución binomial 132
5.4 Otras densidades de probabilidad 135
5.5 La distribución uniforme 135
5.6 La distribución logarítmica normal 136
5.7 La distribución gamma 138
5.8 La distribución beta 141
5.9 La distribución de Weibull 142
5.10 Distribuciones conjuntas discretas y continuas 145
5.11 Funciones generadoras de momentos 157
5.12 Cómo verificar si los datos son normales 163
5.13 Transformación de observaciones a normalidad cercana 165
5.14 Simulación 167
Ejercicios de repaso 171
Términos clave 172

5.1 Variables aleatorias continuas

Cuando se introdujo por primera vez el concepto de una variable aleatoria en el capítulo 4, se presentó como una función de valor real definida sobre el espacio muestral de un experimento, cuya idea se ilustró con la variable aleatoria que proporciona el número de atributos preferidos que posee un automóvil usado, al asignar los números 0, 1, 2 o 3 (el que sea adecuado) a los 18 posibles resultados del experimento. En el caso continuo, donde las variables aleatorias pueden asumir valores sobre una escala continua, el procedimiento es muy similar. Los resultados de un experimento se representan mediante los puntos sobre un segmento de línea o una línea. Entonces, se crea una variable aleatoria al asignar de manera adecuada un número a cada punto mediante alguna regla o ecuación. Cuando el valor de una variable aleatoria se da directamente mediante una medición u observación, por lo general, uno no se molesta por diferenciar entre el valor de la variable aleatoria, la medición que se obtiene y el resultado del experimento, que es el punto correspondiente sobre el eje real. Si un experimento consiste en determinar qué fuerza se requiere para romper un espécimen en una prueba de tensión dada, el resultado en sí, por decir, 138.4 libras, es el valor de la variable aleatoria, X, por la cual uno se interesa. En tal caso, no hay necesidad real de agregar que el espacio muestral del experimento consiste en todos (o parte de) los puntos en el eje real positivo. En general, se escribirá $P(a \leq X \leq b)$ para la probabilidad asociada con los puntos del espacio muestral, cuyo valor de una variable aleatoria cae en el intervalo de a a b.

El problema de definir probabilidades en conexión con espacios muestrales continuos y variables aleatorias continuas conlleva algunas complicaciones. Para ilustrar la naturaleza de dichas complicaciones, considere la siguiente situación. Suponga que desea saber la probabilidad de que, si hay un accidente en una autopista cuya longitud es de 200 millas, ocurrirá en alguna ubicación dada o, acaso, en algún tramo específico de la carretera. Los

resultados de este experimento pueden considerarse como un continuo de puntos; a saber, los del intervalo continuo de 0 a 200. Suponga que la probabilidad de que el accidente ocurra en algún intervalo de longitud L es $L/200$, con L medida en millas. Note que esta asignación arbitraria de probabilidad es consistente con los axiomas 1 y 2 de la página 58, pues las probabilidades son todas no negativas y menores que o iguales a 1, y $P(S) = \frac{200}{200} = 1$. Desde luego, hasta el momento solo se consideran eventos representados por intervalos que forman parte del segmento de línea de 0 a 200. Al usar el axioma 3′ de la página 104, también se obtienen las probabilidades de eventos que no son intervalos sino que pueden representarse mediante la unión de intervalos finitos o contables. Por ende, para dos intervalos que no se traslapan, de longitudes L_1 y L_2, se tiene una probabilidad de

$$\frac{L_1 + L_2}{200}$$

y para una secuencia infinita de intervalos que no se traslapan de longitudes $L_1, L_2, L_3, \ldots$, hay una probabilidad de

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \cdots}{200}$$

Observe que la probabilidad de que el accidente ocurra en algún punto determinado es igual a cero, porque puede considerar un punto como un intervalo de longitud cero. Sin embargo, la probabilidad de que el accidente ocurra en un intervalo muy corto es positiva; por ejemplo, para un intervalo de 1 pie de longitud, la probabilidad es $(5{,}280 \times 200)^{-1} = 9.5 \times 10^{-7}$.

Por lo tanto, al extender el concepto de probabilidad al caso continuo, nuevamente se utilizan los axiomas 1, 2 y 3′, pero deberá restringir el significado del término *evento*. En cuanto a las consideraciones prácticas, tal restricción no es de consecuencia: simplemente no se asignan probabilidades a conjuntos de puntos más bien confusos, que no pueden expresarse como las uniones o intersecciones de muchos intervalos finitos o contables.

Desde luego, la forma en que se asignan probabilidades en el ejemplo anterior es muy especial; es similar en naturaleza a la forma en que se asignan probabilidades iguales a las seis caras de un dado, caras y cruces, las 52 cartas en un mazo estándar, etcétera. Para tratar el problema de asociar probabilidades con variables aleatorias continuas de manera general, suponga que está interesado en la probabilidad de que una variable aleatoria dada tomará un valor en el intervalo de a a b, donde a y b son constantes con $a \leq b$. Más aún, suponga que el intervalo de a a b se divide en m subintervalos iguales de ancho Δx que contienen, respectivamente, los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y que la probabilidad de que la variable aleatoria tomará un valor en el subintervalo que contiene x_i está dada por $f(x_i) \cdot \Delta x$. Entonces, la probabilidad de que la variable aleatoria en que uno está interesado tomará un valor en el intervalo de a a b está dada por

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Ahora, si f es una función integrable definida por todos los valores de la variable aleatoria en que uno está interesado, deberá definir la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria caiga entre a y b al hacer $\Delta x \to 0$, a saber, como

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Como se ilustra en la figura 5.1, esta definición de probabilidad en el caso continuo presupone la existencia de una función adecuada f que, integrada desde cualquier constante a hasta cualquier constante b (con $a \leq b$), da como resultado la probabilidad de que la

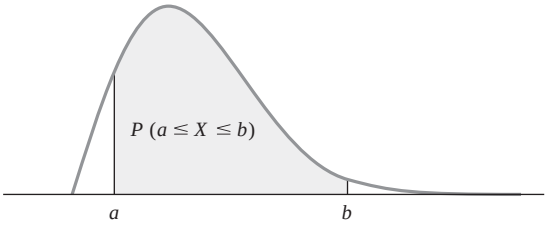


Figura 5.1
Probabilidad como área bajo f

correspondiente variable aleatoria tome un valor en el intervalo de a a b. Advierta que el valor $f(x)$ no da la probabilidad de que la variable aleatoria correspondiente tome el valor x. En el caso continuo, las probabilidades están dadas por integrales y no por los valores $f(x)$.

Para obtener la probabilidad de que una variable aleatoria realmente tomará un valor dado x, primero se determina la probabilidad de que tomará un valor en el intervalo de $x - \Delta x$ a $x + \Delta x$, y luego hacer $\Delta x \to 0$. Sin embargo, si se hiciera esto, sería evidente que el resultado siempre es cero. El hecho de que la probabilidad siempre sea cero de que una variable aleatoria continua tomará algún valor dado x no debería ser perturbador. De hecho, la definición de probabilidad para el caso continuo ofrece un modelo notablemente bueno para tratar las mediciones u observaciones. Debido a los límites de la habilidad para medir, los datos experimentales nunca parecen provenir de un espacio muestral continuo. Por ende, aunque las temperaturas productivamente se consideran como puntos en una escala continua, si se reporta una medición de temperatura de 74.8 grados centígrados, en realidad ello significa que la temperatura se encuentra en el intervalo de 74.75 a 74.85 grados centígrados, y no que sea exactamente 74.800…

Es importante agregar que, cuando se dice que hay una probabilidad cero de que una variable aleatoria tomará algún valor dado x, esto no significa que sea imposible que la variable aleatoria tome el valor x. En el caso continuo, una probabilidad cero no implica imposibilidad lógica, pero todo el asunto es principalmente académico pues, debido a las limitaciones de la habilidad de medir y observar, siempre se está interesado en las probabilidades conectadas con intervalos y no con puntos aislados.

Como consecuencia inmediata del hecho de que el caso continuo las probabilidades asociadas con puntos individuales son siempre cero, se encuentra que, si se habla de la probabilidad asociada con el intervalo de a a b, no importa si se incluye algún punto extremo. De manera simbólica,

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Al establecer una analogía con el concepto de una función de densidad en física, a las funciones f, cuya existencia se estipuló al extender la definición de probabilidad a casos continuos, se les llama **funciones de densidad de probabilidad**, o simplemente **densidades de probabilidad**. Mientras que las funciones de densidad se integran para obtener pesos, las funciones de densidad de probabilidad se integran para obtener probabilidades. Se seguirá la práctica común de también llamar $f(x)$ a la función de densidad de probabilidad, en el entendido de que se hace referencia a la función f que asigna el valor $f(x)$ a x, para cada x que sea un posible valor para la variable aleatoria X.

Puesto que una densidad de probabilidad, integrada entre cualesquiera dos constantes a y b, da como resultado la probabilidad de que una variable aleatoria adquiera un valor entre dichos límites, f no tan solo puede ser alguna función integrable con valor real. Sin embargo, si se imponen las condiciones de que

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para toda } x$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

se puede demostrar que se satisfacen los axiomas de probabilidad (con la modificación acerca de los eventos discutida en la página 120). Advierta la similitud entre dichas condiciones y las de las distribuciones de probabilidad dadas en la página 83.

Como en el caso discreto, se escribirá como $F(x)$ la probabilidad de que una variable aleatoria con la densidad de probabilidad $f(x)$ tome un valor menor que o igual a x y, de nuevo, se referirá a la correspondiente función F como la **función de distribución acumulada** o tan solo la **función de distribución** de la variable aleatoria. Por ende, para cualquier valor x, $F(x) = P(X \leq x)$ es el área bajo la función de densidad de probabilidad sobre el intervalo $-\infty$ a x. En la notación usual del cálculo para la integral,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

En consecuencia, la probabilidad de que la variable aleatoria tomará un valor en el intervalo de a a b es $F(b) - F(a)$, y, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, se sigue que

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

siempre que exista esta derivada.

EJEMPLO

Cálculo de probabilidades a partir de la función de densidad de probabilidad

Si una variable aleatoria tiene la densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

encuentre las probabilidades de que tomará un valor

a) entre 1 y 3;
b) mayor que 0.5.

Solución Al evaluar las integrales necesarias, se obtiene

a)
$$\int_{1}^{3} 2e^{-2x}\,dx = e^{-2} - e^{-6} = 0.133$$

b)
$$\int_{0.5}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = e^{-1} = 0.368$$

■

Note que en el ejemplo anterior se hizo que el dominio de f incluyera todos los números reales, aun cuando la probabilidad sea cero de que x será negativa. Esta es una práctica que se seguirá a lo largo del libro. También es evidente, de la gráfica de esta función en la figura 5.2, que tiene una discontinuidad en $x = 0$; de hecho, una densidad de probabilidad no necesita ser continua en todas partes, en tanto sea integrable entre cualesquiera dos límites a y b (con $a \leq b$) y cumpla con las propiedades de un función de densidad de probabilidades.

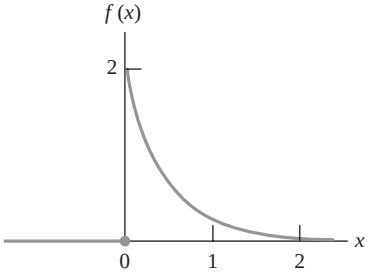


Figura 5.2
Gráfica de densidad de probabilidad $f(x) = 2e^{2x}$, $x > 0$

EJEMPLO

Determinación de una función de distribución a partir de su función de densidad

Con respecto al ejemplo anterior, encuentre la función de distribución y úsela para determinar la probabilidad de que la variable aleatoria tomará un valor menor que o igual a 1.

Solución Al realizar las integraciones necesarias,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x 2\,e^{-2t}dt = 1 - e^{-2x} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

y la sustitución de $x = 1$ da como resultado

$$F(1) = 1 - e^{-2} = 0.865$$

■

Observe que la función de distribución de este ejemplo es no decreciente y que $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$. De hecho, por definición se sigue que dichas propiedades las comparten todas las funciones de distribución.

EJEMPLO

Una función de densidad de probabilidad asigna probabilidad uno a $(-\infty, \infty)$

Encuentre k de modo que la siguiente expresión sirva como la densidad de probabilidad de una variable aleatoria:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ kxe^{-4x^2} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Solución Para satisfacer la primera de las dos condiciones de la página 121, k tiene que ser no negativa, y para satisfacer la segunda condición se debe tener

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} kxe^{-4x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{k}{8} \cdot e^{-u}\,du = \frac{k}{8} = 1$$

de modo que $k = 8$. ■

Las medidas estadísticas que se utilizan para describir densidades de probabilidad son muy similares a las utilizadas para describir distribuciones de probabilidad. Al sustituir las sumas con integrales, se define el ***k*-ésimo momento con respecto al origen** como

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx$$

similar a la definición dada en la página 98. El primer momento con respecto al origen nuevamente se conoce como **media**, y se denota con μ. También se le llama valor esperado de una variable aleatoria que tenga la densidad de probabilidad $f(x)$.

Media de una densidad de probabilidad

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

También se define el ***k*-ésimo momento con respecto a la media** como

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x)\,dx$$

En particular, al segundo momento con respecto a la media nuevamente se le conoce como **varianza** y se escribe σ^2; como antes, mide la dispersión de una densidad de probabilidad, en el sentido que da el valor esperado de la desviación al cuadrado a partir de la media.

Varianza de una densidad de probabilidad

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Además, a σ nuevamente se le conoce como la **desviación estándar**.

EJEMPLO

Determinación de la media y la varianza usando la función de densidad de probabilidad

Con respecto al ejemplo de la página 122, encuentre la media y la varianza de la densidad de probabilidad dada.

Solución Al realizar las integraciones necesarias, usando las integraciones por partes, se obtiene

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot 2e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}$$

y

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\, e^{-2x}\, dx = \frac{1}{4}$$

■

Ejercicios

5.1 Verifique que la función del ejemplo en la página 122 es, de hecho, una densidad de probabilidad.

5.2 Si la densidad de probabilidad de una variable aleatoria está dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

encuentre el valor k y la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor

a) entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$; *b*) mayor que $\frac{2}{3}$.

5.3 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre la correspondiente función de distribución y úsela para determinar las probabilidades de que una variable aleatoria con esta función de distribución tomará un valor

a) mayor que 0.8; *b*) entre 0.2 y 0.4.

5.4 Si la densidad de probabilidad de una variable aleatoria está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

determine las probabilidades de que una variable aleatoria con tal densidad de probabilidad tomará un valor

a) entre 0.2 y 0.8; *b*) entre 0.6 y 1.2.

5.5 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre la correspondiente función de distribución, y úsela para determinar las probabilidades de que una variable aleatoria con la función de distribución tomará un valor

a) mayor que 1.8;

b) entre 0.4 y 1.6.

5.6 Dada la densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$ para $-\infty < x < \infty$, encuentre k.

5.7 Si la función de distribución de una variable aleatoria está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{para } x > 1 \\ 0 & \text{para } x \le 1 \end{cases}$$

calcule las probabilidades de que esta variable aleatoria tomará un valor

a) menor que 3; *b*) entre 4 y 5.

5.8 Encuentre la densidad de probabilidad que corresponda a la función de distribución del ejercicio 5.7. ¿Existe algún punto donde está indefinida? Verifique también las gráficas de la función de distribución y la densidad de probabilidad.

5.9 El error de fase en un dispositivo de rastreo tiene densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que el error de fase

a) esté entre 0 y $\pi/4$; *b*) sea mayor que $\pi/3$.

5.10 La duración de servicio satisfactorio (años) que ofrece cierto modelo de laptop es una variable aleatoria con la

densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4.5} e^{-x/4.5} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Encuentre las probabilidades de que una de las laptops brindará servicio satisfactorio durante

a) cuando mucho 2.5 años;

b) entre 4 a 6 años;

c) al menos 6.75 años.

5.11 En cierta ciudad, el consumo diario de energía eléctrica (en millones de kilowatts-horas) es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9} x e^{-x/3} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Si la planta de energía eléctrica de la ciudad tiene una capacidad diaria de 12 millones de kilowatts-horas, ¿cuál será la probabilidad de que este suministro de energía será inadecuado en algún día dado?

5.12 Pruebe que la identidad $\sigma^2 = \mu_2' - \mu_2$ se sostiene para cualquier densidad de probabilidad para la cual haya dichos momentos.

5.13 Encuentre μ y σ^2 para la densidad de probabilidad para el ejercicio 5.2.

5.14 Determine μ y σ^2 para la densidad de probabilidad del ejercicio 5.4.

5.15 Encuentre μ y σ para la densidad de probabilidad obtenida en el ejercicio 5.8.

5.16 Determine μ y σ para la distribución del error de fase del ejercicio 5.9.

5.17 Encuentre μ para la distribución del servicio satisfactorio del ejercicio 5.10.

5.18 Demuestre que μ_2' y, por lo tanto, σ^2 no existen para la densidad de probabilidad del ejercicio 5.6.

5.2 La distribución normal

Entre las densidades de probabilidad especiales que se estudiarán en este capítulo, la **densidad de probabilidad normal**, por lo general simplemente como **distribución normal**, es con mucho la más importante o la más utilizada.[1] Se estudió por primera vez en el siglo XVIII, cuando los científicos observaron un sorprendente grado de regularidad en los errores de las mediciones. Descubrieron que los patrones (distribuciones) que observaron se aproximaban cercanamente mediante una distribución continua, a la que se refirieron como la "curva normal de errores" y la atribuyeron a las leyes del azar. La ecuación de la densidad de probabilidad normal, cuya gráfica (con forma como la sección transversal de una campana) se ilustra en la figura 5.3, es

Distribución normal

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

y en los ejercicios 5.42 y 5.43 se pide al lector verificar que sus parámetros μ y σ son, de hecho, su media y su desviación estándar.

Dado que la densidad de probabilidad normal no puede integrarse en forma cerrada entre cada par de límites a y b, las probabilidades relacionadas con las distribuciones

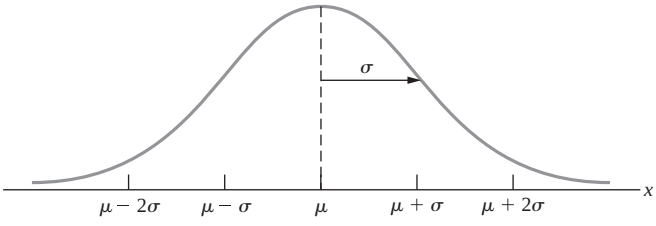


Figura 5.3
Gráfica de densidad de probabilidad normal

[1] Las palabras *densidad* y *distribución,* al igual que población, a menudo se emplean de manera indistinta en la literatura de estadística aplicada.

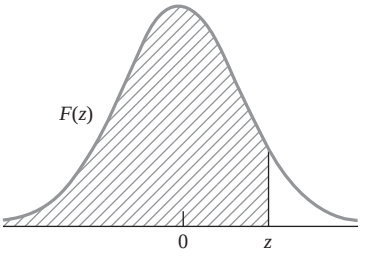


Figura 5.4
Las probabilidades normales estándares $F(z) = P(Z \leq z)$

normales por lo general se obtienen en tablas especiales, como la tabla 3 al final de este libro, la cual pertenece a la **distribución normal estándar**; a saber, la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, y sus entradas son los valores de

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt = P(Z \leq z)$$

para positivo o negativo $z = 0.00, 0.01, 0.02, \ldots, 3.49$, y, también, $z = 3.50$, $z = 4.00$ y $z = 5.00$. Las probabilidades acumuladas $F(z)$ corresponden al área bajo la densidad normal estándar a la izquierda de z, como indica el área sombreada de la figura 5.4.

Para encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar tomará un valor entre a y b, se usa la ecuación

$$P(a < Z \leq b) = F(b) - F(a)$$

como ilustra el área sombreada de la figura 5.5. En ocasiones también se usa la identidad $F(-z) = 1 - F(z)$, que se sostiene para todas las distribuciones simétricas con centro alrededor de 0, que al lector se le pedirá verificar en el ejercicio 5.41.

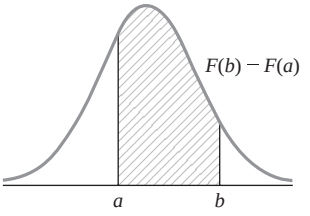


Figura 5.5
La probabilidad normal estándar $F(b) - F(a) = P(a < Z \leq b)$

EJEMPLO **Cálculo de algunas probabilidades normales estándares**

Determine las probabilidades de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar tomará un valor

a) entre 0.87 y 1.28;
b) entre −0.34 y 0.62;
c) mayor que 0.85;
d) mayor que −0.65.

Solución Es útil indicar primero el área de interés en una gráfica como en la figura 5.6.

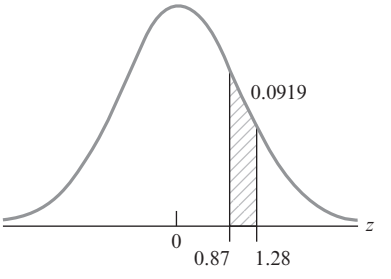


Figura 5.6
$P(0.87 < Z < 1.28)$

Al buscar los valores necesarios en la tabla 3, para el inciso *a*) se obtiene

$$\begin{aligned} F(1.28) - F(0.87) &= 0.8997 - 0.8078 \\ &= 0.0919 \end{aligned}$$

Como se indica en la figura 5.7 para el inciso *b*),

$$F(0.62) - F(-0.34) = 0.7324 - 0.3669$$
$$= 0.3655$$

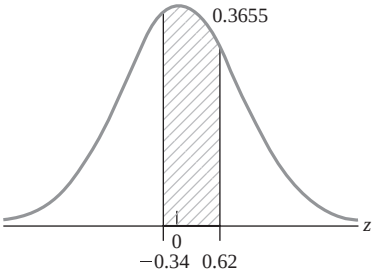


Figura 5.7
$P(-0.34 < Z < 0.62)$

Como se indica en la figura 5.8 para el inciso *c*),

$$1 - F(0.85) = 1 - 0.8023$$
$$= 0.1977$$

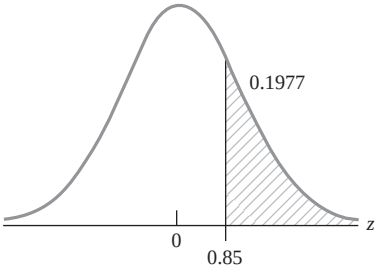


Figura 5.8
$P(Z > 0.85)$

Como se indica en la figura 5.9 para el inciso *d*)

$$1 - F(-0.65) = 1 - 0.2578 = 0.7422$$

o, de manera alternativa,

$$1 - F(-0.65) = 1 - [1 - F(0.65)]$$
$$= F(0.65)$$
$$= 0.7422$$

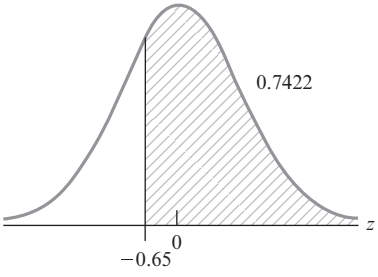


Figura 5.9
$P(Z > -0.65)$

■

También existen problemas en los cuales se dan probabilidades relacionadas con las distribuciones normales estándares y se pide encontrar los valores correspondientes de z.

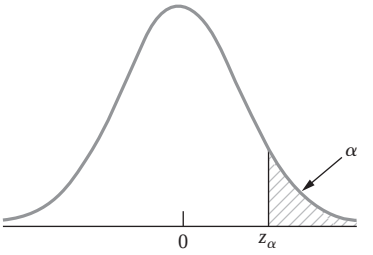


Figura 5.10
La notación z_α para una distribución normal estándar

Sea z_α tal que la probabilidad es α de que se superará por una variable aleatoria que tenga la distribución normal estándar. Esto es: $\alpha = P(Z > z_\alpha)$, como se ilustra en la figura 5.10.

Los resultados del ejemplo que sigue se usarán ampliamente en los capítulos siguientes.

EJEMPLO **Dos valores importantes para z_α**

Calcule *a*) $z_{0.01}$; *b*) $z_{0.05}$.

Solución

a) Puesto que $F(z_{0.01}) = 0.99$, se busca la entrada de la tabla 3 que esté más cerca de 0.99 y se obtiene 0.9901, que corresponde a $z = 2.33$. Por consiguiente, $z_{0.01} = 2.33$.

b) Puesto que $F(z_{0.05}) = 0.95$, se busca la entrada de la tabla 3 que esté más cerca de 0.95 y se obtienen 0.9495 y 0.9505, que corresponden a $z = 1.64$ y $z = 1.65$. Por lo tanto, por interpolación, $z_{0.05} = 1.645$. ■

Para utilizar la tabla 3 en conexión con una variable aleatoria X que tenga una distribución normal con media μ y varianza σ^2, remítase a la correspondiente **variable aleatoria estandarizada**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

que es posible demostrar que tiene la distribución normal estándar. Por lo tanto, para encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria original tomará un valor menor que o igual a a, en la tabla 3 se busca

$$F\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Además, si quiere encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria que tenga la distribución normal con la media μ y la varianza σ^2 tomará un valor entre a y b, tan solo se debe calcular la probabilidad de que una variable aleatoria con la distribución normal estándar tomará un valor entre

$$\frac{a - \mu}{\sigma} \quad \text{y} \quad \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Esto es, para encontrar probabilidades concernientes a X, convierta su valor a **puntuaciones z** mediante

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Probabilidades normales

Cuando X tiene la distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

$$P(a < X \leq b) = F\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

De acuerdo con la figura 2.9 de la página 20, las observaciones acerca de la resistencia de una aleación de aluminio parecen estar distribuidas de manera normal. La distribución normal se usa frecuentemente para modelar variación, cuando la distribución es simétrica y tiene una sola moda.

EJEMPLO **Cálculo de probabilidades usando una distribución normal**

Con el objetivo del mejoramiento del desempeño, ingenieros industriales estudian la capacidad de los escáneres para leer los códigos de barras de varios productos alimenticios y para el hogar. La máxima reducción en potencia, justo antes de que el escáner no pueda leer el código de barras a una distancia fija, se conoce como atenuación máxima. Esta cantidad, medida en decibeles, varía de un producto a otro. Después de recolectar datos considerables, los ingenieros deciden modelar la variación en atenuación máximo como una distribución normal con media 10.1 dB y desviación estándar 2.7 dB.

a) Para el siguiente alimento o producto, ¿cuál es la probabilidad de que su atenuación máxima esté entre 8.5 dB y 13.0 dB?

b) De acuerdo con el modelo normal, ¿qué proporción de los productos tienen atenuación máxima entre 8.5 dB y 13.0 dB?

c) ¿Qué proporción de los productos tienen atenuación máxima mayor que 15.1 dB?

Solución

a) La atenuación máxima del siguiente producto, X, se trata como una selección aleatoria para la distribución normal con $\mu = 10.1$ y $\sigma = 2.7$. En consecuencia, $Z = (X - 10.1)/2.7$ y, de la tabla 3, se obtiene

$$\begin{aligned} F\left(\frac{13.0 - 10.1}{2.7}\right) - F\left(\frac{8.5 - 10.1}{2.7}\right) &= F(1.07) - F(-0.59) \\ &= 0.8577 - 0.2776 \\ &= 0.5801 \end{aligned}$$

que corresponde al área sombreada de la figura 5.11.

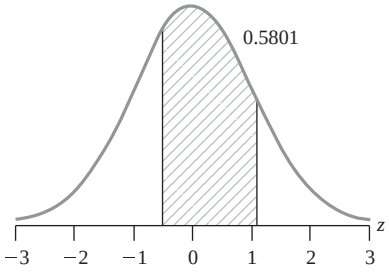


Figura 5.11
$P(8.5 < X < 13.0) = P(-0.59 < Z < 1.07)$

b) La variación en atenuación máxima para la gran, pero finita, colección de todos los productos diferentes, se modela mediante una distribución normal. La proporción de productos que tienen atenuación máxima entre 8.5 y 13.0 dB corresponde a la probabilidad del inciso *a*). Cuando se considera la población infinita incluso más grande de todos los productos existentes y los que podrían haberse fabricado, a 0.5801 todavía se le refiere como la proporción con atenuación máxima entre 8.5 y 13.0 dB.

c) Al buscar el valor necesario en la tabla 3,

$$\begin{aligned} 1 - F\left(\frac{15.1 - 10.1}{2.7}\right) &= 1 - F(1.85) \\ &= 1 - 0.9678 \\ &= 0.0322 \end{aligned}$$

que corresponde al área sombreada de la figura 5.12, en la página 130. ■

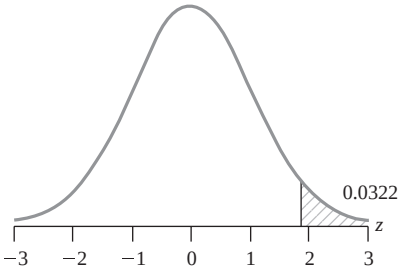


Figura 5.12
$P(X \geq 15.1)$

EJEMPLO

Uso de probabilidades normales para determinar la media del llenado de frascos

La cantidad real de café instantáneo que una máquina llenadora pone en frascos de "4 onzas" puede considerarse como una variable aleatoria, cuya distribución normal tiene $\sigma = 0.04$ onzas. Si tan solo 2% de los frascos contendrá menos de 4 onzas, ¿cuál debería ser la media de llenado de dichos frascos?

Solución Para encontrar μ tal que

$$F\left(\frac{4-\mu}{0.04}\right) = 0.02$$

se busca la entrada en la tabla 3 más cercana a 0.02 y se obtiene 0.0202, que corresponde a $z = -2.05$. Como se indica en la figura 5.13,

$$\frac{4-\mu}{0.04} = -2.05$$

y, al despejar μ, se encuentra que $\mu = 4.082$ onzas. ■

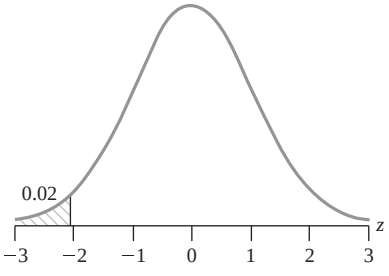


Figura 5.13
$P(Z < -2.05)$

EJEMPLO

Cálculo de probabilidades cuando ln *X* tiene una distribución normal

Después de gran número de pruebas del contenido de oro en rocas recolectadas de una mina a cielo abierto, un ingeniero de minas postula que el logaritmo natural del contenido de oro (oz/st oro) sigue una distribución normal con media −4.6 y varianza 1.21. Con esta distribución, ¿sería raro obtener 0.0015 oz/st oro o menos en una prueba?

Solución Puesto que ln X tiene una distribución normal, la pregunta tiene que ver con el valor estandarizado

$$\frac{\ln(0.0015) - (-4.6)}{\sqrt{1.21}} = -1.729$$

La probabilidad normal estándar de obtener este valor o uno menor (véase la figura 5.14) es

$$F\left(\frac{\ln(0.0015) - (-4.6)}{\sqrt{1.21}}\right) = F(-1.73) = 0.0419$$

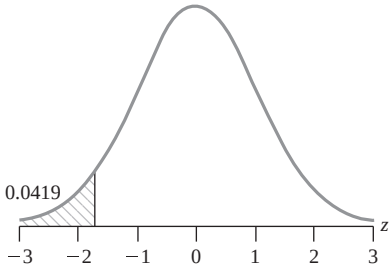


Figura 5.14
$P(Z \leq -1.73) = P(X \leq 0.0015)$

Esta probabilidad es menor, así que se sospecha que la distribución normal postulada con media −4.6 no se aplica. Una prueba con esta pequeña cantidad de contenido de oro sugeriría que el espécimen se recolectó afuera de la veta. ■

Aunque la distribución normal se aplica a variables aleatorias continuas, a menudo se utiliza para aproximar distribuciones de variables aleatorias discretas. Con mucha frecuencia, esto da resultados satisfactorios, siempre que se realice la **corrección por continuidad** que se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

Una corrección por continuidad para mejorar la aproximación normal a una variable contable

En cierta ciudad, el número de apagones por mes es una variable aleatoria, que tiene una distribución con $\mu = 11.6$ y $\sigma = 3.3$. Si esta distribución puede aproximarse cercanamente con una distribución normal, ¿cuál será la probabilidad de que habrá al menos 8 apagones en un mes cualquiera?

Solución La respuesta se encuentra en el área de la región rayada de la figura 5.15, el área a la derecha de 7.5, no de 8. La razón de ello es que el número de apagones es una variable aleatoria discreta, y si se quiere aproximar su distribución con una distribución normal, se deben "dispersar" sus valores sobre una escala continua. Esto se hace al representar cada entero k mediante el intervalo de $k - \frac{1}{2}$ a $k + \frac{1}{2}$. Por ejemplo, 3 se representa mediante el intervalo de 2.5 a 3.5, 10 se representa mediante el intervalo de 9.5 a 10.5, y "al menos 8" se representa mediante el intervalo a la derecha de 7.5. Por lo tanto, la probabilidad deseada se aproxima con

$$\begin{aligned} 1 - F\left(\frac{7.5 - 11.6}{3.3}\right) &= 1 - F(-1.24) \\ &= F(1.24) \\ &= 0.8925 \end{aligned}$$

■

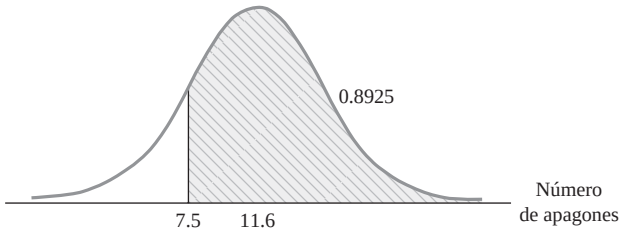


Figura 5.15
Diagrama para el ejemplo que trata con apagones de energía

5.3 La aproximación normal a la distribución binomial

La distribución normal puede usarse para aproximar la distribución binomial cuando n es grande y p, la probabilidad de un éxito, está cerca de 0.50 y, en consecuencia, no es suficientemente pequeña como para usar la aproximación de Poisson. Entonces, se enuncia sin prueba el siguiente teorema:

Aproximación normal a la distribución binomial

Teorema 5.1 Si X es una variable aleatoria que tiene la distribución binomial con los parámetros n y p, la forma límite de la función de distribución de la variable aleatoria estandarizada

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

conforme $n \to \infty$, está dada por la distribución normal estandarizada

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad -\infty < z < \infty$$

Observe que, aunque X solo tome los valores 0, 1, 2, …, n, en el límite conforme $n \to \infty$, la distribución de la correspondiente variable aleatoria estandarizada es continua, y la correspondiente densidad de probabilidad es la densidad normal estándar. Note asimismo que, en el siguiente ejemplo, que es una aplicación del teorema 5.1, se usa nuevamente la corrección por continuidad dada en la página 131.

EJEMPLO **Una aproximación normal a las probabilidades binomiales**

Si 20% de los chips de memoria fabricados en cierta planta son defectuosos, ¿cuáles son las probabilidades de que, en un lote de 100 elegidos al azar para inspección,

a) cuando mucho 15 estarán defectuosos; *b*) exactamente 15 estarán defectuosos?

Solución Como $\mu = 100(0.20) = 20$ y $\sigma = \sqrt{100(0.20)(0.80)} = 4$ para la distribución binomial con $n = 100$ y $p = 0.20$, se encuentra que la aproximación normal a la distribución binomial da como resultado

a)

$$F\left(\frac{15.5 - 20}{4}\right) = F(-1.13)$$
$$= 0.1292$$

según se indica en la figura 5.16.

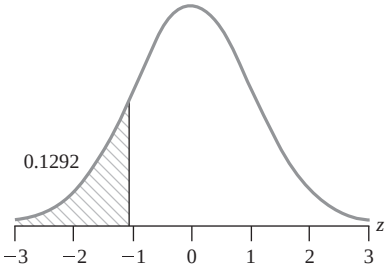


Figura 5.16 Aproximación normal a $P(X \leq 15)$

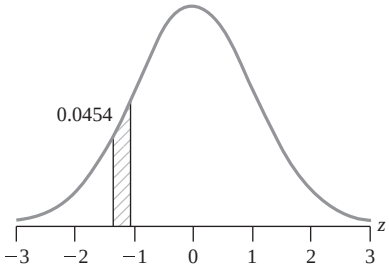


Figura 5.17
Aproximación normal a $P(X = 15)$

b)

$$F\left(\frac{15.5-20}{4}\right) - F\left(\frac{14.5-20}{4}\right) = F(-1.13) - F(-1.38)$$
$$= 0.1292 - 0.0838$$
$$= 0.0454$$

según se indica en la figura 5.17. ■

En el ejemplo anterior, de haber realizado el cálculo binomial exacto en una computadora, en vez de usar aproximación normal, se habría obtenido 0.1285 en vez de 0.1292 para el inciso *a*) y 0.0481 en vez de 0.0454 para el inciso *b*). Por consiguiente, se observa que ambas aproximaciones son muy cercanas. El cálculo exacto siempre es preferible cuando p está dado pero la aproximación es importante para inferencia cuando no lo es.

Una buena regla empírica para la aproximación normal

Use la aproximación normal a la distribución binomial solo cuando np y $n(1-p)$ sean ambos mayores que 15.

Ejercicios

5.19 Si una variable aleatoria tiene la distribución normal estándar, encuentre la probabilidad de que tomará un valor

a) menor que 1.75;
b) menor que −1.25;
c) mayor que 2.06;
d) mayor que −1.82.

5.20 Si una variable aleatoria tiene la distribución normal estándar, determine la probabilidad de que tomará un valor

a) entre 0 y 2.3;
b) entre 1.22 y 2.43;
c) entre −1.45 y −0.45;
d) entre −1.70 y 1.35.

5.21 Encuentre z si la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar tomará un valor

a) menor que z es de 0.9911;
b) mayor que z es de 0.1093;
c) mayor que z es de 0.6443;
d) menor que z es de 0.0217;
e) entre $-z$ y z es de 0.9298.

5.22 Si una variable aleatoria tiene una distribución normal, ¿cuáles son las probabilidades de que tomará un valor dentro de

a) 1 desviación estándar de la media;
b) 2 desviaciones estándares de la media;
c) 3 desviaciones estándar de la media;
d) 4 desviaciones estándar de la media?

5.23 Verifique que

a) $z_{0.005} = 2.575$;
b) $z_{0.025} = 1.96$.

5.24 Dada una variable aleatoria que tenga la distribución normal con $\mu = 16.2$ y $\sigma^2 = 1.5625$, encuentre las probabilidades de que tomará un valor

a) mayor que 16.8;
b) menor que 14.9;
c) entre 13.6 y 18.8;
d) entre 16.5 y 16.7.

5.25 El tiempo para que un superpegamento seque puede tratarse como una variable aleatoria, cuya distribución normal tiene media de 30 segundos. Encuentre su des-

viación estándar, si la probabilidad es de 0.20 de que tomará un valor mayor que 39.2 segundos.

5.26 El tiempo para preparar en un horno de microondas un paquete de rosetas de maíz, usando la configuración automática, puede tratarse como una variable aleatoria que tiene una distribución normal con desviación estándar de 10 segundos. Si la probabilidad es de 0.8212 de que el paquete tardará menos de 282.5 segundos en prepararse, determine la probabilidad de que tardará más de 258.3 segundos en prepararse.

5.27 El tiempo requerido para ensamblar una pieza de maquinaria es una variable aleatoria que tiene aproximadamente una distribución normal con $\sigma = 12.9$ minutos y $\sigma = 2.0$ minutos. ¿Cuáles son las probabilidades de que el ensamblado de una pieza de maquinaria de este tipo tardará

a) al menos 11.5 minutos;

b) entre 11.0 y 14.8 minutos?

5.28 Encuentre los *cuartiles*

$$-z_{0.25} \quad z_{0.50} \quad z_{0.25}$$

de la distribución normal estándar.

5.29 En un proceso fotográfico, el tiempo para procesar 8×10 impresiones de una tarjeta de memoria puede tratarse como una variable aleatoria, cuya distribución normal tenga una media de 10.28 segundos y una desviación estándar de 0.12 segundos. Encuentre la probabilidad de que tardará

a) entre 10.00 y 10.50 segundos para procesar una de las impresiones;

b) al menos 10.20 segundos para procesar una de las impresiones;

c) cuando mucho 10.35 segundos para procesar una de las impresiones.

5.30 Con respecto al ejercicio anterior, ¿para cuál valor es la probabilidad de 0.95 de que superará el tiempo que tarda en procesar una de las impresiones?

5.31 Las especificaciones para cierto trabajo requieren arandelas con diámetro interno de 0.300 ± 0.005 pulgadas. Si los diámetros internos de las arandelas suministrados por un fabricante dado pueden tratarse como una variable aleatoria, cuya distribución normal tiene media $\mu = 0.302$ pulgadas y desviación estándar $\sigma = 0.003$ pulgadas, ¿qué porcentaje de dichas arandelas satisfarán las especificaciones?

5.32 Con respecto al ejemplo de la página 130, verifique que, si la variabilidad de la máquina llenadora se reduce a $\sigma = 0.025$ onzas, esto reducirá la cantidad promedio requerida de café a 4.05 onzas, aunque mantiene 98% de los frascos arriba de 4 onzas.

5.33 Una máquina estampadora produce tapas para latas cuyos diámetros tienen distribución normal con una desviación estándar de 0.01 pulgadas. ¿A qué diámetro "normal" (medio) debería configurarse la máquina de modo que no más de 5% de las tapas para latas producidas tengan diámetros que superen las 3 pulgadas?

5.34 Varillas de plástico extruido se cortan de manera automática a longitudes nominales de 6 pulgadas. Las longitudes reales tienen distribución normal con respecto a una media de 6 pulgadas y su desviación estándar es 0.06 pulgadas.

a) ¿Qué proporción de las varillas tienen longitudes que están fuera los límites de tolerancia de 5.9 pulgadas a 6.1 pulgadas?

b) ¿A qué valor debe reducirse la desviación estándar, si 99% de las varillas deben estar dentro de la tolerancia?

5.35 Si una variable aleatoria tiene la distribución binomial con $n = 40$ y $p = 0.40$, use la aproximación normal para determinar las probabilidades de que tomará

a) el valor 22;

b) un valor menor que 8.

5.36 Un fabricante sabe que, en promedio, 2% de los tostadores eléctricos que fabrica requerirán reparaciones dentro de 90 días después de su venta. Utilice la aproximación normal a la distribución binomial para determinar la probabilidad de que, entre 1,200 de dichas tostadoras, al menos 30 requerirán reparaciones dentro de los primeros 90 días después de que se venden.

5.37 La probabilidad de que un componente electrónico fallará en menos de 1,000 horas de uso continuo es de 0.25. Use la aproximación normal para encontrar la probabilidad de que, entre 200 de tales componentes, menos de 45 fallarán en menos de 1,000 horas de uso continuo.

5.38 Un ingeniero de seguridad cree que 30% de todos los accidentes industriales en su planta son causados por falla de los empleados para seguir instrucciones. Si esta cifra es correcta, determine, aproximadamente, la probabilidad de que, entre 84 accidentes industriales en esta planta, entre 20 y 30 (incluyendo ambos valores) se deberán a falla de los empleados para seguir instrucciones.

5.39 Si 62% de todas las nubes sembradas con yoduro de plata muestran crecimiento espectacular, ¿cuál es la probabilidad de que, entre 40 nubes sembradas con yoduro de plata, cuando mucho 20 mostrarán crecimiento espectacular?

5.40 Para ilustrar la ley de los grandes números mencionada en la página 102, encuentre las probabilidades de que la proporción de caras estará en alguna parte entre 0.49 y 0.51, cuando se lance una moneda equilibrada

a) 1,000 veces;

b) 10,000 veces.

5.41 Verifique la identidad $F(-z) = 1 - F(z)$ dada en la página 126.

5.42 Verifique que el parámetro μ en la expresión para la densidad normal de la página 125 es, de hecho, su media.

5.43 Verifique que el parámetro σ^2 en la expresión para la densidad normal en la página 125 es, de hecho, su varianza.

5.44 Las probabilidades normales pueden calcularse al usar *MINITAB*. Sea X que tiene una distribución normal, con media 11.3 y desviación estándar 5.7. Los siguientes pasos dan como resultado una probabilidad acumulada de 9.31 o menor, o bien, $P(X \leq 9.31)$.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability Distribution > Normal
Elija **Cumulative Distribution**. Elija **Input constant** e ingrese 9.31.
Escriba 11.3 en **Mean** y 5.7 en **standard deviation**.
Haga clic en **OK**.

Salida: Normal con media = 11.3000 y desviación estándar = 5.70000

x	$P(X <= x)$
9.3100	0.3635

Para esta misma distribución normal, encuentre la probabilidad

a) de 8.493 o menor;

b) de 16.074 o menor.

5.4 Otras densidades de probabilidad

Para la aplicación de la estadística a problemas de ingeniería y ciencia física, se tienen muchas densidades de probabilidad distintas de la distribución normal. Entre ellas están las distribuciones t, F y chi cuadrada; las distribuciones de muestreo fundamental que se introducen en el capítulo 6; y las distribuciones exponencial y de Weibull, que se aplican a problemas de confiabilidad y pruebas de ciclo de vida en el capítulo 16.

En el resto de este capítulo, se estudiarán cinco distribuciones continuas, la *distribución uniforme*, la *distribución logarítmica normal*, la *distribución gamma*, la *distribución beta* y la *distribución de Weibull*, con el doble propósito de ofrecer más ejemplos de densidades de probabilidad y de tender los cimientos para aplicaciones futuras.

5.5 La distribución uniforme

La **distribución uniforme**, con los parámetros α y β, tiene función de densidad de probabilidad

Distribución uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{para } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 5.18. Observe que todos los valores de x, desde a hasta b, son "igualmente probables", en el sentido de que la probabilidad de x se encuentre en un intervalo de ancho Δx, completamente contenido en el intervalo de α a β, es igual a $\Delta x/(\beta - \alpha)$, sin importar la ubicación exacta del intervalo.

Para ilustrar cómo una situación física origina una distribución uniforme, suponga que una rueda de locomotora tiene el radio r y que x es la ubicación de un punto en su circunferencia, medida a lo largo de la circunferencia a partir de cierto punto de referencia 0. Cuando se aplican los frenos, algún punto hará contacto deslizante con el riel, y en dicho

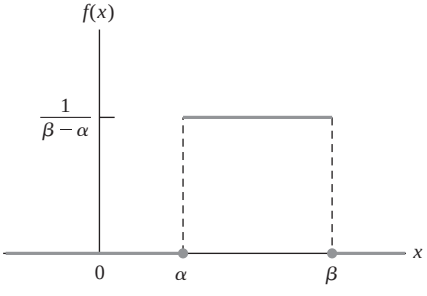


Figura 5.18
Gráfica de densidad de probabilidad uniforme

punto habrá un fuerte desgaste. Para aplicación repetida de los frenos, parecería razonable suponer que x es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución uniforme con $\alpha = 0$ y $\beta = 2\pi r$. Si esta suposición fuera incorrecta, es decir, si algún conjunto de puntos en la rueda hiciera contacto con más frecuencia que otros, la rueda finalmente mostraría "puntos planos" o perdería la redondez.

Para determinar la media y la varianza de la distribución uniforme, evalúe primero las dos integrales

$$\mu = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

y

$$\mu_2' = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}$$

Por ende,

Media de distribución uniforme

$$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

y, al usar fórmula $\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$, se encuentra que

Varianza de distribución uniforme

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

5.6 La distribución logarítmica normal

En la práctica, la **distribución logarítmica normal** (log-normal) ocurre siempre que se encuentra una variable aleatoria tal que su logaritmo tiene una distribución normal. Su densidad de probabilidad está dada por

Distribución logarítmica normal

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} x^{-1} e^{-(\ln x - \alpha)^2/2\beta^2} & \text{para } x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $\ln x$ es el logaritmo natural de x. Una gráfica de la distribución logarítmica normal con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ se presenta en la figura 5.19. En la figura se observa que tal distribución muestra sesgo positivo, esto es, tiene una larga cola hacia la derecha.

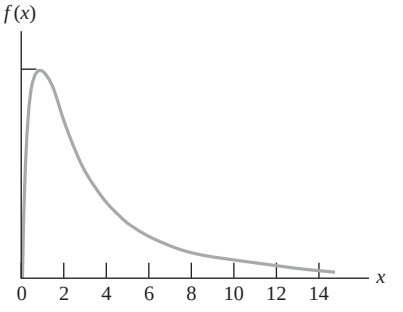


Figura 5.19
Gráfica de densidad de probabilidad logarítmica normal, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Para encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución logarítmica normal tomará un valor entre a y b ($0 < a < b$), se debe evaluar la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} x^{-1} e^{-(\ln x - \alpha)^2/2\beta^2} dx$$

Al cambiar la variable al hacer $y = \ln x$ e identificar el integrando como la densidad normal con $\mu = \alpha$ y $\sigma = \beta$, se encuentra que la probabilidad deseada está dada por

$$\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-(y-\alpha)^2/2\beta^2} dy = F\left(\frac{\ln b - \alpha}{\beta}\right) - F\left(\frac{\ln a - \alpha}{\beta}\right)$$

donde F es la función de distribución de la distribución normal estándar.

EJEMPLO **Cálculo de una probabilidad logarítmica normal**

La ganancia actual de ciertos transistores se mide en unidades que se igualan con el logaritmo de I_o/I_i, la razón entre la corriente de salida y la corriente de entrada. Si este logaritmo tiene distribución normal con $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 0.01$, encuentre la probabilidad de que I_o/I_i tomará un valor entre 6.1 y 8.2.

Solución Dado que $\alpha = 2$ y $\beta = 0.1$,

$$F\left(\frac{\ln 8.2 - 2}{0.1}\right) - F\left(\frac{\ln 6.1 - 2}{0.1}\right) = F(1.0) - F(-1.92)$$
$$= 0.8139$$

■

EJEMPLO **Graficación de una función de densidad de probabilidad sobre un histograma de densidad para ayudar a valorar ajuste**

Elabore un histograma de densidad de los tiempos entre solicitudes de la página 19, y relaciónelos con una distribución logarítmica normal.

Solución La figura 5.20 ilustra el histograma de densidad. Para representar con precisión el patrón, se usan intervalos más cortos para los tiempos más pequeños. También se grafica la densidad logarítmica normal con $\alpha = 8.85$ y $\beta = 1.03$. El ajuste logarítmico normal se explora aún más en la sección 5.12. (Véase también el ejercicio 5.103.) ■

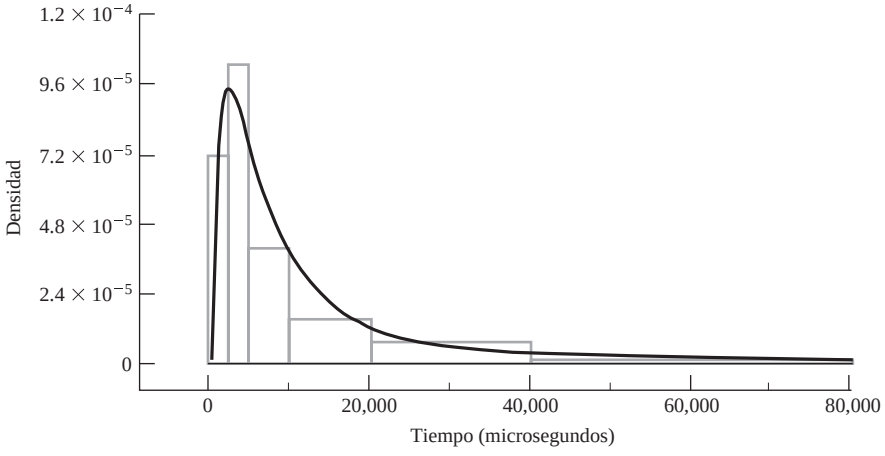


Figura 5.20
Histograma de densidad de tiempo entre solicitudes

EJEMPLO **Cálculo de una probabilidad logarítmica normal para un análisis de riesgo**

Como parte de un análisis de riesgo concerniente a una planta de energía nuclear, los ingenieros deben modelar la resistencia de los soportes del generador de vapor, en términos de su habilidad para soportar la aceleración pico causada por los terremotos. La opinión de los expertos sugiere que el ln (resistencia) tiene distribución normal con $\mu = 4.0$ y $\sigma^2 = 0.09$. Encuentre la probabilidad de que los soportes sobrevivirán a una aceleración pico de 33.

Solución Puesto que $\alpha = 4.0$ y $\beta = 0.30$, encuentre

$$1 - F\left(\frac{\ln(33) - 4.0}{0.30}\right) = 1 - F(-1.68) = 0.9535$$

■

Para encontrar una fórmula para la media de la distribución logarítmica normal, se escribe

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\int_0^\infty x \cdot x^{-1} e^{-(\ln x - \alpha)^2/2\beta^2}\, dx$$

y al hacer $y = \ln x$, esto se convierte en

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\int_{-\infty}^\infty e^y e^{-(y-\alpha)^2/2\beta^2}\, dy$$

Esta integral se evalúa al completar el cuadrado en el exponente $y - (y - \alpha)^2/2\beta^2$, y, por lo tanto, se obtiene un integrando con la forma de una densidad normal. El resultado final, que al lector se le pedirá verificar en el ejercicio 5.48, es

Media de distribución logarítmica normal

$$\mu = e^{\alpha + \beta^2/2}$$

Asimismo, cálculos más prolongados dan como resultado

Varianza de distribución logarítmica normal

$$\sigma^2 = e^{2\alpha + \beta^2}(e^{\beta^2} - 1)$$

EJEMPLO **Cálculo de media y varianza para una distribución logarítmica normal**

Con respecto al ejemplo de la página 137, encuentre la media y la varianza de la distribución de la razón entre la corriente de salida y la corriente de entrada.

Solución Al sustituir $\alpha = 2$ y $\beta = 0.1$ en las fórmulas anteriores, se obtiene

$$\mu = e^{2 + (0.1)^2/2} = 7.43$$

y

$$\sigma^2 = e^{4 + (0.1)^2}(e^{(0.1)^2} - 1) = 0.55$$

■

5.7 La distribución gamma

Muchas densidades de probabilidad importantes, cuyas aplicaciones se estudiarán más adelante, son casos especiales de la **distribución gamma**. Esta distribución tiene densidad de probabilidad

Distribución gamma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & \text{para } x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es un valor de la **función gamma**, definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

La integración por partes indica que

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

para cualquier $\alpha > 1$ y, por lo tanto, que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ cuando α es un entero positivo. En la figura 5.21 se muestran gráficas de varias distribuciones gamma que ilustran el hecho de que dichas distribuciones tienen sesgo positivo. En efecto, el sesgo disminuye conforme α aumenta para cualquier valor fijo de β.

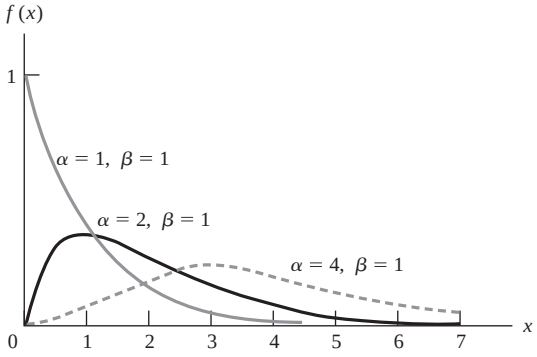


Figura 5.21
Gráfica de algunas funciones de densidad de probabilidad gamma

La media y la varianza de la distribución gamma pueden obtenerse al usar la función gamma y sus propiedades especiales mencionadas anteriormente. Para la media, se tiene

$$\mu = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx$$

y, después de hacer $y = x/\beta$,

$$\mu = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y}\, dy = \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

Entonces, al emplear la identidad $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$, se llega al resultado de que

Media de distribución gamma

$$\mu = \alpha\,\beta$$

Al usar métodos similares, también se puede demostrar que la varianza de la distribución gamma está dada por

Varianza de distribución gamma

$$\sigma^2 = \alpha\,\beta^2$$

En el caso especial donde $\alpha = 1$, se tiene la **distribución exponencial**, cuya densidad de probabilidad es, por lo tanto,

Distribución exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{para } x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y cuyas media y varianza son $\mu = \beta$ y $\sigma^2 = \beta^2$. Note que la distribución del ejemplo de la página 122 es una distribución exponencial con $\beta = \frac{1}{3}$.

EJEMPLO **Una función de densidad exponencial sobre un histograma de densidad**

Un ingeniero que observa una reacción nuclear mide los intervalos de tiempo entre las emisiones de partículas beta.

0.894	0.991	0.261	0.186	0.311	0.817	2.267	0.091	0.139	0.083
0.235	0.424	0.216	0.579	0.429	0.612	0.143	0.055	0.752	0.188
0.071	0.159	0.082	1.653	2.010	0.158	0.527	1.033	2.863	0.365
0.459	0.431	0.092	0.830	1.718	0.099	0.162	0.076	0.107	0.278
0.100	0.919	0.900	0.093	0.041	0.712	0.994	0.149	0.866	0.054

Elabore un histograma de densidad y grafique una densidad exponencial como una aproximación.

Solución Dichos tiempos de decaimiento (en milisegundos) se presentan como un histograma de densidad en la figura 5.22. La curva suave es la densidad exponencial con $\beta = 0.25$. El ajuste a una densidad exponencial se explora aún más en la sección 16.3. La densidad exponencial tiene media $\beta = 0.25$ y desviación estándar 0.25. ■

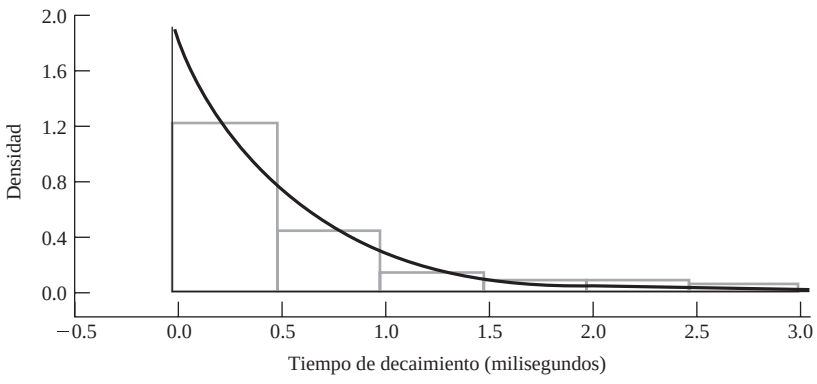


Figura 5.22
Histograma de densidad de tiempos de decaimiento

La distribución exponencial tiene muchas aplicaciones importantes; por ejemplo, puede demostrarse que, en conexión con procesos de Poisson (véase la sección 4.7), el **tiempo de espera** entre llegadas sucesivas (éxitos) tiene una distribución exponencial. De manera más específica: puede demostrarse que si, en un proceso de Poisson, la tasa de llegada media (número promedio de llegadas por unidad de tiempo) es α, el tiempo hasta la primera llegada, o el tiempo de espera entre llegadas sucesivas, tiene una distribución exponencial con $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ (véase el ejercicio 5.62).

EJEMPLO **Cálculo de probabilidad usando la distribución exponencial**

Con respecto al ejemplo de la página 108, donde en promedio tres camiones llegan por hora para descargar en un almacén, ¿cuáles son las probabilidades de que el tiempo entre la llegada de camiones sucesivos será

a) menor a 5 minutos? *b*) al menos de 45 minutos?

Solución Suponiendo que las llegadas siguen un proceso de Poisson con $\alpha = 3$, entonces $\beta = \frac{1}{3}$ y se obtiene

a)
$$\int_0^{1/12} 3e^{-3x}\,dx = 1 - e^{-1/4} = 0.221$$

b)
$$\int_{3/4}^{\infty} 3e^{-3x}\,dx = e^{-9/4} = 0.105$$

■

5.8 La distribución beta

Cuando una variable aleatoria toma valores en el intervalo de 0 a 1, una elección de una densidad de probabilidad es la **distribución beta**, cuya densidad de probabilidad es

Distribución beta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{para } 0 < x < 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La media y la varianza de esta distribución están dadas por

Media y varianza de distribución beta

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Note que para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ se obtiene como caso especial la distribución uniforme de la sección 5.5, definida en el intervalo de 0 a 1. El siguiente ejemplo, que pertenece a una proporción, ilustra una aplicación común de la distribución beta.

EJEMPLO **Cálculos de probabilidad usando una distribución beta**

En cierto país, la proporción de secciones de autopista que requieren reparaciones en algún año dado es una variable aleatoria, que tiene la distribución beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ (que se muestran en la figura 5.23, en la página 142).

a) En promedio, ¿qué porcentaje de las secciones de autopista requieren reparaciones en un año dado?

b) Encuentre la probabilidad de que cuando mucho la mitad de las secciones de autopista requerirán reparaciones en algún año dado.

Solución *a*) $\mu = \dfrac{3}{3+2} = 0.60$

que significa que, en promedio, 60% de las secciones de autopista requieren reparaciones en algún año dado.

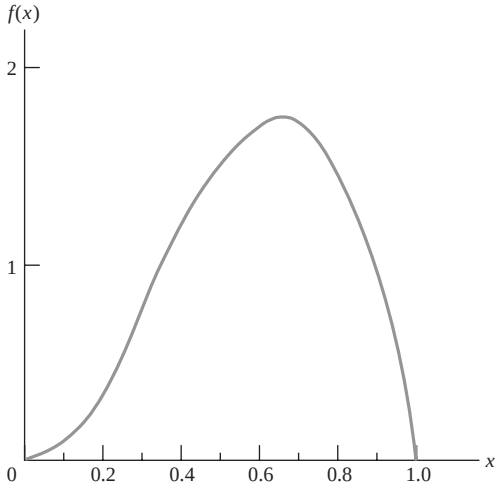


Figura 5.23
Grafica de la densidad beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$

b) Al sustituir $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ en la fórmula para la distribución beta y usar el hecho de que $\Gamma(5) = 4! = 24$, $\Gamma(3) = 2! = 2$ y $\Gamma(2) = 1! = 1$, se obtiene

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x^2\,(1 - x) & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Por ende, la probabilidad deseada está dada por

$$\int_0^{1/2} 12\,x^2\,(1 - x)\,dx = \frac{5}{16}$$

■

Siendo realistas, en la mayoría de las situaciones complejas, las probabilidades relacionadas con las distribuciones gamma y beta se obtienen con programas de cómputo.

5.9 La distribución de Weibull

Estrechamente vinculada con la distribución exponencial se encuentra la **distribución de Weibull**, cuya densidad de probabilidad está dada por

Distribución de Weibull

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\,\beta\,x^{\beta-1}\,e^{-\alpha x^{\beta}} & \text{para } x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Para demostrar esta relación, se evalúa la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución de Weibull tomará un valor menor que a, es decir, la integral

$$\int_0^a \alpha\,\beta\,x^{\beta-1}\,e^{-\alpha x^{\beta}}\,dx$$

Al hacer el cambio de variable $y = x^{\beta}$, se obtiene

$$\int_0^{a^{\beta}} \alpha\,e^{-\alpha y}\,dy = 1 - e^{-\alpha a^{\beta}}$$

y se observa que y es un valor de una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial. Las gráficas de varias distribuciones de Weibull con $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{3}$, 1 y 2 se presentan en la figura 5.24.

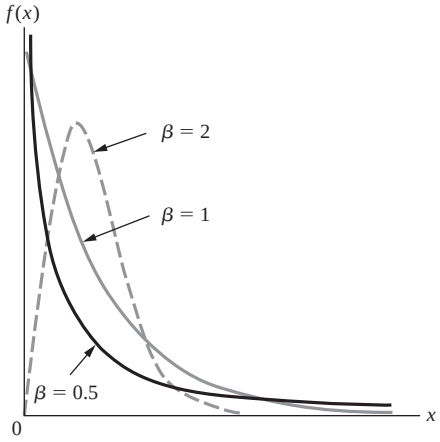


Figura 5.24
Gráficas de densidades de Weibull con $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$, 1 y 2

La media de la distribución de Weibull que tiene los parámetros α y β puede obtenerse al evaluar la integral

$$\mu = \int_0^\infty x \cdot \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} \, dx$$

Al hacer el cambio de variable $u = \alpha x^\beta$,

$$\mu = \alpha^{-1/\beta} \int_0^\infty u^{1/\beta} \, e^{-u} \, du$$

y se reconoce la integral como

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

a saber, como un valor de la función gamma que se definió en la página 139, se encuentra que la media de la distribución de Weibull está dada por

Media de distribución de Weibull

$$\mu = \alpha^{-1/\beta} \, \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Con el uso de un método similar para determinar primero μ_2', al lector se le pedirá demostrar en el ejercicio 5.70, que la varianza de esta distribución está dada por

Varianza de distribución de Weibull

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \right\}$$

EJEMPLO **Cálculos de probabilidad usando una distribución de Weibull**

Suponga que la vida de cierto tipo de una batería de respaldo para emergencia (en horas) es una variable aleatoria X que tiene la distribución de Weibull con $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.5$. Determine

a) la vida media de dichas baterías;
b) la probabilidad de que tal batería durará más de 300 horas.

Solución *a*) La sustitución en la fórmula para la media da como resultado

$$\mu = (0.1)^{-2}\,\Gamma(3) = 200 \text{ horas}$$

b) Al realizar la integración necesaria,

$$\int_{300}^{\infty} (0.05)x^{-0.5}\, e^{-0.1x^{0.5}}\, dx = e^{-0.1(300)^{0.5}}$$
$$= 0.177$$

■

Ejercicios

5.45 Encuentre la función de distribución de una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme sobre (0, 1).

5.46 En ciertos experimentos, el error cometido al determinar la solubilidad de una sustancia es una variable aleatoria que tiene la densidad uniforme con $\alpha = -0.025$ y $\beta = 0.025$. ¿Cuáles son las probabilidades de que tal error estará

a) entre 0.010 y 0.015;

b) entre −0.012 y 0.012?

5.47 A partir de su experiencia, el Sr. Harris descubrió que la puja baja en un trabajo de construcción puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la densidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4C} & \text{para } \dfrac{2C}{3} < x < 2C \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde C es su propia estimación del costo del trabajo. ¿Qué porcentaje debería agregar el Sr. Harris a su estimación de costos, cuando envíe las pujas para maximizar su ganancia esperada?

5.48 Verifique la expresión dada en la página 138 para la media de la distribución logarítmica normal.

5.49 Con respecto al ejemplo de la página 137, encuentre la probabilidad de que I_o/I_i tomará un valor entre 7.0 y 7.5.

5.50 Si una variable aleatoria tiene la distribución logarítmica normal con $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, encuentre su media y su desviación estándar.

5.51 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre las probabilidades de que la variable aleatoria tomará un valor

a) entre 3.2 y 8.4;

b) mayor que 5.0.

5.52 Si una variable aleatoria tiene la distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, encuentre la media y la desviación estándar de esta distribución.

5.53 Con respecto al ejercicio 5.52, encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria tomará un valor menor que 5.

5.54 En cierta ciudad, el consumo diario de electricidad (en millones de kilowatts-horas) puede tratarse como una variable aleatoria, que tiene una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Si la planta eléctrica de esta ciudad tiene una capacidad diaria de 12 millones de kilowatts-horas, ¿cuál es la probabilidad de que este suministro eléctrico será inadecuado en cualquier día dado?

5.55 Con respecto al ejemplo de la página 138, suponga que la opinión experta es errónea. Calcule la probabilidad de que los soportes sobrevivirán si

a) $\mu = 3.0$ y $\sigma^2 = 0.09$;

b) $\mu = 4.0$ y $\sigma^2 = 0.25$.

5.56 Verifique la expresión para la varianza de la distribución gamma dada en la página 139.

5.57 Demuestre que cuando $\alpha > 1$, la gráfica de la densidad gamma tiene un máximo relativo en $x = \beta(\alpha - 1)$. ¿Qué ocurre cuando $0 < \alpha < 1$ y cuando $\alpha = 1$?

5.58 La cantidad de tiempo que una cámara de seguridad operará sin tener que resetearse es una variable aleatoria que tiene la distribución exponencial con $\beta = 50$ días. Encuentre las probabilidades de que tal cámara

a) tendrá que resetearse en menos de 20 días;

b) no tendrá que resetearse en al menos 60 días.

5.59 Con respecto al ejercicio 4.95, encuentre el porcentaje del tiempo que el intervalo entre descomposturas de la computadora será

a) menor que 1 semana;

b) al menos de 5 semanas.

5.60 Con respecto al ejercicio 4.58, encuentre las probabilidades de que el tiempo entre solicitudes sucesivas para consulta será

a) menor que 0.5 semanas;

b) más de 3 semanas.

5.61 Dado un proceso de Poisson con un promedio de α llegadas por unidad de tiempo, determine la probabilidad de que no habrá llegadas durante un intervalo de tiempo de longitud t; a saber, la probabilidad de que los tiempos de espera entre llegadas sucesivas será al menos de longitud t.

5.62 Use el resultado del ejercicio 5.61 para encontrar una expresión para la densidad de probabilidad del tiempo de espera entre llegadas sucesivas.

5.63 Verifique que para $\alpha = 3$ y $\beta = 3$ la integral de la densidad beta, de 0 a 1, es igual a 1.

5.64 Si la proporción anual de devoluciones erróneas de impuesto sobre la renta llenadas con el IRS pueden considerarse como una variable aleatoria que tiene una distribución beta con $\alpha = 2$ y $\beta = 9$, ¿cuál es la probabilidad de que en algún año dado habrá menos de 10% devoluciones erróneas?

5.65 Suponga que la proporción de embarques defectuosos de un proveedor, que varía un poco de embarque a embarque, puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 4$.

a) Encuentre la media de esta distribución beta; a saber, la proporción promedio de defectos en un embarque de este proveedor.

b) Determine la probabilidad de que un embarque de este proveedor contendrá 25% o más defectos.

5.66 Demuestre que cuando $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, la densidad beta tiene un máximo relativo en

$$x = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

5.67 Con respecto al ejemplo de la página 143, encuentre la probabilidad de que tal batería dure menos de 100 horas.

5.68 Suponga que el tiempo para fallar (en minutos) de ciertos componentes electrónicos sometidos a vibraciones continuas pueden considerarse como una variable aleatoria que tiene la distribución de Weibull con $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{1}{3}$.

a) ¿Cuánto tiempo puede esperarse que dure dicho componente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tal componente fallará en menos de 5 horas?

5.69 Suponga que la vida de servicio (en horas) de un dispositivo semiconductor es una variable aleatoria que tiene la distribución de Weibull con $\alpha = 0.025$ y $\beta = 0.500$. ¿Cuál es la probabilidad de que tal dispositivo todavía estará en condición operativa después de 4,000 horas?

5.70 Verifique la fórmula para la varianza de la distribución de Weibull dada en la página 143.

5.10 Distribuciones conjuntas discretas y continuas

Variables discretas

A menudo se realizan experimentos donde dos variables aleatorias se observan simultáneamente, con la finalidad de determinar no tan solo su comportamiento individual, sino también el grado de relación entre ellas.

Para dos variables discretas X_1 y X_2, se escribe la probabilidad de que X_1 tomará el valor x_1 y X_2 tomará el valor x_2 como $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$. En consecuencia, $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ es la probabilidad de la intersección de los eventos $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$. La distribución de probabilidad se especifica al mencionar las probabilidades asociadas con todos los posibles pares de valores x_1 y x_2, ya sea mediante fórmula o en una tabla. A la función $f(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ y a los correspondientes posibles valores (x_1, x_2) se les conoce como la **distribución de probabilidad conjunta** de X_1 y X_2.

EJEMPLO

Cálculo de probabilidades de una distribución de probabilidad conjunta discreta

Sea que X_1 y X_2 tienen la distribución de probabilidad conjunta de la siguiente tabla.

Distribución de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2)$ de X_1 y X_2

		x_1 = 0	1	2
x_2	0	0.1	0.4	0.1
	1	0.2	0.2	0

a) Calcule $P(X_1 + X_2 > 1)$.

b) Encuentre la distribución de probabilidad $f_1(x_1) = P(X_1 = x_1)$ de la variable aleatoria individual X_1.

Solución *a*) El evento $X_1 + X_2 > 1$ se compone de los pares de valores (1, 1), (2, 0) y (2, 1). Al sumar sus correspondientes probabilidades

$$P(X_1 + X_2 > 1) = f(1, 1) + f(2, 0) + f(2, 1) = 0.2 + 0.1 + 0 = 0.3$$

b) Ya que el evento $X_1 = 0$ está compuesto de los dos pares de valores (0, 0) y (0, 1), se suman sus correspondientes probabilidades para obtener

$$P(X_1 = 0) = f(0, 0) + f(0, 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

Al continuar, se obtiene $P(X_1 = 1) = 0.6$ y $P(X_1 = 2) = 0.1$. En resumen, $f_1(0) = 0.3$, $f_1(1) = 0.6$ y $f_1(2) = 0.1$ es la distribución de probabilidad de X_1.

Al reescribir la tabla de frecuencias, pero incluyendo los totales de fila y columna,

Distribución de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2)$ de X_1 y X_2 con distribuciones marginales

		x_1			Total
		0	1	2	$f_2(x_2)$
x_2	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
Total	$f_1(x_1)$	0.3	0.6	0.1	1.0

Note que la distribución de probabilidad $f_1(x_1)$ de X_1 aparece en el margen inferior de esta tabla alargada. La distribución de probabilidad $f_2(x_2)$ de X_2 aparece en el margen derecho de la tabla. En consecuencia, las distribuciones individuales se llaman **distribuciones de probabilidad marginales**. ■

A partir del ejemplo, se observa que, para cada valor fijo x_1 de X_1, la distribución de probabilidad marginal se obtiene como

$$P(X_1 = x_1) = f_1(x_1) = \sum_{\text{valores } x_2} f(x_1, x_2)$$

donde la suma es sobre todos los posibles valores de la segunda variable, con x_1 fija.

Consistente con la definición de probabilidad condicional de eventos cuando A es el evento $X_1 = x_1$ y B es el evento $X_2 = x_2$, la **distribución de probabilidad condicional** de X_1 dado $X_2 = x_2$ se define como

$$f_1(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \qquad \text{para toda } x_1 \text{ siempre que } f_2(x_2) \neq 0$$

Si $f_1(x_1 \mid x_2) = f_1(x_1)$ para toda x_1 y x_2, de modo que la distribución de probabilidad condicional está libre de x_2 o, de manera equivalente, si

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \qquad \text{para todas } x_1, x_2$$

las dos variables aleatorias son **independientes**.

EJEMPLO **Una distribución de probabilidad condicional**

Con respecto al ejemplo anterior, encuentre la distribución de probabilidad condicional de X_1 dado $X_2 = 1$. ¿X_1 y X_2 son independientes?

Solución $f_1(0 \mid 1) = \dfrac{f(0,1)}{f_2(1)} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5, \quad f_1(1 \mid 1) = \dfrac{f(1,1)}{f_2(1)} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5$ y

$$f_1(2 \mid 1) = \frac{f(2,1)}{f_2(1)} = \frac{0}{0.4} = 0$$

Dado que $f_1(0 \mid 1) = 0.5 \neq 0.3 = f_1(0)$, la distribución de probabilidad condicional no está libre del valor x_2. De manera equivalente, $f(0, 1) = 0.2 \neq (0.3)(0.4) = f_1(0)\, f_2(1)$, por lo que X_1 y X_2 son *dependientes*. ■

Suponga que ahora usted está interesado por las k variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Sea x_1 un posible valor para la primera variable aleatoria X_1, x_2 es un posible valor para la segunda variable aleatoria X_2, y así sucesivamente hasta x_k como un posible valor para la k-ésima variable aleatoria. Entonces, es necesario especificar las probabilidades $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. La función conjunta f de las correspondientes k-tuplas de posibles valores $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se les conoce como la **distribución de probabilidad conjunta** de dichas variables aleatorias discretas.

La distribución de probabilidad $f_i(x_i)$ de la variable individual X_i se llama **distribución de probabilidad marginal** de la i-ésima variable aleatoria

$$f_i(x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

donde la suma es sobre todas las posibles k-tuplas donde el i-ésimo componente se mantiene fijo en el valor x_i especificado.

Variables continuas

Hay muchas situaciones donde un resultado se describe al proporcionar los valores de varias variables aleatorias continuas. Por ejemplo, se puede medir el peso y la dureza de una roca; el volumen, la presión y la temperatura de un gas; o el grosor, el color, la resistencia a la compresión y el contenido de potasio de un trozo de vidrio. Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son k variables aleatorias continuas, a $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se le conocerá como la **densidad de probabilidad conjunta** de dichas variables aleatorias, si la probabilidad de que $a_1 \leq X_1 \leq b_1$, $a_2 \leq X_2 \leq b_2, \ldots$, y $a_k \leq X_k \leq b_k$ está dada por la integral múltiple

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k$$

Por lo tanto, no toda función $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ sirve como una densidad de probabilidad conjunta, pero si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq 0$$

para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k = 1$$

puede demostrarse que se satisfacen los axiomas de probabilidad (con la modificación de la definición de "evento" discutida en la sección 5.1).

Para extender el concepto de una función de distribución acumulada al caso de k variables, se escribe como $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ la probabilidad de que la primera variable aleatoria tomará un valor menor que o igual a x_1, la segunda variable aleatoria tomará un valor menor que o igual a $x_2, \ldots$, y la k-ésima variable aleatoria tomará un valor menor que o

igual a x_k, y a la correspondiente función F como la **función de distribución acumulada conjunta** de las k variables aleatorias.

EJEMPLO

Cálculo de probabilidades de una función de densidad de probabilidad conjunta

Si la densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias está dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 6\,e^{-2x_1-3x_2} & \text{para } x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

encuentre las probabilidades de que

a) la primera variable aleatoria tomará un valor entre 1 y 2, y la segunda variable aleatoria tomará un valor entre 2 y 3;

b) la primera variable aleatoria tomará un valor menor que 2, y la segunda variable aleatoria tomará un valor mayor que 2.

Solución Al realizar las integraciones necesarias,

a)
$$\int_1^2 \int_2^3 6\,e^{-2x_1-3x_2}\,dx_1\,dx_2 = (e^{-2} - e^{-4})(e^{-6} - e^{-9}) = 0.0003$$

b)
$$\int_0^2 \int_2^\infty 6\,e^{-2x_1-3x_2}\,dx_1\,dx_2 = (1 - e^{-4})\,e^{-6} = 0.0025$$

■

EJEMPLO

Determinación de una función de distribución acumulada conjunta

Encuentre la función de distribución conjunta de las dos variables aleatorias del ejercicio anterior, y úsela para encontrar la probabilidad de que ambas variables aleatorias tomarán valores menores que 1.

Solución Por definición,

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} 6\,e^{-2u-3v}\,du\,dv & \text{para } x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

de modo que

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 - e^{-2x_1})(1 - e^{-3x_2}) & \text{para } x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y, por lo tanto,

$$F(1, 1) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-3}) = 0.8216$$

■

Dada la densidad de probabilidad conjunta de k variables aleatorias, la densidad de probabilidad de la i-ésima variable aleatoria puede obtenerse al integrar las otras variables; de manera simbólica,

Densidad marginal

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,dx_1 \ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1} \ldots dx_k$$

y, en dicho contexto, la función f_i se llama **densidad marginal** de la i-ésima variable aleatoria. Al integrar tan solo algunas de las k variables aleatorias, pueden definirse de igual modo las **densidades marginales conjuntas** de cualesquiera dos, tres o más de las k variables aleatorias.

EJEMPLO

Determinación de una densidad marginal a partir de una densidad conjunta

Con respecto al ejemplo de la página 148, encuentre la densidad marginal de la primera variable aleatoria.

Solución Al integrar x_2 se obtiene

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty 6\,e^{-2x_1-3x_2}\,dx_2 & \text{para } x_1 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

o bien,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x_1} & \text{para } x_1 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

■

Para explicar qué se entiende por **independencia** de variables aleatorias continuas, podría procederse como con las variables aleatorias discretas de la página 146 y definir primero las **densidades condicionales**; sin embargo, será más fácil decir que

Variables aleatorias independientes

> k variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$ son **independientes** si y sólo si
>
> $$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdots F_k(x_k)$$
>
> para todos los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de dichas variables aleatorias.

En esta notación $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es, como antes, la función de distribución conjunta de las k variables aleatorias, mientras $F_i(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ son las correspondientes funciones de distribución individuales de las respectivas variables aleatorias. La misma condición se aplica para variables aleatorias discretas.

EJEMPLO

Comprobación de independencia vía la distribución acumulada conjunta

Con respecto al ejemplo de la página 148, compruebe si las dos variables aleatorias son independientes.

Solución Como ya se vio en el ejemplo de la página 148, la función de distribución conjunta de las dos variables aleatorias está dada por

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 - e^{-2x_1})(1 - e^{-3x_2}) & \text{para } x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Ahora, puesto que $F_1(x_1) = F(x_1, \infty)$ y $F_2(x_2) = F(\infty, x_2)$, se sigue que

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 1 - e^{-2x_1} & \text{para } x_1 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-3x_1} & \text{para } x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Por ende, $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$ para toda (x_1, x_2) y las dos variables aleatorias son independientes. ■

Cuando k variables aleatorias tienen una densidad de probabilidad conjunta, las k **variables aleatorias son independientes**, si y solo si su densidad de probabilidad conjunta es igual al producto de los correspondientes valores de las densidades marginales de las k variables aleatorias; de manera simbólica,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_k(x_k) \qquad \text{para toda } (x_1, \ldots, x_k).$$

EJEMPLO

Establecimiento de independencia al factorizar la densidad de probabilidad conjunta

Con respecto al ejemplo de la página 148, verifique que

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

Solución En la página 149 se demostró que

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 2e^{-2x_1} & \text{para } x_1 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y en la misma forma puede demostrarse que

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 3e^{-3x_2} & \text{para } x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \begin{cases} 6e^{-2x_1 - 3x_2} & \text{para } x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y se observa que $f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = f(x_1, x_2)$ para toda (x_1, x_2). ■

Dadas dos variables aleatorias continuas X_1 y X_2, se define la **densidad de probabilidad condicional** de la primera dado que la segunda tome el valor x_2 como

Densidad de probabilidad condicional

$$f_1(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \quad \text{siempre que} \quad f_2(x_2) \neq 0$$

donde $f(x_1, x_2)$ y $f_2(x_2)$ son, como antes, la densidad conjunta de las dos variables aleatorias y la densidad marginal de la segunda. Observe que esta definición va paralela a la de la distribución de probabilidad condicional de la página 146. Además, la densidad de probabilidad conjunta es el producto

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1 \mid x_2)\, f_2(x_2).$$

EJEMPLO

Determinación de una densidad de probabilidad condicional

Si dos variables aleatorias tienen la densidad de probabilidad conjunta

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2) & \text{para } 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

encuentre la densidad condicional de la primera, dado que la segunda tome el valor x_2.

Solución Primero encuentre la densidad marginal de la segunda variable aleatoria, al integrar x_1 y obtener

$$f_2(x_2) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2)\,dx_1 = \frac{1}{3}(1 + 4x_2) \qquad \text{para } 0 < x_2 < 1$$

y $f_2(x_2) = 0$ en otra parte. Por lo tanto, por definición, la densidad condicional de la primera variable aleatoria, dado que la segunda toma el valor x_2, está dada por

$$f_1(x_1 \mid x_2) = \frac{\frac{2}{3}(x_1 + 2x_2)}{\frac{1}{3}(1 + 4x_2)} = \frac{2x_1 + 4x_2}{1 + 4x_2} \qquad \text{para } 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$

y $f_1(x_1 \mid x_2) = 0$ para $x_1 \le 0$ o bien $x_1 \ge 1$ y $0 < x_2 < 1$. ■

Propiedades de la esperanza

Considere una función $g(X)$ de una sola variable aleatoria X. Por ejemplo, si X es la temperatura de un horno en grados centígrados, entonces,

$$g(X) = \frac{9}{5}X + 32$$

es la misma temperatura en grados Fahrenheit.

La **esperanza** de la función $g(X)$ es nuevamente la *suma* de los productos *valor* × *probabilidad*.

Valor esperado de $g(X)$

En el caso discreto, donde X tiene distribución de probabilidad $f(x)$

$$E[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

En el caso continuo, donde X tiene función de densidad de probabilidad $f(x)$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

Si X tiene media $\mu = E(X)$, entonces, al tomar $g(x) = (x - \mu)^2$, se tiene $E[g(X)] = E(X - \mu)^2$, que es justo la varianza σ^2 de X.

Para cualquier variable aleatoria Y, sea $E(Y)$ su esperanza, que también es su media μ_Y. Su varianza es $Var(Y)$ que también se escribe como σ_Y^2.

Cuando $g(x) = ax + b$, para constantes dadas a y b, entonces, la variable aleatoria $g(X)$ tiene esperanza

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

y varianza

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b - a\mu_X - b)^2 f(x)\,dx \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\,dx = a^2 Var(X) \end{aligned}$$

Para resumir,

Para constantes dadas a y b

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{y} \quad Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$$

EJEMPLO **La media y la desviación estándar de una variable aleatoria estandarizada**

Sea que X tiene media μ y desviación estándar σ. Use las propiedades de la esperanza para demostrar que la variable aleatoria estandarizada

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene media 0 y desviación estándar 1.

Solución Dado que Z es de la forma

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma} = aX + b$$

donde $a = 1/\sigma$ y $b = -\mu/\sigma$,

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

y la varianza de Z es

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

ya que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. ■

EJEMPLO **Determinación de la media y la varianza de 20 *X***

Suponga que la cantidad diaria de electricidad X requerida para un proceso de chapado tiene media 10 y desviación estándar de 3 kilowatts-horas. Si el costo de la electricidad es de 20 dólares por kilowatt-hora, encuentre la media, la varianza y la desviación estándar del costo diario de electricidad.

Solución El costo diario de la electricidad, $g(X) = 20\,X$, tiene media $20\,E(X) = 20 \times 10 = 200$ dólares y varianza $(20)^2\,Var(X) = (20)^2\,3^2 = 3{,}600$. Su desviación estándar es $\sqrt{3{,}600} = 60$ dólares. ■

Dada cualquier colección de k variables aleatorias, la función $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ también es una variable aleatoria. Los ejemplos incluyen $Y = X_1 - X_2$ cuando $g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ y $Y = 2X_1 + 3X_2$ cuando $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$. La variable aleatoria $g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ tiene valor esperado, o media, que es la suma de los productos *valor* × *probabilidad*.

Valor esperado de $g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

En el caso discreto,

$$E[g(X_1, X_2, \ldots, X_k)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_k} g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

En el caso continuo,

$$E[g(X_1, X_2, \ldots, X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_k$$

Muchas propiedades importantes de la esperanza pueden deducirse a partir de esta definición. Al tomar $g(x_1, x_2) = (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)$, se observa que el producto $(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)$ será positivo si los valores x_1 y x_2 están ambos por arriba de sus medias respectivas, o ambos por debajo de sus medias respectivas. De otro modo, será negativo. El valor esperado $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$ tenderá a ser positivo cuando X_1 y X_2 grandes tiendan a ocurrir juntos y X_1 y X_2 pequeños tiendan a ocurrir juntos, con alta probabilidad. Esta medida $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$ de variación conjunta se llama **covarianza** poblacional de X_1 y X_2.

Si X_1 y X_2 son independientes, de modo que $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1) f_1(x_1)\, dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mu_2) f_2(x_2)\, dx_2 = 0$$

Este resultado en cuanto a covarianza cero puede enunciarse como

La independencia implica que la covarianza sea cero

Cuando X_1 y X_2 son independientes, su covarianza

$$E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = 0$$

Más aún, la esperanza de una combinación lineal de dos variables aleatorias independientes $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ es

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= E(Y) = E(a_1X_1 + a_2X_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1x_1 + a_2x_2) f_1(x) f_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)\, dx_2 \\
&\quad + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2)\, dx_2 \\
&= a_1E(X_1) + a_2E(X_2)
\end{aligned}$$

Este resultado se sostiene, incluso si no son independientes las dos variables aleatorias. Además,

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Y - \mu_Y)^2 = E[(a_1X_1 + a_2X_2 - a_1\mu_1 - a_2\mu_2)^2] \\
&= E[(a_1(X_1 - \mu_1) + a_2(X_2 - \mu_2))^2] \\
&= E[a_1^2(X_1 - \mu_1)^2 + a_2^2(X_2 - \mu_2)^2 + 2a_1a_2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \\
&= a_1^2E[(X_1 - \mu_1)^2] + a_2^2E[(X_2 - \mu_2)^2] + 2a_1a_2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \\
&= a_1^2\, Var(X_1) + a_2^2\, Var(X_2)
\end{aligned}$$

dado que el tercer término es cero, porque se supuso que X_1 y X_2 son independientes.

Dichas propiedades se sostienen para cualquier número de variables aleatorias, ya sean continuas o discretas.

La media y la varianza de combinaciones lineales

Sea que X_i tiene media μ_i y varianza σ_i^2 para $i = 1, 2, \ldots, k$. La combinación lineal $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k$ tiene

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_kE(X_k)$$

o bien,

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} a_i\mu_i$$

Cuando las variables aleatorias son independientes,

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k) = a_1^2\,Var(X_1) + a_2^2\,Var(X_2) + \cdots + a_k^2\,Var(X_k)$$

o bien,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2\,\sigma_i^2$$

EJEMPLO **Varianzas de $X_1 - X_2$ y $X_1 + X_2$ cuando X_1 y X_2 son independientes**

Sea que X_1 tiene media μ_1 y varianza σ_1^2 y sea que X_2 tiene media μ_2 y varianza σ_2^2. Encuentre la media y la varianza de

a) $X_1 - X_2$ y *b*) $X_1 + X_2$

si X_1 y X_2 son independientes.

Solución *a*) Note que $X_1 - X_2$ es de la forma $a_1X_1 + a_2X_2$ con $a_1 = -a_2 = 1$, de modo que tiene media

$$1 \cdot \mu_1 + 1 \cdot \mu_2 = \mu_1 + \mu_2$$

y varianza

$$1^2 \cdot \sigma_1^2 + 1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

b) Puesto que $X_1 + X_2$ corresponde al caso en que $a_1 = a_2 = 1$, tiene media

$$1 \cdot \mu_1 + 1 \cdot \mu_2 = \mu_1 + \mu_2$$

y varianza

$$1^2 \cdot \sigma_1^2 + 1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

■

EJEMPLO **Cómo encontrar la media y la varianza de $2X_1 + X_2 - 5$**

Si X_1 tiene media 4 y varianza 9, en tanto que X_2 tiene media −2 y varianza 5, y las dos son independientes, encuentre

a) $E(2X_1 + X_2 - 5)$
b) $Var(2X_1 + X_2 - 5)$

Solución De acuerdo con las propiedades de la esperanza, la constante −5 se agrega a la esperanza de $2X_1 + X_2$, pero la varianza no cambia.

a)
$$\begin{aligned} E(2X_1 + X_2 - 5) &= E(2X_1 + X_2) - 5 \\ &= 2E(X_1) + E(X_2) - 5 = 2(4) + (-2) - 5 = 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} Var(2X_1 + X_2 - 5) &= Var(2X_1 + X_2) \\ &= 2^2\,Var(X_1) + Var(X_2) = 2^2(9) + 5 = 41 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO **La media y la varianza del tiempo total para recubrimiento y enjuague**

El tiempo para completar un proceso de recubrimiento, X_1, tiene media 35 minutos y varianza 11, mientras que el tiempo para enjuagar, X_2, tiene media 8 minutos y varianza 5. Calcule la media y la desviación estándar del tiempo total para recubrir y enjuagar.

Solución De acuerdo con las propiedades de la esperanza, el tiempo total $X_1 + X_2$ tiene media $35 + 8 = 43$ minutos. Al tratar los tiempos de recubrimiento y enjuague como independientes, la varianza es $11 + 5 = 16$, de modo que la desviación estándar es 4. ■

EJEMPLO **La media y la varianza de la media muestral $\overline{X}$**

Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes y cada una tiene la misma distribución con media μ y varianza σ^2. Use las propiedades de la esperanza para demostrar que la media muestral $\overline{X}$ tiene

a) media: $\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu$

b) varianza: $\sigma^2_{\overline{X}} = Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Solución *a*) La media muestral

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n$$

es una combinación lineal con constantes $a_i = 1/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En consecuencia,

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

de modo que el valor esperado o media de $\overline{X}$ es el mismo que la media de cada observación.

b) La varianza de $\overline{X}$ es

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_1) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_2) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

de modo que la varianza de $\overline{X}$ es igual a la varianza de una sola observación dividida entre n. ■

EJEMPLO **El valor esperado de la varianza muestral**

Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes y cada una tiene la misma distribución con media μ y varianza σ^2. Use las propiedades de la esperanza para demostrar que σ^2 es la media, o esperanza, de la varianza muestral

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$$

Solución Se escribe $(X_i - \overline{X})^2 = (X_i - \mu + \mu - \overline{X})^2 = (X_i - \mu)^2 + (\mu - \overline{X})^2 + 2(Xi - \mu)(\mu - X)$, de modo que el numerador de la varianza muestral es

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\mu - \overline{X})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\mu - \overline{X})$$

y el último término es igual a $-2(\overline{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = -2n(\overline{X} - \mu)^2$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2$$

Puesto que $E(X_i - \mu)^2 = Var(X_i) = \sigma^2$ y, por el ejemplo anterior, $E(\overline{X}) = \mu$, de modo que $E(\overline{X} - \mu)^2 = Var(\overline{X}) = \sigma^2/n$, al tomar la esperanza término a término y sumar,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2$$

Al dividir ambos lados entre $n - 1$, se concluye que σ^2 es el valor esperado de la varianza muestral. ■

Ejercicios

5.71 Para un experimento se necesitan dos escáneres. De los cinco disponibles, dos tienen defectos electrónicos, otro tiene un defecto en la memoria y dos están en buenas condiciones operativas. Se seleccionan dos unidades al azar.

a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta de X_1 = el número con defectos electrónicos y X_2 = el número con un defecto en la memoria.

b) Determine la probabilidad de 0 o 1 defectos totales entre los dos seleccionados.

c) Encuentre la distribución de probabilidad marginal de X_1.

d) Determine la distribución de probabilidad condicional de X_1 dada $X_2 = 0$.

5.72 Dos variables aleatorias son independientes y cada una tiene una distribución binomial con probabilidad de éxito de 0.4 y 2 ensayos.

a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta.

b) Determine la probabilidad de que la segunda variable aleatoria sea mayor que la primera.

5.73 Si dos variables aleatorias tienen la densidad conjunta

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{para } 0 < x_1 < 2,\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

encuentre las probabilidades de que

a) ambas variables aleatorias tomarán valores menores que 1;

b) la suma de los valores tomados por las dos variables aleatorias será menor que 1.

5.74 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre las densidades marginales de las dos variables aleatorias.

5.75 Con respecto al ejercicio 5.73, encuentre la función de distribución conjunta de las dos variables aleatorias, las funciones de distribución de las variables aleatorias individuales, y verifique si las dos variables aleatorias son independientes.

5.76 Si dos variables aleatorias tienen la densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2) & \text{para } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

calcule la probabilidad de que $0.2 < X < 0.5$ y $0.4 < Y < 0.6$.

5.77 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre la función de distribución conjunta de las dos variables aleatorias y úsela para verificar el valor obtenido para la probabilidad.

5.78 Con respecto al ejercicio 5.76, calcule ambas densidades marginales y úselas para encontrar las probabilidades de que

a) $X > 0.8$;

b) $Y < 0.5$.

5.79 Con respecto al ejercicio 5.76, encuentre

a) una expresión para $f_1(x \mid y)$ para $0 < y < 1$;

b) una expresión para $f_1(x \mid 0.5)$;

c) la media de la densidad condicional de la primera variable aleatoria cuando la segunda tome el valor de 0.5.

5.80 Con respecto al ejemplo de probabilidad condicional de la página 150, encuentre expresiones para

a) la densidad condicional de la primera variable aleatoria, cuando la segunda toma el valor $x_2 = 0.25$;

b) la densidad condicional de la segunda variable aleatoria cuando la primera toma el valor x_1.

5.81 Si tres variables aleatorias tienen la densidad conjunta

$$f(x, y, z) = \begin{cases} k(x + y)e^{-z} & \text{para } 0 < x < 1, \\ & \quad 0 < y < 2,\ z > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Calcule

a) el valor de k;

b) la probabilidad de que $X < Y$ y $Z > 1$.

5.82 Con respecto al ejercicio anterior, compruebe si

a) las tres variables aleatorias son independientes;

b) cualesquiera dos de las tres variables aleatorias por pares son independientes.

5.83 Un par de variables aleatorias tiene la **distribución normal circular** si su densidad conjunta está dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-[(x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2]/2\sigma^2}$$

para $-\infty < x_1 < \infty$ y $-\infty < x_2 < \infty$.

a) Si $\mu_1 = 2$ y $\mu_2 = -2$, y $\sigma = 10$, use la tabla 3 para encontrar la probabilidad de que $-8 < X_1 < 14$ y $-9 < X_2 < 3$.

b) Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\sigma = 3$, encuentre la probabilidad de que (X_1, X_2) esté contenida en la región entre los dos círculos $x_1^2 + x_2^2 = 9$ y $x_1^2 + x_2^2 = 36$.

5.84 Un taladro de precisión ubicado sobre un punto objetivo formará un orificio aceptable si está dentro de 5 micrones del objetivo. Al usar el objetivo como el origen de un sistema rectangular de coordenadas, suponga que las coordenadas (x, y) del punto de contacto son valores de un par de variables aleatorias que tienen distribución normal circular (véase el ejercicio 5.83) con $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\sigma = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que el orificio será aceptable?

5.85 Con respecto al ejercicio 5.73, encuentre el valor esperado de la variable aleatoria cuyos valores están dados por $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

5.86 Con respecto al ejercicio 5.76, encuentre el valor esperado de la variable aleatoria cuyos valores están dados por $g(x, y) = x^2 y$.

5.87 Si las mediciones de la longitud y el ancho de un rectángulo tienen la densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\,b} & \text{para } L - \dfrac{a}{2} < x < L + \dfrac{a}{2}, \\ & \qquad W - \dfrac{b}{2} < y < W + \dfrac{b}{2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

calcule la media y la varianza de la correspondiente distribución del área del rectángulo.

5.88 Establezca una relación entre $f_1(x_1 \mid x_2)$, $f_2(x_2 \mid x_1)$, $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$.

5.89 Si X_1 tiene media 1 y varianza 5 mientras X_2 tiene media –1 y varianza 5, y las dos son independientes, encuentre

a) $E(X_1 + X_2)$;

b) $Var\,(X_1 + X_2)$.

5.90 Si X_1 tiene media –3 y varianza 2 mientras X_2 tiene media 5 y varianza 4, y las dos son independientes, encuentre

a) $E(X_1 - X_2)$;

b) $Var\,(X_1 - X_2)$.

5.91 Si X_1 tiene media 1 y varianza 3 mientras X_2 tiene media –2 y varianza 5, y las dos son independientes, encuentre

a) $E\,(X_1 + 2X_2 - 3)$;

b) $Var\,(X_1 + 2X_2 - 3)$.

5.92 El tiempo para que una máquina antigua complete una comprobación de un chip de computadora, X_1, tiene media de 65 milisegundos y varianza de 16, mientras que el tiempo para un modelo más reciente, X_2, tiene media de 45 milisegundos y varianza de 9. Encuentre los ahorros de tiempo esperados usando el modelo más reciente, cuando

a) compruebe un solo chip;

b) compruebe 200 chips.

c) Encuentre las desviaciones estándares de los incisos *a*) y *b*), si supone que todos los tiempos de comprobación son independientes.

5.93 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ independientes y que cada una tiene la misma distribución marginal con media 10 y varianza 3. Calcule

a) $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20})$;

b) $Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20})$.

5.11 Funciones generadoras de momentos

Una alternativa a la distribución de probabilidad en ocasiones puede simplificar enormemente el cálculo de momentos. La **función generadora de momentos** (fgm) de una variable aleatoria X, o su distribución de probabilidad, es la función definida por

$$M(t) = E(e^{tX})$$

que es la esperanza de la función exponencial e^{tX}. En el caso discreto,

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{\text{toda } x_i} e^{tx_i} f(x_i)$$

y

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

en el caso continuo. Para cada t fija, el integrando es una función positiva de x de modo que $M(t)$ es finita o infinita. Note que $M(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$ siempre existe, pero se requiere que exista $M(t)$ para un intervalo de valores de t.

Se dice que la distribución de probabilidad, o variable aleatoria X, **posee una función generadora de momentos** $M(t)$, si esta función es finita para t en algún intervalo que contenga cero, por decir, $|t| \leq T$ para alguna $T > 0$.

Con la condición de que $M(t)$ es finita para $|t| \leq T$, para alguna $T > 0$, es posible obtener derivadas sucesivas al diferenciar bajo el signo de integral o suma. En el caso continuo, se obtiene

$$M'(t) = \frac{d}{dt}M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}e^{tx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{tx} f(x)\,dx$$

$$M''(t) = \frac{d^2}{dt^2}M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}xe^{tx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{tx} f(x)\,dx$$

Para los casos continuo o discreto,

$$M^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}M(t) = E(X^k e^{tX}) \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Al hacer $t = 0$, se obtienen los momentos con respecto al origen

$$M'(0) = E(X)$$
$$M''(0) = E(X^2)$$

Al diferenciar k veces, la k-ésima derivada se relaciona con el k-ésimo momento

$$M^{(k)}(0) = E(X^k) \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Propiedades básicas de las funciones generadoras de momentos

Teorema 5.2 Si la función generadora de momentos es finita para $|t| \leq T$, para alguna $T > 0$, ello determina de manera exclusiva la distribución de probabilidad.

Entonces, todos los momentos existen y pueden obtenerse a partir de la relación

$$M^{(k)}(0) = E(X^k)$$

A partir de la definición de esperanza, los momentos de cualquier variable aleatoria deben obtenerse mediante integración o suma de una serie. Cuando está disponible la función generadora de momentos, este proceso puede sustituirse por una diferenciación directa. En los siguientes ejemplos se determinan las funciones generadoras de momentos, y se ilustra el cálculo de la media y la varianza para varias distribuciones comunes.

EJEMPLO **Función generadora de momentos para la distribución binomial**

Sea que X tiene la distribución binomial con distribución de probabilidad

$$b(x \mid n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \qquad \text{para } x = 0, 1, \ldots, n$$

Demuestre que

a) $M(t) = (1 - p + pe^t)^n$ para toda t

b) $E(X) = np$ y $Var(X) = np(1 - p)$

Solución *a*) Por definición de la función generadora de momentos,

$$M(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}$$
$$= (pe^t + 1 - p)^n \qquad \text{para toda } t$$

donde se usó la fórmula binomial

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

b) Al diferenciar $M(t)$, se encuentra

$$M'(t) = n\,p\,e^t\,(p\,e^t + 1 - p)^{n-1}$$
$$M''(t) = (n-1)\,n\,p^2\,e^{2t}(p\,e^t + 1 - p)^{n-2} + n\,p\,e^t(p\,e^t + 1 - p)^{n-1}$$

Al evaluar dichas derivadas en $t = 0$, se obtienen los momentos

$$E(X) = np$$
$$E(X^2) = (n-1)\,n\,p^2 + np$$

Además, la varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p)$$ ■

EJEMPLO **Función generadora de momentos para la distribución de Poisson**

Sea que X tiene la distribución de Poisson con distribución de probabilidad

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad \text{para } x = 0, 1, \ldots, \infty$$

Demuestre que

a) $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ para toda t

b) $E(X) = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$

La media y la varianza de la distribución de Poisson son iguales.

Solución *a*) Por definición de la función generadora de momentos

$$M(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad \text{para } x = 0, 1, \ldots, \infty$$

donde se usó la serie $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$

b) Al diferenciar $M(t)$,

$$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$
$$M''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Al evaluar dichas derivadas en $t = 0$, se obtienen los momentos

$$E(X) = \lambda$$
$$E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

Además, la varianza es

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

■

EJEMPLO **Función generadora de momentos para la distribución gamma**

La distribución gamma tiene función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \qquad \text{para } x > 0$$

Demuestre que su función generadora de momentos es

$$M(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$$

y verifique la media y la varianza.

Solución

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$$
$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(1-\beta t)/\beta} dx$$

Esta última integral es finita para toda $t < 1/\beta$ y puede evaluarse al multiplicar y dividir entre $(1 - \beta t)^\alpha$, para obtener una densidad gamma con parámetros α y $\beta = \beta/(1 - \beta t)$. Se concluye que

$$M(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \frac{\beta^\alpha}{(1 - \beta t)^\alpha} = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$$

Para determinar los momentos, diferencie y encuentre

$$M'(t) = \alpha \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \beta$$
$$M''(t) = (\alpha + 1)\alpha \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+2}} \beta^2$$

Al hacer $t = 0$,

$$E(X) = M'(0) = \alpha\beta \qquad \text{y} \qquad E(X^2) = M''(0) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$$

de modo que $Var(X) = \alpha\beta^2$.

■

EJEMPLO **Función generadora de momentos para la distribución chi cuadrada**

Demuestre que la función generadora de momentos de la distribución chi cuadrada con n grados de libertad es

$$M(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{v/2}}$$

y que $E(X) = v$ y $Var(X) = 2v$.

Solución Tales resultados se siguen del ejemplo anterior, porque la distribución chi cuadrada con n grados de libertad también es una distribución gamma con $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$. ■

EJEMPLO **Función generadora de momentos para la distribución normal**

Demuestre que la distribución normal, cuya función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{tiene} \qquad M(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

que existe para toda t. Además, verifique los dos primeros momentos.

Solución Para obtener la función generadora de momentos, use la identidad

$$tx - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = -\frac{1}{2}\frac{[x - (t\sigma^2 + \mu)]^2}{\sigma^2} + t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2$$

que se obtiene al completar el cuadrado. Entonces,

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}[x-(t\sigma^2+\mu)]^2/\sigma^2} dx \times e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Para obtener los momentos de la normal, diferencie una vez para obtener

$$M'(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\mu^2}(\mu + t\sigma^2)$$

y una segunda vez para obtener

$$M''(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}[(\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2].$$

Al hacer $t = 0$,

$$E[X] = M'(0) = \mu \qquad \text{y} \qquad E(X^2) = M''(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

de modo que $Var(X) = \sigma^2$, como sugiere la notación. ■

Una propiedad básica relaciona la función generadora de momentos de $a + bX$ con la de X.

Función generadora de momentos de $a + bX$

Teorema 5.3 Sea que X tiene función generadora de momentos $M(t)$ y sean a y b constantes. Entonces,

$$M_{a+bX}(t) = E\left(e^{(a+bX)t}\right) = e^{at} \cdot M(bt)$$

Por ejemplo, la función generadora de momentos de $X - \mu$, que corresponde a $b = 1$ y $a = -\mu$, es

$$M_{X-\mu}(t) = e^{-\mu t} \cdot M_X(t)$$

EJEMPLO **Cómo convertir a la distribución normal estándar**

Sea X distribuida como normal con media μ y varianza σ^2. Use la función generadora de momentos para demostrar que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar.

Solución Por el ejemplo anterior, X tiene función generadora de momentos

$$M(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Más aún,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = a + bX \qquad \text{con} \qquad a = \frac{-\mu}{\sigma} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{\sigma}$$

Por lo tanto, la función generadora de momentos de Z es

$$M_Z(t) = e^{at} \cdot M(bt) = e^{-(\mu/\sigma)t} e^{(t/\sigma)\mu + \frac{1}{2}(t/\sigma)^2\sigma^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Esta última expresión es la función generadora de momentos de una distribución normal que tiene media 0 y varianza 1. Existe para toda t de modo que la función generadora de momentos determina de manera exclusiva la distribución. ■

Una de las propiedades más útiles de las funciones generadoras de momentos es una propiedad de multiplicación para variables aleatorias independientes.

Función generadora de momentos de suma bajo independencia

Teorema 5.4 Sean X y Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos M_X y M_Y. La suma $Z = X + Y$ tiene función generadora de momentos

$$M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

en el intervalo de t donde existen $M_X(t)$ y $M_Y(t)$.

Prueba

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} e^{tY})$$

Entonces, a partir de la suposición de independencia,

$$= E(e^{tX} e^{tY}) = E(e^{tX})\, E(e^{tY}) = M_X(t)\, M_Y(t)$$

EJEMPLO **La suma de dos variables aleatorias normales independientes es normal**

Sean X y Y variables aleatorias normales independientes. Sea X que tiene media μ_X y varianza σ_X^2, mientras que Y tiene media μ_Y y varianza σ_Y^2. Use funciones generadoras de momentos para demostrar que

a) $X + Y$ tienen una distribución normal con media $\mu_X + \mu_Y$ y varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

b) $X - Y$ tiene una distribución normal con media $\mu_X - \mu_Y$ y varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Solución *a*) A partir de un ejemplo anterior, las dos funciones generadoras de momentos son

$$M_X(t) = e^{t\mu_X + \frac{1}{2}t^2\sigma_X^2}$$
$$M_Y(t) = e^{t\mu_Y + \frac{1}{2}t^2\sigma_Y^2}$$

Su producto es

$$\begin{aligned} M_X(t)M_Y(t) &= e^{t\mu_X + \frac{1}{2}t^2\sigma_X^2} e^{t\mu_Y + \frac{1}{2}t^2\sigma_Y^2} \\ &= e^{t(\mu_X + \mu_Y) + \frac{1}{2}t^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \end{aligned}$$

que se identifica como la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal que tiene media $\mu_X + \mu_Y$ y varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

b) Puesto que X y $-Y$ son independientes y $-Y$ tiene función generadora de momentos $M_Y(-t)$, se sigue el resultado (véase el ejercicio 5.98). ■

Ejercicios

5.94 Sea $f(x) = 0.2$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

a) Determine la función generadora de momentos.

b) Calcule $E(X)$ y $E(X^2)$ al diferenciar la función generadora de momentos.

5.95 Sea

$$f(x) = 0.25\binom{2}{x} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2$$

a) Encuentre la función generadora de momentos.

b) Obtenga $E(X)$ y $E(X^2)$ al diferenciar la función generadora de momentos.

5.96 Sea que Z tiene una distribución normal con media 0 y varianza 1.

a) Encuentre la función generadora de momentos de Z^2.

b) Identifique la distribución de Z^2 al reconocer la forma de la función generadora de momentos.

5.97 Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

a) Encuentre la función generadora de momentos.

b) Obtenga $E(X)$ y $E(X^2)$ al diferenciar la función generadora de momentos.

5.98 Establezca el resultado de la página 162 concerniente a la diferencia de dos variables aleatorias normales independientes, X y Y.

5.99 Sean X y Y variables aleatorias normales independientes con

$$E(X) = 2 \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = 4$$
$$E(Y) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_Y^2 = 9$$

a) Use la función generadora de momentos para demostrar que $2X - 3Y + 5$ tiene una distribución normal.

b) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria en el inciso *a*).

5.100 Sea que X tiene la distribución geométrica

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \qquad \text{para } x = 1, 2, \ldots$$

Obtenga la función generadora de momentos para

$$t < -\ln(1-p)$$

[*Sugerencia:* recuerde que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \dfrac{1}{1-r}$ para $|r| < 1$.

5.12 Cómo verificar si los datos son normales

En muchos casos, un experimentador necesita comprobar si un conjunto de datos parece generarse a partir de una variable aleatoria con distribución normal. Como se indicó en la figura 2.8, la distribución normal puede servir para modelar variación en algunas cantidades. Más aún, muchos procedimientos estadísticos utilizados de manera común, que se describen en capítulos posteriores, requieren que la distribución de probabilidad sea casi normal. En consecuencia, en un gran número de aplicaciones es prudente comprobar la suposición de que los datos son normales.

Aunque implican un elemento de juicio subjetivo, los procedimientos gráficos son los más útiles para detectar desviaciones serias de la normalidad. Los histogramas pueden comprobarse por falta de simetría. Una sola cola larga ciertamente contradice la suposición de una distribución normal. Sin embargo, otra gráfica normal, llamada **gráfica de puntuaciones normales** o **gráfica de cuantiles normales**, es incluso más efectiva para detectar las desviaciones de la normalidad. Para introducir tal gráfica, considere una muestra de tamaño 4. En la práctica, es necesario un mínimo de 15 a 20 observaciones con la finalidad de evaluar la concordancia con la normalidad.

El término **puntuación normal** se refiere a una muestra idealizada de la distribución normal estándar. Consiste en los valores de z que dividen los ejes en intervalos de probabilidad iguales. Para tamaño muestral $n = 4$, las puntuaciones normales son

$$\begin{aligned} m_1 &= -z_{0.20} = -0.84 \\ m_2 &= -z_{0.40} = -0.25 \\ m_3 &= z_{0.40} = 0.25 \\ m_4 &= z_{0.20} = 0.84 \end{aligned}$$

como se ilustra en la figura 5.25 de la página 164.

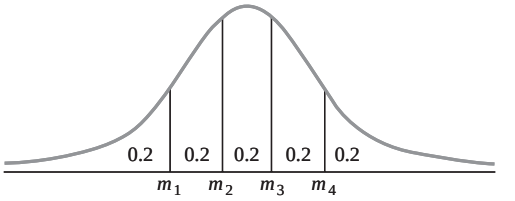


Figura 5.25
La distribución normal estándar y las puntuaciones normales para $n = 4$

Para construir una gráfica de puntuaciones normales:

1. Ordene los datos de menor a mayor;
2. Obtenga las puntuaciones normales;
3. Grafique la i-ésima observación más grande, contra la i-ésima puntuación normal m_i, para toda i.

EJEMPLO **Una gráfica de puntuaciones normales simple**

Suponga que las cuatro observaciones son 67, 48, 76, 81. Construya una gráfica de puntuaciones normales.

Solución Las observaciones ordenadas son 48, 67, 76, 81. Anteriormente, se descubrió que $m_1 = -z_{0.20} = -0.84$, de modo que se grafica el par (–0.84, 48). Al continuar, se obtiene la figura 5.26.

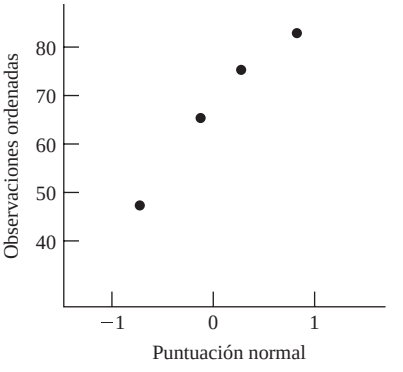


Figura 5.26
Gráfica de puntuaciones normales

Si los datos provinieran de una distribución normal estándar, se esperaría que la i-ésima observación más grande se aproximara a la i-ésima puntuación normal, de modo que la gráfica de puntuaciones normales parecería una línea de 45° a través del origen. Cuando la distribución es normal con μ y σ no especificadas,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

de modo que los valores z idealizados pueden convertirse en valores x idealizados mediante la relación $x = \mu + \sigma z$. Puesto que los valores idealizados tienen esta relación lineal, es suficiente con graficar las observaciones ordenadas contra las puntuaciones normales obtenidas de la distribución normal estándar. Si prevalece la distribución normal, el patrón todavía será una recta. Pero no es necesario que la línea pase a través del origen o tenga pendiente 1.

La construcción a mano de gráficas de puntuaciones normales es una tarea difícil, en el mejor de los casos. Por fortuna, pueden tratarse fácilmente con la mayoría de los programas estadísticos. (Véase el ejercicio 5.102.) En el cálculo de las puntuaciones normales se usan muchas variantes ligeras; no obstante, las gráficas son muy similares si se grafican más de 20 observaciones. Cualquiera que sea el programa de cómputo que use, si una distribución normal es convincente, la gráfica tendrá una apariencia de línea recta.

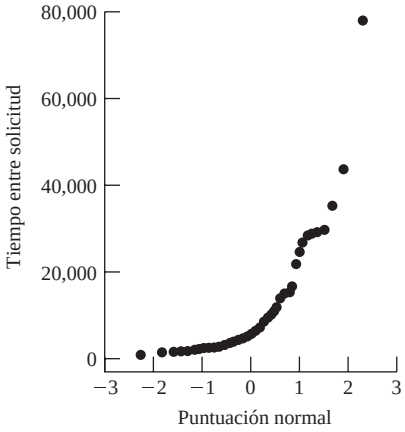


Figura 5.27
Gráfica de puntuaciones normales de los tiempos entre solicitudes

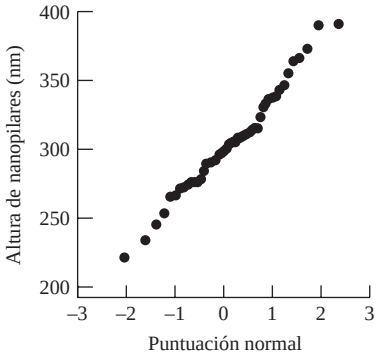


Figura 5.28
Gráfica de puntuaciones normales de alturas de nanopilares

La figura 5.27 muestra la gráfica de puntuaciones normales para los tiempos entre solicitudes dados en la página 19. La curva muestra que los valores más grandes son mayores de lo que se esperaría en una distribución normal. Por otro lado, la figura 5.28 muestra una gráfica de puntuaciones normales de los datos de las alturas de nanopilares (véase el ejemplo de la página 15), y parece convincente una distribución normal.

5.13 Transformación de observaciones a normalidad cercana

Cuando el histograma o la gráfica de puntuaciones normales indican que la suposición de una distribución normal es inválida, a menudo las transformaciones de los datos pueden mejorar la concordancia con la normalidad. Por lo general, los científicos expresan sus observaciones en logaritmos naturales. Considere algunas otras transformaciones, como se indica en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Algunas transformaciones útiles

Hace más pequeños los valores grandes:				Hace más grandes los valores grandes:	
$-\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x^{1/4}$	$\sqrt{x}$	x^2	x^3

Si las observaciones son positivas y la distribución tiene una cola larga o algunos rezagados a la derecha, entonces las transformaciones $\ln x$ o $\sqrt{x}$ llevarán los valores grandes más lejos de lo que llevan los valores centrales o pequeños. Si las observaciones transformadas tienen una gráfica de puntuaciones normales casi en línea recta, por lo general, es

ventajoso usar la normalidad de esta nueva escala para realizar cualquier análisis estadístico. Más aún: la validez de muchos de los métodos estadísticos poderosos descritos en capítulos posteriores se basa en la suposición de que la distribución de probabilidad es casi normal. Al elegir una transformación que conduzca a datos casi normales, el investigador puede extender enormemente el rango de validez de dichas técnicas.

EJEMPLO **Una transformación para aproximar mejor una distribución normal**

Transforme los tiempos entre solicitudes del ejemplo en la página 19 para aproximar mejor una distribución normal.

Solución En una computadora, calcule $\sqrt{x}$, saque la raíz cuadrada nuevamente para obtener $x^{1/4}$ y saque el logaritmo natural ln x de los 50 valores. La transformación ln x parece funcionar mejor. El histograma y la gráfica de puntuaciones normales se muestran en la figura 5.29, tanto para los datos originales como para los transformados. La calidad del ajuste confirma aún más el modelo logarítmico normal. ■

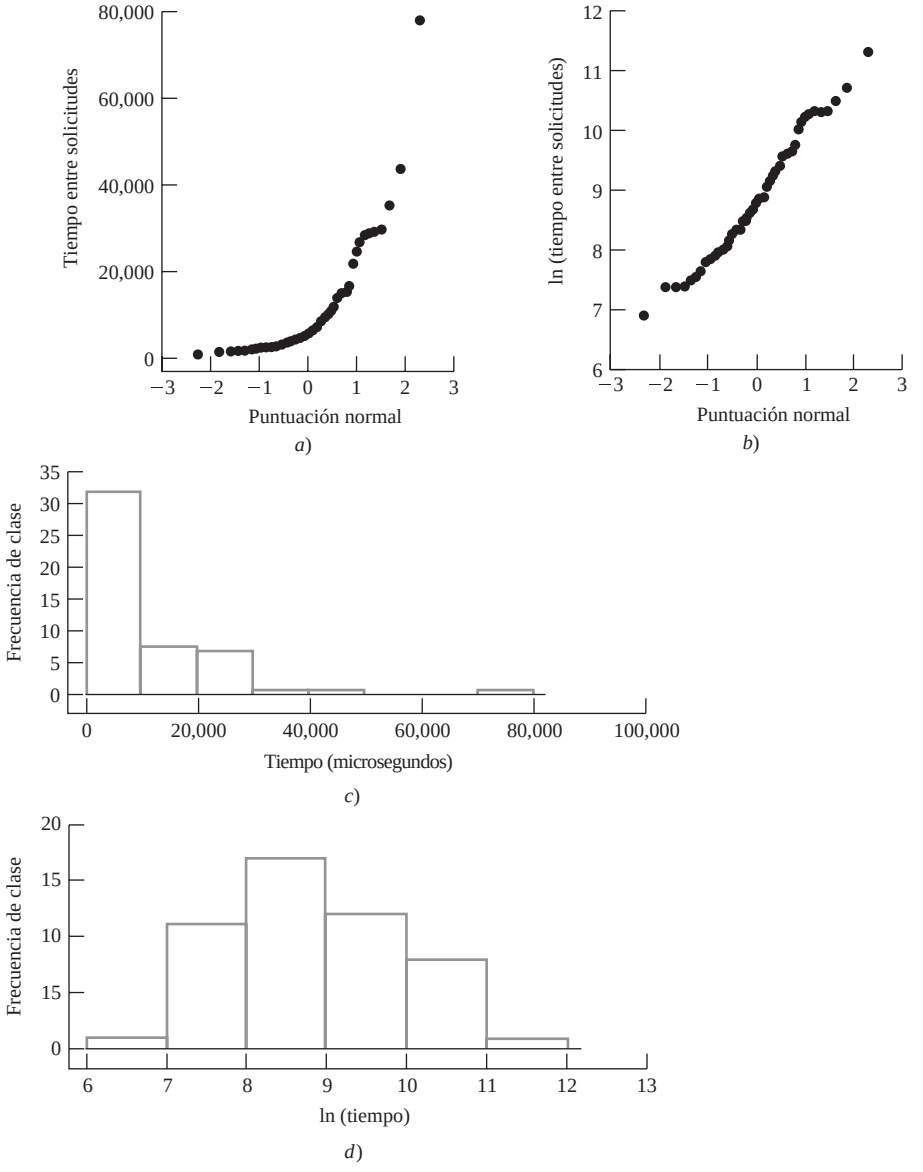


Figura 5.29
a) Gráfica de puntuaciones normales de tiempo entre solicitudes *b*) Gráfica de puntuaciones normales de ln (tiempo entre solicitudes) *c*) Histograma de tiempo entre solicitudes *d*) Histograma de ln (tiempo entre solicitudes)

Ejercicios

5.101 Para cualesquiera 11 observaciones,

a) Use la tabla 3 para verificar que las puntuaciones normales sean

−1.38 − 0.97 − 0.67 − 0.43 − 0.21 0 0.21 0.43 0.67 0.97 1.38

b) Construya una gráfica de puntuaciones normales usando las observaciones en los tiempos entre neutrinos de la página 13.

5.102 (Gráfica de puntuaciones normales) Los comandos *MINITAB*

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Calculator** Escriba *C*2 en **Store**. Escriba *NORMAL SCORES* en **Expression**.
> Haga clic en **OK**.
> **Graph > Plot**. Escriba *C*1 bajo **Y** y *C*2 bajo **X**.
> Haga clic en **OK**.

crearán una gráfica de puntuaciones normales a partir de las observaciones que se establecieron en C1. (*MINITAB* usa una variante de las puntuaciones normales, m_i, que se definieron.) Construya una gráfica de puntuaciones normales de

a) los datos de resistencia de la aleación de aluminio en la página 19;

b) los datos de tiempo de decaimiento de la página 140.

5.103 (Transformaciones) Los comandos *MINITAB*

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Calculator** Escriba *C*2 en **Store**. Escriba *LOGE(C*1*)* en **Expression**.
> Haga clic en **OK**.
> **Calc > Calculator** Escriba *C*3 en **Store**. Escriba *SQRT(C*1*)* en **Expression**.
> **Calc > Calculator** Escriba *C*4 en **Store**. Escriba *SQRT(C*3*)* en **Expression**.
> Haga clic en **OK**.

colocará ln x en C2, $\sqrt{x}$ en C3 y $x^{1/4}$ en C4, para observaciones que se establecen en C1. Entonces, pueden construirse gráficas de puntuaciones normales como en el ejercicio 5.102. Intente estas tres transformaciones y construya las gráficas de puntuaciones normales correspondientes para

a) los datos de tiempo de decaimiento en la página 140;

b) los datos de tiempo entre solicitudes de la página 19.

5.14 Simulación

Las técnicas de simulación crecieron con las computadoras. Son particularmente adecuadas para hacer los repetitivos cálculos requeridos. Para **simular** la observación de variables aleatorias continuas, por lo general, se comienza con números aleatorios uniformes y se relacionan con la función de distribución de interés. Podría usar enteros aleatorios de dos o tres dígitos, quizá seleccionados de la tabla 7; sin embargo, la mayoría de los programas de software tienen un generador de números aleatorios uniformes continuos. Esto es: dan aproximaciones a números aleatorios a partir de la distribución uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Suponga que se quiere simular una observación de la distribución exponencial

$$F(x) = 1 - e^{-0.3x}, \quad 0 < x < \infty$$

La computadora primero produciría el valor u a partir de la distribución uniforme. Luego, resuelve (véase el ejercicio 5.104)

$$u = F(x) = 1 - e^{-0.3x}$$

de modo que $x = [-\ln(1 - u)]/0.3$ es el correspondiente valor de una variable aleatoria exponencial. Por ejemplo, si $u = 0.45$, entonces, $x = [-\ln(1 - 0.45)]/0.3 = 1.993$. Esto se ilustra gráficamente en la figura 5.30, donde u se ubica en la escala vertical y el correspondiente valor x se lee en la escala horizontal. (La teoría sobre la que se basa este método implica la llamada *transformación integral de probabilidad*, que se presenta en el ejemplo

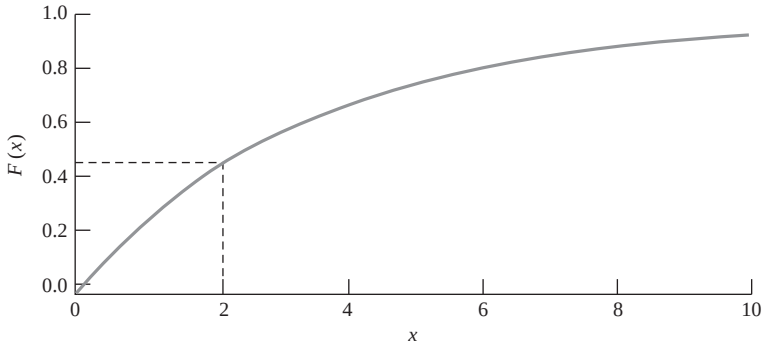


Figura 5.30
Distribución acumulada exponencial con media $\frac{10}{3}$

de la página 197.) Si quiere simular una muestra de F, el proceso anterior se repite con una u diferente para cada nueva observación x.

Un procedimiento similar se aplica a la simulación de observaciones de una distribución de Weibull. A partir del valor de una variable uniforme u, ahora se resuelve (véase el ejercicio 5.105)

$$u = F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}$$

para

$$x = \left[-\frac{1}{\alpha} \ln(1 - u) \right]^{1/\beta}$$

que es el valor correspondiente de una variable aleatoria de Weibull.

EJEMPLO **Simulación de cinco valores a partir de una distribución de Weibull**

Simule cinco observaciones de una variable aleatoria que tenga la distribución de Weibull con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 2.0$.

Solución Una computadora genera los cinco valores 0.57, 0.74, 0.26, 0.77, 0.12. (De manera alternativa, podrían obtenerse al leer dos dígitos a la vez en la tabla 7.) Se calcula

$$x = [-20.0 \ln(1 - 0.57)]^{1/2} = 4.108$$
$$x = [-20.0 \ln(1 - 0.74)]^{1/2} = 5.191$$

El lector puede demostrar que los últimos tres números uniformes dan como resultado $x = 2.454, 5.422, 1.599$. ■

Suponga que se necesitan simular valores de la distribución normal con μ y σ^2 específicos. Por la relación

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

se sigue que $x = \mu + \sigma z$, de modo que un valor x puede calcularse a partir del valor de una variable normal estándar z. Aunque z puede obtenerse a partir del valor para una variable uniforme u mediante resolución numérica de $u = F(z)$, otro enfoque, llamado método de Box-Muller-Marsaglia, es casi de preferencia universal. Comienza con un par de variables uniformes independientes (u_1, u_2) y produce dos variables normales estándares

$$z_1 = \sqrt{-2 \ln(u_2)} \cos(2\pi u_1)$$
$$z_2 = \sqrt{-2 \ln(u_2)} \operatorname{sen}(2\pi u_1)$$

donde el ángulo se expresa en radianes. Entonces, $x_1 = \mu + \sigma z_1$ y $x_2 = \mu + \sigma z_2$ se tratan como dos observaciones independientes de variables aleatorias normales (véase el ejercicio 5.106). La mayoría de los paquetes estadísticos incluyen un generador de números aleatorios normales (véase el ejercicio 5.108).

EJEMPLO **Simulación de dos valores a partir de una distribución normal**

Simule dos observaciones de una variable aleatoria que tenga la distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 5$.

Solución Una computadora genera los dos valores 0.253 y 0.531 a partir de una distribución uniforme. (De manera alternativa, podrían obtenerse al leer tres dígitos a la vez en la tabla 7.) Calcule primero los valores normales estándares

$$z_1 = \sqrt{-2\ln(0.531)}\cos(2\pi \cdot 0.253) = -0.021$$

$$z_2 = \sqrt{-2\ln(0.531)}\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0.253) = 1.125$$

y luego los valores normales

$$x_1 = 50 + 5z_1 = 50 + 5(-0.021) = 49.895$$

$$x_2 = 50 + 5z_2 = 50 + 5(1.125) = 55.625$$

■

Ejercicios

5.104 Verifique que

a) la densidad exponencial $0.3e^{-0.3x}$, $x > 0$, corresponde a la función de distribución $F(x) = 1 - e^{-0.3x}$, $x > 0$;

b) la solución de $u = F(x)$ está dada por $x = [-\ln(1 - u)]/0.3$.

5.105 Verifique que

a) la densidad de Weibull $\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-ax^{\beta}}$, $x > 0$, corresponde a la función de distribución $F(x) = 1 - e^{-ax^{\beta}}$, $x > 0$;

b) la solución de $u = F(x)$ está dada por $x = \left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-u)\right]^{1/\beta}$.

5.106 Considere dos variables normales estándares independientes cuya densidad de probabilidad conjunta es

$$\frac{1}{2\pi}e^{-(z_1^2+z_2^2)/2}$$

Bajo un cambio a coordenadas polares, $z_1 = r\cos(\theta)$, $z_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, se tiene $r^2 = z_1^2 + z_2^2$ y $dz_1\,dz_2 = r\,dr\,d\theta$, de modo que la densidad conjunta de r y θ es

$$r\,e^{-r^2/2}\,\frac{1}{2\pi}, \quad 0 < \theta < 2\pi,\ r > 0$$

Demuestre que

a) r y θ son independientes y que θ tiene una distribución uniforme sobre el intervalo de 0 a 2π;

b) $u_1 = \theta/2\pi$ y $u_2 = 1 - e^{-r^2/2}$ tienen distribuciones uniformes independientes;

c) las relaciones entre (u_1, u_2) y (z_1, z_2) de la página 168 se sostienen [note que $1 - u_2$ también tiene una distribución uniforme, de modo que puede usarse $\ln(u_2)$ en vez de $\ln(1 - u_2)$].

5.107 El paquete estadístico *MINITAB* tiene un generador de números aleatorios. Para simular 5 valores a partir de una distribución exponencial con media $\beta = 0.05$, elija

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Random Sample > Exponential**
> Escriba 5 después de **Generate**, *C*1 en **Column** y 0.05 en **Mean**.
> Luego haga clic en **OK**.

Salida:

Una llamada produjo la salida

0.031949 0.004643 0.030029 0.112834 0.064642

Genere 8 valores a partir de la distribución exponencial con $\beta = 0.2$.

5.108 El paquete estadístico *MINITAB* tiene un generador de números aleatorios normales. Para simular 5 valores a partir de una distribución normal que tenga media 7 y desviación estándar 4, y colocarlos en C1, use los comandos

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Random Sample > Normal**
> Escriba 5 después de **Generate**, *C*1 en **Column** 7 en **Mean** y 4 en **standard deviation**.
> Haga clic en **OK**.

Salida:

Una llamada produjo la salida

5.42137 6.98061 9.41352 7.05932 5.87297

Genere 8 valores para una variable normal con $\mu = 123$ y $\sigma^2 = 23.5$.

Sí y no

Sí

1. Describa el comportamiento de una variable aleatoria continua X al especificar su función de densidad de probabilidad que satisface

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para toda } x \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

2. Recuerde que solo es significativo hablar de la probabilidad de que una variable aleatoria continua X se encuentre en un intervalo. Siempre es el caso que $P(X = x) = 0$ para todo valor posible x.
3. Obtenga la probabilidad de que el valor de X se encontrará en un intervalo al encontrar el área bajo la curva f sobre el intervalo.

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \text{área bajo la función de densidad a la izquierda de } x = b$$

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \text{área bajo la función de densidad entre}$$

$$x = a \quad \text{y} \quad x = b$$

4. Resuma una densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X mediante su

$$\text{media:} \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\text{varianza:} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

5. Cuando X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, calcule la probabilidad de un intervalo $P(X \leq b)$ al convertir el límite b al valor estandarizado $(b - \mu)/\sigma = z$ y obtenga la probabilidad

$$P\left(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P(X \leq b)$$

a partir de la tabla normal estándar.
6. Use las propiedades de esperanza y varianza

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{y} \quad Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$$

De manera más general,

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + b) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + b$$

y, si X_1 y X_2 son independientes,

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + b) = a_1^2\, Var(X_1) + a_2^2\, Var(X_2)$$

No

1. Nunca aplique la aproximación normal a la binomial

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$$

cuando el número esperado de éxitos (o fracasos) sea muy pequeño. Esto es, cuando

$$np \text{ o } n(1-p) \text{ sea 15 o menos}$$

2. No sume varianzas de acuerdo con

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

a menos que las dos variables aleatorias sean independientes o tengan covarianza cero.

3. No suponga únicamente que los datos provienen de una distribución normal. Cuando existan al menos 20 a 25 observaciones, es buena práctica construir una gráfica de puntuaciones normales para comprobar esta suposición.

Ejercicios de repaso

5.109 Si la densidad de probabilidad de una variable aleatoria está dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2) & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

encuentre el valor de k y las probabilidades de que una variable aleatoria que tenga esta densidad de probabilidad tomará un valor

a) entre 0.1 y 0.2;

b) mayor que 0.5.

5.110 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre la correspondiente función de distribución y úsela para determinar las probabilidades de que una variable aleatoria que tenga esta función de distribución tomará un valor

a) menor que 0.3;

b) entre 0.4 y 0.6.

5.111 En ciertos experimentos, el error cometido al determinar la densidad de un compuesto de silicio es una variable aleatoria con la densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 25 & \text{para } -0.02 < x < 0.02 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Encuentre las probabilidades de que tal error estará

a) entre –0.03 y 0.04;

b) entre –0.005 y 0.005.

5.112 Encuentre μ y σ^2 para la densidad de probabilidad del ejercicio 5.109.

5.113 Si una variable aleatoria tiene la distribución normal estándar, encuentre la probabilidad de que tomará un valor

a) entre 0 y 2.50;

b) entre 1.22 y 2.35;

c) entre –1.33 y –0.33;

d) entre –1.60 y 1.80.

5.114 El tiempo de combustión de un cohete experimental es una variable aleatoria que tiene la distribución normal con $\mu = 4.76$ segundos y $\sigma = 0.04$ segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que este tipo de cohete se incendiará

a) menos de 4.66 segundos;

b) más de 4.80 segundos;

c) entre 4.70 y 4.82 segundos?

5.115 Verifique que

a) $z_{0.10} = 1.28$;

b) $z_{0.001} = 3.09$.

5.116 Con respecto al ejercicio 5.28, encuentre los *cuartiles* de la distribución normal con $\mu = 102$ y $\sigma = 27$.

5.117 La densidad de probabilidad que se muestra en la figura 5.20 es la distribución logarítmica normal con $\alpha = 8.85$ y $\beta = 1.03$. Encuentre la probabilidad de que

a) el tiempo entre solicitudes sea mayor a 200 microsegundos;

b) el tiempo entre solicitudes sea menor a 300 microsegundos.

5.118 La densidad de probabilidad que se muestra en la figura 5.22 es la distribución exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0.25\,e^{-0.25x} & 0 < x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que

a) el tiempo para observar una partícula sea mayor a 200 microsegundos;

b) el tiempo para observar una partícula sea menor a 10 microsegundos.

5.119 Con respecto a las puntuaciones normales del ejercicio 5.101, construya una gráfica de puntuaciones normales de los datos de sólidos suspendidos en el ejercicio 2.68.

5.120 Con respecto a las puntuaciones normales del ejercicio 5.101, construya una gráfica de puntuaciones normales de los datos de rapidez de la luz en el ejercicio 2.66.

5.121 Si n vendedores se emplean en una campaña de ventas puerta a puerta, el volumen de ventas brutas en

miles de dólares puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la distribución gamma con $\alpha = 100\sqrt{n}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Si los costos de ventas son de \$5,000 por vendedor, ¿cuántos vendedores deberían emplearse para maximizar la ganancia esperada?

5.122 Un ingeniero mecánico modela la resistencia a la flexión de una viga de soporte en una torre de transmisión, como una variable aleatoria que tiene la distribución de Weibull con $\alpha = 0.02$ y $\beta = 3.0$. ¿Cuál es la probabilidad de que la viga pueda soportar una carga de 4.5?

5.123 Suponga que los tiempos a la descompostura para los procesadores de una máquina de procesamiento en paralelo tienen densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.04\, e^{-0.2x-0.2y} & \text{para } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde x es el tiempo para el primer procesador y y es el tiempo para el segundo. Determine

a) las distribuciones marginales y sus medias;

b) el valor esperado de la variable aleatoria, cuyos valores están dados por $g(x, y) = x + y$.

c) Verifique en este ejemplo que la media de una suma es la suma de las medias.

5.124 Dos variables aleatorias son independientes y cada una tiene una distribución binomial con probabilidad de éxito de 0.7 y 2 ensayos.

a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta.

b) Calcule la probabilidad de que la segunda variable aleatoria sea mayor que la primera.

5.125 Si X_1 tiene media –5 y varianza 3, mientras X_2 tiene media 1 y varianza 4, y las dos son independientes, determine

a) $E(3X_1 + 5X_2 + 2)$;

b) $Var(3X_1 + 5X_2 + 2)$.

5.126 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ independientes y suponga que cada una tiene la misma distribución marginal con media –5 y varianza 2. Calcule

a) $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30})$;

b) $Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30})$.

5.127 Consulte el ejemplo de los escáneres de la página 129. La máxima atenuación tiene una distribución normal con media 10.1 dB y desviación estándar 2.7 dB.

a) ¿Qué proporción de los productos tiene atenuación máxima menor que 6 dB?

b) ¿Qué proporción de los productos tiene atenuación máxima entre 6 dB y 14 dB?

5.128 Consulte las alturas de los pilares en el ejemplo de la página 15. La variación en la población de alturas de pilares puede modelarse como una distribución normal con media de 306.6 nm y desviación estándar de 37.0 nm.

a) Para un pilar elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor que 350 nm?

b) De acuerdo con el modelo normal, ¿qué proporción de todos los pilares existentes tiene alturas mayores que 350 nm? Explique su respuesta.

c) ¿Qué proporción de los pilares tiene alturas entre 270 nm y 350 nm?

Resumen de distribuciones

En las tablas 5.2*a*) y *b*) se incluyen las fórmulas para las distribuciones discretas y continuas, junto con sus medias, varianzas y funciones generadoras de momentos.

Términos clave

Corrección por continuidad 131
Covarianza 152
Densidad de probabilidad 121
Densidad de probabilidad condicional 150
Densidad de probabilidad conjunta 147
Densidad de probabilidad normal 125
Densidad marginal 149
Densidad marginal conjunta 149
Desviación estándar 124
Distribución beta 141
Distribución exponencial 140
Distribución gamma 139
Distribución normal circular 157
Distribución de probabilidad condicional 146
Distribución de probabilidad conjunta 145
Distribución de probabilidad marginal 146
Distribución de Weibull 142
Distribución logarítmica normal 136
Distribución normal 125
Distribución normal estándar 126
Distribución uniforme 135
Esperanza 151
Función de densidad de probabilidad 121
Función de distribución 122
Función de distribución acumulada 122
Función de distribución acumulada conjunta 148
Función gamma 139
Función generadora de momentos 157
Gráfica de puntuaciones normales 163
Independencia 146
k-ésimo momento con respecto a la media 123
k-ésimo momento con respecto al origen 123
Media 123
Puntuación *z* 128
Puntuaciones normales 163
Simulación 167
Tiempo de espera 140
Variable aleatoria estandarizada 128
Varianza 124

Tabla 5.2(*a*) Distribuciones discretas

Distribución	Distribución de probabilidad $f(x)$	Media	Varianza	Función generadora de momentos
Binomial $b(x; n, p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
Geométrica $g(x; p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Hipergeométrica $h(x; n, a, N)$	$\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, \min(N-a, n)$	$n\frac{a}{N}$ $p = a/N$	$n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$	complicada
Poisson $f(x; \lambda)$	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$
Binomial negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots$	r/p	$r(1-p)/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$

Tabla 5.2(*b*) Distribuciones continuas

Distribución	Función de densidad de probabilidad $f(x)$	Media	Varianza	Función generadora de momentos
Uniforme	$\frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)t}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Exponencial	$\frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad 0 \le x < \infty$	β	β^2	$\frac{1}{1-\beta t}, \quad t < \frac{1}{\beta}$
Log-normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} x^{-1} e^{-(\ln x - \alpha)^2/2\beta^2}, \quad 0 < x < \infty$	$e^{\alpha + \beta^2/2}$	$(e^{\beta^2} - 1) e^{2\alpha+\beta^2}$	complicada
Gamma	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad 0 < x < \infty$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$\frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta}$
Beta	$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	complicada
Weibull	$\alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, \quad 0 < x$	$\alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$	$\alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$	complicada

CAPÍTULO

DISTRIBUCIONES MUESTRALES

6

En la mayoría de los métodos de inferencia que se estudiarán en este libro, se supondrá que se trata con un tipo específico de muestra llamada *muestra aleatoria*. Esta atención a las muestras aleatorias, que se examinan en la sección 6.1, se debe a que permiten generalizaciones válidas, o lógicas, de los datos muestrales. Entonces, en las secciones 6.2 a 6.4 se verá cómo ciertas estadísticas (es decir, ciertas cantidades determinadas a partir de muestras) es posible que varíen de una muestra a otra. La sección 6.5 vincula las distribuciones muestrales que surgen de las distribuciones normales. En las secciones 6.6 y 6.7 se describen técnicas para derivar distribuciones muestrales. El concepto de distribución muestral —la distribución de un estadístico calculado sobre la base de una muestra aleatoria— es básica para toda inferencia estadística.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

6.1 Poblaciones y muestras 175

6.2 La distribución muestral de la media (σ conocida) 179

6.3 La distribución muestral de la media (σ desconocida) 187

6.4 La distribución muestral de la varianza 189

6.5 Representaciones de las distribuciones de la teoría normal 192

6.6 El método de la función generadora de momentos para obtener distribuciones 194

6.7 Métodos de transformación para obtener distribuciones 197

Ejercicios de repaso 202

Términos clave 203

6.1 Poblaciones y muestras

En estadística, el uso del término **población** es una herencia de los días cuando la estadística se aplicaba principalmente a fenómenos sociológicos y económicos. Recuerde, del capítulo 1, que ahora se aplica a conjuntos o a colecciones de objetos, reales o conceptuales, pero sobre todo a conjuntos de números, mediciones u observaciones que se investigan. Por ejemplo, si a uno le interesa determinar el número promedio de televisores por hogar en Estados Unidos, la totalidad de dichos números de conjuntos, uno por cada hogar, constituye la población para este estudio. De igual modo, la población de la cual los inspectores extraen una muestra, para determinar alguna cualidad o característica de un producto manufacturado, pueden ser las mediciones correspondientes de todas las unidades en un lote dado; dependiendo de los objetivos de la inspección, también podría consistir de las mediciones correspondientes de todas las unidades que se fabriquen.

En algunos casos, como el ejemplo anterior concerniente al número de televisores por hogar, la población es **finita**. En otros casos, como en la determinación de alguna característica de todas las unidades pasadas, presentes y futuras que posiblemente se fabriquen mediante un proceso determinado, es conveniente pensar en la población como **infinita**. Asimismo, se observan los resultados obtenidos en una serie sin fin de lanzamientos de monedas como una muestra de la población hipotéticamente infinita, consistente en todos los lanzamientos posibles de la moneda.

A menudo, las poblaciones se describen mediante la distribución de sus valores. Es práctica común referirse a una población en términos de su correspondiente distribución de probabilidad o distribución de frecuencia. Por ejemplo, quizá se refiera a un número fijo de lanzamientos de una moneda como una muestra de una "población binomial", o a ciertas mediciones como una muestra de una "población normal". De aquí en adelante, cuando se haga referencia a una "población $f(x)$", se entenderá una población descrita por una distribución de frecuencia, una distribución de probabilidad o una densidad $f(x)$.

Si una población es infinita, es imposible observar todos sus valores; incluso, si es finita quizá no sea práctico ni económico observarla en su totalidad. Entonces, por lo general es necesario usar una **muestra**, una parte de una población, e inferir de ella los

resultados para toda la población. Evidentemente, tales resultados serían útiles tan solo si la muestra en alguna forma es "representativa" de la población. No sería razonable, por ejemplo, esperar generalizaciones útiles acerca de la población de ingresos familiares en Estados Unidos en el año 2010, sobre la base de los datos pertenecientes solo a los propietarios de casa-habitación. De igual modo, difícilmente se esperarían generalizaciones razonables acerca del desempeño de un neumático si se pone a prueba solo en caminos lisos. Para asegurar que una muestra sea representativa de la población de la que se obtiene, y proporcionar un marco de referencia para la aplicación de la teoría de probabilidad a problemas de muestreo, deberá limitarse la discusión a **muestras aleatorias**. Antes de seleccionar una muestra aleatoria de tamaño n, las observaciones se modelan como variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Para muestreo de poblaciones finitas, las muestras aleatorias se definen del modo siguiente:

Muestra aleatoria (población finita)

Un conjunto de observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituye una muestra aleatoria de tamaño n a partir de una población finita de tamaño N, si sus valores se eligen de modo que cada subconjunto de n de los N elementos de la población tiene la misma probabilidad de ser elegido.

Note que esta definición de aleatoriedad, en esencia, pertenece a la forma en que se seleccionan los valores de la muestra. Lo anterior también se sostiene para la siguiente definición de muestra aleatoria a partir de una población infinita:

Muestra aleatoria (población infinita)

Un conjunto de observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituye una muestra aleatoria de tamaño n a partir de una población infinita $f(x)$ si

1. Cada X_i es una variable aleatoria cuya distribución está dada por $f(x)$.
2. Estas n variables aleatorias son independientes.

También se aplica el término **muestra aleatoria** al conjunto de valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las variables aleatorias. La letra minúscula distingue la realización de una muestra aleatoria de la letra mayúscula, la cual representa las variables aleatorias antes de ser observadas.

Existen muchas formas de garantizar la selección de una muestra que sea al menos aproximadamente aleatoria. Cuando se trata con una población finita, es posible numerar en serie los elementos de la población y, luego, seleccionar una muestra con la ayuda de una tabla de dígitos aleatorios (véase el análisis en la página 8). Por ejemplo, si una población tiene $N = 500$ elementos y se quiere seleccionar una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$, se usan tres columnas, seleccionadas arbitrariamente de la tabla 7, para obtener 10 números diferentes de tres dígitos menores que o iguales a 500 que, entonces, servirán como los números de serie de los elementos a incluir en la muestra.

Cuando el tamaño de la población es grande, el uso de números aleatorios podría volverse muy tedioso y en ocasiones prácticamente imposible. Por ejemplo, si una muestra de cinco envases de duraznos enlatados se va a elegir para inspección, de entre los muchos miles almacenados en una bodega, uno difícilmente esperaría numerar todos los envases, hacer una selección con el uso de números aleatorios y, después, sacar los que fueron seleccionados. En una situación como esta, en realidad uno tiene muy poca opción, por lo que debe hacer la selección relativamente fortuita, con la esperanza de que no se quebrantará seriamente la suposición de aleatoriedad que es básica para la mayoría de la teoría estadística.

Si se trata con poblaciones infinitas, la situación es un tanto diferente, ya que no es posible numerar físicamente los elementos de la población; sin embargo, tienen que realizarse esfuerzos para abordar las condiciones de aleatoriedad empleando dispositivos artificiales. Por ejemplo, al seleccionar una muestra de una línea de producción, es posible aproximar las condiciones de aleatoriedad cuando se elige una unidad cada media hora; cuando se

lanza una moneda, se puede tratar de arrojar en tal forma que ningún lado se favorezca intencionalmente, y así por el estilo. El uso adecuado de dispositivos artificiales o mecánicos, para seleccionar muestras aleatorias, siempre es preferible al juicio humano, pues es extremadamente difícil evitar sesgos inconscientes cuando se lleva a cabo casi cualquier tipo de selección.

Incluso con la elección cuidadosa de dispositivos artificiales, es muy fácil cometer errores graves al seleccionar una muestra aleatoria. Para ilustrar algunos errores, suponga que se tiene la tarea de seleccionar los troncos que se llevarán a un aserradero, mediante una banda transportadora de rapidez constante, con la finalidad de obtener una muestra aleatoria de sus longitudes. Un dispositivo muestral, que a primera vista parecería garantizar la aleatoriedad, consiste en medir los troncos que pasan por un punto dado al final de cierto número de intervalos de 10 minutos. No obstante, mayor consideración revela que este método de selección favorece a los troncos más grandes, pues requieren más tiempo para pasar por el punto dado. Por consiguiente, la muestra no es aleatoria, puesto que los troncos más grandes tienen mayor posibilidad de incluirse. Otro error común al seleccionar una muestra es el muestreo a partir de la población equivocada, o de una población deficientemente especificada. Como se indicó anteriormente, difícilmente se obtendría una muestra a partir de la cual se podría generalizar acerca de los ingresos familiares en Estados Unidos si la muestra se limita a los propietarios de casas-habitación. De igual modo, si se quiere determinar el efecto de las vibraciones sobre un miembro estructural, hay que tener cuidado al delinear la frecuencia de la banda de vibraciones, que es de relevancia, y poner a vibrar especímenes de prueba tan sólo a frecuencias seleccionadas aleatoriamente de esta banda.

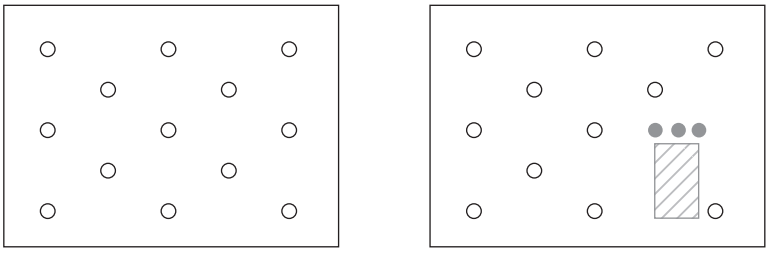
EJEMPLO

Cómo seleccionar dónde muestrear en una área que puede estar contaminada

En muchos estudios de limpieza ambiental, los ingenieros enfrentan el problema de evaluar el estatus de las superficies de terreno o de cuerpos acuáticos. No siempre es fácil recolectar una muestra representativa en la cual las observaciones puedan tratarse como independientes y de la misma distribución. Para ilustrar algunos aspectos clave, considere el muestreo de una área contaminada en la ciudad C que cubre un bloque de la ciudad. Las ubicaciones deben seleccionarse al tomar muestras de suelo que luego se analizarán para la presencia de metales pesados.

Solución Un enfoque recomendado para las superficies de terreno homogéneas es muestrear de acuerdo con una retícula rectangular, como se ilustra en la figura 6.1*a*). Esta retícula incluso podría colocarse aleatoriamente sobre el terreno.

Sin embargo, se sabía más acerca de esta área. En el momento en que ocurrió la contaminación, un horno de fundición se ubicaba en la posición indicada por el área sombreada en la figura 6.1*b*). Definitivamente, ¡la contaminación del suelo con metales pesados no es homogénea! Los materiales del horno fluyeron hacia el lado norte del horno. Es claro que esta área es una "zona caliente". La cantidad promedio de metales pesados, obtenida al promediar las mediciones de todas las ubicaciones, no es representativa del problema de



a) *b*)

Figura 6.1
Cómo elegir dónde muestrear

contaminación. Al utilizar el promedio de toda el área como una descripción resumen, se resta importancia a la seriedad de la contaminación alrededor del horno. El área de escurrimiento del horno debería tratarse como una población separada. Tendría que recolectarse suelo de, al menos, dos ubicaciones dentro del área de esta presunta zona caliente. Se sugieren tres sitios, indicados mediante círculos sólidos. Las mediciones correspondientes de metales pesados deben usarse para describir solo dicha área.

Aunque muestrear la "zona caliente" por separado parecería el enfoque obvio, los dueños del sitio, en la situación donde se basa el ejemplo, quieren recolectar datos de más ubicaciones a lo largo de todo el terreno. Ello, esperan, reduciría suficientemente la cantidad promedio de metales pesados, de modo que solo se requerirían tácticas de limpieza sencillas, en lugar de apoyarse en la costosa solución de sacar en camiones el suelo. ■

EJEMPLO

Siempre recolectar al menos una réplica de una medición clave

Consulte el estudio de limpieza ambiental en el ejemplo anterior. Explique por qué deberían tomarse muestras de suelo en, al menos, dos ubicaciones dentro de la zona caliente, en vez de solo realizar dos análisis químicos esencialmente en una sola muestra del suelo.

Solución Un aspecto fundamental en la comprensión del problema de la contaminación es evaluar la condición de la zona caliente conocida. Incluso dentro de esta, la cantidad de contaminación podría variar considerablemente debido a, por ejemplo, alguna posición de ubicación particular, en relación con la antigua corriente de escurrimiento del horno. Se sugiere encarecidamente que del suelo se recolecten por lo menos dos muestras, no solo que se lleven a cabo dos análisis químicos en suelo de una sola ubicación. Este enfoque dará mediciones que también sirvan para estimar la cantidad total de variabilidad en las mediciones de la "zona caliente".

Al repetir el análisis químico del suelo de una sola ubicación, se podría estimar la variabilidad en el análisis químico y, posiblemente, identificar un valor atípico que sugiera un análisis químico erróneo. No obstante, sin importar cuántas veces se repita el análisis químico, no se sabría cuánta variación esperar si se muestrea suelo de la misma zona caliente, pero a muchos pies de la primera muestra; es decir, es probable que ubicaciones cercanas sean muy parecidas, pero las que están alejadas tienen menos probabilidad. Es necesario muestrear al menos dos ubicaciones diferentes para determinar el grado de homogeneidad dentro de la zona caliente. ■

El propósito de la mayoría de las investigaciones estadísticas consiste en generalizar, a partir de la información contenida en muestras aleatorias, acerca de la población de donde se obtuvieron las muestras. En particular, por lo general uno se preocupa por el problema de hacer inferencias sobre los **parámetros** de la población, como la media μ o la desviación estándar σ. Al hacer dichas inferencias, se utilizan **estadísticos** como $\bar{x}$ y s; a saber, cantidades calculadas sobre la base de observaciones muestrales. En la práctica, el término *estadístico* también se aplica a las correspondientes variables aleatorias.

EJEMPLO

La variación de una muestra a otra debe comprenderse para valorar con precisión la calidad total del agua

Debe mantenerse la calidad del agua que sale de una planta. Se monitorea al tomar un pequeño volumen de agua llamado espécimen de prueba. Si la calidad del agua en el espécimen es mala, habrían de tomarse acciones. Tales acciones podrían variar al tomar más especímenes, hacer una llamada telefónica para alertar a los operadores de la planta, preparar un informe escrito, cambiar la manera cómo opera la planta y hasta cerrar la misma. Si el agua en el espécimen es de buena calidad, a menudo se infiere que el volumen total de descarga es satisfactorio. Analice el muestreo.

Solución Además de una buena práctica de laboratorio, los juicios dependen crucialmente de conseguir especímenes de prueba que sean representativos del volumen total de la descarga

saliente. Puesto que la calidad del agua variará sobre el flujo de salida total, en cualquier momento, los especímenes de prueba reales seleccionados pueden indicar correctamente o no la calidad del agua.

La idea principal en este análisis es la de la variabilidad del muestreo. No todas las opciones de especímenes de prueba reales producirán los mismos valores para calidad del agua, o incluso una valoración correcta de la calidad. Esta variabilidad es posible superarla, en mayor o menor medida, al tomar un número suficientemente grande de especímenes de prueba. Los resultados de examinar suficientes especímenes de prueba deberían reflejar con bastante precisión la calidad del agua la mayoría de las veces. ■

Puesto que la selección de una muestra aleatoria se controla básicamente por azar, también los valores que se obtienen para los estadísticos. El resto de este capítulo se dedicará a distribuciones muestrales; a saber, a distribuciones que describen las fluctuaciones fortuitas de los estadísticos calculados sobre la base de muestras aleatorias.

6.2 La distribución muestral de la media (σ conocida)

Suponga que una muestra aleatoria de n observaciones, se toma de alguna población y que se calcula $\bar{x}$, por decir, para estimar la media de la población. Debería ser claro que, si se toma una segunda muestra aleatoria de tamaño n de la población, sería muy irracional esperar el valor idéntico para $\bar{x}$, mientras si se toman muchas muestras más, quizá ningún par de las $\bar{x}'$será igual. Las diferencias entre tales $\bar{x}'$ se atribuyen generalmente al azar, lo cual plantea preguntas importantes en cuanto a su distribución, específicamente en relación con la medida de sus fluctuaciones azarosas.

Para tratar experimentalmente esta cuestión, suponga que 50 muestras aleatorias de tamaño $n = 10$ se toman de una población que tiene la **distribución uniforme discreta**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, 9 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

El muestreo es con reemplazo, por decirlo así, de modo que se muestrea de una población infinita. Una forma conveniente de obtener dichas muestras es utilizar una tabla de dígitos aleatorios, como la tabla 7, y hacer que cada muestra consista en 10 dígitos consecutivos, en filas o columnas elegidas arbitrariamente. En realidad, al proceder de esta forma se obtienen 50 muestras, cuyas medias son

4.4	3.2	5.0	3.5	4.1	4.4	3.6	6.5	5.3	4.4
3.1	5.3	3.8	4.3	3.3	5.0	4.9	4.8	3.1	5.3
3.0	3.0	4.6	5.8	4.6	4.0	3.7	5.2	3.7	3.8
5.3	5.5	4.8	6.4	4.9	6.5	3.5	4.5	4.9	5.3
3.6	2.7	4.0	5.0	2.6	4.2	4.4	5.6	4.7	4.3

Al agrupar dichas medias en una distribución con las clases [2.0, 3.0), [3.0, 4.0), [4.0, 5.0), [5.0, 6.0) y [6.0, 7.0), donde se incluye el extremo izquierdo, se obtiene

$\bar{x}$	Frecuencia
[2.0, 3.0)	2
[3.0, 4.0)	14
[4.0, 5.0)	19
[5.0, 6.0)	12
[6.0, 7.0)	3
	50

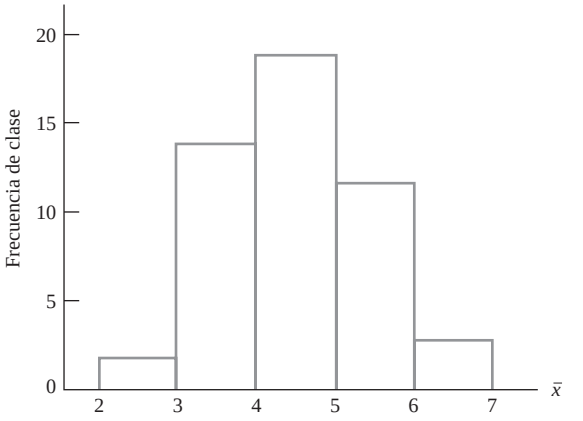


Figura 6.2
Distribución muestral experimental de la media

que es aparente a partir de esta distribución, así como de su histograma, que se ilustra en la figura 6.2, que la distribución de las medias tiene casi una **forma de campana**, aun cuando la población en sí tenga una distribución uniforme. Esto formula la pregunta de si el resultado es típico de lo que se esperaría; esto es, si se obtendrían distribuciones similares al repetir el experimento una y otra vez.

Para responder esta clase de pregunta, debe investigarse la **distribución muestral teórica** de la media que, para el ejemplo dado, da las probabilidades de obtener medias en el intervalo [2.0, 3.0) o en [3.0, 4.0), …, [6.0, 7.0) y acaso valores menores que 2.0 o mayores que o iguales a 7.0. Aunque se podrían evaluar dichas probabilidades para este ejemplo particular, por lo general es suficiente referirse a algunos teoremas generales concernientes a las distribuciones muestrales. El primero de ellos proporciona expresiones para la media $\mu_{\overline{X}}$ y la varianza $\sigma^2_{\overline{X}}$ de distribuciones muestrales de la media $\overline{X}$.

Fórmulas para $\mu_{\overline{X}}$ y $\sigma^2_{\overline{X}}$

Teorema 6.1 Si una muestra aleatoria de tamaño n se toma de una población con la media μ y la varianza σ^2, entonces $\overline{X}$ es una variable aleatoria cuya distribución tiene la media μ.

Para muestras de poblaciones infinitas, la varianza de esta distribución es $\dfrac{\sigma^2}{n}$.

Para muestras de una población finita de tamaño N, la varianza es $\dfrac{\sigma^2}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$.

El resultado para poblaciones infinitas se estableció en el ejemplo de la página 155, con las propiedades de la esperanza. De manera alternativa, ahora se probará que $\mu_{\overline{X}} = \mu$, para el caso continuo, directamente a partir de la definición de la página 152.

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{X}} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\,f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i\,f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\end{aligned}$$

donde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la densidad conjunta de las variables aleatorias que constituyen la muestra aleatoria. Al usar la suposición de una muestra aleatoria, se escribe

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)$$

por lo que ahora se tiene

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\,dx_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_i\,f(x_i)\,dx_i\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_n)\,dx_n$$

Puesto que cada integral $x_i\ f(x_i)$ es igual a 1, excepto la que tiene el integrando $x_i\ f(x_i)$ igual a μ, finalmente se obtiene

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

lo cual completa la prueba. (Para el caso discreto, la prueba sigue los mismos pasos, aunque los signos de integral se sustituyen con $\sum$.)

Para demostrar que $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$, para el caso continuo, se debe hacer la suposición simplificadora de que $\mu = 0$, que no implica pérdida alguna de generalidad, como se pedirá al lector demostrar en el ejercicio 6.18. Al usar la definición de la página 152, se tiene, entonces,

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x}^2\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

mientras al usar el hecho de que

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\sum_{i\neq j} x_i\, x_j\right)$$

se obtiene

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i^2\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$
$$+ \frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i\, x_j\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

donde $\sum\sum_{i\neq j}$ se extiende sobre toda i y j desde 1 hasta n, sin incluir los términos donde $i = j$. De nuevo, al utilizar el hecho de que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)\ f(x_2) \ldots f(x_n)$$

es posible escribir cada una de las integrales múltiples anteriores como un producto de integrales simples, donde cada integral con integrando $f(x)$ es igual a 1. Por ende, se obtiene

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} x_i^2\, f(x_i)\, dx_i + \frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq j}\int_{-\infty}^{\infty} x_i\, f(x_i)\, dx_i$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} x_j\ f(x_j)\, dx_j$$

y como cada integral en la primera suma es igual a σ^2, mientras que cada integral en la segunda suma es igual a 0, finalmente se tiene

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Lo anterior completa la prueba de la segunda parte del teorema. No se probará el resultado correspondiente para muestras aleatorias de poblaciones finitas; pero debe notar que, en la fórmula resultante para $\sigma^2_{\overline{X}}$, el factor

$$\frac{N - n}{N - 1}$$

a menudo llamado **factor de corrección de población finita**, está cerca de 1 (puede omitirse para la mayoría de los propósitos prácticos), a menos que la muestra constituya una porción sustancial de la población.

EJEMPLO **Cálculo de un factor de corrección de población finita**

Determine el valor del factor de corrección de población finita para $n = 10$ y $N = 1{,}000$.

Solución

$$\frac{1{,}000 - 10}{1{,}000 - 1} = 0.991$$

■

Aunque no debería sorprender que $\mu_{\overline{X}} = \mu$, resulta interesante e importante el hecho de que $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$ para muestras aleatorias de poblaciones infinitas. Para puntualizar sus implicaciones, aplique el teorema de Chebyshev a la distribución muestral de la media, luego sustituya $\overline{X}$ por X y $\sigma/\sqrt{n}$ por σ en la fórmula para la forma alterna del teorema (véase la página 101). Por consiguiente, se obtiene

$$P\left(|\overline{X} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

y, al hacer $k\sigma/\sqrt{n} = \varepsilon$,

$$P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mu^2}{n\varepsilon^2}$$

Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que $\overline{X}$ difiera de μ por menos que ε puede hacerse arbitrariamente cercana a 1, eligiendo n suficientemente grande. En lenguaje menos riguroso, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se esperará que $\overline{X}$ esté más cerca de la media de la población. En este sentido, puede decirse que la media se vuelve cada vez más confiable como una estimación de μ conforme aumenta el tamaño de la muestra. Este resultado (que $\overline{X}$ se vuelva arbitrariamente cercana a μ con probabilidad arbitrariamente alta) se conoce como **ley de los grandes números**.

Ley de los grandes números

Teorema 6.2 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y cada una con las mismas media μ y varianza σ^2. Entonces,

$$P(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon) \to 0 \text{ conforme } n \to \infty$$

Conforme aumenta el tamaño de la muestra, ilimitadamente, la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional μ, por más de una cantidad arbitraria ε, converge a cero.

EJEMPLO **Ley de los grandes números y frecuencia relativa a largo plazo**

Considere un experimento donde un evento específico A tiene probabilidad p de ocurrir. Suponga que, cuando el experimento se repite n veces, los resultados de los diferentes ensayos son independientes. Demuestre que

$$\text{frecuencia relativa de } A = \frac{\text{número de veces que ocurre } A \text{ en } n \text{ ensayos}}{n}$$

se vuelve arbitrariamente cercana a p, con probabilidad arbitrariamente alta, conforme el número de veces que se repite el experimento crece ilimitadamente.

Solución Se pueden definir n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, donde $X_i = 1$, si A ocurre en el i-ésimo ensayo y $X_i = 0$ de otro modo. Los X_i son independientes y se distribuyen de manera idéntica con media $\mu = p$ y varianza $\sigma^2 = p(1-p)$, puesta que $E(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) = p$.

Entonces, $X_1 + \cdots + X_n$ es el número de veces que A ocurre en n ensayos del experimento y $\overline{X}$ es la frecuencia relativa de A.

Se aplica la ley de los grandes números y se concluye que, para una cantidad positiva arbitraria ε,

$$P(\,|\text{ frecuencia relativa de } A - p\,| > \varepsilon) = P(|\,\overline{X} - p\,| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{conforme } n \to \infty$$

A partir de los axiomas de probabilidad, se avanza hacia un teorema que determina la frecuencia relativa a largo plazo de un evento. ■

La confiabilidad de la media como estimación de μ a menudo se mide con $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, también llamado **error estándar de la media**. Note que esta medida de la confiabilidad de la media disminuye en proporción con la raíz cuadrada de n; por ejemplo, es necesario cuadruplicar el tamaño de la muestra con la finalidad de reducir a la mitad la desviación estándar de la distribución muestral de la media. Lo anterior también indica lo que podría llamarse "ley de disminución de rendimientos", en lo concerniente al aumento del tamaño de la muestra. Por lo general, no es rentable tomar muestras excesivamente grandes, pues la labor y el gasto adicionales no están acompañados por una ganancia proporcional en confiabilidad. Por ejemplo, si aumenta el tamaño de una muestra de 25 a 2,500, los errores a los que se expone se reducen solo por un factor de 10.

Ahora regrese a la distribución muestral experimental de la página 179; compruebe cuán cercanamente sus media y varianza corresponden a los valores que deberían esperarse, en concordancia con el teorema 6.1. Puesto que la población de la que se obtuvieron las 50 muestras de tamaño $n = 10$ tiene media

$$\mu = \sum_{x=0}^{9} x \cdot \frac{1}{10} = 4.5$$

y la varianza

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{9} (x - 4.5)^2 \frac{1}{10} = 8.25$$

El teorema 6.1 indica que se espera una media de $\mu_{\overline{X}} = 4.5$ y una varianza de $\sigma^2_{\overline{X}} = 8.25/10 = 0.825$. Al calcular la media y la varianza de las 50 medias muestrales de la página 179, se obtiene $\overline{x}_{\overline{x}} = 4.43$ y $s^2_{\overline{x}} = 0.930$, que están razonablemente cerca de los valores teóricos.

El teorema 6.1 solo ofrece información parcial acerca de la distribución muestral teórica de la media. En general, es imposible determinar tal distribución exactamente, sin conocimiento de la forma real de la población. Incluso así sería bastante difícil. Sin embargo, es posible encontrar la distribución límite conforme $n \to \infty$ de una variable aleatoria, cuyos valores estén cercanamente relacionados con $\overline{X}$, si supone solo que la población tiene una varianza finita σ^2. La variable aleatoria a la que se hace referencia aquí es la **media muestral estandarizada**

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

cuyos valores están dados por la diferencia entre $\overline{x}$ y μ dividida entre el error estándar de la media. Con referencia a esta variable aleatoria, ahora se enuncia el siguiente teorema, llamado **teorema del límite central**:

Teorema del límite central

Teorema 6.3 Si $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población con media μ y varianza finita σ^2, entonces,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es una variable aleatoria, cuya función de distribución tiende a la distribución normal estándar conforme $n \to \infty$.

El teorema del límite central proporciona una distribución normal que permite asignar probabilidades a intervalos de valores para $\overline{X}$. Sin importar la forma de la distribución de población, la distribución de $\overline{X}$ es aproximadamente normal, con media μ y varianza σ^2/n, siempre que n sea grande. Esta tendencia hacia la normalidad se ilustra en la figura 6.3, para una distribución de población uniforme y una distribución de población exponencial.

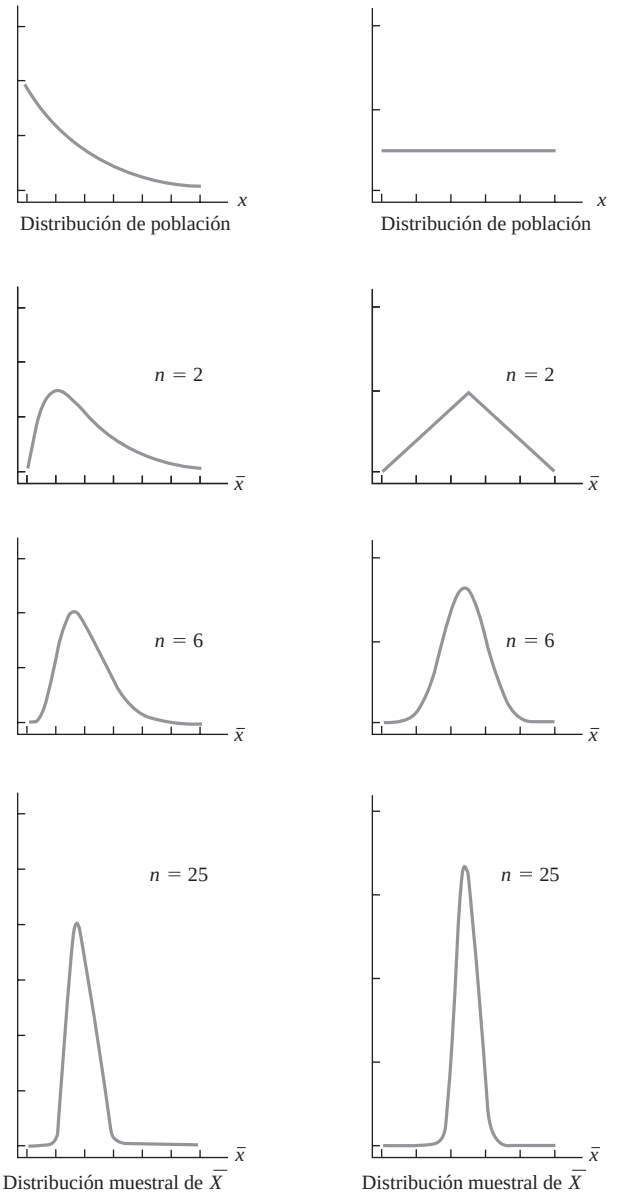


Figura 6.3
Una ilustración de la tendencia hacia la normalidad para la distribución muestral de $\overline{X}$, conforme aumenta el tamaño de la muestra

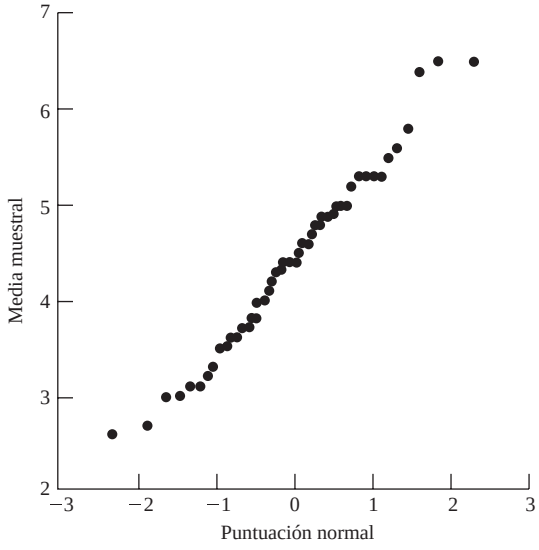


Figura 6.4
Verificación experimental del teorema del límite central

Aunque la prueba del teorema del límite central está más allá del ámbito de este texto, se puede obtener verificación experimental al construir una gráfica de puntuaciones normales de las 50 medias muestrales que vienen en la página 179, las cuales se obtuvieron al muestrear con sustitución de una población uniforme discreta. Como se observa en la figura 6.4, los puntos caen cerca de una línea recta. Parece que, incluso para $n = 10$, la distribución muestral de la media para este ejemplo tiene un patrón global que recuerda de manera general la de una distribución normal.

En la práctica, **la distribución normal ofrece una excelente aproximación a la distribución muestral de la media $\overline{X}$ para n tan pequeña como 25 o 30**, difícilmente con alguna restricción sobre la forma de la población. Como se vio en el ejemplo, la distribución muestral de la media tiene la forma general de una distribución normal, incluso para muestras de tamaño $n = 10$ de una distribución uniforme discreta. **Si las muestras aleatorias provienen de una población normal, la distribución muestral de la media es normal, sin importar el tamaño de la muestra.**

EJEMPLO

Uso del teorema del límite central para calcular la probabilidad de cobertura de pintura

Si una lata de 1 galón de pintura cubre, en promedio, 513.3 pies cuadrados con una desviación estándar de 31.5 pies cuadrados, ¿cuál es la probabilidad de que el área media muestral, cubierta por una muestra de 40 de dichas latas de 1 galón, estará en alguna parte entre 510.0 a 520.0 pies cuadrados?

Solución Por el teorema 6.3, se deberá encontrar el área de curva normal entre

$$z = \frac{510.0 - 513.3}{31.5/\sqrt{40}} = -0.066 \quad \text{y} \quad z = \frac{520.0 - 513.3}{31.5/\sqrt{40}} = 1.34$$

luego, al comprobar estos valores en la tabla 3, se obtiene una probabilidad de 0.6553. Advierta que, si $\overline{x}$ evidencia ser mucho menor que 513.3, por decir, menor que 500.0, ello provocaría serias dudas acerca de si la muestra realmente proviene de una población con $\mu = 513.3$ y $\sigma = 31.5$; la probabilidad de obtener tal valor pequeño (un valor z menor que -2.67) tan solo es de 0.0038. ■

Ejercicios

6.1 Un inspector examina cada vigésima pieza que proviene de una línea de ensamble. Mencione algunas de las condiciones con las cuales este método de muestreo podría no dar una muestra aleatoria.

6.2 El rollo de plástico trasparente para envolver se fabrica en hojas de 100 pies de largo y se devana en rollos. Un inspector selecciona 7 rollos y mide la claridad de una pequeña pieza tomada de una esquina al final de cada rollo. Mencione una condición con la cual este método de muestreo quizá no produciría una muestra aleatoria.

6.3 Explique por qué lo siguiente no conducirá a muestras aleatorias de las poblaciones deseadas.

a) Para determinar cuánto gasta un individuo promedio en unas vacaciones, un investigador de mercados entrevista a pasajeros de un crucero de lujo.

b) Para determinar el ingreso promedio de sus egresados, 10 años después de la graduación, la oficina de alumnos de una universidad envió cuestionarios en 2010 a todos los miembros de la clase de 2000 y basó su estimación en los cuestionarios devueltos.

c) Para determinar el sentimiento público acerca de ciertas restricciones importantes, un entrevistador pregunta a los votantes: "¿cree usted que esta práctica injusta debería detenerse?"

6.4 Una organización de investigación de mercados quiere probar un nuevo producto en 8 de 50 estados. Use la tabla 7 para realizar esta selección.

6.5 ¿Cuántas muestras diferentes de tamaño $n = 2$ pueden elegirse de una población finita de tamaño

a) $N = 7$;

b) $N = 24$?

6.6 Con referencia al ejercicio 6.5, ¿cuál es la probabilidad de que cada muestra en el inciso *a*), y la probabilidad de cada muestra en el inciso *b*), si las muestras deben ser aleatorias?

6.7 Tome 30 tiras de papel y marque cinco de ellas con -4 y 4, cuatro con -3 y 3, tres con -2 y 2 y dos con -1, 0 y 1.

a) Si cada tira de papel tiene la misma probabilidad de extraerse, determine la probabilidad de obtener -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, luego encuentre la media y la varianza de dicha distribución.

b) Extraiga 50 muestras de tamaño 10 de esta población, cada muestra extraída sin reemplazo, y calcule sus medias.

c) Calcule la media y la varianza de las 50 medias obtenidas en el inciso *b*).

d) Compare los resultados obtenidos en el inciso *c*), con los correspondientes valores esperados, de acuerdo con el teorema 6.1. [Note que μ y σ^2 se obtuvieron en el inciso *a*).]

6.8 Repita el ejercicio 6.7, pero seleccione cada muestra con reemplazo; esto es, sustituya cada tira de papel y revuelva nuevamente antes de extraer la siguiente.

6.9 Dada la población infinita cuya distribución está dada por

x	$f(x)$
1	0.25
2	0.25
3	0.25
4	0.25

mencione las 16 posibles muestras de tamaño 2 y use dicha lista para construir la distribución de $\overline{X}$ para muestras aleatorias de tamaño 2 de la población dada. Verifique que la media y la varianza de esta distribución muestral sean idénticas con valores correspondientes esperados, de acuerdo con el teorema 6.1.

6.10 Suponga que se convierten las 50 muestras referidas en la página 179, en 25 muestras de tamaño $n = 20$, al combinar las dos primeras, las siguientes dos y así sucesivamente. Encuentre las medias de dichas muestras, luego calcule sus medias y sus desviaciones estándares. Compare esta media y esta desviación estándar con los valores correspondientes esperados, en concordancia con el teorema 6.1.

6.11 Cuando se muestrea una población infinita, ¿qué ocurre con el error estándar de la media si el tamaño de la muestra

a) aumenta de 50 a 200;

b) aumenta de 400 a 900;

c) disminuye de 225 a 25;

d) disminuye de 640 a 40?

6.12 ¿Cuál es el valor del factor de corrección de la población finita en la fórmula para $\sigma^2_{\overline{X}}$ cuando

a) $n = 5$ y $N = 250$;

b) $n = 10$ y $N = 500$;

c) $n = 100$ y $N = 5{,}000$?

6.13 Para un tamaño muestral n grande, verifique que haya una posibilidad de 50-50 de que la media de una muestra aleatoria de una población infinita, con la desviación estándar μ, diferirá de σ por menos de $0.6745 \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Es común referirse a esta cantidad como el **error probable de la media**.

6.14 La media de una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$ se usa para estimar la media de una población infinita con desviación estándar $\sigma = 2.4$. ¿Qué se puede afirmar acerca de la probabilidad de que el error será menor que 1.2 si se utiliza

a) el teorema de Chebyshev;

b) el teorema del límite central?

6.15 Los discos duros de computadora deben girar de manera equilibrada, mientras que un alejamiento del nivel se conoce como rodamiento. El rodamiento para cualquier disco puede modelarse como una variable aleatoria, con media de 0.2250 mm y desviación estándar de 0.0042 mm. El rodamiento medio de la muestra $\overline{X}$ se obtendrá a partir de una muestra aleatoria de 40 discos. ¿Cuál es la probabilidad de que $\overline{X}$ caerá entre 0.2245 y 0.2260 mm?

6.16 Se dice que un proceso de alambrado estará bajo control si la resistencia a la tensión media es de 10 libras. Se sabe que las mediciones de resistencia a la tensión tienen una distribución normal con una desviación estándar de 1.5 libras. De este proceso se toman muestras aleatorias periódicas de tamaño 4, por lo que se dice que el proceso está "fuera de control" si una media muestral es menor que 7.75 libras. Comente.

6.17 Si la distribución de los pesos de todos los hombres que viajan por avión, entre Dallas y El Paso, tiene una media de 163 libras y una desviación estándar de 18 libras, ¿cuál es la probabilidad de que el peso bruto combinado de 36 hombres que viajan en un avión entre dichas dos ciudades sea mayor que 6,000 libras?

6.18 Si X es una variable aleatoria continua y $Y = X - \mu$, demuestre que $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$.

6.19 Pruebe que $\mu_{\overline{X}} = \mu$ para muestras aleatorias de poblaciones discretas (finitas o contablemente infinitas).

6.3 La distribución muestral de la media (σ desconocida)

La aplicación de la teoría de la sección anterior requiere conocimiento de la desviación estándar poblacional σ. Si n es grande, esto no plantea problema alguno aun cuando σ sea desconocida, pues en dicho caso es razonable sustituirla por la desviación estándar muestral s. Sin embargo, cuando se trata de la variable aleatoria cuyos valores están dados por

$$\frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

se sabe muy poco acerca de su distribución muestral exacta para valores pequeños de n, a menos que se haga la suposición de que la muestra proviene de una población normal. Con esta suposición, uno probaría lo siguiente:

Una variable aleatoria que tiene la distribución *t*

Teorema 6.4 Si $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal con la media μ y la varianza σ^2, así como $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$, entonces,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución t con el parámetro $\nu = n - 1$.

La notación minúscula t ayuda a diferenciar este estadístico importante de otros. El teorema es más general que el teorema 6.3, en el sentido de que no requiere conocimiento de σ; por otro lado, es menos general que el teorema 6.3 en el sentido de que requiere la suposición de una población normal.

Como se observa en la figura 6.5, la forma general de una **distribución *t*** es similar a la de una distribución normal: ambas tienen forma de campana y son simétricas en torno

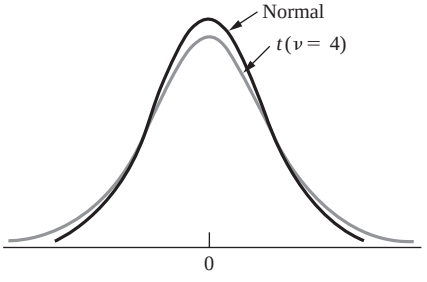


Figura 6.5
Distribución t y distribución normal estándar

a la media. Como la distribución normal estándar, la distribución t tiene la media 0, pero su varianza depende del parámetro ν (*nu*), llamado número de **grados de libertad**. La varianza de la distribución t supera 1, pero tiende a 1 conforme $n \to \infty$. De hecho, puede demostrarse que la distribución t con ν grados de libertad tiende a la distribución normal estándar conforme $\nu \to \infty$.

La tabla 4 al final del libro contiene valores seleccionados de t_α para diversos valores de ν, donde t_α es tal que el área bajo la distribución t a su derecha es igual a α. En esta tabla, la columna izquierda contiene valores de ν, los encabezados de columna son áreas α en la cola derecha de la distribución t, y las entradas son valores de t_α. (Véase también la figura 6.6.) No es necesario tabular valores de t_α para $\alpha > 0.50$, pues se sigue, de la simetría de la distribución t, que $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$. Por lo tanto, el valor de t que corresponde a una área de cola izquierda de α es $-t_\alpha$.

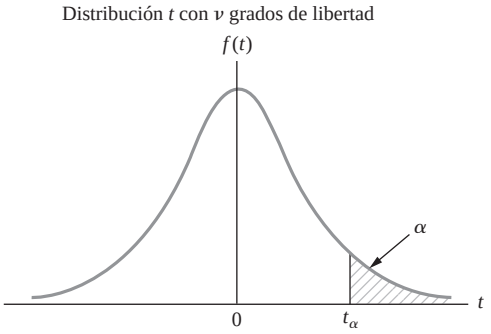


Figura 6.6
Valor tabulado de t_α

Note que, en la fila inferior de la tabla 4, las entradas corresponden a los valores de z que cortan colas derechas de área α bajo la curva normal estándar. Al utilizar la notación z_α para tal valor de z, se observa, por ejemplo, que $z_{0.025} = 1.96 = t_{0.025}$ para $\nu = \infty$. De hecho, al notar que los valores de t_α para 29 o más grados de libertad están cerca de los correspondientes valores de z_α, se concluye que **la distribución normal estándar ofrece una buena aproximación a la distribución *t* para muestras de tamaño 30 o más.**

EJEMPLO

Uso de un cálculo de probabilidad a partir de la distribución t para rechazar una afirmación

Un fabricante de fusibles afirma que, con una sobrecarga de 20%, los fusibles estallarán en 12.40 minutos en promedio. Para probar tal afirmación, una muestra de 20 de los fusibles se sometió a una sobrecarga de 20%; los tiempos que tardaron en estallar tuvieron una media de 10.63 minutos y una desviación estándar de 2.48 minutos. Si se puede suponer que los datos constituyen una muestra aleatoria de una población normal, ¿tienden a apoyar o a rechazar la afirmación del fabricante?

Solución Primero se calcula

$$t = \frac{10.63 - 12.40}{2.48/\sqrt{20}} = -3.19$$

que es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución t con $\nu = 20 - 1 = 19$ grados de libertad. Ahora, a partir de la tabla 4, se encuentra que, para $\nu = 19$, la probabilidad de que t excederá 2.861 es de 0.005; por consiguiente, la probabilidad de que t será menor que –2.861 también es de 0.005. Puesto que $t = -3.19$ es menor que –2.861 y 0.005 es una probabilidad muy pequeña, se concluye que los datos tienden a rechazar la afirmación del fabricante. Con toda probabilidad, el tiempo de estallido medio de sus fusibles con una sobrecarga de 20% es menor que 12.40 minutos. ■

La suposición de que la muestra debe provenir de una población normal no es una restricción tan severa como parecería. Los estudios demuestran que la distribución de la variable aleatoria

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

está bastante cerca de una distribución t incluso para muestras de ciertas poblaciones no normales. En la práctica, es necesario asegurarse principalmente de que la población de la que se toman muestras tiene aproximadamente forma de campana y no está muy sesgada. Una forma práctica de verificar esta suposición es construir una gráfica de puntuaciones normales, como se describe en la página 163. (Si tal gráfica muestra una curva distinta en vez de una recta, es posible "volverla recta" modificando los datos, por decir, al tomar sus logaritmos o sus raíces cuadradas, como se vio en el capítulo 5, sección 5.13.)

6.4 La distribución muestral de la varianza

Hasta el momento, únicamente se ha estudiado la distribución muestral de la media, pero si se hubieran tomado las medianas o las desviaciones estándar, de las 50 muestras mencionadas en el ejemplo de la página 179, de igual modo se habrían obtenido distribuciones muestrales experimentales de dichos estadísticos. En esta sección se abordará la distribución muestral teórica de la varianza muestral para muestras aleatorias de poblaciones normales. Puesto que S^2 no puede ser negativa, se debería sospechar que esta distribución muestral no es una curva normal; de hecho, se relaciona con la distribución gamma (véase la página 139) con $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$, llamada **distribución chi cuadrada**. De manera específica, al usar el cuadrado de la letra griega χ (chi), se tiene el siguiente teorema.

Una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada

Teorema 6.5 Si S^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal con la varianza σ^2, entonces,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con el parámetro $\nu = n - 1$.

La tabla 5 al final del libro contiene valores seleccionados de χ^2_α para diversos valores de ν, nuevamente llamado número de **grados de libertad**, donde χ^2_α es tal que el área bajo la distribución chi cuadrada a su derecha es igual a α. En esta tabla la columna izquierda contiene valores de ν, los encabezados de columna son áreas α en la cola derecha de la distribución chi cuadrada y las entradas son valores de χ^2_α. (Véase también la figura 6.7.)

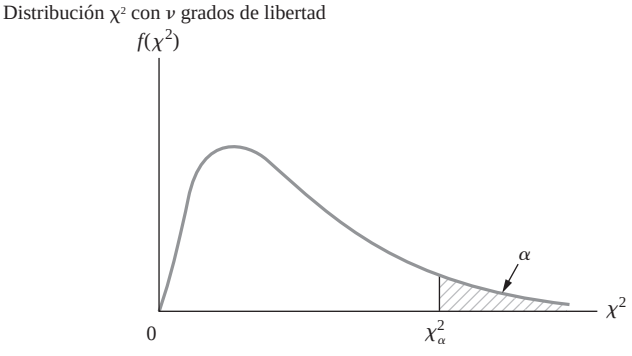


Figura 6.7
Valores tabulados de chi cuadrada

A diferencia de la distribución t, es necesario tabular valores de χ^2_α para $\alpha > 0.50$, porque la distribución chi cuadrada no es simétrica.

EJEMPLO

Un cálculo de probabilidad basado en la distribución χ^2 ayuda a monitorear la variabilidad

Una firma de óptica compra vidrio para lentes, y se sabe por experiencias anteriores que la varianza del índice de refracción de este tipo de vidrio es $1.26 \cdot 10^{-4}$. Como es importante que las diversas piezas de vidrio tengan casi el mismo índice de refracción, la firma rechaza tal embarque si la varianza muestral de 20 piezas seleccionadas al azar supera $2.00 \cdot 10^{-4}$. Si se supone que los valores muestrales pueden considerarse muestras aleatorias de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que un embarque se rechazará aun cuando $\sigma^2 = 1.26 \cdot 10^{-4}$?

Solución Al sustituir en la fórmula para el estadístico chi cuadrada,

$$\chi^2 = \frac{19(2.00 \cdot 10^{-4})}{1.26 \cdot 10^{-4}} = 30.2$$

entonces, se encuentra de la tabla 5 que para 19 grados de libertad, $\chi^2_{0.05} = 30.1$. Por lo tanto, la probabilidad de que un buen embarque será rechazado erróneamente es menor que 0.05. ■

Un problema estrechamente relacionado con el de encontrar la distribución de la varianza muestral es encontrar la distribución de la razón de las varianzas de dos muestras aleatorias independientes. Este problema es importante porque surge de pruebas donde se quiere determinar si dos muestras provienen de poblaciones con varianzas iguales. Si es así, las dos varianzas muestrales deberían ser casi iguales, es decir, sus razones tienen que ser cercanas a 1. Para determinar si la razón de dos varianzas muestrales es muy pequeña o muy grande, se utiliza la teoría dada en el siguiente teorema:

Una variable aleatoria que tiene la distribución *F*

Teorema 6.6 Si S_1^2 y S_2^2 son las varianzas de las muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales con la misma varianza, entonces,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución F con los parámetros $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$.

La **distribución *F*** se relaciona con la distribución beta (página 141), por lo que a sus dos parámetros, ν_1 y ν_2, se les llama **numerador** y **grados de libertad del denominador**. Como se requeriría una tabla muy grande para dar valores de F_α correspondientes a muchas probabilidades diferentes α de cola derecha y, puesto que $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$ se utilizan más comúnmente en la práctica, la tabla 6 contiene solo valores $F_{0.05}$ y $F_{0.01}$ para varias combinaciones de valores de ν_1 y ν_2. (Véase también la figura 6.8.)

EJEMPLO

Uso de la tabla 6 para evaluar una probabilidad

Si dos muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = 7$ y $n_2 = 13$ se toman de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la primera muestra será al menos tres veces más grande que la varianza de la segunda muestra?

Solución De la tabla 6 se encuentra que $F_{0.05} = 3.00$ para $\nu_1 = 7 - 1 = 6$ y $\nu_2 = 13 - 1 = 12$; por consiguiente, la probabilidad deseada es 0.05. ■

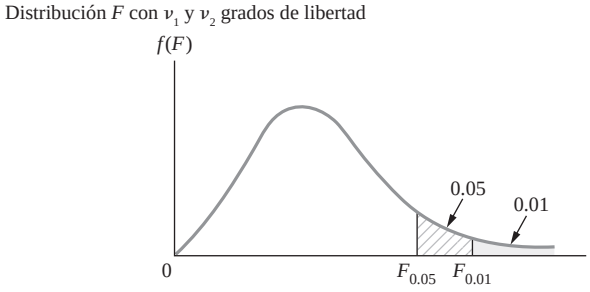


Figura 6.8
Valores tabulados de F

También es posible usar la tabla 6 para encontrar valores de F que correspondan a probabilidades de cola izquierda de 0.05 o 0.01. Al escribir $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para F_α, con ν_1 y ν_2 grados de libertad, simplemente se utiliza la identidad

$$F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_\alpha(\nu_2, \nu_1)}$$

EJEMPLO **Uso de la tabla 6 para encontrar una probabilidad de cola izquierda**

Encuentre el valor de $F_{0.95}$ (correspondiente a una probabilidad de cola izquierda de 0.05) para $\nu_1 = 10$ y $\nu_2 = 20$ grados de libertad.

Solución Al usar la identidad y la tabla 6,

$$F_{0.95}(10, 20) = \frac{1}{F_{0.05}(20, 10)} = \frac{1}{2.77} = 0.36$$

■

Note que los teoremas 6.4 y 6.5 requieren la suposición de que son muestras de poblaciones normales. A diferencia de la situación con la distribución t, las desviaciones de una distribución normal subyacente, como una cola larga, pueden tener un serio efecto sobre dichas distribuciones muestrales. En consecuencia, es mejor transformar a casi normalidad usando el enfoque de la sección 5.13, antes de invocar las distribuciones muestrales de esta sección.

Ejercicios

6.20 La resistencia a la tensión (1,000 psi) de un nuevo compuesto puede modelarse como una distribución normal. Una muestra aleatoria de tamaño 25 especímenes tiene media $\bar{x} = 45.3$ y desviación estándar $s = 7.9$. ¿Esta información tiende a apoyar o rechazar la afirmación de que la media de la población es 40.5?

6.21 Los siguientes son los tiempos entre 6 llamadas para una ambulancia (en cierta ciudad) y la llegada del paciente al hospital: 27, 15, 20, 32, 18 y 26 minutos. Use dichas cifras para juzgar lo razonable de la afirmación del servicio de ambulancias de que en promedio se tardan 20 minutos entre la llamada por una ambulancia y la llegada del paciente al hospital.

6.22 Un proceso para fabricar ciertos cojinetes está bajo control, si los diámetros de los cojinetes tienen una media de 0.5000 cm. ¿Qué puede decir acerca de este proceso, si una muestra de 10 de dichos cojinetes tiene un diámetro medio de 0.5060 cm y una desviación estándar de 0.0040 cm?

6.23 Los discos duros de computadoras deben girar de manera equilibrada, y un alejamiento del nivel se llama cabeceo. Las muestras se toman regularmente de la producción y cada disco en la muestra se coloca en equipo de prueba que da como resultado una medición del cabeceo. A partir de diversas muestras, se concluye que la población es normal. La varianza es $\sigma^2 = 0.065$ cuando el proceso está en control. Una muestra de tamaño 10 se recolecta cada semana. El proceso se declarará fuera de control si la varianza de la muestra supera 0.122. ¿Cuál es la probabilidad de que se declarará fuera de control aun cuando $\sigma^2 = 0.065$?

6.24 Una muestra aleatoria de 10 observaciones se toma de una población normal con la varianza $\sigma^2 = 42.5$. Encuentre la probabilidad aproximada de obtener una desviación estándar muestral entre 3.14 y 8.94.

6.25 Si muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = n_2 = 8$ provienen de poblaciones normales con la misma varianza, ¿cuál es la probabilidad de que alguna

varianza muestral será al menos 7 veces mayor que la otra?

6.26 Encuentre los valores de

a) $F_{0.95}$ para 12 y 15 grados de libertad;

b) $F_{0.99}$ para 6 y 20 grados de libertad.

6.27 La distribución chi cuadrada con 4 grados de libertad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot x \cdot e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que la varianza de una muestra aleatoria de tamaño 5, de una población normal con $\sigma = 12$, exceda 180.

6.28 La distribución t con 1 grado de libertad está dada por

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(1 + t^2)^{-1} \qquad -\infty < t < \infty$$

Verifique el valor dado por $t_{0.05}$ para $\nu = 1$ en la tabla 4.

6.29 La distribución F con 4 y 4 grados de libertad está dada por

$$f(F) = \begin{cases} 6F(1 + F)^{-4} & F > 0 \\ 0 & F \leq 0 \end{cases}$$

Si se toman muestras aleatorias de tamaño 5 de dos poblaciones normales que tienen la misma varianza, encuentre la probabilidad de que la razón de la mayor a la menor varianza muestral excederá 3.

6.5 Representaciones de las distribuciones de la teoría normal

Las distribuciones básicas de teoría normal pueden definirse todas en términos de variables aleatorias normales estándares independientes. A la definición de una nueva variable aleatoria, en términos de otras, se le llama **representación**.

Sean $Z, Z_1, Z_2, \ldots$, variables aleatorias normales estándares independientes con media 0 y varianza 1. Primero, defina una variable chi cuadrada.

Representación de variable aleatoria chi cuadrada

Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ variables aleatorias normales estándares independientes.

χ^2_ν = suma de cuadrados de ν variables normales estándares independientes

$= \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ tiene una distribución chi cuadrada con ν grados de libertad.

Considere dos variables aleatorias chi cuadrada que tengan las representaciones $\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{\nu_1} Z_i^2$ y $\chi_2^2 = \sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} Z_i^2$. Puesto que dependen de diferentes conjuntos de Z_i, son independientes. Al sumar estas dos representaciones, se concluye, como en el ejercicio 6.33, que **la suma de dos variables chi cuadrada independientes, $\chi_1^2 + \chi_2^2$, tiene una distribución chi cuadrada con grados de libertad $\nu_1 + \nu_2$**.

A continuación, puesto que $\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ solo depende de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ y son independientes de Z, esta χ^2 y Z son independientes. Se define una variable aleatoria t en términos de dos variables aleatorias independientes Z y χ^2.

Representación de la variable aleatoria t

Sean independientes la Z normal estándar y chi cuadrada (χ^2), que tienen ν grados de libertad.

$$t = \frac{\text{normal estándar}}{\sqrt{\dfrac{\text{chi cuadrada}}{\text{grados de libertad}}}} = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{\nu}}} = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2}{\nu}}}$$

tiene una distribución t con ν grados de libertad.

Una variable aleatoria F se define en términos de dos variables chi cuadrada independientes χ_1^2 y χ_2^2 con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente.

Representación de la variable aleatoria *F*

Sean independientes las variables chi cuadrada χ_1^2, con ν_1 grados de libertad, y χ_2^2, con ν_2 grados de libertad.

$$F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\dfrac{\text{chi cuadrada}}{\text{grados de libertad}}}{\dfrac{\text{chi cuadrada}}{\text{grados de libertad}}} = \frac{\dfrac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\dfrac{\chi_2^2}{\nu_2}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu_1} Z_i^2}{\nu_1}}{\dfrac{\sum_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} Z_i^2}{\nu_2}}$$

tiene una distribución F con (ν_1, ν_2) grados de libertad.

El caso básico surge a partir de n variables aleatorias normales independientes X_1, X_2, …, X_n, todas con la misma media μ y desviación estándar σ. Entonces,

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar para cada i. Entonces, se sostiene que

$$\sqrt{n}\,\overline{Z} = \sqrt{n}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right)$$

tiene una distribución normal estándar.

A continuación,

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z} + \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 + n\overline{Z}^2$$

El lado izquierdo tiene una distribución chi cuadrada con n grados de libertad. El último término a la derecha es el cuadrado de la variable normal estándar $\sqrt{n}\,\overline{Z}$; por lo tanto, tiene una distribución chi cuadrada con 1 grado de libertad. Puede demostrarse que los dos términos a la derecha de la ecuación son independientes y que

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2$$

tiene una distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Puesto que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2$$

se concluye que $(n - 1)S^2/\sigma^2$ tiene una distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

EJEMPLO **t^2 tiene una distribución *F***

Sea que t se distribuye como una distribución t con ν grados de libertad.

a) Use la representación de t para demostrar que t^2 tiene una distribución F con $(1, \nu)$ grados de libertad.

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $t_{\alpha/2} = F_\alpha(1, \nu)$.

Solución *a*) Al usar la representación de una variable aleatoria t,

$$t^2 = \left(\frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{\nu}}} \right)^2 = \frac{Z^2}{\dfrac{\chi^2}{\nu}}$$

Puesto que, por la primera representación anterior, Z^2 tiene una distribución chi cuadrada con 1 grado de libertad y es independiente del denominador, se confirma la representación de la distribución F con $(1, \nu)$ grados de libertad.

b)
$$1 - \alpha = P\,(-t_{\alpha/2} \le t \le t_{\alpha/2}) = P\left(t^2 \le t^2_{\alpha/2}\right)$$

Por el inciso *a*), $t^2 = F$, así que se tiene

$$1 - \alpha = P\left(F \le t^2_{\alpha/2}\right)$$

Puesto que $t^2_{\alpha/2}$ satisface la definición de $F_\alpha\,(1, \nu)$, las dos deben ser iguales. ■

Ejercicios

6.30 Sean $Z_1, \ldots, Z_5$ independientes y cada una con distribución normal estándar.

a) Especifique la distribución de $Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2$.

b) Especifique la distribución de

$$\frac{Z_1}{\sqrt{\dfrac{Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2}{4}}}$$

6.31 Sean $Z_1, \ldots, Z_6$ independientes y cada una con distribución normal estándar. Especifique la distribución de

$$\frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\dfrac{Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2}{8}}}$$

6.32 Sean $Z_1, \ldots, Z_7$ independientes y cada una con distribución normal estándar.

a) Especifique la distribución de $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$.

b) Especifique la distribución de $Z_5^2 + Z_6^2 + Z_7^2$.

c) Especifique la distribución de la suma de variables de los incisos *a*) y *b*).

6.33 Sean las variables chi cuadrada χ_1^2, con ν_1 grados de libertad, y χ_2^2, con ν_2 grados de libertad independientes. Establezca el resultado de la página 192, cuya suma es una variable chi cuadrada con $\nu_1 + \nu_2$ grados de libertad.

6.6 El método de la función generadora de momentos para obtener distribuciones*

El método de la fgm es una herramienta muy conveniente para obtener la función de distribución de la suma de variables aleatorias independientes. Sea que X_1 tiene fgm $M_1(t)$, que X_2 tiene fgm $M_2(t)$, que X_3 tiene fgm $M_3(t)$, y así sucesivamente. Entonces, por independencia, la fgm de la suma $X_1 + X_2 + X_3$ es

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2+X_3}(t) &= E(e^{t(X_1+X_2+X_3)}) = E(e^{tX_1}e^{tX_2}e^{tX_3}) \\ &= E(e^{tX_1}) \cdot E(e^{tX_2}) \cdot E(e^{tX_3}) \end{aligned}$$

o

$$M_{X_1+X_2+X_3}(t) = M_1(t) \cdot M_2(t) \cdot M_3(t)$$

Para cualquier número de variables aleatorias independientes, se tiene el siguiente resultado.

*Esta sección puede saltarse en una primera lectura. Se verifican algunas distribuciones muestrales clave.

Función generadora de momentos para suma de *n* variables aleatorias independientes

Teorema 6.7 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y sea X_i, que tiene función generadora de momentos $M_{X_i}(t)$ para $i = 1, \ldots, n$, donde todas las funciones generadoras de momentos existen para toda $t \leq T$ alguna $T > 0$. Entonces, la función generadora de momentos de la suma existe para toda $t \leq T$ y

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

La fgm de la suma de variables aleatorias independientes es el producto de los componentes de la fgm. Cuando el producto puede identificarse, se conoce la distribución de la suma. A este argumento se le llama **método de función generadora de momentos**.

EJEMPLO **La suma de *n* variables aleatorias normales independientes es normal**

Sea X_1, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$; X_2, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ y X_3, $N(\mu_3, \sigma_3^2)$, donde las tres variables aleatorias son independientes.

a) Encuentre la distribución de $X_1 + X_2 + X_3$.

b) Sea X_i, $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea X_i independiente. Demuestre que la distribución de su suma, $\sum_{i=1}^n X_i$, es normal con

$$\text{media} = \sum_{i=1}^n \mu_i$$

$$\text{varianza} = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Solución *a*) Se sabe que X_1 tiene fgm

$$M_1(t) = e^{t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2}$$

de modo que

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2+X_3}(t) &= e^{t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2} \cdot e^{t\mu_2 + \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2} \cdot e^{t\mu_3 + \frac{1}{2}t^2\sigma_3^2} \\ &= e^{t(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \end{aligned}$$

Esta última forma se identifica como una $N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$. Esto es: la suma tiene una distribución normal donde la media es la suma de las medias componentes y la varianza es la suma de las varianzas.

b)
$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{t\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sigma_i^2} = e^{t\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right) + \frac{1}{2}t^2\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)}$$

de modo que la suma tiene una distribución normal con media igual a la suma de las medias componentes, así como varianza igual a la suma de varianzas. ■

EJEMPLO **La suma de variables aleatorias de Poisson independientes sigue siendo una distribución de Poisson**

Sea que X_i tiene una distribución de Poisson con parámetro λ_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y sea X_i independiente. Demuestre que la distribución de su suma, $\sum_{i=1}^n X_i$, es una distribución de Poisson con parámetro

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Solución Se sabe que X_i tiene fgm

$$M_i(t) = e^{-\lambda_i + \lambda_i e^t}$$

En consecuencia,

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i + \lambda_i e^t} = e^{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) e^t}$$

Esta es la fgm de una distribución de Poisson con parámetro $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. ■

EJEMPLO **La suma de variables aleatorias independientes chi cuadrada es una distribución chi cuadrada**

Sea que X_i tiene una distribución chi cuadrada con ν_i grados de libertad, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y sean las X_i independientes. Use el método de la función generadora de momentos para demostrar que la distribución de su suma, $\sum_{i=1}^n X_i$, es una distribución chi cuadrada con grados de libertad $\sum_{i=1}^n \nu_i$.

Solución *a*) Se sabe que X_i tiene fgm $(1 - 2t)^{-\nu_i/2}$, de modo que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene fgm

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-2t)^{\nu_i/2}} = \frac{1}{(1-2t)^{\sum_{i=1}^n \nu_i/2}}$$

que se identifica como la fgm de una distribución chi cuadrada con $\sum_{i=1}^n \nu_i$ grados de libertad. ■

Ejercicios

6.34 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_8$, 8 variables aleatorias independientes. Encuentre la función generadora de momento

$$M_{\sum X_i}(t) = E(e^{t(X_1 + X_2 + \cdots + X_8)})$$

de la suma, cuando X_i tiene una distribución de Poisson con media

a) $\lambda_i = 0.5$

b) $\lambda_i = 0.04$

6.35 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_5$, 5 variables aleatorias independientes. Encuentre la función generadora de momentos

$$M_{\sum X_i}(t) = E(e^{t(X_1 + X_2 + \cdots + X_5)})$$

de la suma, cuando X_i tiene una distribución gamma con $\alpha_i = 2i$ y $\beta_i = 2$.

6.36 Sean X_1, X_2 y X_3 variables normales independientes con

$$E(X_1) = 2 \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = 4$$
$$E(X_2) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = 9$$
$$E(X_3) = -1 \quad \text{y} \quad \sigma_3^2 = 1$$

a) Demuestre que $X_1 + 2X_2 - 3X_3$ tiene una distribución normal.

b) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria en el inciso *a*).

6.37 Consulte el ejercicio 6.36.

a) Demuestre que $X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 5$ tiene una distribución normal.

b) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria en el inciso *b*).

6.38 Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con

$$E(X_1) = -4 \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = 1$$
$$E(X_2) = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = 4$$
$$E(X_3) = 3 \quad \text{y} \quad \sigma_3^2 = 1$$

a) Demuestre que $2X_1 - X_2 + 5X_3$ tiene una distribución normal.

b) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria en el inciso *a*).

6.39 Consulte el ejercicio 6.38.

a) Demuestre que $7X_1 + X_2 - 2X_3 + 7$ tiene una distribución normal.

b) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria en el inciso *a*).

6.40 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_r$, r variables aleatorias independientes y cada una con la misma distribución geométrica.

a) Demuestre que la función generadora de momentos $M_{\sum X_i}(t) = E(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_r)})$ de la suma es

$$[pe^t/(1-(1-p)e^t)]^r$$

b) Relacione la suma con el número total de ensayos para obtener r éxitos. La distribución está dada por

$$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, x = r, r+1, \cdots$$

(véase la página 109).

c) Obtenga los primeros dos momentos de esta binomial negativa al diferenciar la fgm.

6.41 Consulte el ejercicio 6.40. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias independientes, cada una con una distribución binomial negativa con probabilidad de éxito p, pero donde X_i tiene parámetro r_i.

a) Demuestre que la fgm

$$M_{\sum X_i}(t) = E(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_r)})$$

de la suma $\sum X_i$ es

$$[pe^t/(1-(1-p)e^t)]^{\sum_{i=0}^{n} r_i}$$

b) Identifique la forma de esta fgm y especifique la distribución de $\sum X_i$.

6.7 Métodos de transformación para obtener distribuciones*

Se introducen brevemente[1] dos técnicas más para obtener la distribución, o densidad, de probabilidad de una variable aleatoria que es una función de una variable aleatoria, cuya distribución se conoce. Se trata del **método de función de distribución** y del **método de transformación**.

Método de función de distribución

Con este método, primero se obtiene la función de distribución $G(y)$ de $Y = h(X)$, donde X tiene función de distribución conocida $F(x)$. La densidad, si se necesita, puede obtenerse mediante diferenciación.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P[h(X) \leq y]$$

Dos ejemplos ilustrarán este método.

EJEMPLO **La transformación de integral de probabilidad**

Sea que X tiene función de distribución $F(X)$ y función de densidad $f(x)$ que es positiva sobre un intervalo abierto y 0 en otra parte. Considere la **transformación de integral de probabilidad** $Y = F(X)$, donde la función de distribución acumulada se evalúa en la variable aleatoria X. Demuestre que $F(X)$ tiene una distribución uniforme sobre (0, 1).

Solución Elija cualquier valor y entre 0 y 1. Dado que $F(x)$ tiene una derivada positiva, hay un valor único x tal que $F(x) = y$. Esta correspondencia puede escribirse como una función $x = w(y)$ y $F(w(y)) = y$ para toda $0 < y < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leq y) &= P(F(X) \leq y) \\ &= P(X \leq w(y)) \\ &= F(w(y) = y \end{aligned}$$

para cualquier $0 < y < 1$. La función de distribución acumulada $G(y) = y$ es la de la distribución uniforme. ■

*Esta sección puede saltarse en una primera lectura, ya que las técnicas no se usan más adelante en el libro.

[1]En el sitio Web de Prentice Hall está disponible una sección 6.7 extendida.

EJEMPLO **Método de función de distribución aplicado a X^2**

Sea que X tiene función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$.

a) Demuestre que su cuadrado, $Y = X^2$, tiene función de distribución

$$G(y) = P(Y \leq y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

b) Si X tiene una distribución normal estándar, demuestre que su cuadrado tiene

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}$$

que es una distribución chi cuadrada con 1 grado de libertad.

Solución *a*) Se tiene

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leq y) &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

b) Al diferenciar,

$$g(y) = f(\sqrt{y})\frac{d\sqrt{y}}{dy} - f(-\sqrt{y})\frac{d-\sqrt{y}}{dy} = f(\sqrt{y})\frac{y^{-1/2}}{2} + f(-\sqrt{y})\frac{y^{-1/2}}{2}$$

En el ejercicio 6.42, se pide al lector verificar la densidad establecida. ■

Para cualquier función diferenciable estrictamente creciente $h(x)$, con función inversa $w(y)$, se tiene $G(y) = F(w(y))$. Al tomar la derivada de ambos lados con respecto a y, se obtiene la expresión para la función de densidad de $h(X)$ que se presenta a continuación cuando se examina el método de transformación.

Método de transformación

La densidad de probabilidad para una función de una variable aleatoria puede determinarse directamente a partir de la densidad de la variable original. Considere $Y = h(X)$, donde X tiene densidad $f(x)$. Inicialmente, se supone que $h(x)$ es diferenciable, ya sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Entonces, $y = h(x)$ puede resolverse para x. Esto es: $h(x)$ tiene inversa $w(y) = x$.

Función de densidad de $h(X)$

Teorema 6.8 Sea $Y = h(X)$ donde X tiene densidad $f(x)$, y sea $h(x)$ diferenciable, ya sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente sobre el rango, donde $f(x) \neq 0$. La función inversa $w(y)$ existe y la densidad de Y está dada por

$$g(y) = \begin{cases} f(w(y))\,|w'(y)| & \text{donde } w'(y) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

EJEMPLO **Método de transformación: raíz cuadrada de chi cuadrada/grados de libertad**

Sea que X tiene una distribución chi cuadrada con ν grados de libertad. Aplique la transformación para demostrar que la densidad de $Y = \sqrt{X/\nu}$ es

$$\frac{\nu^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{(\nu-2)/2}} y^{\nu-1} e^{-\nu y^2/2}, \quad y > 0$$

Solución La densidad de la distribución chi cuadrada con ν grados de libertad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{\nu/2}}\, x^{\frac{\nu}{2}-1}\, e^{-x/2}$$

y $y = \sqrt{x/\nu} = h(x)$ tiene inversa $x = \nu y^2 = w(y)$. Puesto que $w'(y) = 2\nu$, y es continua y mayor que 0 para $y > 0$,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{\nu/2}}\,(\nu y^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\nu y^2/2}\, 2\nu y \\ &= \frac{\nu^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{(\nu-2)/2}}\, y^{\nu-1} e^{-\nu y^2/2} \end{aligned}$$

■

Se establecen dos transformaciones importantes para obtener la suma o la razón de dos variables aleatorias independientes.

Fórmula de convolución

Teorema 6.9 Sean X y Y independientes, y sea que X tiene densidad $f_X(x)$ y Y tiene densidad $f_Y(y)$. Entonces, la densidad de $Z = X + Y$ está dada por la **fórmula de convolución**

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \text{ para toda } z$$

La razón de variables aleatorias $Z = X + Y$ tiene densidad

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\, f_Y(xz)\, dx \text{ para toda } z$$

EJEMPLO **Distribución t de Student**

Sea que Y tiene una distribución normal estándar y es independiente de X, que tiene una distribución chi cuadrada con ν grados de libertad. Aplique la técnica de transformación para demostrar que la densidad de

$$\frac{\text{normal estándar}}{\sqrt{\dfrac{\text{chi cuadrada}}{\text{grados de libertad}}}} = \frac{Y}{\sqrt{\dfrac{X}{\nu}}}$$

está dada por

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \text{para } -\infty < t < \infty$$

Esta distribución se conoce como **distribución *t* de Student** o simplemente **distribución *t***.

Solución Puesto que Y tiene una distribución normal estándar, al usar la conclusión del ejemplo anterior, pero con X en sustitución de Y, la densidad de la razón $T = Y/X$ es

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\, f_Y(xt)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} |x|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(tx)^2/2}\, \frac{\nu^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{(\nu-2)/2}}\, x^{\nu-1} e^{-\nu x^2/2}\, dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\nu^{\nu/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})\,2^{(\nu-1)/2}}\, x^{\nu}\, e^{-\frac{1}{2}(\nu+t^2)x^2}\, dx \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $u = x^2(\nu + t^2)/2$, se obtiene

$$(\nu + t^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\nu^{\nu/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^\infty u^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-u}\, du$$

y el resultado se sigue de la definición de $\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$. ■

Fórmula de convolución para variables aleatorias discretas

También existe una fórmula de convolución para la suma, $Z = X + Y$, de dos variables aleatorias discretas independientes X y Y. Sean $f_X(x)$ la distribución de probabilidad de X y $f_Y(y)$ la distribución de probabilidad de Y. La atención se restringe a casos donde X y Y toman valores enteros no negativos.

Para encontrar $f_Z(z) = P(Z \leq z)$, para cada z, se reconoce que el evento $[Z = z]$ es la unión de los eventos disjuntos $[X = x$ y $Y = z - x]$ para $x = 0, 1, \ldots, z$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(Z = z) = f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{z} P(X = x \text{ y } Y = z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} f_X(x)\, f_Y(z - x) \end{aligned}$$

donde el último paso se sigue por independencia. A este último resultado se le llama **fórmula de convolución** para variables aleatorias discretas.

Fórmula de convolución discreta

Teorema 6.10 Sean X y Y valores enteros no negativos. La variable aleatoria $Z = X + Y$ tiene distribución de probabilidad $f_Z(z)$ dada por

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = P(Z = z) = \sum_{x=0}^{z} f_X(x)\, f_Y(z - x) \text{ para } z = 0, 1, \ldots$$

EJEMPLO **Suma de dos variables aleatorias de Poisson independientes**

Sean X y Y variables aleatorias de Poisson independientes, donde X tiene parámetro (λ_1) y Y tiene parámetro (λ_2). Demuestre que la suma

$X + Y$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$

Solución Por la fórmula de convolución discreta, $Z = X + Y$ tiene distribución de probabilidad

$$f_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} f_X(x)\, f_Y(z - x)$$

de modo que

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!} e^{-\lambda_2} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda_1^x}{x!} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!} \end{aligned}$$

Use la fórmula binomial

$$(a + b)^m = \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} a^x b^{m-x}$$

con $m = z$, $a = \lambda_1$ y $b = \lambda_2$, después de multiplicar y dividir entre $z!$, para concluir que

$$\sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda_1^x}{x!} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^z}{z!}$$

y se establece el resultado.

Observación: note que los parámetros de escala λ_i se suman. ■

Ejercicios

6.42 Con referencia al ejemplo de la página 198, verifique que

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}$$

6.43 Use el método de función de distribución para obtener la densidad de Z^3 cuando Z tiene una distribución normal estándar.

6.44 Use el método de función de distribución para obtener la densidad de $1 - e^{-X}$, cuando X tiene la distribución exponencial con $\beta = 1$.

6.45 Use el método de función de distribución para obtener la densidad de ln (X), cuando X tiene la distribución exponencial con $\beta = 1$.

6.46 Use el método de transformación para obtener la densidad de X^2 cuando X tiene densidad $f(x) = 0.5x$ para $0 < x < 2$.

6.47 Use el método de transformación para obtener la distribución de $-\ln(X)$ cuando X tiene la distribución uniforme sobre (0, 1).

6.48 Use la fórmula de convolución, teorema 6.9, para obtener la densidad de $X + Y$ cuando X y Y son independientes y cada una tiene la distribución exponencial con $\beta = 1$.

6.49 Use el método de transformación, teorema 6.9, para obtener la distribución de la razón Y/X cuando X y Y son independientes y cada una tiene la misma distribución gamma.

6.50 Use la fórmula de convolución discreta, teorema 6.10, para obtener la distribución de probabilidad de $X + Y$ cuando X y Y son independientes y cada una tiene la distribución uniforme sobre $\{0, 1, 2\}$.

Sí y no

Sí

1. Comprenda el concepto de una distribución muestral. Cada observación es el valor de una variable aleatoria, de modo que una muestra de n observaciones varía de una posible muestra a otra. Por consiguiente, un estadístico como una media muestral varía de una muestra posible a otra. La distribución de probabilidad o función de densidad que describe el comportamiento azaroso de la media muestral se conoce como *distribución muestral*.
2. Cuando la distribución subyacente tiene media μ y varianza σ^2, recuerde que la distribución muestral de $\overline{X}$ tiene

$$\text{media de } \overline{X} = \mu = \text{media de población}$$

$$\text{varianza de } \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\text{varianza de población}}{n}$$

3. Cuando la distribución subyacente sea normal con media μ y varianza σ^2, calcule probabilidades exactas para $\overline{X}$ usando la distribución normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$

$$P(\overline{X} \leq b) = P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

4. Aplique el teorema de límite central, cuando el tamaño de la muestra sea grande, para aproximar la distribución muestral de $\overline{X}$ mediante una distribución normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. La probabilidad $P(\overline{X} \leq b)$ es aproximadamente igual a la probabilidad normal estándar $P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$.

No

1. No confunda la distribución poblacional, que describe la variación para una sola variable aleatoria, con la distribución muestral de un estadístico.
2. Cuando tome muestras de una población finita de tamaño N, no use $\sigma/\sqrt{n}$ como la desviación estándar de $\overline{X}$, a menos que el factor de corrección de población finito sea cercano a 1.
3. Cuando la distribución poblacional sea notablemente no normal, no intente concluir que la distribución muestral de $\overline{X}$ es normal a menos que el tamaño de la muestra sea, al menos, moderadamente grande, 30 o más.

Ejercicios de repaso

6.51 El panel para una feria de ciencias nacional quiere seleccionar 10 estados de donde se elegirá al azar un representante estudiantil de entre los estudiantes participantes en la feria.

a) Use la tabla 7 para seleccionar los 10 estados.

b) ¿El proceso de selección total ofrece a cada estudiante que participa en alguna feria de ciencia estatal, una oportunidad igual de ser seleccionado como representante en la feria de ciencias nacional?

6.52 ¿Cuántas muestras diferentes de tamaño $n = 2$ pueden elegirse de una población finita de tamaño

a) $N = 7$;

b) $N = 18$?

6.53 Con referencia al ejercicio 6.52, ¿cuál es la probabilidad de elegir cada muestra en el inciso *a*) y la probabilidad de elegir cada muestra en el inciso *b*), si las muestras tienen que ser aleatorias?

6.54 Con referencia al ejercicio 6.52, determine el valor del factor de corrección de población finita en la fórmula para $\sigma^2_{\overline{X}}$ para los incisos *a*) y *b*).

6.55 La hora de salida y el proceso de información de pago en un sitio Web de suministros de oficina pueden modelarse como una variable aleatoria con media $\mu = 63$ segundos y varianza $\sigma^2 = 81$. Si la media muestral $\overline{X}$ se basará en una muestra aleatoria de $n = 36$ horas, ¿qué se puede afirmar acerca de la probabilidad de obtener una media muestral mayor que 66.75, si usa

a) el teorema de Chebyshev;

b) el teorema de límite central?

6.56 El número de piezas de correo que recibe un departamento cada día puede modelarse mediante una distribución que tiene media de 44 y desviación estándar de 8. Para una muestra aleatoria de 35 días, ¿qué se puede decir acerca de la probabilidad de que la media muestral será menor que 40 o mayor que 48 usando

a) el teorema de Chebyshev;

b) el teorema de límite central?

6.57 Si las mediciones del peso específico de un metal pueden considerarse una muestra de una población normal que tiene una desviación estándar de 0.04, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de tamaño 25 estará "desfasada" por cuando mucho 0.02?

6.58 Agregar grafito al hierro puede mejorar sus cualidades dúctiles. Si las mediciones del diámetro de esferas de grafito dentro de una matriz de hierro pueden modelarse como una distribución normal, que tiene desviación estándar de 0.16, ¿cuál es la probabilidad de que la me-

dia de una muestra de tamaño 36 diferirá de la media poblacional por más de 0.06?

6.59 Si 2 muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = 9$ y $n_2 = 16$ se toman de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la primera muestra será al menos 4 veces mayor que la varianza de la segunda muestra?

6.60 Si 2 muestras independientes de tamaños $n_1 = 26$ y $n_2 = 8$ se toman de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza de la segunda muestra será al menos 2.4 veces la varianza de la primera muestra?

6.61 Cuando se toman muestras de una población infinita, ¿qué ocurre con el error estándar de la media si el tamaño de la muestra

a) aumenta de 100 a 200;

b) aumenta de 200 a 300;

c) disminuye de 360 a 90?

6.62 Un ingeniero de tráfico recolecta datos acerca del flujo de tráfico en una intersección congestionada, durante la hora de mayor afluencia, al registrar el número de automóviles que se dirigen hacia el oeste que esperan una luz verde. Las observaciones se hacen para cada cambio de luz. Explique por qué esta técnica de muestreo no conducirá a una muestra aleatoria.

6.63 Explique por qué los siguientes métodos pueden no conducir a muestras aleatorias de las poblaciones deseadas:

a) Para determinar la suavidad de los ejes, un fabricante mide la rugosidad de la primera pieza fabricada cada mañana.

b) Para determinar la mezcla de automóviles, camiones y autobuses, en la hora de mayor afluencia, un ingeniero registra el tipo de vehículo que pasa por un punto fijo a intervalos de 1 minuto.

6.64 A varios recolectores se les pide reunir 30 manzanas maduras y ponerlas en una bolsa.

a) ¿Usted esperaría que todas las bolsas pesaran lo mismo? Para una bolsa, sea X_1 el peso de la primera manzana, X_2 el peso de la segunda manzana, y así sucesivamente. Relacione el peso de esta bolsa,

$$\sum_{i=1}^{30} X_i$$

con la distribución muestral aproximada de $\overline{X}$.

b) Explique cómo su respuesta al inciso *a*) conduce a la distribución muestral para la variación en pesos de bolsas.

c) Si el peso de una manzana individual tiene media $\mu = 0.2$ libras y desviación estándar $\sigma = 0.03$ libras, determine la probabilidad de que el peso total de la bolsa superará las 6.2 libras.

Términos clave

Distribución chi cuadrada 189
Distribución *F* 190
Distribución muestral teórica 180
Distribución *t* 187
Distribución uniforme discreta 179
Error estándar de la media 183
Error probable de la media 186
Estadístico 178
Factor de corrección de población finita 181
Fórmula de convolución 199
Grados de libertad 188
Ley de los grandes números 182
Media muestral estandarizada 183
Método de función de distribución 197
Método de función generadora de momentos 195
Método de transformación 198
Muestra 175
Muestra aleatoria 176
Parámetro 178
Población finita 175
Población infinita 175
Población 175
Representación 192
Teorema del límite central 184
Transformación de integral de probabilidad 197

CAPÍTULO

7 INFERENCIAS CONCERNIENTES A LA MEDIA

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

7.1 Estimación puntual 204

7.2 Estimación por intervalo 209

7.3 Estimación de máxima verosimilitud 215

7.4 Pruebas de hipótesis 222

7.5 Hipótesis nulas y pruebas de hipótesis 224

7.6 Hipótesis concernientes a una media 229

7.7 Relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza 235

7.8 Potencia, tamaño de muestra y curvas características de operación 237

Ejercicios de repaso 243

Términos clave 244

Al comienzo del capítulo 6, se afirmó que el propósito de la mayoría de las investigaciones estadísticas es generalizar, a partir de la información contenida en muestras aleatorias, acerca de las poblaciones de las cuales se obtuvieron tales muestras. En el enfoque clásico, los métodos de inferencia estadística se dividen en dos grandes áreas: estimación y pruebas de hipótesis. En las secciones 7.1 y 7.2 se presentarán teoría y métodos que pertenecen a la estimación de medias. En la sección 7.3 se introduce un procedimiento de estimación general. Las secciones 7.4 y 7.5 tratan los conceptos básicos de la prueba de hipótesis, y las secciones 7.6 y 7.7 se ocupan de las pruebas de hipótesis concernientes a la media. El tema de la sección 7.8 es el desempeño de las pruebas, incluida la potencia.

7.1 Estimación puntual

Básicamente, la **estimación puntual** trata de la elección de un estadístico; esto es, un solo número calculado a partir de datos muestrales (y acaso otra información) para el cual se tiene cierta esperanza, o seguridad, de que está razonablemente cercana al parámetro que se supone estima. Explicar lo que aquí se entiende por razonablemente cercano no es tarea sencilla: primero, el valor del parámetro es desconocido; y segundo, el valor del estadístico es desconocido hasta después de obtener la muestra. Por ende, solo puede preguntar si, en el muestreo repetido, la distribución del estadístico tiene ciertas propiedades deseables comparables con la cercanía.

EJEMPLO

Dos componentes de cercanía: varianza y sesgo

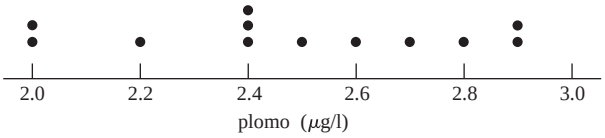
Los científicos deben ser capaces de detectar pequeñas cantidades de contaminantes en el ambiente. Como una comprobación de las capacidades actuales, se hicieron las siguientes mediciones sobre especímenes de prueba marcados con una concentración conocida de 1.25 μg/l de plomo. Esto es, las lecturas deberían promediar 1.25 si no hay antecedentes de plomo en las muestras.

2.4 2.9 2.7 2.6 2.9 2.0 2.8 2.2 2.4 2.4 2.0 2.5

a) Elabore un diagrama de puntos;

b) Calcule el estimador puntual $\overline{X}$ y estime su desviación estándar. Esta última cantidad se conoce como **error estándar estimado** de $\overline{X}$.

Solución *a*)



b) Se calcula

$$\overline{x} = \frac{29.8}{12} = 2.483 \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{75.08 - (29.8)^2/12}{12 - 1} = 0.09788$$

Del teorema 6.1, $\overline{X}$ tiene desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$, de modo que el error estándar estimado es $s/\sqrt{n} = \sqrt{0.09788/12} = 0.090$.

Parece haber ya sea un sesgo debido al procedimiento del laboratorio, o algo de plomo ya en las muestras antes de ser marcadas. Las 12 mediciones están sobre la concentración conocida, 1.25 μg/l. ■

La cercanía puede expresarse como dos componentes: **1.** el sesgo, que es el valor esperado del estimador menos el parámetro; y **2.** la desviación estándar o varianza del estimador.

Estimación puntual de una media

Parámetro: media poblacional μ
Datos: una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$
Estimador: $\overline{X}$
Estimación de error estándar: $\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

Del teorema 6.1 se sabe que la distribución muestral de la media tiene la misma media que la población de donde se obtuvo la muestra; por consiguiente, se esperaría que las medias de muestras aleatorias repetidas de una población dada se centren en la media de esta población y no en torno a algún otro valor.

Para formular esta propiedad de manera más general, sea θ el parámetro de interés y $\widehat{\theta}$ un estadístico. La **notación sombrero** distingue la cantidad basada en la muestra, del parámetro basado en la población. Ahora se hace la siguiente definición:

Estimador insesgado

Se dice que un estadístico $\widehat{\theta}$ es un **estimador insesgado**, o su valor una estimación no sesgada, si y solo si la media de la distribución muestral del estimador es igual a θ, cualquiera que sea el valor de θ.

Por ende, un estadístico se llama insesgado, si "en promedio" sus valores igualarán al parámetro que se supone estiman. Advierta que aquí se distingue entre un estimador, una variable aleatoria y una estimación, que es uno de sus valores. Además, se acostumbra aplicar el término *estadístico* tanto a estimaciones como a estimadores.

Es un hecho matemático que $\overline{X}$ es un estimador insesgado de la media poblacional μ siempre que las observaciones sean una muestra aleatoria. No obstante, la aplicación particular a la ingeniería quizá contenga sesgos desconocidos, como en el ejemplo de la muestra de agua marcada.

Hablando en términos generales, la propiedad de insesgado es una de las propiedades más deseables en la estimación puntual, aunque de ninguna forma es esencial y en ocasiones se supera con otros factores. Una limitación del criterio de insesgado es que por lo general no proporciona un estadístico único para un problema de estimación dado. Por ejemplo, es posible demostrar que, para una muestra aleatoria de tamaño $n = 2$, la media

$\frac{X_1 + X_2}{2}$ así como la media ponderada $\frac{aX_1 + bX_2}{a + b}$, donde a y b son constantes positivas, son estimaciones insesgadas de la media de la población. Si se supone aún más que la población es simétrica, también lo son la mediana y el rango medio (la media del valor más grande y el más pequeño) para muestras aleatorias de cualquier tamaño.

Lo anterior sugiere que se debe buscar un criterio adicional para decidir cuál de varios estimadores insesgados es mejor para estimar un parámetro dado. Tal criterio se vuelve evidente cuando se comparan las distribuciones muestrales de la mediana y la media para muestras aleatorias de tamaño n de la misma población normal. La distribución muestral de la media es normal y la de la mediana es casi normal. Aunque estas dos distribuciones muestrales tienen la misma media, la media poblacional μ, y aunque ambas son simétricas y con forma de campana, su varianza difiere. A partir del teorema 6.1, la varianza de la distribución muestral de la media para muestras aleatorias de poblaciones infinitas es $\frac{\sigma^2}{n}$ y puede demostrarse que, para muestras aleatorias del mismo tamaño de poblaciones normales, la varianza de la distribución muestral de la mediana es aproximadamente $1.5708 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$. Por lo tanto, es más probable que la media estará más cerca de μ de lo que la mediana está de μ. A pesar de su propiedad promedio a largo plazo, dada una muestra particular no hay forma de saber cuál de las dos está más cerca.

A continuación se formaliza esta importante comparación de las distribuciones muestrales de los estadísticos sobre la base de sus varianzas.

Estimador insesgado más eficiente

Se dice que un estadístico $\hat{\theta}_1$ es un estimador insesgado más eficiente del parámetro θ que el estadístico $\hat{\theta}_2$ si

1. $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son ambos estimadores insesgados de θ;
2. la varianza de la distribución muestral del primer estimador no es mayor que la del segundo y es menor para al menos un valor de θ.

Por consiguiente, se observa que, para muestras aleatorias de poblaciones normales, la media $\overline{X}$ es más eficiente que la mediana como estimador de μ; de hecho, puede demostrarse que, en la mayoría de las situaciones prácticas, donde se estima una media poblacional μ, la varianza de la distribución muestral de ningún otro estadístico es menor que el de la distribución muestral de la media. En otras palabras, en la mayoría de las situaciones prácticas, la media muestral es un estadístico aceptable para estimar una media poblacional μ. (Hay muchos otros criterios para asignar la bondad de los métodos de estimación puntual, pero no se estudiarán en este libro.)

Cuando se usa una media muestral para estimar la media de una población, se sabe que, aunque se use un método de estimación que tenga ciertas propiedades deseables, las posibilidades son escasas, prácticamente inexistentes, de que la estimación realmente será igual a μ. Por lo tanto, parecería deseable acompañar tal estimación puntual de μ con algún enunciado de qué tan cerca uno esperaría razonablemente que esté la estimación. El error, $\overline{X} - \mu$, es la diferencia entre el estimador y la cantidad que se supone se estima.

Para examinar este error, utilice el hecho de que, para n grande,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es una variable aleatoria con aproximadamente la distribución normal estándar.

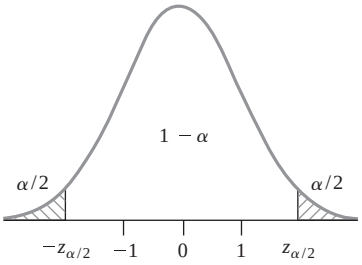


Figura 7.1
La distribución muestral de $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Como se ilustra en la figura 7.1, se afirma con probabilidad $1 - \alpha$ que satisface la desigualdad

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

o que

$$\frac{|\overline{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que el área de la curva normal a su derecha es igual a $\alpha/2$. Si ahora se hace que E represente el máximo de dichos valores de $|\overline{X} - \mu|$, el máximo error de estimación, se tiene que el error $|\overline{X} - \mu|$ será menor que

Máximo error de estimación

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

con probabilidad $1 - \alpha$. En otras palabras, si trata de estimar μ con la media de una muestra aleatoria grande ($n \geq 30$), se afirma con probabilidad $1 - \alpha$ que el error, $|\overline{X} - \mu|$, será cuando mucho $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Los valores más ampliamente usados para $1 - \alpha$ son 0.95 y 0.99, y los valores correspondientes de $z_{\alpha/2}$ son $z_{0.025} = 1.96$ y $z_{0.005} = 2.575$. (Véase el ejercicio 5.23 de la página 133.)

EJEMPLO

Cómo especificar una alta probabilidad para el error máximo (σ conocida)

Un ingeniero industrial trata de usar la media de una muestra aleatoria de tamaño $n = 150$ para estimar la aptitud mecánica promedio (medida con cierta prueba) de los trabajadores de línea de ensamble en una gran industria. Si, sobre la base de la experiencia, el ingeniero puede suponer que $\sigma = 6.2$ para tales datos, ¿qué se puede afirmar con probabilidad de 0.99 acerca del tamaño máximo de su error?

Solución Al sustituir $n = 150$, $\sigma = 6.2$ y $z_{0.005} = 2.575$ en la fórmula anterior para E, se obtiene

$$E = 2.575 \cdot \frac{6.2}{\sqrt{150}} = 1.30.$$

Por consiguiente, el ingeniero puede afirmar con probabilidad de 0.99 que su error será cuando mucho de 1.30. ■

Ahora suponga que el ingeniero de este ejemplo recolecta sus datos y obtiene $\overline{x} = 69.5$. ¿Todavía se afirmará con probabilidad de 0.99 que el error será cuando mucho de 1.30? Antes que todo, $\overline{x} = 69.5$ o difiere del verdadero promedio por cuando mucho 1.30 o no lo hace, y él no sabe cuál. De manera que debe entenderse que el 0.99 de probabilidad se

aplica al método que usó para determinar el error máximo (al obtener los datos muestrales y utilizar la fórmula para E) y no directamente al parámetro que trata de estimar. Para realizar esta distinción, se ha vuelto costumbre usar la palabra **confianza** aquí en vez de *probabilidad*. **En general, se hacen enunciados de probabilidad acerca de valores futuros de variables aleatorias (por decir, el error potencial de una estimación) y enunciados de confianza una vez obtenidos los datos.** En concordancia, en el ejemplo se diría que el ingeniero puede tener una confianza del 99% de que el error de su estimación, $\bar{x} = 69.5$, es cuando mucho de 1.30.

Determinación del tamaño de la muestra

La fórmula para E en la página 207 también sirve para determinar el tamaño de la muestra que se necesita para lograr un grado deseable de precisión. Suponga que quiere usar la media de una muestra aleatoria grande para estimar la media de una población, y se quiere afirmar con probabilidad $1 - \alpha$ que el error será, cuando mucho, alguna cantidad prescrita E [o afirmar más tarde con confianza $(1 - \alpha)100\%$ que el error es cuando mucho E]. Como antes, se escribe

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y al despejar n de esta ecuación,

Determinación del tamaño muestral

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right]^2$$

Para utilizar esta fórmula, se debe conocer $1 - \alpha$, E y σ, y para el último a menudo se sustituye una estimación basada en datos previos de un tipo similar (o, si es necesario, una buena suposición).

EJEMPLO **Selección del tamaño de la muestra**

Una trabajadora de investigación quiere determinar el tiempo promedio que tarda un mecánico en rotar los neumáticos de un automóvil, y quiere ser capaz de afirmar con 95% de confianza que la media de su muestra está desplazada por, cuando mucho, 0.50 minutos. Si puede presumir por su experiencia que $\sigma = 1.6$ minutos, ¿cuán grande deberá ser la muestra que tome?

Solución Al sustituir $E = 0.50$, $\sigma = 1.6$ y $z_{0.025} = 1.96$ en la fórmula para n, se obtiene

$$n = \left[\frac{1.96 \cdot 1.6}{0.50}\right]^2 = 39.3$$

o 40 redondeado al entero próximo superior. Por ende, la investigadora tendrá que cronometrar a 40 mecánicos que realicen la tarea de rotar los neumáticos de un vehículo. ■

Los métodos examinados hasta el momento en esta sección requieren que σ sea conocida o que pueda aproximarse con la desviación estándar de la muestra s, lo cual, por lo tanto, requiere que n sea grande. Sin embargo, si es razonable suponer que se muestrea de una población normal, puede basar su argumento en el teorema 6.3 en vez del teorema 6.2; a saber, en el hecho de que

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Al duplicar los pasos de la página 207, se llega por lo tanto al resultado de que, con probabilidad $1 - \alpha$, el error que se comete al usar $\overline{X}$ para estimar μ será cuando mucho $t_{\alpha/2}\, S/\sqrt{n}$. Aquí, $t_{\alpha/2}$ tiene probabilidad $\alpha/2$ de ser superado por una variable aleatoria t con $n - 1$ grados de libertad. (Véase la página 188.)

Cuando $\overline{X}$ y S están disponibles, se afirma con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza que el error cometido al usar $\overline{x}$ para estimar es cuando mucho

Error máximo de estimación, población normal (σ desconocida)

$$E = t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

EJEMPLO **Una cota del 98% de confianza sobre el error máximo**

En seis determinaciones del punto de fusión del estaño, un químico obtiene una media de 232.26 grados Celsius con una desviación estándar de 0.14 grados. Si usa esta media para estimar el punto de fusión real del estaño, ¿qué puede afirmar el químico, con 98% de confianza, acerca del error máximo?

Solución Al sustituir $n = 6$, $s = 0.14$ y $t_{0.01} = 3.365$ (para $n - 1 = 5$ grados de libertad) en la fórmula para E, se obtiene

$$E = 3.365 \cdot \frac{0.14}{\sqrt{6}} = 0.19$$

Por consiguiente, el químico puede afirmar con 98% de confianza que su cifra para el punto de fusión del estaño está desplazada cuando mucho 0.19 grados. ■

7.2 Estimación por intervalo

Dado que en realidad no se esperaría que las estimaciones puntuales coincidan con las cantidades que se pretende que estimen, en ocasiones es preferible sustituirlas con **estimaciones por intervalo**; esto es, con intervalos para los cuales puede afirmarse con un grado razonable de certeza que contendrán al parámetro en consideración. Para ilustrar la construcción de tal intervalo, suponga que tiene una gran muestra aleatoria ($n \geq 30$) de una población con la media desconocida μ y la varianza conocida σ^2. Con referencia a la desigualdad

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

que, como se muestra en la página 207, se satisface con probabilidad $1 - \alpha$, ahora se aplica álgebra simple y se obtiene $\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Cuando el valor observado $\overline{x}$ está disponible, se obtiene el

Intervalo de confianza para μ (σ conocida) de muestra grande

$$\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto, cuando se obtiene una muestra y se calcula el valor de $\overline{x}$, puede afirmar con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza que el intervalo desde $\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ hasta $\overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ contiene a μ. Es común referirse a un intervalo de este tipo como un **intervalo de confianza**

para μ que tiene el **grado de confianza** $1 - \alpha$ o $(1 - \alpha)100\%$, y a sus puntos extremos como los **límites de confianza**.

EJEMPLO

Cálculo e interpretación de un intervalo de confianza para muestra grande

Una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ se toma de una población con $\sigma = 5.1$. Dado que la media muestral es $\bar{x} = 21.6$, construya un intervalo de confianza de 95% para la media poblacional μ.

Solución Al sustituir los valores dados de n, $\bar{x}$, σ y $z_{0.025} = 1.96$ en la fórmula de intervalo de confianza, se obtiene

$$21.6 - 1.96 \cdot \frac{5.1}{\sqrt{100}} < \mu < 21.6 + 1.96 \cdot \frac{5.1}{\sqrt{100}}$$

o $20.6 < \mu < 22.6$. Desde luego, o el intervalo de 20.6 a 22.6 contiene o no a la media poblacional μ, pero se tiene 95% de confianza de que sí lo contiene. Como se explicó en la página 208, esto significa que el método mediante el cual se obtiene el intervalo "funciona" 95% de las veces. En otras palabras, en aplicaciones repetidas de la fórmula del intervalo de confianza, 95% de los intervalos pueden esperarse contengan las medias de las poblaciones respectivas. ■

La fórmula del intervalo de confianza anterior es exacta solo para muestras aleatorias de poblaciones normales, pero para muestras grandes por lo general ofrecerán buenas aproximaciones. Como σ es desconocida en la mayoría de las aplicaciones, se tiene que hacer la aproximación adicional de sustituir la desviación estándar muestral s por la desviación estándar poblacional σ.

Intervalo de confianza para μ con muestra grande y σ desconocida

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

EJEMPLO

Un intervalo de confianza de 99% para la altura media de nanopilares

Con referencia a los datos de altura de nanopilares de la página 15, para los cuales se tiene $n = 50$, $\bar{x} = 305.58$ nm y $s^2 = 1{,}366.86$ (por lo tanto, $s = 36.97$ nm), construya un intervalo de confianza del 99% para la media poblacional de todos los nanopilares.

Solución Al sustituir en la fórmula del intervalo de confianza con $\bar{x} = 305.58$, $s = 36.97$ y $z_{0.005} = 2.575$, se obtiene

$$305.58 - 2.575 \cdot \sqrt{\frac{36.97}{50}} < \mu < 305.58 + 2.575 \cdot \sqrt{\frac{36.97}{50}}$$

o $292.12 < \mu < 319.04$. Se tiene 99% de confianza de que el intervalo de 292.12 nm a 319.04 nm contenga la verdadera altura media de nanopilar. ■

Para muestras pequeñas ($n < 30$), se procede como en la página 208, siempre que sea razonable suponer que se muestrea de una población normal. Por consiguiente, con $t_{\alpha/2}$ definida como en la página 209, se obtiene la fórmula del intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$

Intervalo de confianza de muestra pequeña para μ de población normal con σ desconocida

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Esta fórmula se aplica a muestras de poblaciones normales, pero en concordancia con el análisis de la página 189, podría usarse en tanto la muestra no presente algún alejamiento significativo de la normalidad.

EJEMPLO **Un intervalo de confianza del 99% para la media de una población normal**

La pérdida de peso media de $n = 16$ bolas de molienda, después de cierto periodo de tiempo en lechada de molino, es de 3.42 gramos con una desviación estándar de 0.68 gramos. Construya un intervalo de confianza del 99% para la verdadera pérdida de peso media de tales bolas de molienda con las condiciones enunciadas.

Solución Al sustituir $n = 16$, $\bar{x} = 3.42$, $s = 0.68$ y $t_{0.05} = 2.947$ para $n - 1 = 15$ grados de libertad en la fórmula del intervalo de confianza de muestra pequeña para μ, se obtiene

$$3.42 - 2.947 \cdot \frac{0.68}{\sqrt{16}} < \mu < 3.42 + 2.947 \cdot \frac{0.68}{\sqrt{16}}$$

o $2.92 < \mu < 3.92$. Se tiene 99% de confianza de que el intervalo de 2.92 gramos a 3.92 gramos contiene la pérdida de peso medio. ■

Puesto que los intervalos de confianza son una forma importante de realizar inferencias, se repasa su interpretación en el contexto de intervalos del 95% de confianza para μ.

Antes de efectuar las observaciones, $\bar{X}$ y S son variables aleatorias, de modo que

1. El intervalo de $\bar{X} - t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ a $\bar{X} + t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ es un intervalo aleatorio. Se centra en $\bar{X}$ y su longitud es proporcional a S.
2. El intervalo de $\bar{X} - t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ a $\bar{X} + t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ cubrirá la μ verdadera (fija) con probabilidad de 0.95.

   Una vez realizadas las observaciones y al tener el valor numérico $\bar{x}$ y s.
3. El intervalo calculado de $\bar{X} - t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ a $\bar{X} + t_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}$ es fijo. Ya no es posible hablar acerca de la probabilidad de cubrir μ. El intervalo cubre o no a μ. Más aún, en cualquier aplicación específica, no hay forma de saber si μ está cubierta o no.

   Sin embargo, puesto que 0.95 es la probabilidad de que se cubra a μ en cada aplicación, la interpretación de frecuencia relativa a largo plazo de la probabilidad (o ley de los grandes números) promete que

$$\frac{\text{número de intervalos que cubren la media verdadera}}{\text{número de intervalos calculados}} \to 0.95$$

   cuando los intervalos se calculan para un gran número de problemas diferentes. ¡Esto es lo que da el 95% de confianza! Durante muchas aplicaciones diferentes del método, la proporción de intervalos que cubren μ debería ser casi de 0.95.

Para destacar estos puntos, se simula una muestra de tamaño $n = 10$ de una distribución normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 5$. Luego el intervalo de confianza del 95% se calculó y graficó en la figura 7.2. Este procedimiento se repitió 20 veces. Las diferentes muestras producen

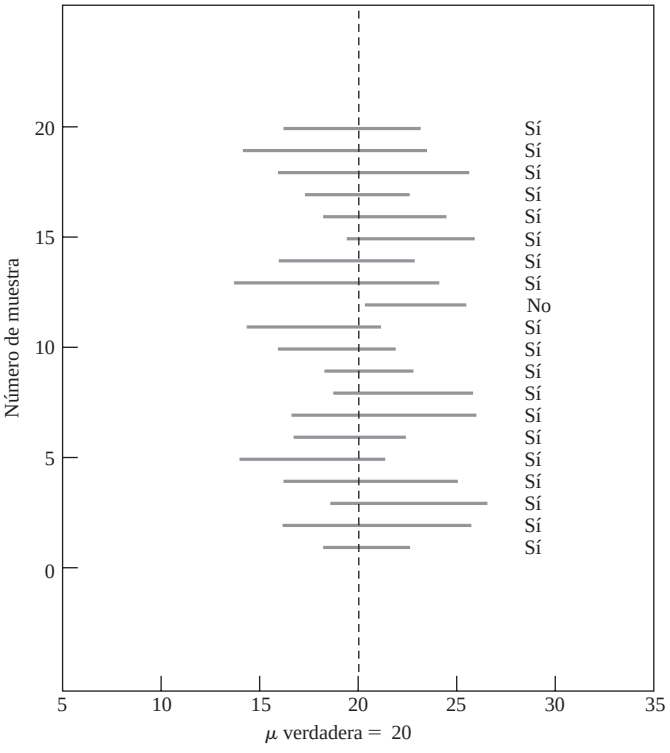


Figura 7.2
Interpretación del intervalo de confianza para media poblacional, media verdadera $\mu = 20$

diferentes valores para $\bar{x}$ y, en consecuencia, los intervalos se centran en diferentes puntos. Los diferentes valores de la desviación estándar s causan intervalos de diversas longitudes. Al contrario de una aplicación real, aquí se sabe que la verdadera media fija es $\mu = 20$. La proporción de intervalos que cubre el verdadero valor de $\mu = 20$ debería estar cercana a 0.95 y, en ese caso, se debe tener exactamente la proporción 19/20 = 0.95.

Ejercicios

7.1 Ingenieros civiles recaban datos de un área de Wisconsin acerca de la cantidad de sal (toneladas) utilizadas para mantener en buenas condiciones las autopistas durante una tormenta de nieve. La cantidad de sal para $n = 30$ tormentas

1111	2115	1573	2813	2815	2126	854	3965	1819	776
1484	2056	784	779	1373	1237	1701	1957	246	1730
2365	1902	2858	2236	1718	916	2830	2865	1574	1373

tiene $\bar{x} = 1798.4$ tons y $s^2 = 671{,}330.9$, de modo que $s = 819.35$ tons. ¿Qué puede uno afirmar con 95% de confianza acerca del error máximo si se utiliza $\bar{x} = 1798.4$ como estimación puntual de la verdadera media poblacional de la cantidad de sal requerida para una tormenta de nieve?

7.2 Con referencia al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera media poblacional de la cantidad de sal requerida para una tormenta de nieve.

7.3 Un ingeniero industrial recolectó datos acerca del tiempo de trabajo requerido para producir un pedido de silenciadores de automóvil con una apisonadora pesada. Los datos acerca de los tiempos (horas) para $n = 52$ pedidos de diferentes piezas

2.15	2.27	0.99	0.63	2.45	1.30	2.63	2.20	0.99	1.00	1.05
3.44	0.49	0.93	2.52	1.05	1.39	1.22	3.17	0.85	1.18	2.27
1.52	0.48	1.33	4.20	1.37	2.70	0.63	1.13	3.81	0.20	1.08
2.92	2.87	2.62	1.03	2.76	0.97	0.78	4.68	5.20	1.90	0.55
1.00	2.95	0.45	0.70	2.43	3.65	4.55	0.33			

tienen $\bar{x} = 1.865$ horas y $s^2 = 1.5623$, de modo que $s = 1.250$ horas. ¿Qué puede uno afirmar con 95% de confianza acerca del error máximo, si se usa $\bar{x} = 1.865$ horas como una estimación puntual de la verdadera media poblacional del tiempo de trabajo requerido para operar la apisonadora pesada?

7.4 Con referencia al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera media poblacional del tiempo de trabajo.

7.5 La fabricación de grandes pantallas de cristal líquido (LCD) es difícil. Algunos defectos son menores y pueden removerse; otros no se pueden remover. El número de defectos no removibles, para cada una de $n = 45$ pantallas (*cortesía de Shiyu Zhou*)

1	0	5	3	0	7	6	0	0	4	6	8
5	0	9	1	0	8	6	0	3	2	0	0
0	6	0	10	0	6	0	0	1	0	0	0
0	1	5	1	0	5	0	0	2			

tiene $\overline{x} = 2.667$ y $s = 3.057$ defectos no removibles. ¿Qué se puede afirmar con 98% de confianza acerca del error máximo si $\overline{x} = 1798.4$ se usa como una estimación puntual de la verdadera media poblacional del número de defectos no removibles?

7.6 Con referencia al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 98% para la verdadera media poblacional del número de defectos no removibles por pantalla.

7.7 Con referencia a las $n = 50$ observaciones de tiempo entre solicitudes de la página 19, con media de 11,795 y desviación estándar de 14,054, ¿qué se puede afirmar con 95% de confianza acerca del error máximo si $\overline{x} = 11{,}795$ se usa como una estimación puntual de la verdadera media poblacional del tiempo entre solicitudes?

7.8 Con referencia al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera media del tiempo entre solicitudes.

7.9 En un estudio de los costos de seguros contra choques de automóviles, una muestra aleatoria de 80 costos de reparación de carrocería para un tipo específico de daño tiene una media de \$472.36 y una desviación estándar de \$62.35. Si $\overline{x} = \$472.36$ se usa como una estimación puntual del verdadero costo de reparación promedio de este tipo de daño, ¿con qué confianza puede uno afirmar que el error no supera los \$10?

7.10 Si se quiere determinar la aptitud mecánica promedio de un grupo grande de trabajadores, ¿cuán grande deberá ser la muestra aleatoria para ser capaces de afirmar con probabilidad de 0.95 que la media de la muestra no diferirá de la media poblacional por más de 3.0 puntos? Suponga que, de experiencias pasadas, se sabe que $\sigma = 20.0$.

7.11 El rector de una universidad quiere usar la media de una muestra aleatoria para estimar la cantidad promedio de tiempo que tardan los estudiantes en ir de una clase a la siguiente, y quiere ser capaz de afirmar con 99% de confianza que el error es cuando mucho de 0.25 minutos. Si se puede suponer por experiencia que $\sigma = 1.40$ minutos, ¿cuán grande debe ser la muestra que se tome?

7.12 Un proceso novedoso para elaborar gasolina ecológica toma biomasa en la forma de sacarosa y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. En un paso en un proceso de la planta piloto, un ingeniero químico mide la salida de cadenas de carbono de longitud tres. Nueve corridas con el mismo catalizador dieron los rendimientos (gal)

0.63 2.64 1.85 1.68 1.09 1.67 0.73 1.04 0.68

¿Qué puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio?

7.13 Con referencia al ejercicio anterior, suponga que el rendimiento tiene una distribución normal y obtenga un intervalo de confianza del 95% para el verdadero rendimiento medio del proceso de la planta piloto.

7.14 Para monitorear procesos químicos avanzados, ingenieros químicos considerarán indicadores de proceso clave, que pueden ser tan solo la producción pero con más frecuencia dependen de varias cantidades. Antes de intentar mejorar un proceso, se realizan $n = 9$ mediciones sobre un indicador del desempeño clave

123 106 114 128 113 109 120 102 111

¿Qué puede afirmar el ingeniero con 95% de confianza acerca del error máximo, si utiliza la media muestral para estimar el verdadero valor medio del indicador de rendimiento?

7.15 Con referencia al ejercicio anterior, suponga que el indicador de desempeño clave tiene una distribución normal y obtenga un intervalo de confianza del 95% para el verdadero valor del indicador.

7.16 Consulte el ejercicio 2.34 de la página 36, que trata de los costos de material para reconstruir $n = 29$ motores de tracción. Un cálculo de computadora da como resultado $\overline{x} = 1.4707$ y $s = 0.5235$ miles de dólares. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para los costos medios del material para reconstruir un motor.

7.17 Consulte los datos de resistencia de madera 2×4 del ejercicio 2.58, página 38. De acuerdo con el resultado de la computadora, una muestra de $n = 30$ especímenes tiene $\overline{x} = 1908.8$ y $s = 327.1$. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la resistencia media poblacional.

7.18 Consulte los datos de la página 40, acerca del número de defectos por tablero para el producto B. Obtenga un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional del número de defectos por tablero.

7.19 Con referencia a las mediciones de grosor del ejercicio 2.41, página 37, obtenga un intervalo de confianza del 95% para el grosor medio.

7.20 Diez cojinetes elaborados mediante cierto proceso tienen un diámetro medio de 0.5060 cm y una desviación estándar de 0.0040 cm. Si supone que los datos pueden considerarse una muestra aleatoria de una población normal, construya un intervalo de confianza del 95% para el diámetro promedio real de los cojinetes elaborados mediante este proceso.

7.21 La frescura de los productos en una megatienda se clasifica en una escala de 1 a 5, donde 5 es muy fresco. A partir

de una muestra aleatoria de 36 clientes, la calificación promedio fue de 3.5 con una desviación estándar de 0.8.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional, μ, o la calificación media de todos los clientes.

b) ¿μ se encuentra en el intervalo que obtuvo en el inciso *a*)? Explique.

c) En series largas de experimentos repetidos, con nuevas muestras aleatorias recolectadas para cada experimento, ¿qué proporción de los intervalos de confianza resultantes contendrá la verdadera media poblacional? Explique su razonamiento.

7.22 Un negocio de fotocopiado registra que, en $n = 64$ casos, el cartucho de la máquina fotocopiadora dura un promedio de 18,300 copias, con una desviación estándar de 2,800 copias.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para μ, la media población del número de copias antes de necesitar un nuevo cartucho para la fotocopiadora.

b) ¿μ se encuentra en el intervalo que obtuvo en el inciso *a*)? Explique.

c) En series largas de experimentos repetidos, ¿qué proporción de los respectivos intervalos de confianza contiene la verdadera media? Explique su razonamiento.

7.23 Una muestra de presión máxima de 12 ensayos, con una apisonadora, dieron como resultado una media de 7.2 miles de libras por pulgada cuadrada y una desviación estándar de 1.2 miles de libras por pulgada cuadrada.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional de presión máxima μ.

b) ¿La media poblacional está contenida en el intervalo del inciso *a*)? Explique.

c) ¿Qué supuso usted acerca de la población en su respuesta al inciso *a*)?

d) ¿Por qué tiene 95% de confianza acerca del intervalo en el inciso *a*)?

7.24 En un estudio de contaminación del aire realizado en una estación experimental, se obtuvieron las siguientes cantidades de materia orgánica suspendida soluble en benceno (en microgramos por metro cúbico), para ocho diferentes muestras de aire:

2.2 1.8 3.1 2.0 2.4 2.0 2.1 1.2

Si supone que la población muestreada es normal, construya un intervalo de confianza del 95% para la media verdadera correspondiente.

7.25 Modifique la fórmula para E en la página 207, de modo que se aplique a muestras grandes que constituyan porciones sustanciales de poblaciones finitas, y use la fórmula resultante para los siguientes problemas:

a) Una muestra de 50 calificaciones en la prueba de admisión para una escuela de ingeniería se extrae al azar de las calificaciones de las 420 personas que realizaron el examen para la escuela en 2010. Si la media muestral y la desviación estándar son $\overline{x} = 546$ y $s = 85$, ¿qué puede afirmar con 95% de confianza acerca del error máximo, si $\overline{x} = 546$ se utiliza como una estimación de la calificación media de todos los solicitantes?

b) Una muestra aleatoria de 40 bidones de una sustancia química, extraída de entre 200 de tales bidones, cuyos pesos se espera que tengan la desviación estándar $\sigma = 12.2$ libras, tiene un peso medio de 240.8 libras. Si se estima que el peso medio de todos los 200 bidones es 240.8 libras, ¿qué se puede afirmar con 99% de confianza acerca del error máximo?

7.26 En vez de la fórmula del intervalo de confianza para μ en una muestra grande de la página 209, podría darse la fórmula alternativa

$$\overline{x} - z_{\alpha/3} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{2\alpha/3} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Explique por qué la de la página 209 es más estrecha y, por lo tanto, preferible, a la que se proporciona aquí.

7.27 Suponga que observa una variable aleatoria que tiene la distribución binomial. Sea X el número de éxitos en n ensayos.

a) Demuestre que $\frac{X}{n}$ es un estimador insesgado del parámetro binomial p.

b) Demuestre que $\frac{X+1}{n+2}$ no es un estimador insesgado del parámetro binomial p.

7.28 El programa estadístico *MINITAB* calculará el intervalo de confianza para μ en una muestra pequeña. Con los datos de altura de nanopilares en C1,

Cuadro de diálogo:
Calc > Stat > Basic Statistics > 1-Sample t
Escriba *C*1 en **variables**. Elija **confidence interval** y en **level**, ingrese 95.
Haga clic en **OK**.

produce la salida

	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI
C1	50	305.580	36.971	5.229	(295.073, 316.087)

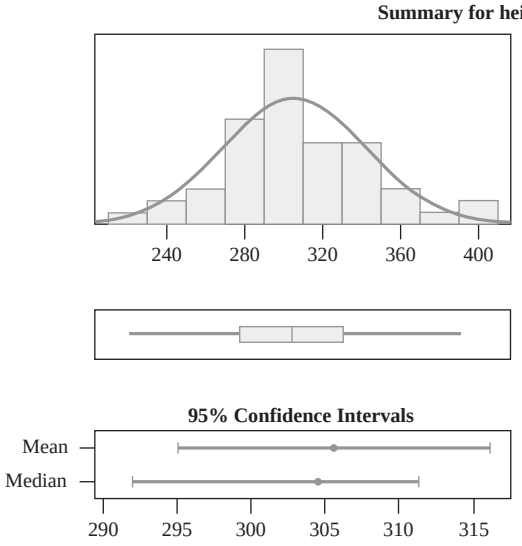
a) Obtenga un intervalo de confianza del 90% para μ.

b) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para μ con los datos de aleación de aluminio de la página 19.

De manera alternativa, se pueden usar los comandos *MINITAB*

Stat > Basic statistics > Graphical summary

para producir la salida más completa



Anderson-Darling Normality Test	
A-Squared	0.38
P-Value	0.398
Mean	305.58
StDev	36.97
Variance	1366.86
Skewness	0.260823
Kurtosis	0.202664
N	50
Minimum	221.00
1st Quartile	277.50
Median	304.50
3rd Quartile	330.75
Maximum	391.00
95% Confidence Interval for Mean	
295.07	316.09
95% Confidence Interval for Median	
292.00	311.33
95% Confidence Interval for StDev	
30.88	46.07

7.29 Se puede simular la cobertura de los intervalos de confianza para muestras pequeñas para μ al generar 20 muestras de tamaño 10 a partir de una distribución normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 5$, y calcular los intervalos de confianza del 95%, de acuerdo con la fórmula de la página 211. Al usar *MINITAB*:

Calc > Random Data > Normal
Escriba 10 en **Generate**, *C*1-*C*20 en **Store**, 20 en **Mean** y 5 en **standard deviation**. Haga clic en **OK**.

Stat > Basic Statistics > 1-sample t
Escriba *C*1-*C*20 en **Variables**. Haga clic en **OK**.

a) A partir de su salida, determine la proporción de los 20 intervalos que cubren la verdadera media $\mu = 20$.

b) Repita con 20 muestras de tamaño 5.

7.3 Estimación de máxima verosimilitud

En ocasiones es necesario estimar parámetros distintos de la media o la varianza. Un enfoque muy general a la estimación, propuesto por R. A. Fisher, se llama el método de máxima verosimilitud. Para fijar las ideas, comience con un caso especial. Suponga que una de dos distribuciones debe prevalecer. Por ejemplo, sea que X toma los valores posibles 0, 1, 2 o 3 con probabilidades especificadas por la distribución 1 o con probabilidades especificadas por la distribución 2 (véase la tabla 7.1 y la figura 7.3).

Tabla 7.1 Dos distribuciones posibles para *X*

Distribución 1					
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625
Distribución 2					
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

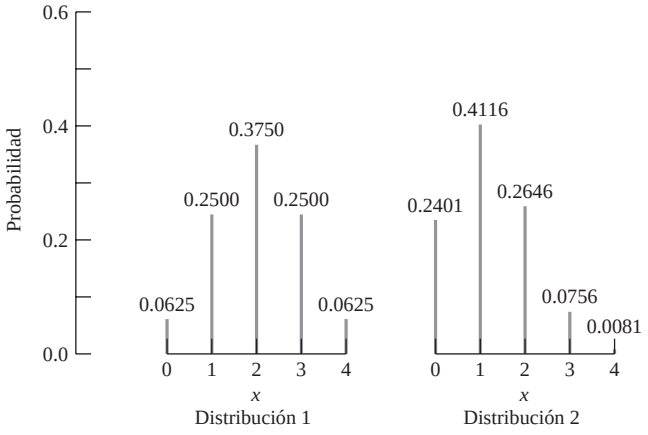


Figura 7.3
Las dos distribuciones posibles para X

La primera es la distribución binomial con $p = 0.5$ y la segunda la binomial con $p = 0.4$, pero este hecho no es importante para el argumento.

Si observa $X = 3$, ¿la estimación de la distribución subyacente debería ser la distribución 1 o la distribución 2? Suponga que se toma la postura de que se seleccionará la distribución para la cual el valor observado $x = 3$ tiene la mayor probabilidad de ocurrir. Puesto que este cálculo se hace después de obtener los datos, se emplea la terminología de máxima *verosimilitud* en vez de la probabilidad. Para la primera distribución, $P[X = 3] = 0.2500$, y para la segunda distribución, $P[X = 3] = 0.0756$, de modo que se estima que la primera distribución es la distribución que en realidad produce la observación 3.

Si, en lugar de ello, se observa $X = 1$, la estimación sería la distribución 2, ya que 0.4116 es mayor que 0.2500.

Lleve este ejemplo un paso adelante y suponga que X sigue una distribución binomial con $n = 4$, pero que $0 \leq p \leq 1$ es desconocida. Entonces, el conteo X tiene la distribución

$$\binom{n}{x} p^x (1 - p)^{4-x} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Si nuevamente se observa $X = 3$, evalúe la distribución binomial en $x = 3$ y obtenga

$$4p^3(1 - p)^{4-3} \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1$$

que es una función de p. Ahora varíe p para explicar mejor el resultado observado. Esta curva, $L(p)$, se ilustra en la figura 7.4.

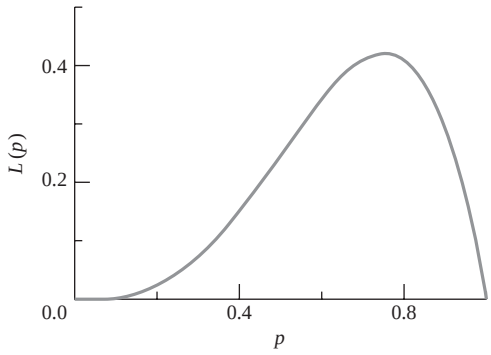


Figura 7.4
La curva de verosimilitud $L(p) = 4p^3(1 - p)$

Para obtener la mejor explicación para lo que se observó, elija un valor para la incógnita p en el que ocurra el máximo. Al emplear cálculo, el máximo ocurre en el valor de p para el cual la derivada es cero.

$$\frac{d}{dp} 4p^3(1 - p) = 4(3p^2 - 4p^3) = 0$$

Como la solución $p = 0$ produce un mínimo, la estimación es $\widehat{p} = 0.75$. Advierta que esta derivada es positiva para $p < 3/4$ y negativa para $p > 3/4$, confirmando así que $\widehat{p} = 0.75$ es el valor máximo global.

De forma más general, una muestra aleatoria de tamaño n se toma de una distribución, o densidad, de probabilidad, $f(x; \theta)$, que depende del parámetro θ. La muestra aleatoria produce n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que se sustituyen en la distribución de probabilidad conjunta, o función de densidad de probabilidad y, luego, se estudia la función resultante de θ.

La función de θ que se obtiene al sustituir los valores observados de la muestra aleatoria $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ en la distribución de probabilidad conjunta o la función de densidad para $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$L(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

se conoce como **función de verosimilitud** para θ.

Con frecuencia se simplifica la notación y se escribe $L(\theta)$ con el entendido de que la función de verosimilitud depende de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la muestra aleatoria.

Dados los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una muestra aleatoria, una característica distintiva de la función de verosimilitud es (son) el (los) valor(es) de θ donde logra su máximo.

> Un estadístico $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ es un **estimador de máxima verosimilitud** de θ si, para cada muestra $x_1, \ldots, x_n$, $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ es un valor para el parámetro que maximiza la función de verosimilitud $L(\theta \mid x_1, \ldots, x_n)$.

EJEMPLO **El estimador de máxima verosimilitud con ensayos de Bernoulli**

Considere una característica que ocurre en proporción p de una población. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de modo que

$$P[X_i = 0] = 1 - p \quad \text{y} \quad P[X_i = 1] = p \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n$$

donde $0 \leq p \leq 1$. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de p.

Solución La función de verosimilitud es

$$L(p|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Compruebe primero dos casos especiales. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, entonces $L(p) = (1-p)^n$ tiene el valor máximo 1 en $p = 0$. Aquí no desaparece la derivada. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$, entonces $L(p) = p^n$ tiene el valor máximo 1 en $p = 1$. De otro modo, $L(p)$ tiende a 0 conforme p tiende a 0 o 1, y el máximo debe ocurrir en un valor de p donde la derivada $L(p)$ es cero. De manera equivalente, maximice la función logarítmica de probabilidad $\ln L(p)$ sobre $0 < p < 1$. Al igualar la derivada parcial con cero,

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)\right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$$

se obtiene el estimador de máxima verosimilitud $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$. Esto es: $\hat{p}$ es la fracción de personas en la muestra que tienen la característica. Observe que esta definición del estimador también incluye los dos casos especiales $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ o $= 1$ aun cuando la derivada no desaparezca en estos casos. ■

EJEMPLO **Estimador de máxima verosimilitud: distribución de Poisson**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución de Poisson

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

donde $0 \leq \lambda < \infty$. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ.

Solución La función de verosimilitud es

$$L(\lambda|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, entonces $L(\lambda) = e^{-n\lambda}$ tiene su máximo en $\hat{\lambda} = 0$. De otro modo, se puede maximizar $\ln L(\lambda)$ al igualar su derivada con cero.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$$

de modo que el estimador de máxima verosimilitud es $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n = \bar{x}$. Esta misma fórmula funciona para el caso especial $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. ■

El método de máxima verosimilitud también se aplica a distribuciones continuas.

EJEMPLO **Estimador de máxima verosimilitud: para la media de la distribución normal**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal con varianza conocida. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de μ.

Solución Al escribir $(x_i - \mu)^2 = (x_i - \overline{X} + \overline{X} - \mu)^2$, la función de verosimilitud es

$$L(\mu|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}$$
$$= e^{-n(\overline{x}-\mu)^2/2\sigma^2} \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2/2\sigma^2}$$

Esta probabilidad se maximiza sobre todos los valores de μ cuando se minimiza el exponente $n(\overline{x}-\mu)^2/2\sigma^2$. Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud es $\widehat{\mu} = \overline{x}$. ■

EJEMPLO

Estimador de máxima verosimilitud: para la varianza de la distribución normal

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal con media conocida. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.

Solución La función de verosimilitud es

$$L(\sigma^2|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Recuerde que la función $z^b e^{-cz}$ tiene un máximo en $z = b/c$ para $z \geq 0$ cuando b y c son positivos. Al tomar $z = 1/\sigma^2$, $b = n/2$ y $c = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/2$, se obtiene el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/n$, cuando se conoce μ. ■

Suponga que, en el ejemplo anterior, está interesado en estimar σ en vez de σ^2. La probabilidad todavía es

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}$$

pero ahora se considera como función de σ. Al tomar logaritmos y diferenciar, se puede verificar que, para $d, c > 0$, $z^d e^{-cz^2}$ tiene un máximo en $z = \sqrt{d/2c}$ cuando $z > 0$. En consecuencia, al tomar $z = 1/\sigma$, $d = n$ y $c = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/2$, se obtiene el estimador de máxima verosimilitud

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}$$

Este mismo argumento puede extenderse a una propiedad de **invarianza** más general para estimadores de máxima verosimilitud, que se enuncia pero no se demuestra. Específicamente, si $g(\theta)$ es una función continua uno a uno de θ y $\widehat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ, el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$ se obtiene mediante sustitución simple.

$$\widehat{g(\theta)} = \text{estimador de máxima verosimilitud de } g(\theta) = g(\widehat{\theta})$$

EJEMPLO

Estimador de máxima verosimilitud de la función de λ

El número de discos duros defectuosos, fabricados diariamente por una línea de producción, puede modelarse como una distribución de Poisson. Los conteos para 10 días son

7 3 1 2 4 1 2 3 1 2

Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de 0 o 1 defectos en un día.

Solución Del ejemplo de la página 218, el estimador de máxima verosimilitud de λ es $\hat{\lambda} = \bar{x} = 26/10 = 2.6$. En consecuencia, mediante la propiedad de invarianza, el estimador de máxima verosimilitud de

$$P(X = 0 \quad \text{o} \quad 1) = e^{-\lambda} + \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$$

es

$$e^{-\hat{\lambda}} + \frac{\hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda}}}{1!} = e^{-2.6} + \frac{2.6 \cdot e^{-2.6}}{1!} = 0.267$$

Habrá 1 o menos defectuosos solo durante un cuarto de los días. ■

El método de máxima verosimilitud se aplica a más de un parámetro.

EJEMPLO **Estimador de máxima verosimilitud: distribuciones normales**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal. Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2. También determine el estimador de máxima verosimilitud de σ.

Solución Al usar la expresión en el ejemplo para la función de densidad de probabilidad conjunta (página 219), la función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_i - \mu)^2/2\sigma^2} \\ &= e^{-n(\bar{x} - \mu)^2/2\sigma^2} \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

Solo el primer término contiene μ, y se maximiza en $\hat{\mu} = \bar{x}$ cualquiera que sea el valor de σ^2. El máximo de este primer término es 1. Entonces, como en el ejemplo de la página 219, la función $z^b e^{-cz}$ tiene un máximo en $z = b/c$. Al tomar $z = 1/\sigma^2$, $b = n/2$ y $c = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/2$, se obtiene el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$. En resumen, $\hat{\mu} = \bar{x}$ y $\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$ son los estimadores de máxima verosimilitud de μ y $\widehat{\sigma^2}$.

Aquí $\widehat{\sigma^2}$ contiene el divisor n, no $n - 1$, de modo que es una estimación sesgada de σ^2.

Puesto que la desviación estándar de la muestra σ es la raíz cuadrada de σ^2, el estimador de máxima **verosimilitud** de σ es

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n}$$

En consecuencia, comúnmente se escribe $\hat{\sigma}^2$ para el estimador de máxima verosimilitud de σ^2. ■

EJEMPLO **Estimación de rendimiento para un proceso de gasolina ecológica**

Un proceso para elaborar gasolina ecológica toma biomasa en forma de sacarosa y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. En un paso de un proceso de una planta piloto, la salida incluye cadenas de carbono de longitud 3. Quince corridas con el mismo catalizador produjeron los rendimientos (gal)

5.57	5.76	4.18	4.64	7.02	6.62	6.33	7.24
5.57	7.89	4.67	7.24	6.43	5.59	5.39	

Al tratar los rendimientos como una muestra aleatoria de una población normal,

a) Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud del rendimiento medio y la varianza.
b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud del coeficiente de variación σ/μ.

Solución *a*) Calcule

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{5.57 + 5.76 + \cdots + 5.39}{15} = \frac{90.14}{15} = 6.009 \text{ gal}$$

Recuerde que el estimador de máxima verosimilitud de la varianza usa el divisor n, no $n - 1$.

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{15}(16.2631) = 1.084$$

b) El coeficiente de variación es una función de μ y σ^2, de modo que el estimador de máxima verosimilitud es la misma función de $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\sigma^2}$.

$$\widehat{\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)} = \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\mu}} = \frac{\sqrt{1.084}}{6.0109} = 0.173$$

■

Ejercicios

7.30 Consulte el ejemplo de la página 57, donde 294 de 300 aislantes cerámicos eran capaces de sobrevivir a un choque térmico.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un aislante cerámico sobrevivirá a un choque térmico.

b) Suponga que un dispositivo contiene 3 aislantes cerámicos y todos deben sobrevivir al choque, con la finalidad de que el dispositivo funcione. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que los tres sobrevivirán a un choque térmico.

7.31 Consulte el ejemplo de la página 284, donde 48 de 60 transceptores pasaron la inspección.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un transceptor pasará la inspección.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de que los siguientes dos transceptores probados pasarán la inspección.

7.32 El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan

2 5 3 3 7

desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ.

b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales.

7.33 En una área a lo largo de la interestatal, el número de fallas en conexiones telefónicas inalámbricas por llamada sigue una distribución de Poisson. Para cuatro llamadas, el número de fallas en conexiones es

2 0 3 1

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de que las siguientes dos llamadas se completarán sin fallas accidentales.

7.34 Consulte los ejercicios 7.12 y 7.13.

a) Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ y 7.13.

b) Encuentre la máxima verosimilitud de la probabilidad de que la siguiente corrida tendrá una producción mayor que 2 galones.

7.35 Consulte los ejercicios 7.14 y 7.15.

a) Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ.

b) Encuentre la máxima verosimilitud del coeficiente de variación σ/μ.

7.36 Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de p cuando

$$f(x; p) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad \text{para } x = 0, 1$$

7.37 Sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño n a partir de la distribución exponencial $f(x; \beta) = \beta^{-1}e^{-x/\beta}$ para $x > 0$.

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de β.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que la siguiente observación sea mayor que 1.

7.38 Sea que X tiene la distribución binomial negativa

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r} \quad \text{para } x = r, r+1, \ldots$$

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de p.

b) Para una aplicación de ingeniería, es mejor usar componentes con un acabado superior. Suponga que se inspeccionan $X = 27$ componentes idénticos, uno a la vez, antes de encontrar $r = 3$er componente con acabado superior. Determine el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un componente tendrá un acabado superior.

7.4 Pruebas de hipótesis

Hay muchos problemas en los cuales, en vez de estimar el valor de un parámetro, se debe decidir si un enunciado concerniente a un parámetro es verdadero o falso; esto es, hay que poner a prueba una hipótesis acerca de un parámetro. Por ejemplo, en el trabajo de control de calidad, una muestra aleatoria puede servir para determinar si la "media de proceso" (para un tipo dado de medición) permanece invariable o si cambió en tal medida que el proceso se salió de control y tienen que realizarse ajustes.

EJEMPLO

No todas las muestras conducirán a una valoración correcta de calidad del agua

Consulte el ejemplo de la página 178 de monitorización de la calidad del agua que sale de una planta. ¿Por qué evaluar una muestra de especímenes no siempre lleva a conclusiones correctas en cuanto a la calidad del agua?

Solución Los valores observados de la calidad del agua dependerán de los especímenes particulares en la muestra. Puesto que dichos valores pueden variar de una muestra a otra, muestras específicas pueden producir valores confusos y, por ende, decisiones incorrectas. La posibilidad de cometer un error acerca de la calidad del agua, sobre la base de los especímenes de prueba, no puede eliminarse por completo a menos que la descarga completa se logre medir con precisión durante todo el periodo del reporte. Desde luego, esto no es tecnológica ni económicamente factible. ■

Para ilustrar los conceptos generales implicados al decidir si un enunciado acerca de la población es o no verdadero o falso, suponga que una agencia de protección al consumidor quiere poner a prueba la afirmación de un fabricante de pinturas, de que el tiempo de secado promedio de su nueva pintura "de secado rápido" es de 20 minutos. La agencia instruye a un miembro de su personal de investigación para pintar cada uno de 35 tableros usando una lata diferente de 1 galón de la pintura, con la intención de rechazar la afirmación, si la media de los tiempos de secado supera los 20.75 minutos. De otro modo, aceptará la afirmación y, en cualquier caso, tomará las acciones contempladas en sus planes.

Esto ofrece un criterio más que claro para aceptar o rechazar la afirmación, pero por desgracia no es infalible. Dado que la decisión se basa en una muestra, existe la posibilidad de que la media de la muestra pueda superar los 20.75 minutos, aun cuando la verdadera media del tiempo de secado sea $\mu = 20$ minutos, y también existe la posibilidad de que la media de la muestra sea de 20.75 minutos o menos aun cuando la verdadera media del tiempo de secado sea, por decir, $\mu = 21$ minutos. Por consiguiente, antes de adoptar el criterio, parecería aconsejable investigar las posibilidades de que el criterio conduzca a una decisión equivocada.

Si se supone que de experiencia pasada se sabe que la desviación estándar de tales tiempos de secado puede esperarse que sea igual a $\sigma = 2.4$ minutos, primero investigue la posibilidad de que la media muestral exceda 20.75 minutos aun cuando la verdadera media del tiempo de secado sea $\mu = 20$. La probabilidad de que esto ocurrirá simplemente debido

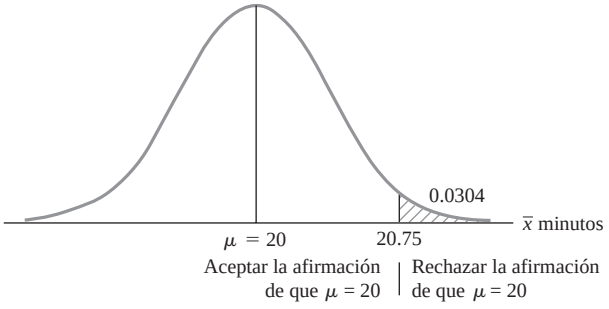


Figura 7.5
Probabilidad de rechazar falsamente la afirmación

al azar está dada por el área de la región rayada de la figura 7.5, y se determina con facilidad al aproximar la distribución muestral de la media con una curva normal. Si se supone que la población es lo suficientemente grande como para tratarse como infinita, se tiene $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{2.4}{\sqrt{36}} = 0.4$, y la línea divisoria del criterio en unidades estándar es

$$z = \frac{20.75 - 20}{0.4} = 1.875$$

De la tabla 3 se sigue que el área de la región rayada de la figura 7.5 es 1 – 0.9696 = 0.0304 (por interpolación). Por lo tanto, la probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis μ = 20 minutos es aproximadamente 0.03.

Ahora considere la otra posibilidad, donde el procedimiento falla para detectar que $\mu > 20$ minutos. Suponga nuevamente, por cuestiones del argumento, que la verdadera media de tiempo de secado es $\mu = 21$ minutos, de modo que la probabilidad de obtener una media muestral menor que o igual a 20.75 minutos (y, por ende, aceptar erróneamente la afirmación de que $\mu = 20$ minutos) está dada por el área de la región rayada de la figura 7.6. Como antes, $\sigma_{\overline{X}} = 0.4$, de modo que la línea divisoria del criterio, en unidades estándar, ahora es

$$z = \frac{20.75 - 21}{0.4} = -0.625$$

Se sigue de la tabla 3 que el área de la región rayada de la figura 7.6 es 0.2660 (por interpolación) y, en consecuencia, la probabilidad de aceptar erróneamente, o fallar en rechazar, la hipótesis $\mu = 20$ es de aproximadamente 0.27.

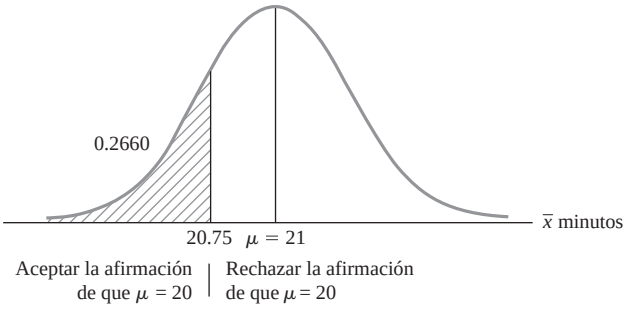


Figura 7.6
Probabilidad de fallar en rechazar la afirmación

La situación descrita en este ejemplo es típica de las pruebas de una hipótesis estadística, y puede resumirse en la siguiente tabla, donde a la hipótesis a probar se le conoce como hipótesis H:

	Aceptar H	*Rechazar H*
H es verdadera	Decisión correcta	Error tipo I
H es falsa	Error tipo II	Decisión correcta

Si la hipótesis H es verdadera y no se rechaza, o es falsa y se rechaza, la decisión en cualquier caso es correcta. Si la hipótesis H es verdadera pero se rechaza, se rechaza con error, y si la hipótesis H es falsa pero no se rechaza, también es un error. El primero de estos errores se llama **error tipo I**. La probabilidad de cometerlo, cuando la hipótesis es verdadera, se designa mediante la letra griega α (alfa). El segundo error se llama **error tipo II** y la probabilidad de cometerlo se designa con la letra griega β (beta). Por ende, en el ejemplo se demostró que, para el criterio de prueba dado, $\alpha = 0.03$ cuando $\mu = 20$ minutos y $\beta = 0.27$ cuando $\mu = 21$ minutos.

Para calcular la probabilidad de un error de tipo II en el ejemplo, arbitrariamente se elige el valor alternativo $\mu = 21$ minutos. Sin embargo, en este problema, como en la

mayoría de los demás, hay muchas otras alternativas infinitas, y para cada una de ellas existe una probabilidad positiva β de aceptar erróneamente la hipótesis H. Qué hacer acerca de esto se estudiará más adelante, en la sección 7.8.

7.5 Hipótesis nulas y pruebas de hipótesis

En el ejemplo de tiempo de secado de la sección precedente, es posible calcular la probabilidad de un error de tipo I porque la hipótesis H se formuló como un solo valor para el parámetro μ; esto es, la hipótesis H se formuló de modo que μ estuviera completamente especificada. De haber formulado $\mu \leq 20$ minutos, donde μ puede tomar más de un valor posible, no se habría podido calcular la probabilidad de un error tipo I sin especificar en cuánto μ es menor que 20 minutos.

A menudo, las hipótesis se formulan para probarse como un solo valor para un parámetro; al menos, esto se hace siempre que sea posible. Por lo general, ello requiere que se haga una hipótesis de lo opuesto de aquello que se espera probar. Por ejemplo, si quiere demostrar que un método de enseñanza de programación en cómputo es más eficiente que otro, se hace la hipótesis de que los dos métodos son igualmente efectivos. Asimismo, si se quiere demostrar que un método de irrigación del suelo es más costoso que otro, se hace la hipótesis de que los dos métodos son igualmente costosos; y si quiere demostrar que un nuevo acero con cobre tiene un mayor límite elástico que el acero ordinario, se hace la hipótesis de que los dos límites elásticos son iguales. Puesto que se hace la hipótesis de que no hay diferencia en la efectividad de los dos métodos de enseñanza, no hay diferencia en el costo de los dos métodos de irrigación y no hay diferencia en el límite elástico de los dos tipos de acero, a estas hipótesis se les llama **hipótesis nula** y se les denota como H_0. En la actualidad, el término *hipótesis nula* se usa para cualquier hipótesis que se establece principalmente para saber si puede rechazarse.

La idea de establecer una hipótesis nula no es rara, incluso en el pensamiento no estadístico. De hecho, esto es exactamente lo que se hace en un tribunal estadounidense, donde una persona acusada se supone inocente a menos que se demuestre su culpabilidad "más allá de una duda razonable". La hipótesis nula afirma que el acusado no es culpable, y la probabilidad expresada subjetivamente con la frase "más allá de una duda razonable" refleja la probabilidad α de arriesgar un error de tipo I. Note que la "carga de la prueba" siempre está en la parte acusadora, en el sentido de que el acusado no se encuentre culpable a menos que la hipótesis nula de inocencia se desapruebe con claridad. Esto no implica que el inculpado se pruebe inocente si no se encuentra culpable; solo implica que no se probó que es culpable. Desde luego, puesto que legalmente no se puede "juzgar en reserva" si no se establece la prueba de culpabilidad, el acusado se libera y se actúa como si se aceptara la hipótesis nula de inocencia. Advierta que esto es precisamente lo que se tiene que hacer en las pruebas de las hipótesis estadísticas, cuando no se puede costear el lujo de reservar un juicio.

Los procedimientos para las pruebas de las hipótesis se desarrollarán en el contexto del ejemplo de tiempo de secado. Cuando la meta es rechazar la afirmación de "secado rápido", la hipótesis alternativa debería ser $\mu > 20$ minutos.

Para tratar sistemáticamente los problemas de pruebas de hipótesis, será útil proceder como se bosqueja en los siguientes cinco pasos.

1. **Formule una hipótesis nula y una hipótesis alternativa adecuada que se acepte cuando deba rechazarse la hipótesis nula.**[1]

[1]Véase también el análisis en la página 227.

En el ejemplo de tiempo de secado, la hipótesis nula es $\mu = 20$ minutos y la hipótesis alternativa es $\mu > 20$ minutos. Este tipo de alternativa, que se conoce como **alternativa unilateral**, también puede hacer que la desigualdad vaya hacia otro lado. Por ejemplo, si espera demostrar que el tiempo promedio requerido para realizar cierta tarea es menor de 15 minutos, se probaría la hipótesis nula $\mu = 15$ contra la hipótesis alternativa $\mu < 15$.

El siguiente es un ejemplo donde se usaría la **alternativa bilateral** $\mu \neq \mu_0$, donde μ_0 es el valor supuesto con la hipótesis nula: un procesador de alimentos quiere comprobar si la cantidad promedio de café que entra en sus frascos de 4 onzas es, de hecho, de 4 onzas. Dado que el procesador de alimentos no puede arriesgarse a colocar mucho menos que 4 onzas en cada frasco por temor a perder la aceptación de los clientes, ni puede costear poner mucho más que 4 onzas en cada frasco por temor de perder parte de su ganancia, la hipótesis alternativa adecuada es $\mu \neq 4$.

Como en los ejemplos de los dos párrafos anteriores, la **hipótesis alternativa** por lo general especifica que la media poblacional (o cualquier otro parámetro que resulte de interés) es o no igual a, mayor que o menor que el valor supuesto con la hipótesis nula. Para cualquier problema dado, la elección de una alternativa apropiada depende sobre todo de qué se espera poder demostrar o, mejor aún, dónde se quiere poner la carga de la prueba.

EJEMPLO **Formulación de la hipótesis alternativa**

Un fabricante de electrodomésticos considera la compra de una nueva máquina para apisonar piezas de hoja metálica. Si μ_0 es el número promedio de piezas buenas apisonadas por hora por su máquina antigua y μ es el promedio correspondiente de la nueva máquina, el fabricante quiere probar la hipótesis nula $\mu = \mu_0$ contra una alternativa adecuada. ¿Cuál debería ser la alternativa si no quiere comprar la nueva máquina a menos que sea más productiva que la anterior?

Solución El fabricante debería usar la hipótesis alternativa $\mu > \mu_0$ y comprar la nueva máquina solo si puede rechazar la hipótesis nula. ■

Al formular la hipótesis nula y una hipótesis alternativa, se procede con el paso siguiente:

2. **Especifique la probabilidad de un error de tipo I. Si es posible, deseable o necesario, también puede especificar las probabilidades de los errores de tipo II para alternativas particulares.**

La probabilidad de un error de tipo I también se llama **nivel de significancia** y, por lo general, se establece como $\alpha = 0.05$ o $\alpha = 0.01$. Qué valor se elija en algún problema dado tendrá que depender de los riesgos, o las consecuencias, por cometer un error de tipo I. Sin embargo, observe que no debería hacer muy pequeña la probabilidad de un error tipo I, porque ello tendrá la tendencia de hacer muy grandes la posibilidades de errores serios tipo II.

El paso 2 a menudo se puede realizar aun cuando la hipótesis nula especifique un rango de valores para el parámetro. Para ilustrar, investigue brevemente lo que puede hacerse en el ejemplo de tiempo de secado, si se quiere permitir la posibilidad de que la pintura sea mejor (de secado más rápido) que lo afirmado y, por lo tanto, poner a prueba la hipótesis nula $\mu \leq 20$ minutos contra la hipótesis alternativa $\mu > 20$ minutos. Observe que si μ es menor que 20 minutos, la curva normal de la figura 7.5 en la página 222 se corre hacia la izquierda, y el área bajo la curva a la derecha de 20.75 se vuelve menor que 0.0304. Por ende, si la hipótesis nula es $\mu \leq 20$ minutos, se puede decir que la probabilidad de un error tipo I es cuando mucho 0.0304, y se escribe $\alpha \leq 0.0304$. En general, si la hipótesis nula

es de la forma $\mu \leq \mu_0$ o $\mu \geq \mu_0$, solo puede especificarse la máxima probabilidad de un error tipo I, y al realizar la prueba como si la hipótesis nula fuera $\mu = \mu_0$, se protege contra la peor posibilidad. (Véase el ejemplo de la página 232.)

Después de especificar la hipótesis nula, la hipótesis alternativa y el nivel de significancia, los pasos restantes son los siguientes:

3. **Con base en la distribución muestral de un estadístico adecuado, se construye un criterio para poner a prueba la hipótesis nula contra la alternativa dada.**
4. **A partir de los datos, calcule el valor del estadístico sobre el cual se debe basar la decisión.**
5. **Decida si hay que rechazar la hipótesis nula o fallar en rechazarla.**

En el ejemplo de tiempo de secado se estudió el criterio usando la aproximación de curva normal a la distribución muestral de la media. En general, el paso 3 depende no solo del estadístico sobre el cual se quiere basar la decisión y sobre su distribución muestral, sino también sobre la hipótesis alternativa que se eligió. En el ejemplo de tiempo de secado se empleó un **criterio unilateral** (**prueba unilateral** o **prueba de una cola**) con la alternativa unilateral $\mu > 20$ minutos, y la hipótesis nula se rechaza únicamente para valores grandes de la media muestral. En el ejemplo que trata con el procesador de alimentos y sus frascos de 4 onzas de café, se usaría un **criterio bilateral** (**prueba bilateral** o **prueba de dos colas**) para ir con la alternativa bilateral $\mu \neq 4$ onzas. En general, se dice que una prueba es bilateral si la hipótesis nula se rechaza para valores del estadístico de prueba que cae en alguna cola de su distribución muestral.

El propósito del análisis en esta sección y la anterior fue introducir algunos de los problemas básicos vinculados con las pruebas de las hipótesis estadísticas. Aunque los métodos presentados son objetivos (esto es: dos experimentadores que analicen los mismos datos con las mismas condiciones llegarían a resultados idénticos) su uso comprende ciertas consideraciones arbitrarias, o subjetivas. En el ejemplo de la página 222 fue una decisión parcialmente subjetiva dibujar la línea entre valores satisfactorios e insatisfactorios de μ en 21 minutos. También es una decisión parcialmente subjetiva utilizar una muestra de 36 latas de pinturas de un galón, y rechazar la afirmación del fabricante para valores de $\overline{X}$ que superan 20.75 minutos. Al tratar el problema de manera diferente, la agencia gubernamental que investiga la afirmación del fabricante de pintura podría especificar valores de α y β y, por lo tanto, controlar los riesgos a los cuales están deseosos exponerse. La elección de α, la probabilidad de un error tipo I, podría basarse en las consecuencias de cometer este tipo de error; a saber, el costo del fabricante de que se condene un producto bueno, los posibles costos de los litigios posteriores, el costo del fabricante de ajustar de manera innecesaria su maquinaria, el costo al público por no tener el producto disponible cuando se necesita, etcétera. La elección de β, la probabilidad de un error tipo II, podría basarse igualmente en las consecuencias de cometer dicho error. Es decir, el costo al público de comprar un producto inferior, los ahorros del fabricante en el uso de ingredientes inferiores pero la pérdida en buena voluntad, nuevamente el costo de posibles litigios, etcétera. Debería ser evidente que sería extremadamente difícil poner valores en efectivo sobre todas esas eventualidades, pero no obstante deben considerarse, al menos de forma indirecta, en la elección de criterios adecuados para poner a prueba las hipótesis estadísticas.

En este texto se discutirá principalmente la **teoría de Neyman-Pearson**, también llamada **teoría clásica de prueba de hipótesis**. Esto significa que se considerarán factores de costo y otras consideraciones que son parcialmente arbitrarias y parcialmente subjetivas solo en el grado en que afectarán la elección de un tamaño de muestra, la elección de una hipótesis alternativa, la elección de α y β, etcétera.

En este enfoque, el valor máximo de α está controlado sobre la hipótesis nula. Por ejemplo, si la hipótesis nula es $\mu \leq \mu_0$, entonces, tanto μ como σ no están especificadas. Esta es una **hipótesis compuesta**. De otro modo, si todos los parámetros están completamente especificados, la hipótesis es **simple**. Incluso con una hipótesis nula compuesta, se establece la región crítica, de modo que la probabilidad de error es α sobre la frontera $\mu = \mu_0$. Entonces, las probabilidades de error serán incluso menores con valores de μ que sean menores que μ_0.

Puesto que la probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula está controlada, se conserva la hipótesis nula a menos que las observaciones la contradigan firmemente. En consecuencia, si la meta de un experimento consiste en establecer una afirmación o una hipótesis, dicha hipótesis debe tomarse como la hipótesis alternativa.

Lineamiento para seleccionar la hipótesis nula

Cuando la meta de un experimento sea establecer una afirmación, la negación de la afirmación debería tomarse como la hipótesis nula. La afirmación se convierte en la hipótesis alternativa.

Un razonamiento similar sugiere que, aun cuando los costos sean difíciles de determinar, aunque las consecuencias de un error sean mucho más serias que para el otro, la hipótesis debe marcarse de modo que el error más serio sea el error tipo I.

Con frecuencia, la hipótesis alternativa se denota H_1. En el ejemplo de secado de pintura, $H_1 : \mu > 20$. Al recordar la notación H_0 para la hipótesis nula, se resumen los conceptos y la notación para hipótesis, tipos de error y la probabilidad de error.

Notación para las hipótesis

H_1: la **hipótesis alternativa** es la afirmación que se quiere establecer.
H_0: la **hipótesis nula** es la negación de la afirmación.

Los dos tipos de error y sus probabilidades son

Los errores y sus probabilidades

Error tipo I: rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera.
Error tipo II: no rechazar H_0 cuando H_1 es verdadera.
α = probabilidad de cometer un error tipo I (también llamado **nivel de significancia**)
β = probabilidad de cometer un error tipo II.

Es importante entender que las pruebas de las hipótesis se estructuran para controlar la probabilidad, α, de rechazar falsamente la hipótesis nula. Para interpretar lo anterior, suponga que la hipótesis nula prevalece y la prueba se repite muchas veces con conjuntos de datos independientes. Cuando $\alpha = 0.05$, la ley de los grandes números indica que

$$\frac{\text{número de veces que se rechaza falsamente la hipótesis nula}}{\text{número de veces que se realiza una prueba}} \to \alpha$$

Desde luego, esta es la interpretación de frecuencia a largo plazo de la probabilidad. A largo plazo, solo 1 en 20 veces la hipótesis nula se rechazará falsamente.

Antes de discutir varias pruebas especiales acerca de las medias en el resto de este capítulo, se puntualiza que los conceptos introducidos aquí se aplican igualmente a hipótesis concernientes a las proporciones, las desviaciones estándar, la aleatoriedad de las muestras y las relaciones entre diversas variables.

Ejercicios

7.39 Un fabricante de computadoras quiere establecer que el tiempo promedio para ensamblar una nueva computadora de escritorio es menor que 2 horas.

a) Formule las hipótesis nula y alternativa.

b) ¿Qué error se podría cometer si $\mu = 1.9$? Explique en el contexto del problema.

c) ¿Qué error se podría cometer si $\mu = 2.0$? Explique en el contexto del problema.

7.40 Un fabricante de embragues para automóvil de cuatro velocidades afirma que el embrague no fallará, sino hasta después de 50,000 millas.

a) Al interpretar esto como un enunciado acerca de la media, formule una hipótesis nula y una alternativa para verificar la afirmación.

b) Si la verdadera media es 55,000 millas, ¿qué error se puede cometer? Explique su respuesta en el contexto del problema.

c) ¿Qué error se podría cometer si la verdadera media es 50,000 millas?

7.41 Una aerolínea afirma que el tiempo de vuelo típico entre dos ciudades es de 56 minutos.

a) Formule una prueba de hipótesis con la intención de establecer que la media poblacional del tiempo de vuelo es diferente del tiempo publicado de 56 minutos.

b) Si la verdadera media es de 50 minutos, ¿qué error se puede cometer? Explique su respuesta en el contexto del problema.

c) ¿Qué error se podría cometer si la verdadera media es de 56 minutos?

7.42 Una compañía quiere establecer que la vida media de sus baterías, cuando se usan en un ratón (mouse) inalámbrico, es de más de 183 días. Los datos consistirán en las duraciones de las baterías en 64 diferentes ratones inalámbricos.

a) Formule las hipótesis nula y alternativa.

b) Si la media verdadera es de 190 días, ¿qué error puede cometerse? Explique su respuesta en el contexto del problema.

7.43 Una prueba estadística de hipótesis incluye el paso de establecer un máximo para la probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula. Ingenieros realizan varias mediciones acerca de componentes cruciales de un puente para decidir si este es seguro o inseguro.

a) Explique cómo formularía la hipótesis nula.

b) ¿Preferiría $\alpha = 0.05$ o $\alpha = 0.01$? Explique su razonamiento.

7.44 Suponga que usted tiene planeado abordar un vehículo espacial que orbitará la Tierra y regresará. Una prueba estadística de hipótesis incluye el paso de establecer un máximo para la probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula. Ingenieros necesitan realizar varias mediciones para decidir si es seguro o inseguro lanzar el vehículo.

a) Explique cómo formularía la hipótesis nula.

b) ¿Preferiría $\alpha = 0.05$ o $\alpha = 0.01$? Explique su razonamiento.

7.45 Suponga que a una firma de ingeniería se le pide comprobar la seguridad de una represa. ¿Qué tipo de error cometería si rechaza erróneamente la hipótesis nula de que la represa es segura? ¿Qué tipo de error cometería si acepta erróneamente la hipótesis nula de que la represa es segura? ¿Cuál sería el impacto probable de dichos errores?

7.46 Suponga que usted quiere probar la hipótesis nula de que un dispositivo anticontaminante para automóvil es efectivo. Explique en qué condiciones cometería un error de tipo 1 y en qué condiciones cometería un error de tipo II.

7.47 Si el criterio de la página 222 se modifica de modo que la afirmación del fabricante de pinturas se rechaza para $\overline{X} > 20.50$ minutos, encuentre

a) la probabilidad de un error tipo I;

b) la probabilidad de un error tipo II cuando $\mu = 21$ minutos.

7.48 Suponga que en el ejemplo de tiempo de secado de la página 222, n cambia de 36 a 50 mientras todo lo demás permanece igual. Determine

a) la probabilidad de un error tipo I;

b) la probabilidad de un error tipo II cuando $\mu = 21$ minutos.

7.49 Es deseable probar la hipótesis nula $\mu = 100$ libras contra la hipótesis alternativa $\mu < 100$ libras, sobre la base de los pesos de una muestra aleatoria de tamaño $n = 40$ paquetes fleteados por camión. La población tiene $\sigma = 12$ libras. ¿Para qué valores de $\overline{X}$ debe rechazarse la hipótesis nula, si la probabilidad de un error tipo I es $\alpha = 0.01$?

7.50 Varias pulgadas cuadradas de hoja de oro se requieren en la fabricación de un componente de última generación. Suponga que la población de la cantidad de hoja de oro tiene $\sigma = 8.4$ pulgada cuadradas. Se quiere probar la hipótesis nula $\mu = 80.0$ pulgadas cuadradas contra la hipótesis alternativa $\mu < 80.0$ pulgadas cuadradas sobre la base de una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$.

a) Si la hipótesis nula se rechaza para $\overline{X} < 78.0$ pulgadas cuadradas y de otro modo se acepta, ¿cuál es la probabilidad del error tipo I?

b) ¿Cuál es la respuesta al inciso *a*), si la hipótesis nula es $\mu \geq 80.0$ pulgadas cuadradas en vez de $\mu = 80.0$ pulgadas cuadradas?

7.51 Un fabricante de productos de plástico extruido descubre que su inventario diario medio es de 1,250 piezas. Una nueva política de marketing entra en vigor y es deseable probar la hipótesis nula de que el inventario diario medio todavía es el mismo. ¿Qué hipótesis alternativa debería usarse si

a) se desea conocer si la nueva política cambia o no el inventario diario medio;

b) es deseable demostrar que la nueva política realmente reduce el inventario diario medio;

c) la nueva política debe conservarse en tanto no pueda demostrarse que en realidad aumenta el inventario diario medio?

7.52 Especifique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa en cada uno de los casos siguientes.

a) Un fabricante de automóviles quiere confirmar la afirmación de un proveedor de que la resistencia máxima en un haz de cables es menor que 50 ohms.

b) Un investigador quiere establecer la afirmación del departamento de investigación de que un nuevo balastro aumentará la vida media de la bombilla eléctrica a más de 5,000 horas.

7.6 Hipótesis concernientes a una media

Luego de usar las pruebas concernientes a la media para ilustrar los principios básicos de las pruebas de hipótesis, ahora se verá cómo proceder en la práctica real. Suponga, por ejemplo, que quiere establecer que la conductividad térmica de cierto tipo de ladrillo de cemento difiere de 0.340, el valor afirmado. Se probará sobre la base de $n = 35$ determinaciones y a un nivel de significancia de 0.05. A partir de la información recopilada en estudios similares, podría esperarse que la variabilidad de tales determinaciones está dada por $\sigma = 0.010$.

Al continuar con el bosquejo de la sección anterior, comience con los pasos 1 y 2 al escribir

1. *Hipótesis nula*: $\mu = 0.340$
   Hipótesis alternativa: $\mu \neq 0.340$
2. *Nivel significancia*: $\alpha = 0.05$

La hipótesis alternativa es bilateral porque se quiere rechazar la hipótesis nula, si la media de las determinaciones es significativamente menor que o significativamente mayor que 0.340.

A continuación, en el paso 3, se parte del procedimiento utilizado en el ejemplo de la sección anterior y la prueba se basa en el estadístico estandarizado

Estadístico para prueba concerniente a una media con σ conocida

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

en vez de $\overline{X}$. La razón para trabajar con unidades estándares, o valores Z, es que permite formular criterios que son aplicables a una gran variedad de problemas, no solo a uno.

Si z_α es, como antes, tal que el área bajo la curva normal estándar a su derecha es igual a α, las **regiones críticas**, a saber, los conjuntos de valores de Z para los cuales se rechaza la hipótesis nula $\mu = \mu_0$, pueden expresarse como en la siguiente tabla:

Regiones críticas para probar $\mu = \mu_0$ (población normal y σ conocida)	
Hipótesis alternativa	**Rechazar hipótesis nula si:**
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ o bien, $Z > z_{\alpha/2}$

Si $\alpha = 0.05$, las líneas divisoras, o **valores críticos**, de los criterios son –1.645 y 1.645 para las alternativas unilaterales, y –1.96 y 1.96 para la alternativa bilateral. Si $\alpha = 0.01$, las líneas divisoras de los criterios son –2.33 y 2.33 para las alternativas unilaterales, y –2.575 y 2.575 para la alternativa bilateral. Dichos resultados provienen del ejemplo en la página 128 y el ejercicio 5.23.

Ahora regrese al ejemplo que trata con la conductividad térmica de los ladrillos de cemento, y suponga que la media de las 35 determinaciones es 0.343. De este modo, siga escribiendo

3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z < -1.96$ o $Z > 1.96$, donde

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

4. *Cálculos:*

$$Z = \frac{0.343 - 0.340}{0.010/\sqrt{35}} = 1.77$$

5. *Decisión:* puesto que $Z = 1.77$ cae en el intervalo de –1.96 a 1.96, la hipótesis nula no puede rechazarse; para ponerlo de otro modo: la diferencia entre $\overline{x} = 0.343$ y $\mu = 0.340$ puede atribuirse al cambio. En realidad, nunca se establece que se sostiene la hipótesis nula. En vez de ello, la conclusión es que se falla para rechazar la hipótesis nula.

En problemas como este, muchos investigadores acompañan el valor calculado de Z con una **probabilidad de cola** correspondiente, o **valor *P***, que es la probabilidad de obtener una diferencia entre $\overline{x}$ y μ_0 mayor que o igual a la realmente observada. Por ejemplo, en el caso anterior, está dada por el área total bajo la curva normal estándar a la izquierda de –1.77 y a la derecha de 1.77, y es igual a $2(1 - 0.9616) = 0.0768$. Este valor P supera 0.05, lo que concuerda con el resultado anterior. La figura 7.7 muestra la región de rechazo, el valor de Z y las dos áreas de cola.

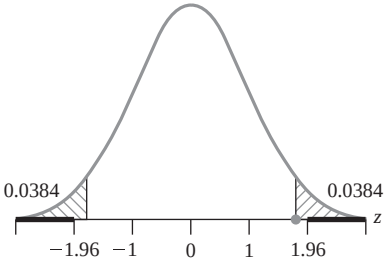


Figura 7.7
Valor $P = 0.0384 + 0.0384 = 0.0768$ cuando $Z = 1.77$

EJEMPLO **Cálculo del valor *P***

Un proceso para fabricar piso de vinilo ha sido estable durante un periodo de tiempo largo, y la medición de dureza superficial del piso fabricado tiene una distribución normal con media de 4.5 y desviación estándar $\sigma = 1.5$. Se contrata y capacita un segundo turno, además de que su producción necesita monitorearse. Considere probar la hipótesis $H_0: \mu = 4.5$ frente a $H_1: \mu \neq 4.5$. Una muestra aleatoria de mediciones de dureza se realiza en $n = 25$ especímenes de vinilo fabricados por el segundo turno. Calcule el valor P cuando se usa el estadístico de prueba

$$Z = \frac{\overline{X} - 4.5}{1.5/\sqrt{25}}$$

si $\overline{X} = 3.9$.

Solución El valor observado del estadístico de prueba es

$$z = \frac{3.9 - 4.5}{1.5/\sqrt{25}} = -2.00$$

Puesto que la hipótesis alternativa es bilateral, deben considerarse valores negativos grandes para Z, así como valores positivos grandes (véase la figura 7.8).

A partir de la tabla normal, $P(Z > 2.00) = 0.0228$. La probabilidad de que Z sea menor que –2.00 también es 0.0228. Por consiguiente, el valor P es 0.0228 + 0.0228 = 0.0456. Esta es la probabilidad, con la hipótesis nula, de obtener el mismo valor, o uno más extremo, que el observado del estadístico de prueba. El valor P pequeño sugiere que la media del segundo turno no está en el valor objetivo de 4.5. ■

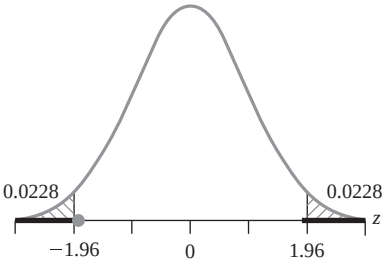


Figura 7.8
El valor $P = 0.0228 + 0.0228 = 0.0456$ para $Z = -2.00$

El valor P puede definirse para cualquier estadístico de prueba en cualquier problema de prueba de hipótesis.

Valor *P* para un estadístico de prueba dado e hipótesis nula

El **valor *P*** es la probabilidad de obtener un valor para el estadístico de prueba que sea tan extremo o más extremo que el valor realmente observado.

La probabilidad se calcula con la hipótesis nula.

Si la hipótesis alternativa se carga a la derecha, por ejemplo, $H_1: \mu > \mu_o$, entonces tan solo los valores mayores que el valor observado son más extremos. Si la hipótesis alternativa se carga a la izquierda, únicamente los valores menores que el valor observado son más extremos. Para alternativas bilaterales, deben considerarse los valores en ambas colas, como en el ejemplo anterior.

Observe que brindar una probabilidad de cola no lo libera de la responsabilidad de especificar el nivel de significancia antes de efectuar la prueba realmente.

La prueba descrita en esta sección es en esencia una prueba aproximada de muestra grande; solo es exacta cuando la población que se muestrea es normal y se conoce σ. En

muchas situaciones prácticas donde σ se desconoce, pero el tamaño de la muestra es grande, se debe realizar la aproximación de sustituir la desviación estándar muestral S.

Estadístico para prueba de muestra grande concerniente a la media

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Regiones críticas para probar $\mu = \mu_0$ (muestra grande)	
Hipótesis alternativa	**Rechazar hipótesis nula si:**
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ o bien, $Z > z_{\alpha/2}$

EJEMPLO **Una prueba de muestra grande para vida media de un neumático**

Una empresa de camiones sospecha de la afirmación de que la vida promedio de ciertos neumáticos es de al menos 28,000 millas. Para comprobar la afirmación, la firma pone 40 de dichos neumáticos en sus camiones y obtiene una vida media de 27,463 millas, con una desviación estándar de 1,348 millas. ¿Qué se puede concluir si la probabilidad de un error tipo I debe ser cuando mucho de 0.01?

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu \geq 28{,}000$ millas
   Hipótesis alternativa: $\mu < 28{,}000$ millas
2. *Nivel de significancia:* $\alpha \leq 0.01$
3. *Criterio:* puesto que la probabilidad de un error tipo I es mayor cuando $\mu = 28{,}000$ millas, se procede como si se probara la hipótesis nula $\mu = 28{,}000$ millas contra la hipótesis alternativa $\mu < 28{,}000$ millas al nivel de significancia de 0.01. Por ende, la hipótesis nula debe rechazarse si $Z < -2.33$, donde
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$
4. *Cálculos:*
$$Z = \frac{27{,}463 - 28{,}000}{1{,}348/\sqrt{40}} = -2.52$$
5. *Decisión:* dado que $Z = -2.52$ es menor que -2.33, la hipótesis nula debe rechazarse al nivel de significancia de 0.01. En otras palabras, se confirma la sospecha de la empresa de camiones de que $\mu < 28{,}000$ millas.

   El pequeño valor P de 0.0059, como se ilustra en la figura 7.9, refuerza la conclusión. ■

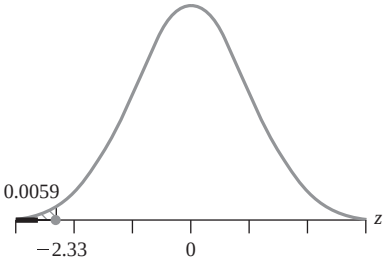


Figura 7.9
El valor $P = 0.0059$ para $Z = -2.52$

Si el tamaño de la muestra es pequeño y se desconoce σ, las pruebas recién descritas no pueden usarse. Sin embargo, si la muestra proviene de una población normal (hasta dentro de un grado razonable de aproximación), se usa la teoría estudiada en la sección 6.3 y la prueba de la hipótesis nula $\mu = \mu_0$ se basa en el estadístico

Estadístico para prueba de muestra pequeña concerniente a la media (población normal)

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

que es una variable aleatoria que tiene la distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Los criterios para la **prueba *t* de una muestra** son como los de Z pero se basan en la distribución t.

Regiones críticas para probar $\mu = \mu_0$ (población normal y σ desconocida), prueba t de una muestra	
Hipótesis alternativa	**Rechazar hipótesis nula si:**
$\mu < \mu_0$	$t < -t_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$t > t_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ o bien, $t > t_{\alpha/2}$

donde t_α y $t_{\alpha/2}$ se basan en $n - 1$ grados de libertad.

EJEMPLO **Una prueba *t* de una media de población normal**

Las especificaciones para cierto tipo de listón requieren una resistencia a la rotura media de 180 libras. Si cinco piezas del listón (seleccionadas aleatoriamente de diferentes rollos) tienen una resistencia a la rotura media de 169.5 libras, con una desviación estándar de 5.7 libras, pruebe la hipótesis nula $\mu = 180$ libras contra la hipótesis alternativa $\mu < 180$ libras al nivel de significancia 0.01. Suponga que la distribución poblacional es normal.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu = 180$ libras
   Hipótesis alternativa: $\mu < 180$ libras
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $t < -3.747$, donde 3.747 es el valor de $t_{0.01}$ para $5 - 1 = 4$ grados de libertad y
$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$
4. *Cálculos:*
$$t = \frac{169.5 - 180}{5.7/\sqrt{5}} = -4.12$$
5. *Decisión:* dado que $t = -4.12$ es menor que -3.747, la hipótesis nula debe rechazarse al nivel $\alpha = 0.01$. En otras palabras, la resistencia a la rotura está por debajo de las especificaciones. La probabilidad de cola exacta, o valor P, no puede determinarse de la tabla 4, pero es 0.0073 (véase la figura 7.10). La evidencia contra la resistencia a la rotura media de 180 libras es incluso más fuerte que 0.01. Solo aproximadamente 7 en

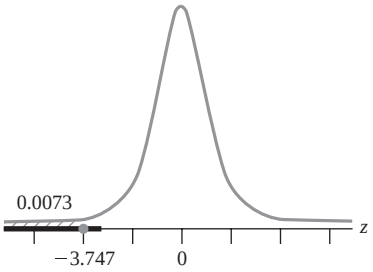


Figura 7.10
Valor $P = 0.0073$ para $t = -4.12$

1,000 veces se observaría un valor de t que sea –4.12 o menor, si la media realmente fuera de 180 libras. ■

Ejercicios

7.53 Consulte el ejercicio 7.1, donde ingenieros civiles registran la cantidad de sal (tons) usadas para mantener en buen estado las autopistas durante una tormenta de nieve. La cantidad de sal para $n = 30$ tormentas tiene $\overline{x} = 1{,}798.4$ tons y $s^2 = 671{,}330.9$, de modo que $s = 819.35$ tons.

a) Realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que el uso medio de sal durante una tormenta de nieve es menor que 2,000 tons. Considere $\alpha = 0.05$.

b) Con base en su conclusión al inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.54 Consulte los datos del ejercicio 7.3 acerca del tiempo de trabajo requerido para producir un pedido de silenciadores para automóvil usando una apisonadora pesada. Los tiempos (horas) para $n = 52$ pedidos de diferentes partes tiene $\overline{x} = 1.865$ horas y $s^2 = 1.5623$, de modo que $s = 1.250$ horas.

a) Realice la prueba de hipótesis con la intención de demostrar que el tiempo de trabajo medio es más que 1.5 horas. Considere $\alpha = 0.05$.

b) Con base en su conclusión al inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.55 Consulte el ejercicio 7.5, donde el número de defectos no removibles, para cada una de $n = 45$ pantallas, tiene $\overline{x} = 2.667$ y $s = 3.057$ defectos no removibles.

a) Realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que el número medio de defectos no removibles es menor que 3.6. Considere $\alpha = 0.025$.

b) Con base en su conclusión en el inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.56 Consulte el ejercicio 7.12, donde, en un paso del proceso en una planta piloto, se midió el rendimiento (en galones) de cadenas de carbono de longitud tres para $n = 9$ corridas.

0.63 2.64 1.85 1.68 1.09 1.67 0.73 1.04 0.68

a) Realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que el rendimiento medio es menor que 1.8. Considere $\alpha = 0.05$ y suponga una población normal.

b) Con base en su conclusión al inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.57 Consulte el ejercicio 7.14, donde se realizaron $n = 9$ mediciones sobre un indicador clave del rendimiento.

123 106 114 128 113 109 120 102 111

a) Realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que la media del indicador clave del rendimiento es diferente de 107. Considere $\alpha = 0.05$ y suponga una población normal.

b) Con base en su conclusión al inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.58 Consulte el ejercicio 7.22, donde $n = 64$ cartuchos para fotocopiadora produjeron una media de 18,300 copias y una desviación estándar de 2,800 copias.

a) Realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que la media del número de copias es mayor que 17,500 copias. Considere $\alpha = 0.02$.

b) Con base en su conclusión en el inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto del problema.

7.59 Consulte el ejercicio 2.34, página 36, concerniente a los costos materiales para reconstruir $n = 29$ motores de tracción. Un cálculo de computadora produce $\overline{x} = 1.4707$ y $s = 0.5235$ miles de dólares. Al nivel de significancia de 0.05, realice una prueba de hipótesis con la intención de demostrar que la media es mayor que 1.3 miles de dólares.

7.60 En 64 horas de producción seleccionadas al azar, la media y la desviación estándar del número de piezas aceptables producidas por una apisonadora automática son $\overline{x} = 1{,}038$ y $s = 146$. Al nivel de significancia de

0.05, ¿esto permite rechazar la hipótesis nula $\mu = 1{,}000$ contra la hipótesis alternativa $\mu > 1{,}000$?

7.61 Con referencia a las mediciones de grosor del ejercicio 2.41, pruebe la hipótesis nula de que $\mu = 30.0$ contra una alternativa bilateral. Considere $\alpha = 0.05$.

7.62 Una muestra aleatoria de 6 vigas de acero tiene una resistencia a la compresión media de 58,392 psi (libras por pulgada cuadrada), con una desviación estándar de 648 psi. Use esta información y el nivel de significancia $\alpha = 0.05$ para probar si la verdadera resistencia a la compresión media del acero del que provino la muestra es de 58,000 psi. Suponga normalidad.

7.63 Un fabricante afirma que el contenido de alquitrán promedio de cierto tipo de cigarrillo es $\mu = 14.0$. Con la intención de demostrar que difiere de este valor, se realizan cinco mediciones del contenido de alquitrán (mg por cigarrillo):

14.5 14.2 14.4 14.3 14.6

Demuestre que la diferencia entre la media de esta muestra, $\bar{x} = 14.4$, y el alquitrán promedio proclamado por el fabricante, $\mu = 14.0$, es significativa en $\alpha = 0.05$. Suponga normalidad.

7.64 Suponga que, en el ejercicio anterior, la primera medición se registra incorrectamente como 16.0 en vez de 14.5. Demuestre que, aun cuando la media de la muestra aumenta a $\bar{x} = 14.7$, la hipótesis nula $H_0: \mu = 14.0$ no se rechaza al nivel $\alpha = 0.05$. Explique la paradoja aparente de que, aun cuando aumenta la diferencia entre la $\bar{x}$ observada y μ, ya no se rechaza la hipótesis nula.

7.65 El programa estadístico *MINITAB* calculará pruebas *t*. Con los datos de la altura de nanopilares en C1,

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Stat > Basic Statics > 1- Sample t**
> Escriba *C*1 en **variables**. Elija **Test mean** e ingrese 300. Haga clic en **OK**.

produce la salida

Test of mu = 300 vs not = 300

	N	Mean	StDev	SE Mean	T	P
C1	50	305.580	36.971	5.229	1.07	0.291

Debe comparar su α preseleccionada con el valor *P* impreso, con la finalidad de obtener la conclusión de su prueba. Para realizar una prueba *Z*, necesita encontrar el valor *P* correspondiente al valor 1.07 para el estadístico de prueba.

Aquí, con la alternativa bilateral, no es posible rechazar $H_0: \mu = 300$ nm, a menos que se tome un nivel de significancia casi tan grande como 0.30.

a) Pruebe $H_0: \mu = 295$ con $\alpha = 0.05$.

b) Pruebe $H_0: \mu = 16.0$ para la rapidez de datos de luz en el ejercicio 2.66 con $\alpha = 0.05$.

7.7 Relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza

Ahora se describe una conexión importante entre las pruebas para dos alternativas bilaterales e intervalos de confianza. Esta relación brinda la razón por la que la mayoría de los estadísticos prefieren la información disponible en un enunciado de intervalo de confianza, en oposición a la información de que la hipótesis nula $\mu = \mu_0$ se rechaza o no.

Para desarrollar la relación, considere el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para μ dado en la página 211:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

El intervalo está estrechamente conectado con una prueba en nivel α de H_0: $\mu = \mu_0$ contra la alternativa bilateral $H_1: \mu \neq \mu_0$. En términos de los valores de $\bar{x}$ y s, la prueba tiene región crítica

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = |t| \geq t_{\alpha/2}$$

La región de aceptación de esta prueba se obtiene al invertir la desigualdad para determinar todos los valores de $\bar{x}$ y s, que no conducen al rechazo de H_0: $\mu = \mu_0$.

$$\text{región de aceptación: } \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}$$

La región de aceptación también se expresa como

$$\text{región de aceptación: } \bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

donde los límites del intervalo son idénticos al intervalo de confianza anterior. Esto es, la hipótesis nula no se rechazará al nivel α si μ_0 está dentro del intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para μ.

El intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ ofrece el intervalo de valores convincentes para μ, de modo que si μ_0 está contenido en el intervalo, entonces no se puede excluir (esto es, no se puede rechazar). El conjunto de valores posibles para μ, determinados por el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$, habla de inmediato acerca del resultado de todas las posibles pruebas de hipótesis bilaterales que especifican un solo valor para μ.

EJEMPLO

Cómo ilustrar la relación entre las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza

Con referencia al ejemplo de la página 211, $n = 16$ mediciones de pérdida de peso que produjeron $\bar{x} = 3.42$ y $s = 0.68$. Puesto que $t_{0.025} = 2.131$, con 15 grados de libertad, el intervalo de confianza del 95% se convierte en

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \text{o} \quad 3.06 < \mu < 3.78.$$

Use la relación entre los intervalos de confianza del 95% y las pruebas de nivel $\alpha = 0.05$ para someter a prueba la hipótesis nula $\mu = 3.7$ contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 3.7$. También pruebe la hipótesis nula $\mu = 3.0$ contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 3.0$.

Solución En vista de la relación recién establecida, una prueba de $\mu = 3.7$ contra $\mu \neq 3.7$ no rechazaría $H_0: \mu = 3.7$ en el nivel 5%, ya que $\mu = 3.7$ cae dentro del intervalo de confianza.

Por otro lado, $\mu = 3.0$ no cae en del intervalo de confianza del 95% y, por lo tanto, dicha hipótesis nula se rechazaría en el nivel $\alpha = 0.05$. ■

La relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza se sostiene de forma bastante general. Suponga, para cualquier valor θ_0 de un parámetro θ, con una prueba de nivel α de la hipótesis nula $\theta = \theta_0$ contra la alternativa $\theta \neq \theta_0$. Recolecte todos los valores θ_0 que no se rechazarían, los cuales forman un intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para θ.

Un enunciado de intervalo de confianza ofrece una inferencia más abarcadora que un enunciado acerca de una prueba bilateral de una sola hipótesis nula. En consecuencia, se favorece un enfoque de intervalo de confianza cuando uno está disponible.

Ejercicios

7.66 Consulte los datos de la altura de nanopilares de la página 15. Con el intervalo de confianza del 95%, con base en la distribución t, para la media de la altura del nanopilar

N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI
50	305.580	36.971	5.229	(295.073, 316.087)

a) decida si rechazar o no $H_0: \mu = 320$ nm en favor de $H_1: \mu \neq 320$ con $\alpha = 0.05$;

b) decida si rechazar o no $H_0: \mu \neq 310$ nm en favor de $H_1: \mu \neq 310$ con $\alpha = 0.05$.

c) ¿Cuál es su decisión en el inciso *b*) si $\alpha = 0.02$? Explique.

7.67 Repita el ejercicio 7.66, pero sustituya la prueba t con la prueba Z de muestra grande.

7.68 Consulte los datos de gasolina ecológica de la página 220. Con el intervalo de confianza del 95%, con base

N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI
15	6.00933	1.07780	0.27829	(5.41247, 6.60620)

en la distribución t para el rendimiento medio

a) decida si rechazar o no $H_0: \mu = 5.5$ gal en favor de $H_0: \mu \neq 5.5$ con $\alpha = 0.05$;

b) decida si rechazar o no $H_0: \mu \neq 5.3$ gal en favor de $H_1: \mu \neq 5.3$ con $\alpha = 0.05$.

c) Realice la prueba *t* para el inciso *b*) para verificar su conclusión.

7.69 Consulte los datos de tiempo de trabajo del ejercicio 7.3. Con el intervalo de confianza del 90%, basado en la distribución *t*, para el tiempo de trabajo medio

N	Mean	StDev	SE Mean	90% CI
52	1.86462	1.24992	0.17333	(1.57423, 2.15500)

a) decida si rechazar o no $H_0: \mu = 1.6$ en favor de $H_1: \mu \neq 1.6$ con $\alpha = 0.10$;

b) decida si rechazar o no $H_0: \mu = 2.2$ en favor de $H_1: \mu \neq 1.2$ con $\alpha = 0.10$.

c) ¿Cuál su decisión en el inciso *a*) si $\alpha = 0.05$? Explique.

7.70 Repita el ejercicio 7.69, pero sustituya la prueba *t* con la prueba *Z* de muestra grande.

7.8 Potencia, tamaño de muestra y curvas características de operación*

Hasta el momento, no se ha puesto mucha atención a los errores tipo II. En el ejemplo de tiempo de secado de la sección 7.5, se calculó una probabilidad de un error tipo II. Puesto que la elección de la hipótesis alternativa $\mu = 21$ minutos en el ejemplo del tiempo de secado en esencia fue arbitraria, sería interesante saber cómo se desempeñará el procedimiento de prueba cuando prevalecen otros valores de μ. El tiempo de secado medio real depende de las reacciones químicas que rigen la pintura y las condiciones ambientales. Al carecer de una explicación científica total, no se sabe con precisión qué valor esperar para esta media poblacional. En consecuencia, hay que investigar la probabilidad de no rechazar (aceptar) la hipótesis nula bajo un rango de posibles valores de μ. Para este fin, sea

$$L(\mu) = \text{probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando } \mu \text{ prevalece}$$

La figura 7.11 presenta la imagen de una curva característica de operación (CO) típica para el caso donde la hipótesis alternativa es $\mu > \mu_0$. Cuando la hipótesis alternativa es $\mu < \mu_0$, la curva CO se convierte en la imagen especular de la figura 7.11, reflejada en torno a la línea vertical rayada a través de μ_0.

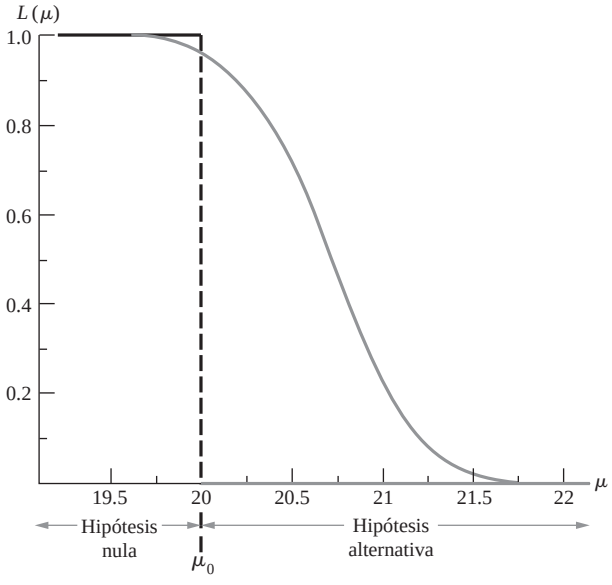


Figura 7.11 Curva característica de operación

*Esta sección puede omitirse en una primera lectura.

La función $L(\mu)$ caracteriza por completo el procedimiento de prueba cualquiera sea el valor de la media poblacional μ. Si μ es igual a un valor donde la hipótesis nula sea verdadera, entonces $1 - L(\mu)$ es la probabilidad del error tipo I. Cuando μ tiene un valor donde la hipótesis alternativa es verdadera, entonces $L(\mu)$ es la probabilidad de un error tipo II. Esto es, la función $L(\mu)$ lleva información completa acerca de las probabilidades de ambos tipos de error.

Para ilustrar el cálculo de $L(\mu)$, continúe con el ejemplo de tiempo de secado de la página 222, donde se tenía $\mu_0 = 20$, $\sigma = 2.4$, $n = 36$, y la línea divisora del criterio era $\overline{x} = 20.75$. Si la media poblacional prevaleciente es $\mu = 20.5$, entonces $Z = \sqrt{n}(\overline{X} - 20.5)/\sigma = 6(\overline{X} - 20.5)/2.4$ es una variable normal estándar. Se razona que $L(20.5)$ es la probabilidad de observar

$$\overline{X} < 20.75, \quad \text{o} \quad \frac{6(\overline{X} - 20.5)}{2.4} < \frac{6(20.75 - 20.5)}{2.4} = 0.625$$

o $Z < 0.625$. Por lo tanto, a partir de la tabla 3, $L(20.5) = 0.73$. Al continuar con otros posibles valores para μ, se obtienen los resultados que se muestran en la siguiente tabla y también en la figura 7.11 (véase el ejercicio 7.75):

Valores de μ	Probabilidad de aceptar la hipótesis nula
19.50	0.999
19.75	0.99
20.00	0.97
20.25	0.89
20.50	0.73
20.75	0.50
21.00	0.27
21.25	0.11
21.50	0.03
21.75	0.01
22.00	0.001

Advierta que la probabilidad de cometer un error tipo II disminuye cuando μ aumenta, y que la probabilidad de no cometer un error tipo I tiende a 1 cuando μ se vuelve mucho menor que 20 (y la pintura es incluso mejor que lo afirmado).

La gráfica de $L(\mu)$ para diversos valores de μ que se ilustra en la figura 7.11 se llama **curva característica de operación**, o simplemente **curva CO** (o curva OC, por sus siglas en inglés), de la prueba.

En el contexto del muestreo, con la finalidad de decidir si aceptar o no un embarque de pintura sobre la base del tiempo de secado, se quisiera aceptar el embarque si la media del tiempo de secado es baja, y rechazarlo si es alta. Con base en la curva característica de operación de la figura 7.11, el ingeniero puede decidir si el procedimiento propuesto tiene probabilidades de error suficientemente pequeñas en valores de μ que considera importantes. De manera ideal, debería rechazarse la hipótesis nula $\mu = \mu_0$ cuando μ realmente supere μ_0, y aceptarla cuando μ es menor que o igual a μ_0. Por lo tanto, la curva CO ideal para el ejemplo estaría dada por las líneas horizontales de la figura 7.11. En la práctica real, las curvas CO solo pueden aproximarse a tales curvas ideales, donde la aproximación se vuelve mejor conforme aumenta el tamaño de la muestra.

En contextos distintos a los planes de muestreo de aceptación, y para la mayoría de los paquetes de software estadístico, el desempeño de una prueba se expresa en términos de **potencia**:

$$\text{potencia} = \gamma(\mu) = P(\text{rechazar } H_0)$$

cuando μ es un valor para la media bajo la hipótesis alternativa. En consecuencia, la potencia y la curva característica de operación son equivalentes pues $\gamma(\mu) = 1 - L(\mu)$.

Para la alternativa unilateral H_0: $\mu > \mu_0$, con σ conocida, la región de rechazo para una prueba Z de nivel α es

$$\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad \text{o} \quad \overline{X} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_\alpha + \mu_0$$

Cuando la media tiene el valor particular μ_1 mayor que μ_0, $\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu_1)/\sigma$ tiene una distribución normal estándar y se rechaza H_0 cuando

$$\overline{X} - \mu_1 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_\alpha + \mu_0 - \mu_1$$

La potencia en μ_1 es

$$\begin{aligned}\gamma(\mu_1) &= P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X} - \mu_1)}{\sigma} > z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)\\ &= P\left(Z > z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

cuando $H_1 : \mu > \mu_0$ y $\mu_1 > \mu_0$.

De igual modo,

$$\begin{aligned}\gamma(\mu_1) &= P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X} - \mu_1)}{\sigma} < -z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)\\ &= P\left(Z < -z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

cuando H_0: $\mu > \mu_0$ y $\mu_1 < \mu_0$. Con una alternativa bilateral,

$$\gamma(\mu_1) = P\left(Z < -z_{\alpha/2} + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right) + P\left(Z > z_{\alpha/2} + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)$$

cuando H_1: $\mu \neq \mu_0$ y la media poblacional tiene valor $\mu_1 \neq \mu_0$.

Se observa que la potencia y la probabilidad β del error tipo II dependen de

1. la elección del nivel de significancia α. Conforme α aumenta, la potencia aumenta (β disminuye).
2. la diferencia entre el valor de la hipótesis nula μ_0 y el valor específico μ_1 con la alternativa. La potencia aumenta (β disminuye) conforme aumenta la diferencia entre μ_0 y μ_1.
3. el valor de la desviación estándar poblacional σ. La potencia disminuye (β aumenta) conforme σ aumenta.
4. el tamaño de la muestra n. La potencia aumenta (β disminuye) conforme aumenta el tamaño de la muestra.

Los cálculos de potencia se realizan de manera más conveniente con software estadístico (véase los ejercicios 7.72 y 7.75).

EJEMPLO **Determinación de la probabilidad de un error tipo II: prueba unilateral**

Se quiere investigar una afirmación acerca de la intensidad sonora promedio de ciertas aspiradoras. Suponga que el sonido es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una desviación estándar de 3.6 dB. Específicamente, se quiere poner a prueba la hipótesis nula $\mu = 75.20$ contra la hipótesis alternativa $\mu > 75.20$ sobre la base de mediciones de la intensidad sonora de $n = 15$ de tales máquinas. Si la probabilidad de un error tipo I será $\alpha = 0.05$, ¿cuál es la probabilidad de un error tipo II para $\mu = 77.00$ dB?

Solución La prueba es unilateral, $\alpha = 0.05$, $z_{0.05} = 1.645$ y

$$z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} = 1.645 + \sqrt{15}\,\frac{(75.20 - 77.0)}{3.6} = -0.291$$

de modo que la potencia es $\gamma(77.0) = P(Z > -0.219) = 0.614$. La probabilidad del error tipo II $\beta = 1 - 0.614 = 0.386$. ■

EJEMPLO **Determinación de la probabilidad de un error tipo II: prueba bilateral**

Suponga que la longitud de ciertas piezas de maquinaria pueden considerarse como una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una media de 2.000 cm y una desviación estándar de 0.050 cm. Específicamente, se quiere probar la hipótesis nula $\mu = 2.000$ contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 2.000$ sobre la base de la media de una muestra aleatoria de tamaño $n = 30$. Si la probabilidad de un error tipo I será $\alpha = 0.05$, ¿cuál es la probabilidad de un error tipo II para $\mu = 2.010$?

Solución La prueba tiene dos colas, $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$, $z_{0.025} = 1.96$ y

$$-z_{\alpha/2} + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} = -1.96 + \sqrt{30}\,\frac{(2.000 - 2.010)}{0.050} = -3.055$$

$$z_{\alpha/2} + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} = 1.96 + \sqrt{30}\,\frac{(2.000 - 2.010)}{0.050} = 0.865$$

La potencia es

$$\gamma(2.010) = P(Z < -3.055) + P(Z > .865) = 0.001 + 0.194 = 0.196$$

La probabilidad del error tipo II $\beta = 1 - 0.196 = 0.804$. ■

Cuando la alternativa es unilateral, puede obtener una ecuación para el tamaño de muestra requerido para dar una potencia específica $\gamma = 1 - \beta$ en algún valor μ_1. Dado que $H_1: \mu > \mu_0$, se requiere n de modo que

$$\gamma = 1 - \beta = P\left(Z > z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}\right)$$

Pero, entonces, por la definición z_β, debe tenerse

$$-z_\beta = z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma}$$

Al despejar n, se obtiene el tamaño muestral requerido. La misma expresión para el tamaño de muestra requerido se sostiene cuando $H_1: \mu < \mu_0$.

Tamaño de muestra requerido

Cuando se efectúa una prueba Z unilateral de muestra grande, el tamaño de muestra requerido n debe ser al menos tan grande como

$$n = \left(\sigma\,\frac{(z_\beta + z_\alpha)}{(\mu_0 - \mu_1)}\right)^2$$

Para pruebas bilaterales, el cálculo del tamaño de muestra se deja mejor a software computacional (véase el ejercicio 7.72).

EJEMPLO **Determinación de un tamaño de muestra: prueba unilateral**

Con referencia al ejemplo de tiempo de secado en la página 222, donde se tenía $\mu_0 = 20$, $\sigma = 2.4$ y $\alpha = 0.05$, ¿cuán grande debería ser la muestra de modo que $\beta = 0.10$ para $\mu = 21$?

Solución La prueba es unilateral, $\mu_0 = 20$, $\mu_1 = 21$ y $\sigma = 2.4$. También, $\alpha = 0.05$, $z_{0.05} = 1.645$, $\beta = 0.10$, $z_{0.10} = 1.28$. El tamaño de la muestra requerido no es menor que

$$n = \left(\sigma \frac{(z_\beta + z_\alpha)}{(\mu_0 - \mu_1)}\right)^2 = \left(2.4 \frac{(1.28 + 1.645)}{(20 - 21)}\right)^2 = 49.2$$

de modo que $n = 50$ es el tamaño de muestra requerido. ■

Ejercicios

7.71 Consulte el ejemplo concerniente a la intensidad sonora promedio de la página 239. Calcule la potencia en $\mu_1 = 77$ cuando

a) el nivel cambia a $\alpha = 0.03$.

b) $\alpha = 0.05$ pero la alternativa cambia a la bilateral $H_1: \mu \neq 75.2$.

7.72 **Cálculo de potencia** *MINITAB*

Estos cálculos pertenecen a poblaciones normales con varianza conocida y ofrecen una aproximación precisa en el caso de muestra, grande donde se desconoce σ. Para calcular la potencia de la prueba Z en μ_1, se necesita ingresar la

diferencia = $\mu_1 - \mu_0$.

Aunque $n = 15$ no es grande, se ilustra con referencia al ejemplo concerniente a la intensidad sonora promedio de la página 239, donde $\alpha = 0.05$, $\sigma = 3.6$ y H_1: $\mu > 75.2$. Se proporciona $\mu_1 = 77$, de modo que la diferencia = $\mu_1 - \mu_0 = 77 - 75.2 = 1.80$.

Con referencia al ejemplo de las partes de maquinaria de la página 240:

a) Calcule la potencia en $\mu_1 = 2.020$.

b) Repita el inciso *a*) pero considere $\alpha = 0.03$.

7.73 Use software computacional para repetir el ejercicio 7.71.

7.74 **Cálculo de tamaño muestral con** *MINITAB*

Consulte el ejercicio 7.72, pero esta vez deje en blanco **Sample size** pero

Escriba *0.90* en **power**

para obtener la salida parcial concerniente al tamaño de la muestra

Difference	Sample Size	Target Power	Actual Power
1.8	35	0.9	0.905440

Consulte el ejemplo concerniente a la intensidad sonora de la página 239. Encuentre el tamaño de muestra requerido si la potencia debe ser de al menos 0.96 en $\mu_1 = 77$.

Cuadro de diálogo:
Stat > Power and Sample Size > 1-Sample Z.
Escriba 15 en **Sample sizes**, 1.8 en **differences** y 3.6 en **standard deviation**.
Haga clic en **Options** y elija *greater than*. Escriba 0.05 en **significance level**.
Haga clic en **OK**. Haga clic en **OK**.

Note que tiene opción de una alternativa que es menor que, no igual a o mayor que.

Salida: (parcial)

Difference	Sample Size	Power
1.8	15	0. 0.614718

7.75 Cálculo de potencia o curva característica de operación con *MINITAB*

Consulte los pasos del ejercicio 7.72, pero ingrese un rango de valores para la diferencia. Aquí, 0:3/.1 va en pasos de 0 a 3 en pasos de .1 para el ejemplo del tiempo de secado.

Stat > Power and Sample Size > 1-Sample Z. Escriba 36 en **Sample sizes**, 0:3/.1 en **differences** y 2.4 en **Standard deviation**. Haga clic en **Options** y elija **greater than**. Escriba 0.05 en **level of significance**. Escriba *C*1 en **Store differences in**. Escriba *C*2 en **Store power values in**.

Haga clic en **OK**. Haga clic en **OK**.

Luego escriba los valores para μ = diferencia + μ_0 = C1 + 20 y almacene en C3. Grafique C2 contra C3 para generar la curva de potencia. La característica de operación se obtiene al calcular 1 – potencia = 1 – C2 y almacenar en C4. Grafique C4 contra C2.

Con referencia al ejemplo de tiempo de secado de la página 222, use software computacional para obtener

a) la curva de potencia;

b) la curva característica de operación.

Sí y no

Sí

1. Calcule el error estándar estimado $s/\sqrt{n}$ para acompañar la estimación puntual $\bar{x}$ de una media poblacional.
2. Cualquiera que sea la población, cuando el tamaño de muestra sea grande, calcule el intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$ para la media
$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$
3. Cuando la población sea normal, calcule el intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$ para la media
$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$
donde $t_{\alpha/2}$ se obtiene a partir de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.
4. Comprenda la interpretación de un intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$. Cuando la población sea normal, antes de recolectar los datos,
$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$
es un intervalo aleatorio que cubrirá la media desconocida fija con probabilidad $1 - \alpha$. En muchas aplicaciones repetidas de este método, aproximadamente la proporción $1 - \alpha$ de las veces que el intervalo cubrirá la media poblacional respectiva.
5. Cuando realice una prueba de hipótesis, formule la afirmación de que el experimento busca confirmar la hipótesis alternativa.
6. Cuando el tamaño de muestra sea grande, base una prueba de la hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$ en el estadístico de prueba
$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

que tiene, aproximadamente, una distribución normal estándar. Cuando la población sea normal, el mismo estadístico tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

7. Entienda la interpretación de una prueba de nivel α. Si la hipótesis nula es verdadera, antes de recolectar los datos, la probabilidad es α de que el experimento producirá observaciones que conduzcan al rechazo de la hipótesis nula. En consecuencia, después de muchos experimentos independientes, la proporción que conduce al rechazo de la hipótesis nula estará cercana a α.

No

1. No aplique rutinariamente los procedimientos estadísticos anteriores si la muestra no es aleatoria, sino recolectada a partir de unidades convenientes o los datos presentan una tendencia en el tiempo.

Ejercicios de repaso

7.76 Especifique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa en cada uno de los siguientes casos.

a) Un ingeniero espera establecer que un aditivo aumentará la viscosidad de un aceite.

b) Un ingeniero eléctrico espera establecer que un tablero de circuitos modificado dará a una computadora una mayor rapidez de operación promedio.

7.77 Con referencia al ejemplo de la página 19, encuentre un intervalo de confianza del 95% para la resistencia media de la aleación de aluminio.

7.78 Mientras realiza cierta tarea bajo ingravidez simulada, el pulso de 32 astronautas en capacitación aumenta en promedio 26.4 latidos por minuto, con una desviación estándar de 4.28 latidos por minuto. ¿Qué puede afirmar con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa $\overline{x} = 26.4$ como una estimación puntual del verdadero aumento promedio en el pulso de los astronautas en capacitación que realizan la tarea dada?

7.79 Con referencia al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 95% para el verdadero aumento promedio en el pulso de los astronautas en capacitación que realizan la tarea dada.

7.80 Se desea estimar el número medio de días de uso continuo hasta que cierto tipo de computadora requerirá reparaciones por primera vez. Si puede suponer que $\sigma = 48$ horas, ¿cuán grande debería ser la muestra de modo que uno podrá afirmar con 90% de confianza que la media muestral está desplazada cuando mucho 10 horas?

7.81 Una muestra de 12 árboles de levas para uso en motores de gasolina tiene una excentricidad promedio de 1.02 y una desviación estándar de 0.044 pulgadas. Si supone que los datos pueden tratarse como una muestra aleatoria de una población normal, determine un intervalo de confianza del 95% para la excentricidad media real del árbol de levas.

7.82 Con la finalidad de probar la durabilidad de una nueva pintura, el departamento de autopistas somete a prueba tiras pintadas a través de caminos intensamente transitados, en 15 ubicaciones diferentes. Si en promedio las tiras de prueba desaparecen después de que pasan sobre ellas 146,692 automóviles, con desviación estándar de 14,380 autos, construya un intervalo de confianza del 99% para el verdadero número promedio de autos que se requieren para desgastar la pintura. Suponga una población normal.

7.83 Con referencia al ejercicio 7.82 y el uso de 14,380 como estimación de σ, encuentre el tamaño muestral que se necesitaría para ser capaces de afirmar con 95% de confianza que la media muestral está desplazada por cuando mucho 10,000. [*Sugerencia:* Estime primero n_1 usando $z = 1.96$, luego use $t_{0.025}$ para $n_1 - 1$ grados de libertad para obtener una segunda estimación n_2, y repita este procedimiento hasta que sean iguales los dos últimos valores de n obtenidos.]

7.84 Un técnico de laboratorio se cronometra 20 veces al realizar una tarea, y obtiene $\overline{x} = 7.9$ y $s = 1.2$ minutos. Si la probabilidad de un error tipo I será cuando mucho 0.05, ¿esto constituye evidencia contra la hipótesis nula de que el tiempo promedio es menor que o igual a 7.5 minutos?

7.85 Suponga que, en el ejemplo del tiempo de secado de la página 222, n cambia de 36 a 50, mientras las otras cantidades permanecen $\mu_0 = 20$, $\sigma = 2.4$ y $\alpha = 0.03$. Encuentre

a) la nueva línea divisora del criterio de prueba;

b) la probabilidad de errores tipo II para los mismos valores de μ, como se indica en la tabla de la página 238.

7.86 En un estudio de contaminación del aire, se tomaron mediciones de ozono en una gran ciudad californiana a las 5.00 P.M. Las ocho lecturas (en partes por millón) fueron

7.9 11.3 6.9 12.7 13.2 8.8 9.3 10.6

Si supone que la muestra de la población es normal, construya un intervalo de confianza del 95% para la media correspondiente verdadera.

7.87 Un ingeniero industrial, preocupado por el servicio en un clínica médica grande, registró la duración del tiempo desde el momento en que un paciente llama hasta que un médico o una enfermera le devuelven la llamada. Una muestra de tamaño 180 llamadas tuvo una media de 1.65 horas y una desviación estándar de 0.82.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional del tiempo de devolución de la llamada.

b) ¿μ se encuentra en el intervalo que obtuvo en el inciso *a*)? Explique.

c) En una larga serie de experimentos repetidos, con nuevas muestras aleatorias recolectadas para cada experimento, ¿qué proporción de los intervalos de confianza resultantes contendrá la verdadera media poblacional? Explique su razonamiento.

7.88 Consulte el ejercicio 7.87.

a) Realice una prueba con la intención de establecer que el tiempo medio para devolver una llamada es mayor que 1.5 horas. Use $\alpha = 0.05$.

b) A la luz de su conclusión en el inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto de este problema.

c) En una serie larga de experimentos repetidos, con nuevas muestras aleatorias recolectadas para cada experimento, ¿qué proporción de las pruebas resultantes rechazaría la hipótesis nula si prevaleciera? Explique su razonamiento.

7.89 La resistencia a la compresión de las partes fabricadas, a partir de un material compuesto se sabe que tienen distribución casi normal. Un científico, que usa por primera vez el dispositivo para probar, obtiene la resistencia a la tensión (psi) de 20 especímenes

95	102	105	107	109	110	111	112	114	115
134	135	136	138	139	141	142	144	150	155

que se muestran en la figura 7.12. ¿El científico debería reportar el intervalo de confianza del 95% con base en la distribución *t*? Explique su razonamiento.

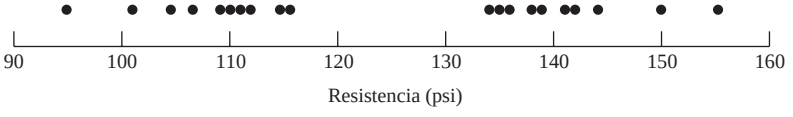


Figura 7.12
Diagrama de puntos de resistencia a la tensión

Términos clave

Alternativa bilateral 225
Alternativa unilateral 225
Confianza 208
Criterio bilateral 226
Criterio unilateral 226
Curva característica de operación (CO) 238
Error estándar estimado 204
Error tipo I 223
Error tipo II 223
Estimación por intervalo 209
Estimación puntual 204
Estimador de máxima verosimilitud 217
Estimador insesgado 205
Función de verosimilitud 217
Grado de confianza 210
Hipótesis alternativa 225
Hipótesis compuesta 227
Hipótesis nula 227
Hipótesis simple 227
Intervalo de confianza 210
Límites de confianza 210
Nivel de significancia 225
Notación sombrero 205
Potencia 238
Probabilidad de cola 230
Prueba bilateral 226
Prueba de dos colas 226
Prueba de una cola 226
Prueba *t* de una muestra 233
Prueba unilateral 226
Prueba *Z* de muestra grande 232
Regiones críticas 229
Teoría clásica de prueba de hipótesis 226
Teoría de Neyman-Pearson 226
Valor *P* 231
Valores críticos 230

CAPÍTULO

8

COMPARACIÓN DE DOS TRATAMIENTOS

En la ingeniería ocurren avances cuando las nuevas ideas conducen a mejor equipo, nuevos materiales o revisión de los procesos de producción existentes. Cualquier procedimiento o dispositivo nuevo deben compararse con los existentes y la cantidad de mejoramiento valorado. Como se describe en la sección 8.1, los métodos estadísticos de comparación comienzan por decidir acerca de uno de dos esquemas para recolectar datos. Las secciones 8.2 y 8.3 tratan del diseño de muestras independientes; la sección 8.4, del diseño de muestras de diferencias pareadas. Estos dos diseños se comparan y contrastan en la sección 8.5.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

8.1 Diseños experimentales para comparar dos tratamientos 245

8.2 Comparaciones: dos muestras independientes grandes 246

8.3 Comparaciones: dos muestras independientes pequeñas 251

8.4 Pruebas de diferencias pareadas 259

8.5 Aspectos de diseño: aleatoriedad y apareado 263

Ejercicios de repaso 266

Términos clave 266

8.1 Diseños experimentales para comparar dos tratamientos

El progreso en la ciencia y la ingeniería comienza cuando se inventan dispositivos o materiales nuevos, o cuando se revisan los procesos existentes. Los avances ocurren siempre que la nueva técnica demuestra ser mejor que la anterior. Se realizan experimentos, se recolectan datos acerca del desempeño y, luego, se usan métodos estadísticos para efectuar comparaciones entre las técnicas nueva y antigua.

Es común usar el término estadístico **tratamiento** para referirse a los procedimientos, las máquinas o los procesos que se comparan. La unidad básica que se expone a un tratamiento o al otro se denomina **unidad experimental**, mientras la característica observada que forma la base de la comparación se conoce como **respuesta**.

EJEMPLO **Asignación aleatoria del tratamiento a las unidades**

Cuando una de sus torres de retransmisión se descompone, constituye un suceso demasiado costoso para una compañía de telefonía móvil. Debido a una escasez de expertos, en ocasiones un novato habrá de enviarse para corregir el problema. Una compañía de telefonía celular quiere realizar un experimento para comparar el tiempo promedio para que un experto corrija un problema y el tiempo promedio para que un novato lo corrija.

Las siguientes 15 descomposturas pueden usarse en el experimento. Describa el esquema para realizar un experimento comparativo.

Solución Una descompostura es la unidad, mientras que el experto y el novato serán el tratamiento 1 y el tratamiento 2, respectivamente. La respuesta es el tiempo para reparar la torre. Una persona se asignará a cada descompostura. Los tiempos para el grupo de descomposturas, donde se asignan los novatos, tienen que ser independientes de los tiempos para el grupo de descomposturas donde se asignan los expertos. Este es el *diseño de muestras independientes*.

Antes de saber algo acerca de la descompostura, su ubicación o su posible severidad, siete de las descomposturas deberían elegirse para recibir el tratamiento 1, experto. Dicha

selección debe realizarse usando números aleatorios. Al numerar el orden de descomposturas de 1 a 15, dentro de este rango hay que seleccionar siete números aleatorios diferentes. La aleatoriedad, sin restricción, da lugar al nombre alternativo de *diseño completamente aleatorio.* ■

EJEMPLO **Pareado para eliminar una fuente de variación conocida**

Un ingeniero civil necesita comparar la durabilidad de dos pinturas diferentes para trazar carriles en una autopista dividida. Un año después de aplicar la pintura, regresará y asignará un número a la calidad actual del marcaje. Están disponibles 10 secciones ampliamente separadas de 1 milla en la autopista dividida. Por su experiencia, espera que las secciones transporten volúmenes de tránsito sustancialmente diferentes. Describa un experimento para efectuar la comparación.

Solución Las dos pinturas son los tratamientos a los que se le llama tratamiento 1 y tratamiento 2. Las secciones de 1 milla, en cualquier dirección, transportarán aproximadamente el mismo volumen de tránsito en toda la milla. Una sección de 1 milla, con tránsito que va en una dirección, es una unidad. La respuesta es la calidad del marcaje después de un año. El ingeniero civil espera que el volumen de tránsito influya enormemente sobre la respuesta. El volumen de tránsito podría eliminarse de la comparación, si se parean dos secciones de 1 milla con tránsito que va en direcciones opuestas. Entonces, una comparación tan solo se realizará dentro del par. A lo anterior se le denomina *prueba de diferencias pareadas*.

Incluso el camino para un lado estaría sometido a más sombra, mayor temperatura u otras condiciones diferentes del otro. Para cada sección de 1 milla, el ingeniero tiene que lanzar una moneda. Si es cara, la dirección norte o la oeste reciben el tratamiento 1. La aleatoriedad ayuda a evitar que esas otras variables descontroladas influyan en la respuesta de forma sistemática.

Observe que, al parear unidades experimentales iguales, se elimina el volumen de tránsito como una variable influyente. ■

El término **diseño experimental** se refiere a la forma en que se elijen y asignan las unidades para recibir tratamientos. Como se introdujo en los últimos dos ejemplos, hay dos diseños básicos para comparar dos tratamientos:

1. **Muestras independientes (aleatoriedad completa)**
2. **Muestras de diferencias pareadas (aleatoriedad dentro de cada diferencia pareada)**

En la siguiente sección se estudian los diseños de muestras independientes y las pruebas de diferencias pareadas en la sección posterior.

8.2 Comparaciones: dos muestras independientes grandes

En esta sección se considera el diseño de muestras independientes cuando ambos tamaños de muestra son grandes. Para establecer las suposiciones, se utilizan X y Y, así como los subíndices 1 o 2 para distinguir las dos poblaciones.

Suposiciones: muestras grandes

1. $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ es una muestra aleatoria de tamaño n_1 de la población 1, que tiene media = μ_1 y varianza = σ_1^2.
2. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ es una muestra aleatoria de tamaño n_2 de la población 2, que tiene media = μ_2 y varianza = σ_2^2.
3. Las dos muestras $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ y $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ son independientes.

Las inferencias se harán en torno a la diferencia en medias $\mu_1 - \mu_2 = \delta$. Puesto que, por el teorema 6.1,

$$E(\overline{X}) = \mu_1 \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} \qquad E(\overline{Y}) = \mu_2 \qquad Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

la media de $\overline{X} - \overline{Y}$ es $E(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$; por independencia (véase el ejemplo de la página 154),

$$Var(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Cuando los tamaños de muestra n_1 y n_2 son grandes, el teorema del límite central implica que tanto $\overline{X}$ como $\overline{Y}$ son aproximadamente normales. Puesto que son independientes, su diferencia también es aproximadamente normal y el **estadístico *Z* de dos muestras**

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

es aproximadamente normal estándar. Como los tamaños de muestra n_1 y n_2 son grandes (a saber, ambos son mayores que o iguales a 30), la aproximación normal sigue siendo válida cuando las varianzas de la muestra sustituyen las varianzas de la población.

Estadístico para inferencia de grandes muestras concernientes a la diferencia entre dos medias

Cuando los tamaños de muestra n_1 y n_2 son grandes; a saber, $n_1, n_2 \geq 30$

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

es aproximadamente normal estándar.

Intervalos de confianza de muestras grandes

Los intervalos de confianza de muestras grandes, para la diferencia de medias $\delta = \mu_1 - \mu_2$, se determinan a partir de la probabilidad normal estándar

$$1 - \alpha = P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} < z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \overline{X} - \overline{Y} - \delta < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

o bien

$$1 - \alpha = P\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \delta < \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

Este último enunciado afirma que, antes de obtener los datos, la probabilidad es $1 - \alpha$ de que el intervalo aleatorio cubrirá la verdadera diferencia desconocida en las medias $\delta = \mu_1 - \mu_2$.

Intervalo de confianza de muestras grandes para $\mu_1 - \mu_2$

$$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Este intervalo de confianza también se obtiene a partir de las regiones de aceptación para la prueba bilateral de la página 249.

EJEMPLO **Intervalo de confianza de muestras grandes para diferencia de medias**

Como línea de referencia para un estudio acerca de los efectos de cambiar el precio para la electricidad durante las horas pico, se obtuvo el uso de julio durante horas pico para $n_1 = 45$ hogares con acondicionador de aire y $n_2 = 55$ hogares sin él.[1] El uso en pico durante julio (kWh) se resume como

	Muestra		
Población	Tamaño	Media	Varianza
Con	45	204.4	13,825.3
Sin	55	130.0	8,632.0

Obtenga un intervalo de confianza del 95% para $\delta = \mu_1 - \mu_2$.

Solución Para un intervalo de confianza del 95%, $\alpha = 0.05$ y $z_{0.025} = 1.96$. Se proporcionan $n_1 = 45, n_2 = 55, \overline{x} = 204.4, s_1^2 = 13{,}825.3, \overline{y} = 130.0$ y $s_2^2 = 8{,}632.0$. Entonces, los límites del intervalo de confianza son

$$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 204.4 - 130.0 \pm 1.96\sqrt{\frac{13{,}825.3}{45} + \frac{8{,}632.0}{55}}$$
$$= 74.4 \pm 1.96\sqrt{464.17}$$

de modo que el intervalo de confianza del 95% es (32.17, 116.63). La media del uso en pico para hogares con acondicionador de aire es mayor que para los hogares sin él, de 32.17 a 116.63 kWh por mes.

El intervalo de confianza no solo revela que las dos medias poblacionales son estadísticamente diferentes, porque el intervalo de confianza no contiene el 0, también cuantifica la cantidad de diferencia. ■

Pruebas de muestras grandes para diferencias de medias

Existen muchos problemas estadísticos en los cuales se enfrentan decisiones acerca del tamaño relativo de las medias de dos poblaciones. Por ejemplo, si se consideran dos métodos de soldadura, se pueden tomar muestras y decidir cuál es mejor al comparar sus resistencias medias.

Al formular el problema de manera más general, se deben considerar dos poblaciones que tengan las media μ_1 y μ_2, así como la varianzas de σ_1^2 y σ_2^2. Se quiere probar la hipótesis nula

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

donde δ_0 es una constante especificada, sobre la base de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2. Al igual que con las pruebas concernientes a una media, se considerarán pruebas de esta hipótesis nula contra cada una de las alternativas $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$, $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ y $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$. La prueba en sí dependerá de la distancia, medida en unidades de desviación estándar estimadas, desde la diferencia en medias muestrales $\overline{X} - \overline{Y}$ hasta el valor hipotetizado, δ_0. Cuando los tamaños de muestra son grandes (a

[1]Richard Johnson y Dean Wichern (2007), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6a. ed., página 289, Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ.

saber, n_1 y n_2 son ambos mayores que o iguales a 30), se obtiene este estadístico de prueba al especificar el valor nulo δ_0 para la diferencia de medias en la Z aleatoria definida antes.

Estadístico de prueba para muestras grandes concernientes a la diferencia entre dos medias

Cuando $n_1, n_2 \geq 30$, pruebe $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ usando

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

que tiene, aproximadamente, una distribución normal estándar.

Al igual que la tabla de la página 232, las regiones críticas para probar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$, usando la **prueba *Z* de dos muestras**, son:

Regiones críticas para probar $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ (poblaciones normales y σ_1 y σ_2 conocidas, o muestras grandes $n_1, n_2 \geq 30$)	
Hipótesis alternativa	**Rechazar hipótesis nula si:**
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ o bien, $Z > z_{\alpha/2}$

Aunque δ_0 puede ser cualquier constante, vale la pena notar que, en la gran mayoría de los problemas, su valor es cero y se somete a prueba la hipótesis nula de que no hay diferencia; a saber, la hipótesis nula $\mu_1 = \mu_2$.

EJEMPLO **Prueba de una diferencia de medias con dos muestras grandes**

Para probar la afirmación de que la resistencia del alambre eléctrico se puede reducir en más de 0.050 ohm al formar aleaciones, 32 valores obtenidos para alambre estándar produjeron $\overline{x} = 0.136$ ohm y $s_1 = 0.004$ ohm, así como 32 valores obtenidos para alambre en aleación produjeron $\overline{y} = 0.083$ ohm y $s_2 = 0.005$ ohm. En el nivel de significancia de 0.05, ¿esto soporta la afirmación?

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 - \mu_2 = 0.050$
   Hipótesis alternativa: $\mu_1 - \mu_2 > 0.050$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z > 1.645$, donde Z está dada por la fórmula anterior para muestras grandes.
4. *Cálculos:*

$$z = \frac{0.136 - 0.083 - 0.050}{\sqrt{\dfrac{(0.004)^2}{32} + \dfrac{(0.005)^2}{32}}} = 2.65$$

5. *Decisión:* puesto que $z = 2.65$ supera 1.645, debe rechazarse la hipótesis nula; esto es: los datos respaldan la afirmación. A partir de la tabla 3, el valor P es 0.004 (véase la figura 8.1), de modo que la evidencia para aleación es muy fuerte. Tan solo 4 en 1,000 veces Z sería al menos 2.65, si la diferencia de media fue 0.05. ■

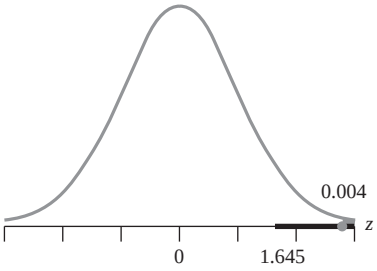


Figura 8.1
Valor P para muestras grandes = 0.004 para $Z = 2.65$

EJEMPLO

Prueba de muestras grandes de la hipótesis nula de la igualdad de dos medias

Una compañía afirma que sus bombillas eléctricas tienen un promedio de vida superior a las de su principal competidor. Si un estudio demostró que una muestra de $n_1 = 40$ de sus bombillas tiene una vida media de 1,647 horas de uso continuo, con una desviación estándar de 27 horas, mientras que una muestra de $n_2 = 40$ bombillas fabricadas por su principal competidor tienen una vida media de 1,638 horas de uso continuo, con una desviación estándar de 31 horas, ¿esto respalda la afirmación con un nivel de significancia de 0.05?

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 - \mu_2 = 0$
   Hipótesis alternativa: $\mu_1 - \mu_2 > 0$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z > 1.645$, donde Z está dada por la fórmula de muestras grandes de la página 249.
4. *Cálculos:*

$$z = \frac{1{,}647 - 1{,}638}{\sqrt{\dfrac{27^2}{40} + \dfrac{31^2}{40}}} = 1.38$$

5. *Decisión:* puesto que $z = 1.38$ no supera 1.645, la hipótesis nula no puede rechazarse; esto es, la diferencia observada entre las dos medias muestrales no es significativa.

   El valor $P = 0.0838$ (véase la figura 8.2), de modo que la evidencia contra medias iguales no es muy fuerte. ■

Para juzgar la fortaleza, con la finalidad de apoyar la hipótesis nula cuando no se rechaza, considere errores tipo II para los cuales las probabilidades dependen de las diferencias alternativas reales $\delta' = \mu_1 - \mu_2$. Por fortuna, estas pueden determinarse con los resultados muestrales individuales (en tanto se tomen muestras de poblaciones normales con desviaciones estándares conocidas, o ambas muestras sean grandes).

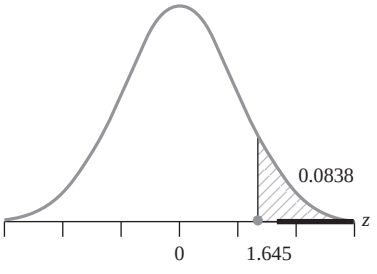


Figura 8.2
Prueba de muestras grandes: valor $P = 0.0838$ para $Z = 1.38$

El cálculo de error tipo II se basa en los resultados para una muestra individual en la página 239, así como una varianza individual ficticia σ^2 y tamaño muestral n, donde

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \qquad n = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Asimismo, sustituya $\mu_0 - \mu_1$ por $\delta_0 - \delta'$.

El método preferido para calcular el error tipo II consiste en usar un software de cómputo (véase el ejercicio 7.72).

EJEMPLO **Cómo aproximar la probabilidad del error tipo II**

Con referencia al ejemplo anterior, ¿cuál es la probabilidad de un error tipo II para $\delta' = 16$ horas?

Solución Consulte la fórmula en la página 239. Puesto que $\delta_0 = 0$, $\sigma^2 = 27^2 + 31^2 = 1{,}690$ y $n = 40$

$$z_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{(\delta_0 - \delta')}{\sigma} = 1.645 + \sqrt{40}\,\frac{(0 - 16)}{\sqrt{1{,}690}} = 1.645 - 2.642 = -0.817$$

de modo que la potencia es $\gamma(16) = P(Z > -0.817) = 0.793$. La probabilidad del error tipo II $\beta = 1 - 0.793 = 0.207$. ■

8.3 Comparaciones: dos muestras independientes pequeñas

Cuando n_1 y n_2 son ambas pequeñas y se desconocen las varianzas poblacionales, se deben plantear suposiciones adicionales, que se marcan 4 o 5, para enfatizar que todavía prevalecen las tres suposiciones originales.

Suposiciones adicionales para muestras pequeñas

4. Ambas poblaciones son normales.
5. Las dos desviaciones estándares tienen un valor común $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Puesto que las poblaciones son normales, $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son normales; por otro lado, puesto que son independientes, su diferencia también es normal (véase la página 162). Recuerde: $E(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \delta$. Con la suposición de desviación estándar común σ, la expresión anterior para la varianza de $\overline{X} - \overline{Y}$ se convierte en

$$Var(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

y la versión estandarizada de $\overline{X} - \overline{Y}$

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

tiene una distribución normal.

Hay que estimar la σ desconocida. Al razonar que cada desviación al cuadrado $(X_i - \overline{X})^2$ es una estimación de σ^2 y también lo es cada $(Y_i - \overline{Y})^2$ de la segunda muestra,

se estima σ^2 al **combinar** las sumas de las desviaciones al cuadrado de las respectivas medias muestrales, es decir, se estima σ^2 mediante el **estimador combinado**

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

donde $\sum(X_i - \overline{X})^2$ es la suma de las desviaciones de la media al cuadrado para la primera muestra, en tanto que $\sum(Y_i - \overline{Y})^2$ es la suma de las desviaciones de la media al cuadrado para la segunda muestra. Se divide entre $n_1 + n_2 - 2$, pues existen $n_1 - 1$ desviaciones independientes de la media en la primera muestra, $n_2 - 1$ en la segunda; por ende, se tienen $n_1 + n_2 - 2$ desviaciones independientes de su media para estimar la varianza poblacional.

De manera más específica, a partir de los resultados de la muestra individual, se sabe que tanto S_1^2 como S_2^2 son estimaciones de σ^2 y que

$\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución chi cuadrada, con $n_1 - 1$ grados de libertad

$\dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución chi cuadrada, con $n_2 - 1$ grados de libertad

y esas dos cantidades aleatorias son independientes, pues las muestras sobre las que se basan son independientes. Ya sea por el resultado de la página 192 o por el ejemplo de la página 196, la suma de las dos variables chi cuadrada tiene una distribución chi cuadrada, con grados de libertad iguales a la suma de los dos grados de libertad $n_1 + n_2 - 2$. Más aún,

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_p^2}{\sigma^2}$$

de modo que

$$\frac{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{\dfrac{(n_1 + n_2 - 2)S_p^2}{\sigma^2}}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{S_p^2}{\sigma^2}$$

y se concluye que

$$\frac{S_p}{\sigma} = \sqrt{\frac{\text{variable chi cuadrada}}{\text{grados de libertad}}}$$

y se puede demostrar que esto es independiente de la normal estándar basada en $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Al usar la representación de t de la página 192, como una normal estándar sobre la raíz cuadrada de una chi cuadrada dividida entre sus grados de libertad, se obtiene el

Estadístico para prueba de muestra pequeña concerniente a la diferencia entre dos medias (con σ_1 y σ_2 desconocidas, pero iguales)

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \quad \text{donde } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

tiene una distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad (g.l.).

Note que al sustituir S_p por σ en la expresión para Z de la página 251, se llega al mismo estadístico. Con tamaños de muestra pequeños, la distribución no es normal estándar, sino t.

Los criterios para la **prueba *t* de dos muestras**, con base en este estadístico, son como las de la Z para probar la hipótesis nula: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$.

Regiones críticas para probar $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ (poblaciones normales con $\sigma_1 = \sigma_2$) prueba t de dos muestras	
Hipótesis alternativa	**Rechazar hipótesis nula si:**
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$t < -t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$t > t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ o bien, $t > t_{\alpha/2}$

En la aplicación de esta prueba, n_1 y n_2 pueden ser pequeñas, aunque $n_1 + n_2 - 2$ puede ser 30 o más; en tal caso, se usa el valor crítico normal (también línea al fondo de la tabla 4).

EJEMPLO **Una prueba *t* de dos muestras**

Las siguientes muestras aleatorias son mediciones de la capacidad productora de calor (en millones de calorías por ton) de especímenes de carbón de dos minas:

Mina 1:	8,260	8,130	8,350	8,070	8,340	
Mina 2:	7,950	7,890	7,900	8,140	7,920	7,840

Utilice el nivel de significancia de 0.01 para probar si la diferencia entre las medias de estas dos muestras es significativa.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 - \mu_2 = 0$
   Hipótesis alternativa: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $t < -3.250$ o $t > 3.250$, donde 3.250 es el valor de $t_{0.005}$ para $5 + 6 - 2 = 9$ grados de libertad y t está dada por la fórmula de la página 252.
4. *Cálculos:* las medias y las varianzas de las dos muestras son

$$\bar{x} = 8{,}230, \quad \bar{y} = 7{,}940, \quad s_1^2 = \frac{63{,}000}{4} = 15{,}750 \quad \text{y}$$
$$s_2^2 = \frac{54{,}600}{5} = 10{,}920$$

de modo que $s_p^2 = (63{,}000 + 54{,}600)/(5 + 4) = 13{,}066.7$, $s_p = 114.31$, y

$$t = \frac{8{,}230 - 7{,}940}{114.31\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = 4.19$$

5. *Decisión:* como $t = 4.19$ supera 3.250, la hipótesis nula debe rechazarse al nivel $\alpha = 0.01$. Se concluye que la capacidad promedio para producir calor del carbón de las dos minas no es igual. El valor P muy pequeño 0.0024 (véase la figura 8.3) refuerza esta conclusión. ■

En el ejemplo anterior se fue más allá y se realizó la prueba t de dos muestras, por lo que se supone tácitamente que las varianzas poblacionales son iguales. Por fortuna, la prueba no es demasiado sensible a pequeñas diferencias entre las varianzas poblacionales; en consecuencia, es justificable el procedimiento que se usa en esta instancia. Como regla empírica, si una varianza es cuatro veces la otra, debería preocuparse. Generalmente, una transformación mejorará la situación. Como otra alternativa, está la prueba de Smith-Satterthwaite, que se estudia más adelante.

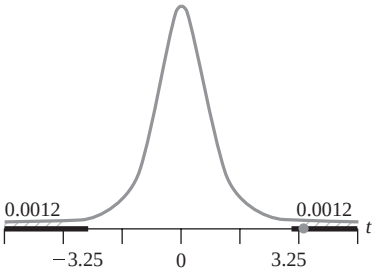


Figura 8.3
Prueba t de dos muestras: valor $P = 0.0024$ para $t = 4.19$

Los intervalos de confianza se siguen directamente de la región de aceptación para las pruebas. Para dos poblaciones normales con varianzas iguales,

Intervalo de confianza de muestra pequeña, concerniente a la diferencia entre dos medias

El intervalo de confianza $(1-\alpha)100\%$ para $\delta = \mu_1 - \mu_2$ tiene límites

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

donde $t_{\alpha/2}$ se basa en $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

EJEMPLO

Gráficos para acompañar una prueba *t* de dos muestras

Las mediciones de resistencia en una aleación de aluminio se introdujeron en la página 19. Una segunda aleación dio como resultado mediciones dadas en la siguiente presentación de tallo y hojas. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en la resistencia media δ.

Solución

Primero se colocan las observaciones de las dos aleaciones en presentaciones de tallo y hojas. Note que las observaciones de la primera aleación parecen normales, pero las de la segunda aleación pueden desviarse de una distribución normal. Puesto que los tamaños de las muestras son relativamente grandes, esto no causará dificultad alguna.

Aleación 1, $N = 85$
Unidad de hoja = 0.10

66	4											
67	7											
68	0	0	3	4	6	8	9					
69	0	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8	9
70	0	0	1	2	3	3	4	5	6	6	8	9
71	0	1	2	3	3	5	6	6	7	8	8	9
72	1	2	3	4	6	7	9					
73	1	3	5									
74	2	5										
75	3											
76												
77												
78												
79												

Aleación 2, $N = 27$
Unidad de hoja = 0.10

66					
67					
68					
69					
70					
71	2	8			
72	6	8			
73	4	7	9		
74	4	9			
75	5	9			
76	3	5	7	9	
77	1	3	6	7	8
78	1	2	4	6	
79	0	3	8		

Un cálculo con computadora da las medias y desviaciones estándares muestrales.

	N	MEAN	STDEV
ALEACIÓN 1	58	70.70	1.80
ALEACIÓN 2	27	76.13	2.42

A partir de otro cálculo con computadora (o mediante interpolación en la tabla 4), se encuentra $t_{0.025} = 1.99$ para 83 grados de libertad, de modo que el intervalo de confianza del 95% es

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}}$$

$$= 70.70 - 76.13 \pm 1.99 \sqrt{\frac{57(1.80)^2 + 26(2.42)^2}{83}} \sqrt{\frac{1}{58} + \frac{1}{27}}$$

o bien,

$$-6.4 < \mu_1 - \mu_2 < -4.5$$

Se tiene 95% de confianza de que la resistencia media de la aleación 2 es de 4.5 a 6.4 miles de libras por pulgada cuadrada mayor que la resistencia media de la aleación 1. ■

Es buena práctica mostrar presentaciones de tallo y hojas, diagramas de cajas o histogramas. Suelen revelar más que una diferencia media. En el último ejemplo, la primera población es casi simétrica, pero la segunda tiene una cola larga hacia la izquierda.

El intervalo de confianza de muestra grande se obtiene a partir de las regiones de aceptación para la prueba en la página 249.

EJEMPLO **Comparación de dos intervalos de confianza**

Con referencia al ejemplo anterior, encuentre el intervalo de confianza del 95% de muestra grande.

Solución

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 70.70 - 76.13 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(1.80)^2}{58} + \frac{(2.42)^2}{27}}$$

o bien,

$$-6.5 < \mu_1 - \mu_2 < -4.4$$

No hay mucha diferencia entre este intervalo de confianza de 95% y el del ejemplo anterior, donde se combinaron las varianzas. ■

Tamaños de muestra pequeños, pero desviaciones estándar poblacionales distintas y desconocidas: poblaciones normales

Cuando se trata con muestras aleatorias independientes de poblaciones normales, cuyas varianzas parecen no ser iguales, no deben combinarse. En tanto las poblaciones sean normales, una distribución t aproximada está disponible para realizar inferencias. El estadístico t' es el mismo que el estadístico para muestras grandes; pero, puesto que los tamaños de muestra son pequeños, su distribución se aproxima como una distribución t.

Estadístico para inferencia de muestras pequeñas, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, poblaciones normales

Para poblaciones normales, cuando los tamaños de muestra n_1 y n_2 no son grandes y $\sigma_1 \neq \sigma_2$,

$$t' = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

se distribuye aproximadamente como una t con grados de libertad estimados.

Los grados de libertad estimados para t' se calculan a partir de los valores observados de las varianzas muestrales s_1^2 y s_2^2.

$$\text{grados de libertad estimados} = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Los grados de libertad estimados a menudo se redondean al entero próximo inferior, de modo que puede consultarse una tabla t.

La prueba basada en t' se denomina **prueba de Smith-Satterthwaite**.

EJEMPLO **Cómo poner a prueba la igualdad del volumen medio de producto**

Un proceso para elaborar gasolina ecológica toma sacarosa, que puede derivarse de biomasa, y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. No se trata de un proceso para elaborar un aditivo para gasolina, sino combustible en sí, de modo que la investigación todavía está en su fase de plan piloto. En un paso durante un proceso de la planta piloto, el producto consiste en cadenas de carbono de longitud 3. Se realizaron nueve corridas con cada uno de dos catalizadores y los volúmenes de producto (gal) son

catalizador 1	0.63	2.64	1.85	1.68	1.09	1.67	0.73	1.04	0.68
catalizador 2	3.71	4.09	4.11	3.75	3.49	3.27	3.72	3.49	4.26

Los tamaños de muestra $n_1 = n_2 = 9$ y los estadísticos de resumen son

$$\overline{x} = 1.334, \quad s_1^2 = 0.4548 \quad \overline{y} = 3.766 \quad s_2^2 = 0.1089$$

Un ingeniero químico intenta demostrar que los volúmenes medios del producto son diferentes. Pruebe con $\alpha = 0.05$.

Solución La prueba trata $\delta = \mu_1 - \mu_2$ y los tamaños de muestra $n_1 = n_2 = 9$ son pequeños. Note que no hay valores atípicos ni un alejamiento evidente de la normalidad. Sin embargo, $s_1^2 = 0.4548$ es más de cuatro veces $s_2^2 = 0.1089$. No se debería combinar.

1. *Hipótesis nula:* $\delta = 0$
   Hipótesis alternativa: $\delta \neq 0$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* se elige el estadístico de prueba Smith-Satterthwaite, con $\delta_0 = 0$,

$$t' = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

La hipótesis nula se rechazará si $t' < -t_{0.025}$ o $t' > t_{0.025}$, pero el valor de $t_{0.025}$ depende de los grados de libertad estimados.

4. *Cálculos:* como primer paso, estime los grados de libertad

$$\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{0.4548}{9}+\frac{0.1089}{9}\right)^2}{\frac{(0.4548/9)^2}{9-1}+\frac{(0.1089/9)^2}{9-1}} = 11.62$$

Para usar la tabla t, redondee a 11 y obtenga $t_{0.025} = 2.201$.
El valor observado del estadístico de prueba es

$$t' = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{1.334-3.766-0}{\sqrt{\frac{0.4548}{9}+\frac{0.1089}{9}}} = -9.71$$

5. *Decisión:* puesto que $t' = -9.71$ es menor que -2.201, la hipótesis nula se debe rechazar al nivel de significancia de 0.05. El valor de t' es tan pequeño que el valor P es 0.0000 cuando se redondea. En otras palabras, hay evidencia extremadamente fuerte de que los volúmenes medios del producto son diferentes para los dos catalizadores. ■

Los intervalos de confianza pueden indicar qué diferentes son factibles en las medias, no solo que las medias son diferentes.

Intervalo de confianza para $\delta = \mu_1 - \mu_2$, poblaciones normales, $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Un intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)\%$ para $\delta = \mu_1 - \mu_2$

$$\left(\overline{x}-\overline{y}-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}},\ \overline{x}-\overline{y}+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

donde $t_{\alpha/2}$ tiene los grados de libertad estimados para t'.

EJEMPLO

Un intervalo de confianza para la diferencia de producciones medias cuando las varianzas no son iguales

Con referencia al ejemplo anterior, obtenga el intervalo de confianza del 95% para $\delta = \mu_1 - \mu_2$.

Solución A partir del ejemplo anterior, se tiene $\overline{x} = 1.334$, $s_1^2 = 0.4548$, $\overline{y} = 3.766$, $s_2^2 = 0.1089$ y $t_{0.025} = 2.201$ para 11 grados de libertad. Se obtiene

$$\left(1.334-3.776-2.201\sqrt{0.45489+\frac{0.1089}{9}},\ 1.334-3.776+2.201\sqrt{0.45489+\frac{0.1089}{9}}\right)$$

o bien, $(-2.982, -1.880)$ galones. El volumen medio del producto para el segundo catalizador es mayor que el del primer catalizador por 1.880 a 2.982 galones. ■

Aunque los cálculos para desviaciones estándar distintas parecen tediosos a mano, los software estadísticos permitirán esta opción, además de la combinación (véase el ejercicio 8.35).

Ejercicios

8.1 Consulte el ejemplo 2.58, donde $n_1 = 30$ especímenes de maderos 2×4 tienen $\overline{x} = 1{,}908.8$ y $s_1 = 327.1$ psi. Una segunda muestra de tamaño $n_2 = 40$ especímenes de maderos de mayor dimensión, 2×6, produjeron $\overline{y} = 2{,}114.3$ y $s_2 = 472.3$. Pruebe, con $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de la igualdad de las medias de la resistencia a la tensión contra la alternativa unilateral de que la media de la resistencia a la tensión para la segunda población es mayor que la de la primera.

8.2 Consulte el ejercicio 8.1 y obtenga un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en la resistencia media a la tensión.

8.3 Para dos mezclas de concreto diferentes, se obtiene el módulo dinámico del concreto. Para la primera mezcla, $n_1 = 33$, $\bar{x} = 115.1$ y $s_1 = 0.47$ psi. Para la segunda mezcla, $n_2 = 31$, $\bar{y} = 114.6$ y $s_2 = 0.38$. Pruebe, con $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de igualdad de las medias del módulo dinámico contra la alternativa bilateral.

8.4 Consulte el ejercicio 8.3 y obtenga un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de las medias del módulo dinámico.

8.5 Una investigación de dos tipos de equipo de fotocopiado demostró que 75 fallas del primer tipo de equipo tardaban en promedio 83.2 minutos en repararse, con una desviación estándar de 19.3 minutos, mientras que 75 fallas del segundo tipo de equipo tardaban en promedio 90.8 minutos en repararse, con una desviación estándar de 21.4 minutos.

a) Pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (a saber, la hipótesis de que, en promedio, la reparación de cualquier tipo de equipo tarda la misma cantidad de tiempo) contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, con nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

b) Con 19.3 y 21.4, como estimaciones de σ_1 y σ_2, encuentre la probabilidad de fallar en rechazar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ con el criterio del inciso *a*), cuando en realidad $\mu_1 - \mu_2 = -12$.

8.6 Al estudiar el flujo de tránsito en dos intersecciones transitadas, entre las 4 P.M. y las 6 P.M. (para determinar la posible necesidad de señales de vuelta), se descubrió que, en 40 días laborales, hubo en promedio 247.3 automóviles que se aproximaron a la primera intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda, mientras que en 30 días laborales hubo, en promedio, 254.1 automóviles que se aproximaron a la segunda intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda. Las desviaciones estándar muestrales correspondientes son $s_1 = 15.2$ y $s_2 = 18.7$.

a) Pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

b) Con 15.2 y 18.7, como estimaciones de σ_1 y σ_2, encuentre la probabilidad de fallar en rechazar (aceptar) la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$, cuando en realidad $|\mu_1 - \mu_2| = 15.6$.

8.7 Dadas las observaciones $n_1 = 3$ y $n_2 = 2$ de las poblaciones 1 y 2, respectivamente,

Población 1	6	2	7
Población 2	14	10	

a) Calcule las tres desviaciones $x - \bar{x}$ y dos desviaciones $y - \bar{y}$.

b) Use sus resultados del inciso *a*), para obtener la varianza combinada.

8.8 Se compararán dos procedimientos para grabar circuitos integrados. Dadas 10 unidades, cinco se preparan usando el procedimiento de grabado *A* y cinco se preparan con el procedimiento de grabado *B*.

a) ¿Cómo asignaría los procedimientos de grabado a las 10 unidades?

b) La respuesta es el porcentaje de área sobre el circuito integrado, donde el grabado resultó inadecuado. Suponga que los resultados son

Procedimiento *A*	Procedimiento *B*
5	1
2	3
9	4
6	0
3	2

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en medias.

c) ¿Qué suposiciones hizo para su respuesta al inciso *b*)?

8.9 Al medir especímenes de hilo de nylon, tomados de dos máquinas de hilado, se descubrió que 8 especímenes de la primera máquina tenían un denier medio de 9.67 con una desviación estándar de 1.81, en tanto que 10 especímenes de la segunda máquina tenían un denier medio de 7.43, con una desviación estándar de 1.48. Si se supone que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza, pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 1.5$ contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 > 1.5$, con nivel de significancia de 0.05.

8.10 Como parte de un programa de capacitación industrial, algunos aprendices se instruyen con el método *A*, que es una instrucción directa basada en computadora, y a algunos se les instruye con el método *B*, que también incluye la atención personal de un instructor. Si muestras aleatorias de tamaño 10 se toman de grupos grandes de aprendices instruidos, por cada uno de estos dos métodos, y las calificaciones que obtienen en pruebas de desempeño adecuadas son

Método A:	71	75	65	69	73	66	68	71	74	68
Método B:	72	77	84	78	69	70	77	73	65	75

use el nivel de significancia de 0.05 para probar la afirmación de que el método *B* es más efectivo. Suponga que las poblaciones muestreadas pueden aproximarse cercanamente, con distribuciones normales que tienen la misma varianza.

8.11 Los siguientes son los números de ventas que una muestra de 9 vendedores de sustancias químicas industriales en California y una muestra de 6 vendedores de químicos industriales en Oregon realizaron durante cierto periodo de tiempo fijo:

California:	59	68	44	71	63	46	69	54	48
Oregon:	50	36	62	52	70	41			

Si supone que las poblaciones muestreadas pueden aproximarse cercanamente con distribuciones norma-

les que tienen la misma varianza, pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, con el nivel de significancia de 0.01.

8.12 Con referencia al ejemplo de la página 249, construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera diferencia entre la resistencia promedio de los dos tipos de alambre.

8.13 En cada una de las siguientes partes, decida primero si usar o no el estimador combinado de varianza. Suponga que las poblaciones son normales.

a) Los siguientes son valores de dureza Brinell, obtenidos de muestras de dos aleaciones de magnesio antes de someterse a prueba:

Aleación 1:	66.3	63.5	64.9	61.8	64.3	64.7	65.1	64.5	68.4	63.2
Aleación 2:	71.3	60.4	62.6	63.9	68.8	70.1	64.8	68.9	65.8	66.2

Use el nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 < 0$.

b) Para comparar dos tipos de parachoques, 6 de cada tipo, se montaron en cierto tipo de automóvil compacto y cada auto se estrelló contra un muro de concreto a 5 millas por hora; los siguientes son los costos de reparación (en dólares):

Parachoques 1:	407	448	423	465	402	419
Parachoques 2:	434	415	412	451	433	429

Use el nivel de significancia de 0.01 para probar si la diferencia entre las dos medias poblacionales es significativa.

8.4 Pruebas de diferencias pareadas

En la aplicación de la prueba *t* de dos muestras, es necesario observar que las muestras sean independientes. Por ejemplo, la prueba no se puede utilizar cuando se trata con datos "antes y después", los CI de esposos y esposas, así como muchas otras situaciones donde los datos están naturalmente pareados. En vez de ello, las comparaciones se basan en **diferencias pareadas**.

Un fabricante está interesado por la pérdida de peso de las piezas de cerámica durante un proceso de cocción. Las lecturas antes y después de la cocción, sobre el mismo espécimen, están naturalmente pareadas. No tendría sentido comparar el peso antes de cocción de un espécimen, con el peso después de cocción de otro espécimen. Sea que el par de variables aleatorias (X_i, Y_i) denotan el peso antes y el peso después de la cocción para el *i*-ésimo espécimen, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Un análisis estadístico procede al considerar las diferencias

$$D_i = X_i - Y_i \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Esta colección de diferencias (con signo) se trata después como una muestra aleatoria de tamaño *n* de una población que tiene media μ_D. $\mu_D = 0$ y se interpreta como indicador de que las medias de las dos respuestas son las mismas, así como $\mu_D > 0$ como indicador de que la respuesta media de la primera es mayor que la de la segunda.

Las pruebas de la hipótesis nula H_0: $\mu_D = \mu_{D,0}$ se basan en la razón

$$\frac{\overline{D} - \mu_{D,0}}{S_D/\sqrt{n}} \quad \text{donde } \overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}{n-1}$$

Si *n* es pequeña, esta razón se trata como el estadístico *t* de una muestra de la página 233. De otro modo, la razón se trata como el estadístico de muestra grande de la página 232.

EJEMPLO **Cómo realizar una prueba *t* pareada**

Las siguientes son las pérdidas semanales promedio de horas-hombre debidas a accidentes en 10 plantas industriales, antes y después de poner en operación cierto programa de seguridad:

Antes:	45	73	46	124	33	57	83	34	26	17
Después:	36	60	44	119	35	51	77	29	24	11

Use el nivel de significancia de 0.05 para probar si el programa de seguridad es efectivo.

Solución No es posible aplicar la prueba de muestras independientes porque están correlacionadas las pérdidas semanales de horas-hombre, antes y después, en la misma planta industrial. Aquí existe el pareado evidente de las dos observaciones.

1. *Hipótesis nula:* $\mu_D = 0$
   Hipótesis alternativa: $\mu_D > 0$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $t > 1.833$, el valor de $t_{0.005}$ para $10 - 1 = 9$ grados de libertad, donde

$$t = \frac{\overline{D} - 0}{S_D/\sqrt{n}}$$

   y $\overline{D}$ y S_D son la media y la desviación estándar de las diferencias.
4. *Cálculos:* las diferencias son

$$9 \quad 13 \quad 2 \quad 5 \quad -2 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 2 \quad 6$$

   su media $\overline{d} = 5.2$, su desviación estándar es $s_D = 4.08$, de modo que

$$t = \frac{5.2 - 0}{4.08/\sqrt{10}} = 4.03$$

5. *Decisión:* puesto que $t = 4.03$ supera a 1.833, la hipótesis nula debe rechazarse con nivel $\alpha = 0.05$. Se concluye que el programa de seguridad industrial es efectivo. La evidencia es muy fuerte, pues un cálculo por computadora da el valor P 0.0015 (véase la figura 8.4). Si $\mu_D = 0$, solo en 15 de 10,000 veces se observaría t mayor que o igual a 4.03. ■

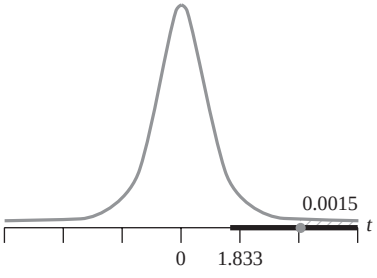


Figura 8.4
Prueba t pareada: valor $P = 0.0015$ para $t = 4.03$ y grados de libertad (g.l.) = 9

En conexión con este tipo de problema, la prueba t de una muestra se conoce como **prueba *t* de diferencias pareadas** o tan solo **prueba *t* pareada**.

EJEMPLO

Un intervalo de confianza del 90% para la media de una diferencia pareada

Con referencia al ejemplo anterior, encuentre un intervalo de confianza del 90% para el mejoramiento medio en las horas-hombre perdidas.

Solución Las $n = 10$ diferencias tienen $\overline{d} = 5.2$ y $s_D = 4.08$. Puesto que $t_{0.05} = 1.833$, el intervalo de confianza del 90% para μ_D, el mejoramiento medio, es

$$5.2 - 1.833\,\frac{4.08}{\sqrt{10}} < \mu_D < 5.2 + 1.833\,\frac{4.08}{\sqrt{10}} \quad \text{o bien,} \quad 2.8 < \mu_D < 7.7$$

horas-hombre por semana. Se tiene una confianza del 90% de que se pierdan entre 2.8 y 7.7 horas-hombre menos por semana, en promedio, después del programa de seguridad. ■

El siguiente ejemplo ilustra algunos puntos prácticos cuando se realiza un experimento de diferencias pareadas, incluida la aleatoriedad.

EJEMPLO **Comparación de medidas tomadas en dos laboratorios**

Una ley estatal requiere que las plantas municipales de tratamiento de aguas residuales monitoreen sus descargas en ríos y lagos. Una planta de tratamiento podría elegir enviar sus muestras a un laboratorio comercial de su elección. La preocupación por este automonitoreo condujo a un ingeniero civil a diseñar un experimento de diferencias pareadas.[2] Exactamente la misma botella del afluente no se puede enviar a dos laboratorios diferentes. Para relacionar "idénticos" tan estrechamente como sea posible, se tomaría una muestra del afluente en una botella grande de muestra y se vertería sobre dos botellas espécimen abiertas. Cuando estén llenas y tapadas, se lanzará una moneda para ver si la de la derecha se envía al laboratorio comercial A o al laboratorio estatal de higiene de Wisconsin. Este proceso se repite 11 veces. Los resultados, para la respuesta de sólidos suspendidos (SS), son

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Laboratorio comercial	27	23	64	44	30	75	26	124	54	30	14
Laboratorio estatal	15	13	22	29	31	64	30	64	56	20	21
Diferencia $x_i - y_i$	12	10	42	15	−1	11	−4	60	−2	10	−7

Obtenga un intervalo de confianza del 95% y busque algunas características inusuales en los datos.

Solución El tamaño de la muestra es relativamente pequeño, de modo que se supone normalidad, y el intervalo de confianza se basa en la distribución t. Se tiene $n = 11$ y se calcula $\overline{d} = 13.27$ $s_D^2 = 418.61$. Entonces, con $n - 1 = 11 - 1 = 10$ grados de libertad, $t_{0.025} = 2.228$, por lo que el intervalo de confianza del 95% es

$$\left(13.27 - 2.228\sqrt{\frac{418.61}{11}}, 13.27 + 2.228\sqrt{\frac{418.61}{11}}\right) \quad \text{o bien,} \quad (-0.47,\ 27.01)$$

Este intervalo de confianza del 95% justo contiene el 0, de modo que, con esta muestra de tamaño pequeño, no se indica diferencia. Pero, espere: observe el diagrama de puntos de las diferencias en la figura 8.5. Existen dos diferencias muy grandes que serían inusuales si la muestra se tomara de una población normal. La validez del intervalo de confianza está, al menos, bajo sospecha. En el ejercicio 8.17 se le pide tratar la transformación de raíz cuadrada para saber si mejora la situación. ■

Figura 8.5
Diagrama de puntos de diferencias en sólidos suspendidos; se presentan valores atípicos

[2]R. Johnson y D. Wichern (2007), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, página 276.

Ejercicios

8.14 Un ingeniero civil quiere comparar dos instrumentos para medir la cantidad de bifenilos policlorados (PCB) en tallos de maíz. Se corta y tritura una muestra de tallos, luego se toman dos cucharadas del material. Una se mide con el primer instrumento y la otra con el segundo instrumento. Todo este proceso se repite cinco veces. Los resultados, en partes por miles de millones, son los siguientes:

Muestra núm.	Instrumento 1	Instrumento 2
1	3	4
2	8	7
3	9	6
4	4	3
5	6	5

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de las medias en lecturas de instrumento, suponiendo que las diferencias tienen una distribución normal.

8.15 Consulte el ejercicio 8.14. Pruebe, con $\alpha = 0.05$, que la diferencia de las medias es 0 contra una alternativa bilateral.

8.16 Los siguientes datos se obtuvieron en un experimento diseñado para comprobar si hay una diferencia sistemática en los pesos obtenidos con dos básculas diferentes:

	Peso en gramos	
	Báscula I	Báscula II
Espécimen de roca 1	11.23	11.27
Espécimen de roca 2	14.36	14.41
Espécimen de roca 3	8.33	8.35
Espécimen de roca 4	10.50	10.52
Espécimen de roca 5	23.42	23.41
Espécimen de roca 6	9.15	9.17
Espécimen de roca 7	13.47	13.52
Espécimen de roca 8	6.47	6.46
Espécimen de roca 9	12.40	12.45
Espécimen de roca 10	19.38	19.35

Use la prueba *t* pareada, en el nivel de significancia de 0.05, para tratar de establecer que la diferencia de las medias de los pesos obtenidos con las dos básculas es distinta de cero.

8.17 Consulte el ejemplo que trata con los sólidos suspendidos en el afluente de una planta de tratamiento en la página 261. Tome la raíz cuadrada de cada una de las mediciones, luego tome la diferencia.

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para μ_D.

b) Realice una prueba para nivel $\alpha = 0.05$ de H_0: $\mu_D = 0$ contra una alternativa bilateral. Verifique que la conclusión sea la misma que la obtenida por el intervalo de confianza.

c) Elabore un diagrama de puntos con dichas diferencias y decida si la transformación en esencia removió los valores atípicos.

8.18 Consulte el ejemplo concerniente a los sólidos suspendidos en el afluente de una planta de tratamiento de la página 261. Tome el logaritmo natural de cada una de las mediciones, luego tome la diferencia.

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para μ_D.

b) Realice una prueba con nivel $\alpha = 0.05$ de H_0: $\mu_D = 0$ contra una alternativa bilateral. Verifique que la conclusión sea la misma que la obtenida por el intervalo de confianza.

c) Elabore un diagrama de puntos de dichas diferencias y decida si la transformación en esencia removió los valores atípicos.

8.19 Una compañía de gafas para el sol quiere que los potenciales clientes comparen dos tipos de lentes, los actuales lentes *A* y uno fabricado con un nuevo material *B* de alta tecnología. Están disponibles las gafas fabricadas con los lentes *A* y las gafas fabricadas con los lentes *B*. A cada persona, en una muestra de tamaño 43, se le pide usar uno de cada tipo durante todo un día. Después de un día al sol, se les solicita calificar el par de dicho día sobre una escala de 1 a 7, donde las calificaciones más altas son las mejores. Las diferencias en calificaciones (lentes *B* de alta tecnología) – (lentes actuales *A*) tienen media de 0.7 y varianza de 3.8. Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias.

8.20 Consulte el ejercicio 8.19, luego realice una prueba para demostrar que los lentes de alta tecnología son los preferidos por los consumidores. Tome $\alpha = 0.05$.

8.21 En un estudio acerca de la efectividad del ejercicio físico en la reducción de peso, un grupo de 16 individuos que se involucró en un programa prescrito de ejercicio físico durante un mes mostró los siguientes resultados:

Peso antes (libras)	Peso después (libras)	Peso antes (libras)	Peso después (libras)
209	196	170	164
178	171	153	152
169	170	183	179
212	207	165	162
180	177	201	199
192	190	179	173
158	159	243	231
180	180	144	140

Use el nivel de significancia de 0.01 para probar si el programa de ejercicios prescrito es efectivo.

8.5 Aspectos de diseño: aleatoriedad y apareado

A menudo el experimentador puede elegir cuál de los dos tratamientos aplicar a una unidad individual. Entonces, es posible realizar ya sea una comparación de muestras independientes o una comparación de diferencias pareadas de medias. El método de asignar las unidades a dos grupos o pares llega a ser crucial para la validez de los procedimientos estadísticos, al comparar las medias de dos poblaciones. Primero se enfatiza la importancia de la aleatoriedad en el contexto del diseño de muestras independientes de un experimento comparativo.

Diseño de muestras independientes: aleatoriedad

En muchos estudios comparativos, el investigador aplica un tratamiento o el otro a un objeto que se conoce como unidad experimental. El método de asignar los tratamientos a las unidades experimentales puede ser crucial para la validez de los procedimientos estadísticos. Suponga que un químico tiene una nueva fórmula para impermeabilización, que aplica a varios pares de zapatos que están casi como nuevos. Aplica la antigua fórmula a varios pares de zapatos con raspaduras. Al final de un mes, medirá la capacidad de cada par de zapatos para soportar el agua. No es necesario ser estadístico para darse cuenta de que este no es un buen diseño experimental. Las personas con zapatos con raspaduras quizá caminan más y lo hacen en todo tipo de clima. Dichas fuentes de variación podrían muy bien conducir a sesgos sistemáticos, que hagan que la nueva fórmula parezca mejor que la anterior, aun cuando este no sea el caso. Los pares de zapatos necesitan asignarse aleatoriamente a los tratamientos con las fórmulas impermeabilizantes anterior y nueva.

Cuando sea posible, las $n = n_1 + n_2$ unidades experimentales deberían asignarse al azar a los dos tratamientos. Lo anterior significa que todas las $\binom{n}{n_1}$ posibles selecciones de n_1 unidades a recibir el primer tratamiento son igualmente probables. De manera práctica, la asignación se logra al seleccionar n_1 enteros aleatorios entre 1 y n. Las unidades experimentales correspondientes se asignan al primer tratamiento. Por lo general, una prueba tendrá más poder si son iguales los dos tamaños de muestra.

En resumen, se deben asignar los tratamientos activamente al azar a las unidades experimentales. Este proceso se conoce como **aleatorio**.

Propósito de la aleatoriedad

La **aleatoriedad** de los tratamientos evita que las fuentes de variación descontroladas ejerzan una influencia sistemática sobre las respuestas.

Diseño de diferencias pareadas: pareado y aleatorio

De acuerdo con una característica que es probable influya en la respuesta, el objetivo de las unidades experimentales **pareadas** consiste en eliminar esta fuente de variación de la comparación. En el contexto de la impermeabilización de zapatos, cada individuo podría tener la fórmula anterior en un zapato y la fórmula nueva en el otro. Como el análisis *t* pareado tan solo usa diferencias del mismo par, tal estrategia experimental eliminaría la mayoría de la variación en la respuesta debido a terrenos, distancia recorrida y condiciones climáticas diferentes.

Parear de acuerdo con algunas variable(s) contempladas para influir en la respuesta eliminará el efecto de dicha variable del análisis.

Incluso después de parear las unidades, hay necesidad de aleatorizarlas. Para cada par, debería lanzarse una moneda para asignar los tratamientos. En el contexto del ejemplo de impermeabilización, la fórmula anterior podría aplicarse al zapato derecho si es cara, y al zapato izquierdo si es cruz. La fórmula nueva se aplica al otro zapato. Esta aleatoriedad, restringida a estar dentro de pares, evitaría influencias sistemáticas como las causadas por el hecho de que una mayoría de individuos tendería a patear objetos con su zapato derecho.

Aleatorizar la asignación de tratamientos dentro de un par ayuda a evitar que algunas otras variables descontroladas influyan en las respuestas de una forma sistemática.

Advierta que, en el ejemplo de la página 259, el experimentador no tiene control sobre el antes y el después. Muchas variables descontroladas también pueden cambiar durante el curso del experimento: menos horas laborales debidas a huelgas, desfase de un antiguo tipo de equipo, etcétera. Una de ellas sería la causa del mejoramiento, en vez del programa de seguridad.

En el capítulo 12 se da seguimiento a las ideas de aleatoriedad y bloqueo. El propósito aquí fue demostrar qué pasos prácticos pueden darse para satisfacer las suposiciones idealistas de las muestras aleatorias cuando se comparan dos tratamientos.

Ejercicios

8.22 Un investigador quiere comparar dos protocolos de red ocupados registrando el número de mensajes que se transmiten exitosamente por la red en un día. Describa cómo seleccionar 5 de los próximos 10 días laborales para tratar el protocolo 1. El protocolo 2 se ensayaría en los otros 5 días.

8.23 Un ingeniero eléctrico desarrolló un tablero de circuito modificado para elevadores. Suponga que 3 tableros de circuito modificados y 6 elevadores están disponibles para una prueba comparativa de los tableros de circuito antiguos contra los modificados.

a) Describa cómo seleccionaría los 3 elevadores en los que instalaría los tableros de circuito modificados. Los tableros de circuito antiguos se instalarán en los otros 3 elevadores.

b) De manera alternativa, describa cómo realizaría una comparación pareada, luego aleatorice dentro del par.

8.24 Capacitar a un empleado típico en la operación de una máquina asistida por computadora tarda un promedio de 10 semanas. El instructor tiene un nuevo enfoque que, cree, conducirá a un aprendizaje más rápido. Trata de enseñar a 5 personas con el nuevo método para, luego, comparar sus tiempos de aprendizaje con los de 5 personas seleccionadas al azar capacitadas con el método anterior. Con la finalidad de obtener 5 estudiantes de los 25 candidatos disponibles, solicita voluntarios. ¿Por qué esta es una mala idea?

8.25 ¿Cómo volvería aleatoria una prueba de dos muestras, si 50 automóviles están disponibles para un estudio de emisiones y usted quiere comparar un dispositivo de contaminación de aire modificado con la producción actual?

Sí y no

Sí

1. Cuando los tamaños de muestra sean grandes, determine los límites de un intervalo de confianza del 100 $(1-\alpha)$% para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$, como

$$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

2. Cuando cada una de las dos muestras sean de poblaciones normales con la misma varianza, determine los límites de un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$% para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$, como

$$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

donde la estimación combinada de varianza

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

y $t_{\alpha/2}$ se basa en $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

3. Cuando analice datos de un diseño de diferencias pareadas, use los resultados para una muestra, pero aplicada a las diferencias de cada diferencia pareada. Si la diferencia de mediciones pareadas tiene una distribución normal, determine un intervalo de confianza del $100(1-\alpha\%)$ para la diferencia de medias μ_D, como

$$\left(\overline{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}},\ \overline{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $t_{\alpha/2}$ se basa en $n - 1$ grados de libertad.

4. Cuando compare dos tratamientos, con el diseño de muestras independientes, asigne al azar los tratamientos a los grupos siempre que sea posible. Con el diseño de diferencias pareadas, asigne al azar los tratamientos dentro de cada par.

No

1. No combine las dos varianzas muestrales s_1^2 y s_2^2 si son muy diferentes. Se sugiere un factor de 4 como muy diferente.

Ejercicios de repaso

8.26 Con referencia al ejercicio 2.64, pruebe que la carga media del electrón es la misma para ambos tubos. Utilice $\alpha = 0.05$.

8.27 Con referencia al ejercicio anterior, encuentre un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las dos medias.

8.28 Se compararán dos aditivos químicos para secar pintura. Se preparan cinco latas de aerosol usando el aditivo A y seis se preparan usando el aditivo B. Luego, se rocían 11 tableros diferentes, una lata por tablero.

a) La respuesta es el tiempo en minutos para que seque la superficie, mientras los estadísticos del resumen son

	Tamaño de muestra	Media	Desviación estándar
Aditivo A	5	16.3	2.7
Aditivo B	6	12.1	1.1

¿Debería combinar o no las estimaciones de la varianza con la finalidad de realizar una prueba de hipótesis que tenga la intención de demostrar que hay una diferencia en las medias? Explique cómo procedería.

b) Realice la prueba para el inciso *a*) usando $\alpha = 0.05$.

c) Describa cómo volvería aleatoria la asignación de pinturas cuando realice este experimento.

8.29 Con referencia al ejemplo de la página 14, pruebe que el contenido medio de cobre es el mismo para ambas soldaduras.

8.30 Con referencia al ejercicio anterior, encuentre un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las dos medias.

8.31 Se toman muestras aleatorias de dos poblaciones normales con $\sigma_1 = 10.8$ y $\sigma_2 = 14.4$ para probar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 53.2$ contra la hipótesis alternativa $\mu_1 - \mu_2 > 53.2$, con nivel de significancia $\alpha = 0.01$. Determine el tamaño de muestra común $n = n_1 = n_2$ que se requiere, si la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula debe ser 0.09 cuando $\mu_1 - \mu_2 = 66.7$.

8.32 Con referencia al ejemplo de la página 254, encuentre un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de resistencias medias de las aleaciones

a) usando el procedimiento combinado;

b) usando el procedimiento de muestras grandes.

8.33 ¿Cómo volvería aleatoria la prueba de dos muestras en cada uno de los siguientes casos?

a) Veinte automóviles están disponibles para un estudio de millaje y usted quiere comparar una bujía modificada con la regular.

b) Un nuevo horno se comparará con el antiguo. Están disponibles 15 especímenes cerámicos para cocción.

8.34 Con referencia al inciso *a*) del ejercicio 8.33, ¿cómo parearía y luego usaría la aleatoriedad para una prueba pareada?

8.35 Dos muestras en C1 y C2 pueden analizarse usando los comandos *MINITAB*

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Basic Statistics > 2-Sample t**
> Escriba *C*1 en **First** *C*2 en **Second.**
> Haga clic **Samples in different columns**.
> Haga clic **Assume equal variances**.
> Haga clic en **OK**.

Si no hace clic en **Assume equal variances**, se realiza la prueba de Smith-Satterthwaite.

La salida que se relaciona con el ejemplo de la página 254 es

```
TWO SAMPLE T FOR ALLOY 1 VS ALLOY 2
          N    MEAN    STDEV   SE MEAN
ALLOY 1  58   70.70     1.80      0.24
ALLOY 2  27   76.13     2.42      0.47

95 PCT C1 FOR MU ALLOY 1 - MU ALLOY 2:
(-6.36, -4.50)
T TEST MU ALLOY 1 = MU ALLOY 2 (VS NE):
T = - 11.58 P = 0.000 DF = 83.0
```

Realice la prueba para los datos en el ejercicio 8.10.

Términos clave

Aleatoriedad 264
Diferencias pareadas 259
Estimador combinado de varianza 252
Pareado 264
Prueba de Smith-Satterthwaite 256
Prueba *t* de diferencias pareadas 260
Prueba *t* de dos muestras 253
Prueba *t* pareada 260
Prueba *Z* de dos muestras 249
Tratamiento 245

Tabla 8.1 Resumen de las fórmulas para inferencias acerca de una media (μ), o una diferencia de dos medias ($\mu_1 - \mu_2$)

Intervalo de confianza = Estimador puntual ± (valor tabulado)(dev. std. estimada o verdadera)

$$\textbf{Estadístico de prueba} = \frac{\text{Estimador puntual} - \text{Valor de parámetro en } H_0 \text{(hipótesis nula)}}{\text{Dev. std. de estimador puntual (estimada o verdadera)}}$$

	Muestra sencilla		Muestras independientes			Diferencias pareadas
Población(es)	**General**	**Normal con σ desconocida**	**Normal** $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$	**Normal** $\sigma_1 \neq \sigma_2$	**General**	**Normal para la diferencia $D_i = X_i - Y_i$**
Inferencia sobre	Media μ	Media μ	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	μ_D
Muestra(s)	$X_1, \ldots, X_n$	$X_1, \ldots, X_n$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$D_1 = X_1 - Y_1$ $\vdots$ $D_n = X_n - Y_n$
Tamaño de muestra n	Grande $n \geq 30$	$n \geq 2$	$n_1 \geq 2$ $n_2 \geq 2$	$n_1 \geq 2$ $n_2 \geq 2$	$n_1 \geq 30$ $n_2 \geq 30$	$n \geq 2$
Estimador puntual	$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$
Varianza del estimador puntual	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$\frac{\sigma_D^2}{n}$
Dev. std. estimada	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\frac{S_D}{\sqrt{n}}$
Distribución	Normal	Con t d.f. $= n - 1$	Con t d.f. $= n_1 + n_2 - 2$	Con t g.l. estimados†	Normal	Con t d.f. $= n - 1$
Estadístico de prueba	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\frac{\overline{D} - \mu_{D,0}}{S_D/\sqrt{n}}$ S_D = **dev. std. muestral de las D_i**

† **g.l.** $= [(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2 / [(n_1 - 1)^{-1}(s_1^2/n_1)^2 + (n_2 - 1)^{-1}(s_2^2/n_2)^2]$

CAPÍTULO

9 INFERENCIAS CONCERNIENTES A LAS VARIANZAS

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

9.1 La estimación de varianzas 268

9.2 Hipótesis concernientes a una varianza 271

9.3 Hipótesis concernientes a dos varianzas 272

Ejercicios de repaso 276

Términos clave 277

En los capítulos 7 y 8 se aprendió cómo juzgar el tamaño del error al estimar una media poblacional y cómo construir intervalos de confianza para medias, además de cómo realizar pruebas de hipótesis acerca de las medias de una y dos poblaciones. Como se verá en este y capítulos posteriores, métodos muy similares se aplican a inferencias acerca de otros parámetros poblacionales.

Este capítulo se enfocará, también, en las varianzas poblacionales, o desviaciones estándar, las cuales no son importantes únicamente por sí mismas, sino que en ocasiones tienen que calcularse antes de realizar inferencias acerca de otros parámetros. La sección 9.1 se dedica a la estimación de σ^2 y σ, en tanto que las secciones 9.2 y 9.3 examinan pruebas de hipótesis sobre tales parámetros.

9.1 La estimación de varianzas

En los capítulos anteriores se presentaron muchos ejemplos donde se estimó la desviación estándar poblacional mediante una desviación estándar muestral: se sustituyó la desviación estándar muestral S por σ en el intervalo de confianza de muestra grande para μ en la página 210, en la prueba de muestra grande concerniente μ de la página 232 y en la prueba de muestras grandes concerniente a la diferencia entre dos medias en la página 249. Hay muchos procedimientos estadísticos donde, por lo tanto, S se sustituye por σ o S^2 por σ^2. Asimismo, existen situaciones donde σ es el principal parámetro de interés.

Sea

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

la varianza muestral, con base en una muestra aleatoria de cualquier población, discreta o continua, con varianza σ^2. Del ejemplo en la página 155, se sigue que la media de la distribución muestral de S^2 está dada por σ^2.

Estimación insesgada de una varianza poblacional

La varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} \quad \text{es un estimador insesgado de } \sigma^2$$

Aunque la varianza muestral es un estimador insesgado de σ^2, no se sigue que la desviación estándar muestral también sea un estimador insesgado de σ; de hecho, no lo es. Sin embargo, para muestras grandes, el sesgo es pequeño, por lo que es práctica común estimar σ con s.

Además de s, las desviaciones estándar poblacionales en ocasiones se estiman en términos del **rango muestral** R, que se definió en la sección 2.6 como el valor mayor de una muestra menos el valor menor. Dada una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal, puede demostrarse que la distribución muestral del rango tiene la media $d_2\,\sigma$ y la desviación estándar $d_3\,\sigma$, donde d_2 y d_3 son constantes que dependen del tamaño de la muestra. Para $n = 1, 2, \ldots,$ y 10, sus valores son como se muestran en la siguiente tabla:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_2	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078
d_3	0.853	0.888	0.880	0.864	0.848	0.833	0.820	0.808	0.797

Por consiguiente, R/d_2 es una estimación insesgada de σ, mientras que para muestras muy pequeñas, $n \leq 5$, ofrece una estimación de σ casi tan buena como s. Conforme aumenta el tamaño de la muestra, es más eficiente utilizar s en vez de R/d_2. En la actualidad, el rango se usa para estimar σ, sobre todo en problemas de control de calidad industrial donde los tamaños de muestra, por lo general, son pequeños y la facilidad de cálculo es una preocupación fundamental. Esta aplicación se estudiará en el capítulo 15, donde necesitará los valores anteriores de la constante d_3.

EJEMPLO **Uso del rango muestral para estimar σ**

Con referencia al ejemplo de la página 253, use el rango de la primera muestra al estimar σ para la capacidad productora de calor del carbón de la primera mina.

Solución Como el valor más pequeño es 8,070, el valor más grande es 8,350 y $n = 5$, de modo que $d_2 = 2.326$, se tiene

$$\frac{R}{d_2} = \frac{8{,}350 - 8{,}070}{2.326} = 120.4$$

Observe que lo anterior está bastante cerca de la desviación estándar muestral $s = 125.5$. ■

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, las estimaciones de intervalo de σ o σ^2 se basan en la desviación estándar muestral o la varianza muestral. Para muestras aleatorias de poblaciones normales, se usa el teorema 6.5, de acuerdo con el cual

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Entonces, con χ^2_α definida como en la página 189 para una distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad, es posible afirmar con probabilidad $1 - \sigma$ que la desigualdad

$$\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}$$

se satisface. Una vez obtenidos los datos, se hace la misma afirmación con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza. Al resolver esta desigualdad para σ^2, se obtiene el siguiente resultado:

Intervalo de confianza para σ^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

Si se toma la raíz cuadrada de cada miembro de esta desigualdad, se obtiene el intervalo de confianza correspondiente de $(1-\alpha)100\%$ para σ.

Advierta que los intervalos de confianza para σ o σ^2, obtenidos al tomar colas iguales, como en la fórmula anterior, en realidad no proporcionan los intervalos de confianza más estrechos, ya que la distribución chi cuadrada no es simétrica. (Véase el ejercicio 7.26.) No obstante, se emplean en la mayoría de las aplicaciones, con la finalidad de evitar cálculos demasiado complicados. Para grados de libertad moderados, la elección de colas iguales es intrascendente.

EJEMPLO **Cómo encontrar un intervalo de confianza del 95% para σ**

Retomando el ejemplo de la página 190, suponga que los índices de refracción de 20 piezas de vidrio (seleccionadas al azar de un gran embarque comprado por la firma de óptica) tienen una varianza de $1.20 \cdot 10^{-4}$. Construya un intervalo de confianza del 95% para σ, la desviación estándar de la población muestreada.

Solución Para 20 – 1 = 19 grados de libertad, $\chi^2_{0.975} = 8.907$ y $\chi^2_{0.025} = 32.852$ de acuerdo con la tabla 5, de modo que la sustitución en la fórmula da como resultado

$$\frac{(19)(1.20 \cdot 10^{-4})}{32.852} < \sigma^2 < \frac{(19)(1.20 \cdot 10^{-4})}{8.907}$$

$$0.000069 < \sigma^2 < 0.000256$$

y, al tomar la raíz cuadrada,

$$0.0083 < \sigma < 0.0160$$

Esto significa que se tiene 95% de confianza de que el intervalo de 0.0083 a 0.0160 contiene a σ, la desviación estándar verdadera del índice de refracción. ■

El método que se analizó solo se aplica a muestras aleatorias de poblaciones normales (o, al menos, a muestras aleatorias de poblaciones que pueden aproximarse a distribuciones normales).

Ejercicios

9.1 Use los datos del ejercicio 7.57 para estimar σ para el indicador de desempeño clave en términos de

a) la desviación estándar muestral;

b) el rango muestral.

Compare las dos estimaciones al expresar su diferencia como porcentaje de la primera.

9.2 Con referencia al ejemplo de la página 253, use el rango de la segunda muestra para estimar σ para la capacidad productora de calor del carbón de la segunda mina, luego compare el resultado con la desviación estándar de la segunda muestra.

9.3 Use los datos del inciso *a*) del ejercicio 8.13 para estimar σ para la dureza Brinell de la aleación 1, en términos de

a) la desviación estándar muestral;

b) el rango muestral.

Compare las dos estimaciones al expresar su diferencia como porcentaje de la primera.

9.4 Con referencia al ejercicio 7.56, construya un intervalo de confianza del 99% para la varianza del rendimiento.

9.5 Con referencia al ejercicio 7.63, construya un intervalo de confianza del 99% para la varianza de la población muestreada.

9.6 Use el valor s obtenido en el ejercicio 9.3 para construir un intervalo de confianza del 98% para σ, al medir la variabilidad real en la dureza de la aleación 1.

9.2 Hipótesis concernientes a una varianza

En esta sección se considerará el problema de probar la hipótesis nula de que una varianza poblacional es igual a una constante especificada contra una alternativa uni o bilateral adecuada; esto es, se probará la hipótesis nula $\sigma^2 = \sigma_0^2$ contra una de las alternativas $\sigma^2 < \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ o $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Pruebas como esta son importantes siempre que se desee controlar la uniformidad de un producto o una operación. Suponga, por ejemplo, que un disco o una oblea de silicio se cortarán en pequeños cuadrados, o cubos, para usarse en la fabricación de un dispositivo semiconductor. Puesto que ciertas características eléctricas del dispositivo terminado pueden depender del grosor del cubo, es importante que todos los cubos se corten de una oblea que tenga aproximadamente el mismo grosor. Por ende, no solo el grosor medio de una oblea debe mantenerse dentro de las especificaciones, sino también la variación en grosor de una ubicación a otra en la oblea.

Al usar la teoría muestral como en la página 269, tales pruebas se basan en el hecho de que, para una muestra aleatoria de una población normal con la varianza σ_0^2

Estadístico de prueba concerniente a la varianza (población normal)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Las regiones críticas para tales pruebas son como se muestran en la siguiente tabla:

Regiones críticas para probar $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (población normal)	
Hipótesis alternativa	**Rechazar la hipótesis nula si:**
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ o bien $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$

En esta tabla, χ^2_α se define como en la página 189. Note que se usan colas iguales para la alternativa bilateral, aunque en realidad este no sea el mejor procedimiento, pues la distribución chi cuadrada no es simétrica. Para grados de libertad moderados, las dos pruebas son casi iguales.

EJEMPLO **Prueba de hipótesis concernientes a una desviación estándar**

El proceso de bruñido —que se utiliza para desbastar ciertas obleas de silicio al grosor adecuado— es aceptable solo si σ, la desviación estándar poblacional del grosor del cubo cortado de las obleas, es cuando mucho de 0.50 mil. Use el nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis nula $\sigma = 0.50$ contra la hipótesis alternativa $\sigma > 0.50$, si el grosor de 15 cubos cortados de tales obleas tiene una desviación estándar de 0.64 mil.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\sigma = 0.50$
   Hipótesis alternativa: $\sigma > 0.50$
2. *Nivel de significancia:* $\sigma = 0.05$

3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > 23.685$, el valor de $\chi^2_{0.05}$ para 14 grados de libertad, donde

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

4. *Cálculos:*

$$\chi^2 = \frac{(15-1)(0.64)^2}{(0.50)^2} = 22.94$$

5. *Decisión:* dado que $\chi^2 = 22.94$ no supera 23.685, la hipótesis nula no puede rechazarse; aun cuando la desviación estándar muestral supera 0.50, no hay suficiente evidencia para concluir que el proceso de bruñido sea insatisfactorio. ■

Software estadístico está fácilmente disponible para obtener otros valores de χ^2_α. Véase el ejercicio 9.23 para el *MINITAB* y el apéndice C para los comandos *R*.

9.3 Hipótesis concernientes a dos varianzas

La prueba *t* de dos muestras descrita en la sección 8.2 requiere que las varianzas de las dos poblaciones muestreadas sean iguales. En esta sección se describe una prueba de la hipótesis nula $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, que se aplica a muestras aleatorias independientes de dos poblaciones normales. Debe usarse con cierta discreción, pues es muy sensible a alejamientos de esta suposición.

Si muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, son tomadas de poblaciones normales, con la misma varianza, se sigue del teorema 6.6 que

Estadístico para prueba de igualdad de dos varianzas (poblaciones normales)

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

es una variable aleatoria que tiene la distribución F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad. Por consiguiente, si la hipótesis nula $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ es verdadera, la razón de las varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 ofrece un estadístico sobre el cual puede basarse la hipótesis nula.

La región crítica para probar la hipótesis nula $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra la hipótesis alternativa $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ es $F > F_\alpha$, donde F_α se define como en la página 190. De igual modo, la región crítica para probar la hipótesis nula contra la hipótesis alternativa $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ es $F < F_{1-\alpha}$, lo cual causa algunas dificultades, pues la tabla 6 solo contiene valores correspondientes a colas derechas de $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Sin embargo, pueden usarse el recíproco del estadístico de prueba original y la relación

$$F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_\alpha(\nu_2, \nu_1)}$$

que se presenta por primera vez en la página 191. Por lo tanto, la prueba se basa en el estadístico $F = S_2^2/S_1^2$ y la región crítica para someter a prueba la hipótesis nula $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra la hipótesis alternativa $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ se convierte en $F > F_\alpha$, donde F_α es el valor crítico adecuado de F para $n_2 - 1$ y $n_1 - 1$ grados de libertad.

Para la alternativa bilateral $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, la región crítica es $F < F_{1-\alpha/2}$ o $F > F_{\alpha/2}$, donde $F = S_1^2/S_2^2$ y los grados de libertad son $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$. En la práctica, esta prueba se modifica

como en el párrafo anterior, de modo que nuevamente se puede usar la tabla de valores F correspondiente a las colas derechas de $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Para tal finalidad, sea S_M^2 la representación de la más grande de las dos varianzas muestrales, S_m^2 la menor y los correspondientes tamaños de muestra se escriben como n_M y n_m. Por consiguiente, el estadístico de prueba se convierte en $F = S_M^2 / S_m^2$ y la región crítica es como se muestra en la siguiente tabla:

Regiones críticas para probar $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (poblaciones normales)		
Hipótesis alternativa	Estadístico de prueba	Rechazar la hipótesis nula si:
$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_2^2}{S_1^2}$	$F > F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1)$
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_M^2}{S_m^2}$	$F > F_{\alpha/2}(n_M - 1, n_m - 1)$

El nivel de significancia de dichas pruebas es α y las cifras entre paréntesis son los grados de libertad respectivos. Note que, como en la prueba chi cuadrada, se usan colas iguales en la prueba de dos colas como cuestión de conveniencia matemática, aun cuando la distribución F no sea simétrica.

EJEMPLO **Una prueba *F* unilateral de la igualdad de dos varianzas**

Se desea determinar si hay menos variabilidad en el chapado de plata realizado por la compañía 1 que en el realizado por la compañía 2. Si muestras aleatorias independientes de tamaño 12 del trabajo de las dos compañías dan como resultado $s_1 = 0.035$ mil y $s_2 = 0.062$ mil, pruebe la hipótesis nula $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra la hipótesis alternativa $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ con nivel de significancia 0.05.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
   Hipótesis alternativa: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $F > 2.82$, el valor de $F_{0.05}$ para 11 y 11 grados de libertad, donde
$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$
4. *Cálculos:*
$$F = \frac{(0.062)^2}{(0.035)^2} = 3.14$$
5. *Decisión:* dado que $F = 3.14$ supera 2.82, la hipótesis nula debe rechazarse; en otras palabras, los datos apoyan la afirmación de que el chapado efectuado por la compañía 1 es menos variable que el realizado por la compañía 2. ■

EJEMPLO **Una prueba bilateral para la igualdad de dos varianzas**

Con referencia al ejemplo que trata con la capacidad de producir calor del carbón de dos minas en la página 253, utilice el nivel de significancia de 0.02 para probar si es razonable suponer que las varianzas de las dos poblaciones muestreadas son iguales.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

   Hipótesis alternativa: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.02$

3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $F > 11.4$, el valor de $F_{0.01}$ para 4 y 5 grados de libertad, donde

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

   ya que $s_1^2 = 15{,}750$ es mayor que $s_2^2 = 10{,}920$.

4. *Cálculos:*

$$F = \frac{15{,}750}{10{,}920} = 1.44$$

5. *Decisión:* como $F = 1.44$ no supera 11.4, la hipótesis nula no puede rechazarse; no hay razón estadística real para dudar de la igualdad de las varianzas de las dos poblaciones. ■

Para obtener intervalos de confianza para la razón de varianzas, se necesita una distribución muestral ligeramente más general. A partir del resultado muestral sencillo,

$$\frac{(n_1 - 1)\, S_1^2}{\sigma_1^2} \quad \text{tiene una distribución chi cuadrada con } n_1 - 1 \text{ grados de libertad}$$

$$\frac{(n_2 - 1)\, S_2^2}{\sigma_2^2} \quad \text{tiene una distribución chi cuadrada con } n_2 - 1 \text{ grados de libertad}$$

y esas dos cantidades aleatorias son independientes, pues las muestras sobre las cuales se basan son independientes. En consecuencia,

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\text{chi cuadrada/grados de libertad}}{\text{chi cuadrada/grados de libertad}} = F$$

donde el lado derecho tiene una distribución F con ($n_1 - 1$ y $n_2 - 1$) grados de libertad, de acuerdo con la representación en la página 193.

Entonces, antes del muestreo, se puede afirmar con probabilidad $1 - \sigma$ que

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{S_1^2}{S_2^2}\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Al resolver esta desigualdad para σ_2^2/σ_1^2, se obtiene un intervalo de confianza en términos de las s_1^2 y s_2^2 observadas.

Intervalo de confianza para σ_2^2/σ_1^2 poblaciones normales

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\,\frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\,\frac{s_2^2}{s_1^2}$$

EJEMPLO **Intervalo de confianza para razón de varianzas de rendimiento**

Consulte el ejemplo de la página 256, acerca de la elaboración de gasolina ecológica a partir de sacarosa. Los tamaños de muestra iguales son $n_1 = n_2 = 9$, $s_1^2 = 0.4548$ y $s_2^2 = 0.1089$. Obtenga un intervalo de confianza del 98% para σ_2^2/σ_1^2.

Solución Como los grados de libertad para F son $(n_1 - 1, n^2 - 1) = (8, 8)$ y $\alpha/2 = 0.01$, se obtiene $F_{0.01} = 6.03$ y $F_{0.99} = 1/F_{0.01} = 1/6.03$. El intervalo de confianza del 98% para σ_2^2/σ_1^2 se convierte en

$$\left(\frac{1}{6.03}\frac{0.1089}{0.4548}, 6.03\frac{0.1089}{0.4548}\right) \quad \text{o bien,} \quad (0.04, 1.44)$$

La amplitud del intervalo ilustra la gran cantidad de variabilidad en varianzas, cuando los tamaños de muestra son pequeños. La segunda varianza, σ_2^2, podría ser tan pequeña como un veinticincoavo de σ_1^2 o ser mayor que σ_1^2. ■

Software estadístico está fácilmente disponible para determinar otros valores de $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$. Véase el ejercicio 9.23 para el *MINITAB* y el apéndice C para los comandos *R*.

Precaución

En marcado contraste con los procedimientos para realizar inferencias acerca de μ, la validez de los procedimientos en este capítulo dependen de manera más bien fuerte de la suposición de que la población subyacente es normal. La varianza muestral de S^2 puede cambiar cuando la población se aleja de la normalidad al tener, por ejemplo, una sola cola larga. Es posible demostrar que, cuando la población subyacente sea normal, la varianza muestral de S^2 es $2\sigma^4/(n-1)$. Sin embargo, para distribuciones no normales, la varianza muestral de S^2 depende no solo de σ^2, sino también de los momentos de población tercero y cuarto, μ_3 y μ_4 (véase la página 94). En consecuencia, podría ser mucho mayor que $2\sigma^4/(n-1)$. Este comportamiento invalida por completo cualquier prueba de hipótesis o intervalos de confianza para σ^2. Se dice que tales procedimientos para efectuar inferencias acerca de σ^2 no son **robustos** con respecto a las desviaciones de la normalidad.

Ejercicios

9.7 Con referencia al ejercicio 7.62, pruebe la hipótesis nula $\sigma = 600$ psi para la resistencia a la compresión del tipo dado de acero, contra la hipótesis alternativa $\sigma > 600$ psi. Use el nivel de significancia de 0.05.

9.8 Si 12 determinaciones del calor específico del hierro tienen una desviación estándar de 0.0086, pruebe la hipótesis nula de que $\sigma = 0.010$ para tales determinaciones. Use la hipótesis alternativa $\sigma \neq 0.010$ y el nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

9.9 Con referencia al ejercicio 8.5, pruebe la hipótesis nula de que $\sigma = 15.0$ minutos para el tiempo que se requiere para reparaciones del primer tipo de equipo de fotocopiado, contra la hipótesis alternativa de que $\sigma > 15.0$ minutos. Use el nivel de significancia de 0.05, pero suponga normalidad.

9.10 Use el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula de que $\sigma = 0.015$ pulgadas, para los diámetros de ciertos tornillos, contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 0.015$ pulgada, puesto que una muestra aleatoria de tamaño 15 dio como resultado $s^2 = 0.00011$.

9.11 Al jugar 10 rondas de golf en su propio campo, un jugador profesional promedió 71.3, con una desviación estándar de 1.32. Pruebe la hipótesis nula de que la consistencia de su juego en su propio campo en realidad se midió por $\sigma = 1.20$, contra la hipótesis alternativa de que es menos consistente. Utilice el nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

9.12 El departamento de seguridad de un gran edificio de oficinas quiere probar la hipótesis nula de que $\sigma = 2.0$ minutos para el tiempo que tarda un guardia en realizar su rondín contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 2.0$ minutos. ¿Qué se puede concluir con un nivel de significancia de 0.01, si una muestra aleatoria de tamaño $n = 31$ da como resultado $s = 1.8$ minutos?

9.13 Ayude a justificar el uso de la prueba t de dos muestras en el ejercicio 8.9 probando la hipótesis nula de que las dos poblaciones tienen varianzas iguales. Use el nivel de significancia de 0.02.

9.14 Con referencia al ejercicio 8.10, use el nivel de significancia de 0.02 para probar la suposición de que las dos poblaciones tienen varianzas iguales.

9.15 Dos técnicas de iluminación diferentes se comparan al medir la intensidad de la luz en posiciones seleccionadas, en áreas iluminadas por los dos métodos. Si 15 mediciones en la primera área tienen una desviación estándar de 2.7 pie-candelas y 21 mediciones en la segunda área tienen una desviación estándar de 4.2 pie-candelas, ¿puede concluirse que la iluminación en la segunda área es menos uniforme? Utilice un nivel de significancia de 0.01. ¿Qué suposiciones deberían hacerse acerca de cómo se obtienen las dos muestras?

9.16 Con referencia al ejercicio 8.6, donde se tiene $n_1 = 40$, $n_2 = 30$, $s_1 = 15.2$ y $s_2 = 18.7$, use el nivel de significancia de 0.05 para probar la afirmación de que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre 4 P.M. y 6 P.M. en la segunda intersección. Suponga que las distribuciones son normales.

Sí y no

Sí

1. Antes de aplicar los procedimientos de este capítulo, siempre grafique los datos para observar los valores atípicos o la presencia de una cola larga. La falta de normalidad puede afectar seriamente las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza para varianzas.

No

1. No calcule rutinariamente intervalos de confianza para varianzas o desviaciones estándar, usando las fórmulas de este capítulo. Los niveles de confianza pueden desviarse sustancialmente de su nivel específico, por decir, 95%, debido a la no normalidad.

Ejercicios de repaso

9.17 Con referencia al ejemplo de la página 233, construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera desviación estándar de la resistencia a la rotura del tipo de listón dado.

9.18 Si 31 mediciones del punto de ebullición del azufre tienen una desviación estándar de 0.83 grados Celsius, construya un intervalo de confianza del 98% para la verdadera desviación estándar de tales mediciones. ¿Qué suposición hizo acerca de la población?

9.19 Datos pasados indican que la varianza de las mediciones hechas sobre hojas metálicas apisonadas, por inspectores de control de calidad experimentados, es de 0.18 (pulgadas)^2. Tales mediciones hechas por un inspector no experimentado podrían tener una varianza muy grande (acaso debido a la incapacidad de leer los instrumentos de manera adecuada) o muy pequeña (quizá debido a que se descartan las mediciones inusualmente altas o bajas). Si un nuevo inspector mide 101 apisonados con una varianza de 0.13 (pulgadas)^2, pruebe en el nivel de significancia de 0.05 si el inspector efectúa mediciones satisfactorias. Suponga normalidad.

9.20 Las pruebas de resistencia a la tensión en 10 conductores soldados para un dispositivo semiconductor dieron los siguientes resultados, en libras-fuerza requeridas para romper el enlace:

15.8 12.7 13.2 16.9 10.6 18.8 11.1 14.3 17.0 12.5

Otro conjunto de 8 conductores se puso a prueba después de encapsulación para determinar si la resistencia a la tracción aumentó mediante encapsulación del dispositivo, con los siguientes resultados:

24.9 23.6 19.8 22.1 20.4 21.6 21.8 22.5

Use el nivel de significancia de 0.02 para probar si es razonable suponer que las dos muestras provienen de poblaciones con varianzas iguales.

9.21 Con referencia al ejemplo de la página 254, pruebe la igualdad de las varianzas para las dos aleaciones de aluminio. Utilice el nivel de significancia de 0.02.

9.22 Con referencia al ejemplo de la página 254, encuentre un intervalo de confianza del 98% para la razón de varianzas de las dos aleaciones de aluminio.

9.23 Cálculo con *MINITAB* de t_α, χ^2_ν y F_α

El software encuentra percentiles, de modo que para obtener F_α, primero se convierte de α a $1 - \alpha$. Lo anterior se ilustra con el cálculo de $F_{0.025}(4, 7)$, donde $1 - 0.025 = 0.975$.

Cuadro de diálogo:
Calc > Probability distributions > F. Elija **Inverse cumulative probability**. *Escriba* 4 en **Numerator degrees of freedom**, 7 en **Denominator degrees of freedom**. Elija **Input constant** y *escriba* .975. Haga clic en **OK**.

Salida:

Distribución F con 4 DF (grados de libertad) en numerador y 7 DF en denominador

P(X < = x)	x
0.975	5.52259

En la primera línea, en vez de ello puede seleccionar **Chi square** o **t** y, luego solo hay un **Degrees of Freedom** en la segunda línea.

Obtenga $F_{0.975}(7, 4)$, pero compruebe que sea igual a $1/F_{0.025}(4, 7) = 1/5.52259$.

9.24 Una compañía de bioingeniería fabrica un dispositivo para medir de manera externa el flujo sanguíneo. Mediciones de la salida eléctrica (miliwatts), sobre una muestra de 16 unidades, da como resultado los datos

11	1	5	3	2	23	37	5
18	7	1	11	2	2	30	3

que se grafican en la figura 9.1.

a) ¿Debería usted reportar el intervalo de confianza del 95% para σ usando la fórmula en este capítulo? Explique.

b) ¿Cuál es su respuesta al inciso *a*), si primero toma logaritmos naturales y, después, calcula el intervalo de confianza para la varianza de ln (salida)?

c) ¿Su conclusión en el inciso *b*) implica fácilmente algo acerca de la varianza sobre la escala original? Explique.

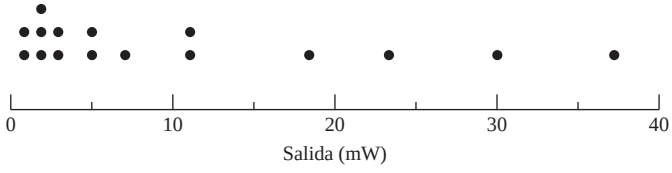


Figura 9.1
Salida en miliwatts

Términos clave

Rango muestral 269
Robusto 275

CAPÍTULO

10 INFERENCIAS RESPECTO DE LAS PROPORCIONES

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

10.1 Estimación de proporciones 278

10.2 Hipótesis respecto de una proporción 283

10.3 Hipótesis respecto de varias proporciones 285

10.4 Análisis de tablas $r \times c$ 292

10.5 Bondad del ajuste 295

Ejercicios de repaso 299

Términos clave 300

Muchos problemas de ingeniería tienen que ver con proporciones, porcentajes o probabilidades. En el muestreo de aceptación, uno se ocupa de la proporción de defectuosos en un lote, mientras que en las pruebas de ciclo de vida se trata con el porcentaje de ciertos componentes que funcionarán satisfactoriamente durante un periodo de tiempo establecido, o bien, la probabilidad de que un componente dado durará al menos cierto número de horas. A partir de estos ejemplos, debería ser claro que los problemas concernientes con proporciones, porcentajes o probabilidades en realidad son equivalentes: un porcentaje es tan solo una proporción multiplicada por 100, en tanto una probabilidad podría considerarse una proporción en una serie de ensayos grande.

La sección 10.1 trata sobre la estimación de proporciones; la sección 10.2, las pruebas concernientes con las proporciones; la sección 10.3, las pruebas concernientes con dos o más proporciones; en la sección 10.4 se aprenderá cómo analizar datos contados en una clasificación en dos sentidos; en la sección 10.5 se verá cómo juzgar si las diferencias entre una distribución de frecuencia observada y las expectativas correspondientes pueden atribuirse al azar.

10.1 Estimación de proporciones

La información que usualmente está disponible para la estimación de una proporción es el número de veces, X, que ocurre un evento adecuado en n ensayos, ocasiones u observaciones. El estimador puntual de la proporción poblacional, en sí, por lo general es la **proporción muestral** $\frac{X}{n}$, es decir, la proporción del tiempo en que el evento realmente ocurre. Si los n ensayos satisfacen las suposiciones subyacentes a la distribución binomial que se menciona en la página 85, se sabe que la media y la desviación estándar del número de éxitos están dadas por np y $\sqrt{np(1-p)}$. Si se dividen ambas cantidades entre n, se encuentra que la media y la desviación estándar de la proporción de éxitos (a saber, de la proporción muestral) están dadas por

$$\frac{np}{n} = p \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

El primero de los resultados indica que la proporción muestral es un estimador insesgado del parámetro binomial p, es decir, de la verdadera proporción que se intenta estimar sobre la base de una muestra.

En la construcción de intervalos de confianza para el parámetro binomial p, se encuentran varios obstáculos. Primero, dado que x y $\frac{x}{n}$ son valores de variables aleatorias discretas, sería imposible obtener un intervalo para el cual el grado de confianza sea exactamente $(1-\alpha)100\%$. Segundo, la desviación estándar de la distribución muestral del número de éxitos, así como el de la proporción de éxitos, incluye el parámetro p que se trata de estimar.

Para construir un intervalo de confianza para p, que tenga aproximadamente el grado de confianza $(1 - \alpha)100\%$, primero determine, para un conjunto dado de valores de p, las cantidades x_0 y x_1 correspondientes, donde x_0 es el entero más grande para el cual las probabilidades binomiales $b(k; n, p) = P[X = k]$ satisfacen

$$\sum_{k=0}^{x_0} b(k; n, p) \leq \frac{\alpha}{2}$$

mientras x_1 es el entero más pequeño para el cual

$$\sum_{k=x_1}^{n} b(k; n, p) \leq \frac{\alpha}{2}$$

Para enfatizar el punto de que x_0 y x_1 dependen del valor de p, dichas cantidades se escribirán como $x_0(p)$ y $x_1(p)$. Por lo tanto, puede afirmarse con una probabilidad de aproximadamente $1 - \alpha$, y al menos $1 - \alpha$, que se satisfará la desigualdad

$$x_0(p) < x < x_1(p)$$

aquí x es un valor de una variable aleatoria y p es una constante fija. Para cambiar desigualdades como esta, en intervalos de confianza para p, se utiliza un método gráfico sencillo, que se ilustra mediante el siguiente ejemplo: suponga que se quieren encontrar intervalos de confianza de aproximadamente 95% para p para muestras de tamaño $n = 20$. Con la tabla 1, que viene al final del libro, primero determine x_0 y x_1 para valores seleccionados de p, tales que x_0 sea el entero más grande para el cual

$$B(x_0; 20, p) \leq 0.025$$

mientras x_1 es el entero más pequeño para el cual

$$1 - B(x_1 - 1; 20, p) \leq 0.025$$

Por consiguiente, al hacer p igual a 0.1, 0.2, . . . , y 0.9, se obtienen los valores que se muestran en la siguiente tabla:

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
x_0	–	0	1	3	5	7	9	11	14
x_1	6	9	11	13	15	17	19	20	–

Al graficar los puntos con coordenadas p y $x(p)$, como en la figura 10.1, y al dibujar curvas suaves, una a través de los puntos x_0 y otra a través de los puntos x_1, ahora se "despeja" p. Para cualquier valor dado de x, es posible obtener límites de confianza de aproximadamente 95% para p al ir horizontalmente a las dos curvas y marcar los valores de p correspondientes. (Véase la figura 10.1.) Por ende, para $x = 4$, se obtiene el intervalo de confianza de aproximadamente 95%

$$0.06 < p < 0.45$$

Software de computadora efectúa este cálculo rápidamente y con mayor precisión. En el ejercicio 10.13, se obtiene el intervalo de confianza (0.06, 0.44).

En la página 133 se dio la regla empírica general de que la distribución normal ofrece una buena aproximación a la distribución binomial cuando np y $n(1 - p)$ son ambos mayores que 15. Por lo tanto, para $n = 50$, la aproximación de curva normal puede usarse si se supone que p se encuentra entre 0.30 y 0.70; para $n = 200$, se usa si se supone que p se encuentra entre 0.075 y 0.925; etcétera. Esto es lo que se entenderá aquí, y más adelante en este capítulo, por "n grande".

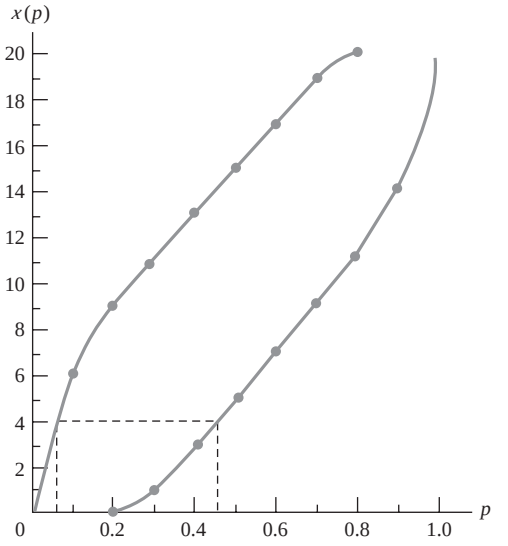


Figura 10.1
Intervalos de confianza del 95% para proporciones ($n = 20$)

Cuando n es grande, se construyen intervalos de confianza aproximados para el parámetro binomial p al usar la aproximación normal a la distribución binomial. En concordancia, se afirma con probabilidad $1 - \alpha$ que satisface la desigualdad

$$-z_{\alpha/2} < \frac{X - np}{\sqrt{np\,(1-p)}} < z_{\alpha/2}$$

Al resolver esta desigualdad cuadrática para p, se obtiene un conjunto correspondiente de límites de confianza aproximados para p, en términos del valor x observado (véase el ejercicio 10.15); pero, dado que los cálculos necesarios son complejos, se hará la aproximación adicional de sustituir $\frac{x}{n}$ para p en $\sqrt{np\,(1-p)}$. Lo anterior da como resultado

Intervalo de confianza de muestra grande para *p*

$$\frac{x}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}$$

donde el grado de confianza es $(1 - \alpha)100\%$.

EJEMPLO **Un intervalo de confianza del 95% de muestra grande para *p***

Si $x = 36$ de $n = 100$ personas entrevistadas están familiarizados con los incentivos fiscales para instalar ciertos dispositivos de ahorro de energía, construya un intervalo de confianza del 95% para la proporción verdadera correspondiente.

Solución Al sustituir

$$\frac{x}{n} = \frac{36}{100} = 0.36$$

y $z_{\alpha/2} = 1.96$, en la fórmula anterior, se obtiene

$$0.36 - 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}} < p < 0.36 + 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}}$$

o bien,

$$0.266 < p < 0.454$$

Se tiene 95% de confianza de que la proporción poblacional de personas familiarizadas con los incentivos fiscales, p, está contenida en el intervalo de 0.266 a 0.454. Observe que, si se hubiera usado el cálculo de computadora del ejercicio 10.13, se habría obtenido

$$0.27 < p < 0.46$$

■

La magnitud del error cometido, cuando se utiliza $\frac{X}{n}$ como estimador de p, está dada por

$$\left| \frac{X}{n} - p \right|$$

Nuevamente, al usar la aproximación normal, se puede afirmar por lo tanto, con probabilidad $1 - \alpha$, que satisface la desigualdad

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

a saber, que el error será cuando mucho

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Error máximo de estimación

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Con el valor observado $\frac{x}{n}$ sustituido por p, se obtiene un estimado de E.

EJEMPLO **Una estimación del error máximo**

En una encuesta realizada a una muestra en una gran ciudad, 136 de 400 personas respondieron que sí a la pregunta de si el transporte público de su ciudad es adecuado. Con 99% de confianza, ¿qué se puede decir acerca del error máximo, si

$$\frac{x}{n} = \frac{136}{400} = 0.34$$

se utiliza como estimación de la verdadera proporción correspondiente?

Solución Al sustituir $\frac{x}{n} = 0.34$ y $z_{\alpha/2} = 2.575$ en la fórmula anterior, se encuentra que el error es cuando mucho

$$E = 2.575 \sqrt{\frac{(0.34)(0.66)}{400}} = 0.061$$

■

La fórmula anterior para E también sirve para determinar el tamaño de muestra que se requiere para lograr un grado de precisión deseado. Al despejar n,

Determinación del tamaño de muestra

$$n = p(1-p) \left[\frac{z_{\alpha/2}}{E} \right]^2$$

pero dicha fórmula no puede usarse como está, a menos que se tenga cierta información acerca del posible tamaño de p (con base en datos colaterales; por decir, una muestra piloto). Si no está disponible tal información, se puede utilizar el hecho de que $p(1-p)$ es cuando mucho $\frac{1}{4}$, lo cual corresponde a $p = \frac{1}{2}$, como se demuestra con los métodos de cálculo elemental. Si se conoce un rango para p, debería usarse el valor más cercano a $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, si

Tamaño de muestra (p desconocida)

$$n = \frac{1}{4}\left[\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$$

se puede afirmar, con una probabilidad de al menos $1-\alpha$, que el error al usar $\frac{X}{n}$ como estimación de p no superará E; una vez obtenidos los datos, se podrá afirmar con al menos $(1-\alpha)100\%$ de confianza que el error no excede a E.

EJEMPLO **Cómo seleccionar un tamaño de muestra para estimar una proporción**

Suponga que se desea estimar la verdadera proporción de defectuosos en un embarque muy grande de ladrillos de adobe, y que se quiere tener al menos 95% de confianza de que el error es cuando mucho de 0.04. ¿Qué tan grande se necesita la muestra si

a) no se tiene idea de cuál es la verdadera proporción?
b) se sabe que la verdadera proporción no supera 0.12?

Solución *a*) Al utilizar la segunda de las dos fórmulas para el tamaño de muestra, se obtiene

$$n = \frac{1}{4}\left[\frac{1.96}{0.04}\right]^2 = 600.25$$

o bien, $n = 601$, redondeado al entero superior más cercano.

b) Al utilizar la primera de las dos fórmulas para el tamaño de muestra con $p = 0.12$ (el posible valor más cercano a $p = \frac{1}{2}$),

$$n = (0.12)(0.88)\left[\frac{1.96}{0.04}\right]^2 = 253.55$$

o bien, $n = 254$, redondeado al entero superior más cercano. Lo anterior sirve para ilustrar cómo cierta información colateral acerca del posible tamaño de p podría reducir sustancialmente el tamaño de la muestra requerida. ■

Ejercicios

10.1 En una muestra aleatoria de 200 reclamaciones presentadas contra una compañía de seguros, acerca de las pólizas contra choques automovilísticos, 84 superaron los \$3,500. Construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de reclamaciones presentadas contra esta compañía de seguros que superen los \$3,500; para ello, utilice la fórmula de intervalo de confianza de muestra grande.

10.2 Con referencia al ejercicio 10.1, ¿qué se puede decir, con 99% de confianza acerca del error máximo, si se usa la proporción muestral como estimación de la verdadera proporción de reclamaciones presentadas contra la compañía aseguradora que superan los \$3,500?

10.3 En una muestra aleatoria de 400 accidentes industriales, se encontró que 231 se debieron, al menos parcialmente, a condiciones laborales inseguras. Construya un intervalo de confianza del 99% para la correspondiente verdadera proporción; para ello, utilice la fórmula de intervalo de confianza de muestra grande.

10.4 Con referencia al ejercicio 10.3, ¿qué se puede decir, con 95% de confianza acerca del error máximo, si se usa la proporción muestral para estimar la verdadera proporción correspondiente?

10.5 En una muestra aleatoria de 90 secciones de tubería en una planta química, 15 mostraron signos de corrosión

grave. Construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de secciones de tubería que muestren signos de corrosión seria; para ello, utilice la fórmula del intervalo de confianza de muestra grande.

10.6 En un estudio reciente, se observó que 69 de 120 meteoritos entraban a la atmósfera terrestre con una velocidad menor a 26 millas por segundo. Si se estima la verdadera proporción correspondiente como $\frac{69}{120} = 0.575$, ¿qué se puede decir con 95% de confianza acerca del error máximo?

10.7 Entre 100 peces capturados en un lago grande, 18 no eran comestibles debido a la contaminación del ambiente. Si se utiliza $\frac{18}{100} = 0.18$ como una estimación de la verdadera proporción correspondiente, ¿con qué confianza se puede afirmar que el error de esta estimación es cuando mucho de 0.065?

10.8 Una muestra aleatoria de 300 compradores en un supermercado incluye 204 que regularmente utilizan cupones de descuento. Construya un intervalo de confianza del 98% para la probabilidad de que algún comprador en el supermercado, seleccionado al azar, regularmente usará cupones de descuento.

10.9 ¿Cuál es el tamaño de la menor muestra requerida para estimar una proporción desconocida de clientes quienes pagarían por un servicio adicional, hasta dentro de un error máximo de 0.06, con al menos 95% de confianza?

10.10 Con referencia al ejercicio 10.9, ¿cómo se afectaría el tamaño de muestra requerido, si se sabe que la proporción a estimar es al menos de 0.75?

10.11 Suponga que se quiere estimar qué porcentaje de todos los conductores excede el límite de velocidad de 55 mph en cierto tramo del camino. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener al menos 99% de confianza de que el error de su estimación es cuando mucho de 3.5%?

10.12 Con referencia al ejercicio 10.11, ¿cómo se vería afectado el tamaño de la muestra requerida, si se sabe que el porcentaje a estimar es cuando mucho de 40%?

10.13 Determinación de intervalo de confianza con *MINITAB* para *p*

Cuando el tamaño de muestra no es grande, el intervalo de confianza para una proporción p se obtiene con los siguientes comandos. Se ilustra el caso $n = 20$ y $x = 4$.

> **Cuadro de diálogo:**
>
> **Stat > Basic Statistics > 1-Proportion**. Elija **Summarized outcomes**.
> Escriba 20 en **Number of trials,** 4 **en Number of events**.
> Haga clic en **Options** y escriba 95.0 en **Confidence level**. Haga clic en **OK**.
> Haga clic en **OK**.

La salida parcial incluye el intervalo de confianza del 95% (0.057334, 0.436614).

Obtenga el intervalo de confianza del 95% cuando $n = 20$ y $x = 16$.

10.14 Use el ejercicio 10.13 u otro software para obtener el intervalo solicitado en el ejercicio 10.3.

10.15 Demuestre que la desigualdad de la página 280 conduce a los siguientes límites de $(1 - \alpha)100\%$ de confianza:

$$\frac{x + \frac{1}{2} z_{\alpha/2}^2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{x(n-x)}{n} + \frac{1}{4} z_{\alpha/2}^2}}{n + z_{\alpha/2}^2}$$

10.16 Use la fórmula del ejercicio 10.15 para volver a trabajar el ejercicio 10.3.

10.17 Una compañía automotriz grande ha enfrentado problemas con la calidad de la pintura en sus automóviles grises. El primer paso fue recolectar datos acerca de la magnitud del problema. De 4,063 automóviles grises recientemente pintados, 533 tuvieron problemas de pintura que se detectaron con facilidad mediante inspección visual. Obtenga un intervalo de confianza del 95% para la proporción poblacional de los trabajos de pintura gris defectuosos.

10.18 Una corporación internacional necesitaba traducir varios millones de palabras, de miles de documentos y manuales. Para el trabajo, se contrató a una compañía que usaba traducción asistida por computadora, junto con algunas verificaciones humanas. La corporación efectuó su propia verificación de calidad al muestrear la traducción. Entre los 2,037 errores descubiertos, 834 fueron una palabra incorrecta. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para la proporción poblacional de errores que son palabras incorrectas.

10.2 Hipótesis respecto de una proporción

Muchos de los métodos empleados en la inspección muestral, control de calidad y verificación de confiabilidad se basan en pruebas de la hipótesis nula de que una proporción (porcentaje o probabilidad) es igual a alguna constante especificada.

Aunque hay pruebas exactas basadas en la distribución binomial que pueden realizarse con la tabla 1, aquí solo se considerarán pruebas aproximadas de muestra grande basadas en la aproximación normal a la distribución binomial. En otras palabras, se probará la hipótesis nula $p = p_0$ contra una de las alternativas $p < p_0$, $p > p_0$ o $p \neq p_0$ con el estadístico

Estadístico para prueba de muestra grande concerniente a *p*

$$Z = \frac{X - n\,p_0}{\sqrt{n\,p_0\,(1 - p_0)}}$$

que es una variable aleatoria que tiene aproximadamente la distribución normal estándar.[1] Las regiones críticas son como las que se muestran en la tabla de la página 232 con p y p_0 sustituidas por μ y μ_0.

Regiones críticas para probar $p = p_0$ (muestra grande)

Hipótesis alternativa	Rechazar hipótesis nula si:
$p < p_0$	$Z < -z_\alpha$
$p > p_0$	$Z > z_\alpha$
$p \neq p_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ o $Z > z_{\alpha/2}$

EJEMPLO **Una prueba unilateral de la proporción de transceptores**

Los transceptores ofrecen comunicación inalámbrica entre componentes electrónicos de productos al consumidor. Al responder a una necesidad para una prueba rápida, de bajo costo, de transceptores con capacidad Bluetooth, ingenieros[2] desarrollaron una prueba del producto a nivel de obleas. En un conjunto de ensayos, con 60 dispositivos seleccionados de diferentes lotes de obleas, 48 dispositivos aprobaron. Pruebe la hipótesis nula $p = 0.70$ contra la hipótesis alternativa $p > 0.70$ al nivel de significancia de 0.95.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $p = 0.70$
   Hipótesis alternativa: $p > 0.70$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z > 1.645$, donde

$$Z = \frac{X - n\,p_0}{\sqrt{n\,p_0\,(1 - p_0)}}$$

4. *Cálculos:* al sustituir $x = 48$, $n = 60$ y $p_0 = 0.70$ en la fórmula anterior, se obtiene

$$z = \frac{48 - 60\,(0.70)}{\sqrt{60\,(0.70)\,(0.30)}} = 1.69$$

5. *Decisión:* puesto que $z = 1.69$ es mayor que 1.645, se rechaza la hipótesis nula al nivel de 0.05. En otras palabras, hay suficiente evidencia para concluir que la proporción de buenos transceptores que se producirían es mayor que 0.70. El valor $P(Z > 1.69) = .0455$, fortalece un poco dicha conclusión. ■

[1]Algunos autores escriben el numerador de esta fórmula para Z como $X \pm \frac{1}{2} - np_0$, cualquiera que sea numéricamente más pequeño aunque, por lo general, no hay necesidad para tal corrección de continuidad en tanto n sea grande.

[2] G. Srinivasan, F. Taenzler y A. Chatterjee, Loopback DFT for low-cost test of single-VCO-based wireless Transceivers, *IEEE Design & Test of Computers* (2008), 150-159.

10.3 Hipótesis respecto de varias proporciones

Cuando se compara la respuesta del consumidor (porcentaje favorable y porcentaje desfavorable) a dos productos diferentes, cuando se decide si la proporción de defectuosos de un proceso dado permanece constante de un día a otro, cuando se juzga si hay una diferencia en persuasión política entre varios grupos de nacionalidad y en muchas situaciones similares, se está interesado en probar si dos o más poblaciones binomiales tienen el mismo parámetro p. Con referencia a dichos parámetros como $p_1, p_2, \ldots$, y p_k, de hecho, se está interesado en probar la hipótesis nula

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p$$

contra la hipótesis alternativa de que dichas proporciones poblacionales no son iguales. Para realizar una prueba adecuada de muestra grande de tales hipótesis, se requieren muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1, n_2, \ldots$, y n_k de las k poblaciones; entonces, si los correspondientes números de "éxitos" son $X_1, X_2, \ldots$, y X_k, la prueba que se utilizará se basa en el hecho de que

1. para muestras grandes, la distribución muestral de

$$Z_i = \frac{X_i - n_i p_i}{\sqrt{n_i p_i (1 - p_i)}}$$

   es aproximadamente la distribución normal estándar,
2. el cuadrado de la variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar es una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con 1 grado de libertad, y
3. la suma de k variables aleatorias independientes que tienen distribuciones chi cuadrada, con 1 grado de libertad, es una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con k grados de libertad. (Véase la sección 6.5, así como los ejemplos de las páginas 194 y 198 para pruebas de esos dos últimos resultados.) Por consiguiente,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i p_i)^2}{n_i p_i (1 - p_i)}$$

   es un valor de una variable aleatoria que tiene aproximadamente la distribución chi cuadrada con k grados de libertad. En la práctica se sustituye por los p_i, que bajo la hipótesis nula son iguales, las estimaciones acumuladas

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

Dado que la hipótesis nula debería rechazarse si las diferencias entre las x_i y las $n_i \hat{p}$ son grandes, la región crítica es $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, donde χ^2_α es como se definió en la página 189 y el número de grados de libertad es $k - 1$. La pérdida de un grado de libertad resulta de sustituir por p la estimación de $\hat{p}$.

En la práctica real, cuando se comparan dos o más proporciones muestrales, es conveniente determinar el valor del estadístico χ^2 al observar los datos ordenados de la siguiente forma:

	Muestra 1	*Muestra 2*	$\cdots$	*Muestra k*	*Total*
Éxitos	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	x
Fracasos	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	$\cdots$	$n_k - x_k$	$n - x$
Total	n_1	n_2	$\cdots$	n_k	n

La notación es la misma que antes, excepto por x y n, que representan, respectivamente, el número total de éxitos y el número total de ensayos para todas las muestras combinadas. Con referencia a esta tabla, la entrada en la celda que pertenece a la i-ésima fila y la j-ésima columna se conoce como **frecuencia de celda observada** o_{ij} con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, \ldots, k$.

Con la hipótesis nula $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p$, se estima p, como antes, como el número total de éxitos dividido entre el número total de ensayos, que ahora se escribe como $\hat{p} = \frac{x}{n}$. Por lo tanto, el número esperado de éxitos y fracasos para la j-ésima muestra se estiman con

$$e_{1j} = n_j \cdot \hat{p} = \frac{n_j \cdot x}{n}$$

y

$$e_{2j} = n_j(1 - \hat{p}) = \frac{n_j(n - x)}{n}$$

A las cantidades e_{1j} y e_{2j} se les llama **frecuencias de celda esperada** para $j = 1, 2, \ldots, k$. Advierta que **la frecuencia esperada para cualquier celda dada puede obtenerse al multiplicar los totales de la columna y la fila a la que pertenece, así como al dividir entre el gran total** n.

Una **prueba chi cuadrada** se basa en el estadístico χ^2 de la página 285, con $\hat{p}$ sustituida por p_i. El estadístico χ^2 se escribe en la forma

Estadístico de prueba χ^2 concerniente a la diferencia entre proporciones

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

como al lector se le pedirá verificar en el ejercicio 10.36. Esta fórmula tiene la ventaja de que puede extenderse fácilmente al caso más general, a tratarse en la sección 10.4, donde cada ensayo permite más de dos resultados posibles y, por lo tanto, hay más de dos filas en la presentación tabular de las diversas frecuencias.

EJEMPLO **Cómo probar la igualdad de tres proporciones con el estadístico χ^2**

Muestras de tres tipos de materiales, sometidos a cambios extremos de temperatura, dieron los resultados que se presentan en la siguiente tabla:

	Material A	*Material B*	*Material C*	*Total*
Desmoronamiento	41	27	22	90
Permanece intacto	79	53	78	210
Total	120	80	100	300

Use el nivel de significancia de 0.05 para probar si, con las condiciones enunciadas, la probabilidad de desmoronamiento es la misma para los tres tipos de materiales.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $p_1 = p_2 = p_3$
   Hipótesis alternativa: p_1, p_2 y p_3 no son todas iguales.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > 5.991$, el valor de $\chi^2_{0.05}$ para $3 - 1 = 2$ grados de libertad, donde χ^2 está dada por la fórmula anterior.

4. *Cálculos:* las frecuencias esperadas para las primeras dos celdas de la primera fila son

$$e_{11} = \frac{90 \cdot 120}{300} = 36 \quad \text{y} \quad e_{12} = \frac{90 \cdot 80}{300} = 24$$

y, como se puede demostrar que **la suma de las frecuencias esperadas para cualquier fila o columna es igual al de las frecuencias observadas correspondientes** (véase el ejercicio 10.37), se encuentra por sustracción que $e_{13} = 90 - (36 + 24) = 30$, y que las frecuencias esperadas para la segunda fila son $e_{21} = 120 - 36 = 84$, $e_{22} = 80 - 24 = 56$ y $e_{23} = 100 - 30 = 70$. Entonces, al sustituir dichos valores junto con las frecuencias observadas en la fórmula para χ^2,

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(41-36)^2}{36} + \frac{(27-24)^2}{24} + \frac{(22-30)^2}{30} \\ &\quad + \frac{(79-84)^2}{84} + \frac{(53-56)^2}{56} + \frac{(78-70)^2}{70} \\ &= 4.575\end{aligned}$$

5. *Decisión:* dado que $\chi^2 = 4.575$ no supera 5.991, la hipótesis nula no puede rechazarse; en otras palabras, los datos no refutan la hipótesis de que, con las condiciones enunciadas, la probabilidad de desmoronamiento es la misma para los tres tipos de material. ■

La mayoría de las entradas de la tabla 5 están dadas a tres lugares decimales pero, dado que los errores de redondeo tienden a promediarse, rara vez hay necesidad de dar más de dos lugares decimales en el valor final del estadístico χ^2. La prueba que se estudia aquí tan solo es una prueba aproximada, ya que la distribución muestral del estadístico χ^2 solo es aproximadamente la distribución chi cuadrada, y no debería usarse cuando una o más de las frecuencias esperadas sean menores que 5. Si este es el caso, en ocasiones pueden combinarse dos o más de las muestras en tal forma que ninguna de las e (valores esperados) sean menores que 5.

Si se rechazan las hipótesis nulas de iguales proporciones, se recomienda graficar los intervalos de confianza (véase la página 280) para las proporciones individuales p_i. La gráfica ayuda a iluminar las diferencias entre las proporciones.

EJEMPLO **Presentación gráfica de intervalos de confianza**

Están en desarrollo cuatro métodos para fabricar discos de un material superconductor. Se elaboran cincuenta discos con cada método y se comprueba su superconductividad cuando se enfrían con nitrógeno líquido.

	Método 1	*Método 2*	*Método 3*	*Método 4*	*Total*
Superconductores	31	42	22	25	120
Fallas	19	8	28	25	80
Total	50	50	50	50	200

Realice una prueba chi cuadrada con $\alpha = 0.05$. Si hay una diferencia significativa entre las proporciones de los superconductores fabricados, grafique los intervalos de confianza individuales.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$
Hipótesis alternativa: p_1, p_2, p_3 y p_4 no todas son iguales (o al menos una es diferente).

2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$

3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > 7.815$, el valor de $\chi^2_{0.05}$ para $4 - 1 = 3$ grados de libertad.

4. *Cálculos:* cada celda en la primera fila tiene frecuencia esperada

$$120 \cdot \frac{50}{200} = 30$$

y cada celda en la segunda fila tiene frecuencia esperada

$$80 \cdot \frac{50}{200} = 20$$

El estadístico chi cuadrada es

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{1}{30} + \frac{144}{30} + \frac{64}{30} + \frac{25}{30} \\ &\quad + \frac{1}{20} + \frac{144}{20} + \frac{64}{20} + \frac{25}{20} \\ &= 19.50\end{aligned}$$

5. *Decisión:* dado que 19.50 supera por mucho 7.815, se rechaza la hipótesis nula de iguales proporciones al nivel de significancia de 5%.

Los intervalos de confianza obtenidos de la fórmula de muestra grande de la página 280 son

$$0.62 \pm 0.13, \quad 0.84 \pm 0.10, \quad 0.44 \pm 0.14, \quad 0.50 \pm 0.14.$$

Y se grafican en la figura 10.2. Observe que el método 2 destaca como el mejor.

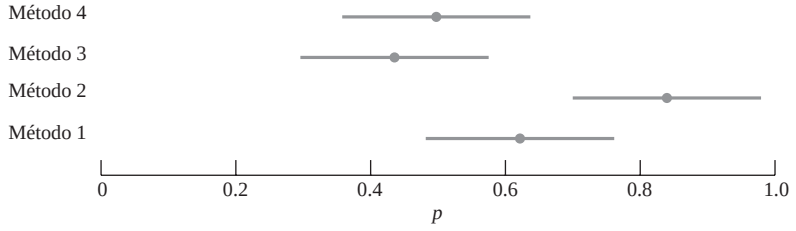


Figura 10.2
Intervalos de confianza para varias proporciones

Aunque la aleatoriedad no se ha mencionado en el desarrollo del estadístico χ^2, siempre que sea posible, las unidades experimentales deberían asignarse aleatoriamente a los métodos. En el ejemplo anterior, los discos podrían numerarse de 1 a 200, y seleccionarse números aleatorios de 1 a 200 sin sustitución. Los discos que corresponden a los primeros 50 números extraídos se asignarían al método 1, y así sucesivamente. Lo anterior evitará que fuentes descontroladas de variación influyan sistemáticamente la prueba concerniente a los cuatro métodos.

Hasta el momento, la hipótesis alternativa ha sido que $p_1, p_2, \ldots,$ y p_k no son todas iguales (o al menos una es diferente), y para $k = 2$ esto reduce la hipótesis alternativa $p_1 \neq p_2$. En problemas donde la hipótesis alternativa también pueda ser $p_1 < p_2$ o $p_1 > p_2$, se puede basar la prueba en el

Estadístico para prueba concerniente a la diferencia entre dos proporciones

$$Z = \frac{\dfrac{X_1}{n_1} - \dfrac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{con} \quad \widehat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

que, para muestras grandes, es una variable aleatoria que tiene aproximadamente la distribución normal estándar. La pruseba basada en este estadístico es equivalente a la basada en el estadístico χ^2 de la página 286 con $k = 2$, en el sentido de que el cuadrado de este estadístico Z en realidad es igual al estadístico χ^2 (véase el ejercicio 10.38). Las regiones críticas para esta prueba alternativa de la hipótesis nula $p_1 = p_2$ son como las que se muestran en la tabla de la página 249, con la sustitución de p_1 y p_2 por μ_1 y μ_2.

EJEMPLO **Una prueba de muestra grande concerniente a dos proporciones**

Un estudio señala que 16 de 200 tractores producidos en una línea de ensamble requirieron extensos ajustes antes de embarcarse, mientras que lo mismo fue cierto para 14 de 400 tractores producidos en otra línea de ensamble. Con un nivel de significancia de 0.01, ¿esto apoya la afirmación de que la segunda línea de producción efectúa un trabajo superior?

Solución

1. *Hipótesis nula:* $p_1 = p_2$
   Hipótesis alternativa: $p_1 > p_2$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z > 2.33$, donde Z está dada por la fórmula de la página 288.
4. *Cálculos:* al sustituir $x_1 = 16$, $n_1 = 200$, $x_2 = 14$, $n_2 = 400$ y

$$\hat{p} = \frac{16 + 14}{200 + 400} = 0.05$$

en la fórmula para Z, se obtiene

$$Z = \frac{\dfrac{16}{200} - \dfrac{14}{400}}{\sqrt{(0.05)(0.95)\left(\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{400}\right)}} = 2.38$$

5. *Decisión:* dado que $Z = 2.38$ supera 2.33, debe rechazarse la hipótesis nula; se concluye que la verdadera proporción de tractores que requieren ajustes extensos es mayor para la primera línea de ensamble que para la segunda.

   El valor P es 0.0087, como se muestra en la figura 10.3. ■

La prueba descrita aquí se aplica a la hipótesis nula $p_1 = p_2$, pero puede modificarse fácilmente (véase el ejercicio 10.34) para aplicarse también a la hipótesis nula $p_1 - p_2 = \delta_0$.

El estadístico para probar $p_1 - p_2 = \delta_0$ conduce a un intervalo de confianza que proporciona el conjunto de valores factibles para $p_1 - p_2$.

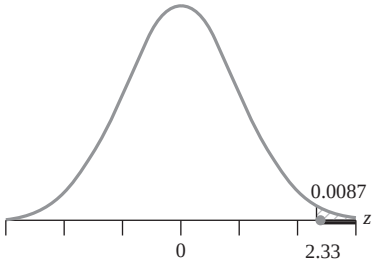


Figura 10.3
El valor $P = 0.0087$

Intervalo de confianza para muestras grandes para la diferencia de dos proporciones

$$\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}$$

EJEMPLO

Un intervalo de confianza para muestras grandes para la diferencia de dos proporciones

Con referencia al ejemplo anterior, encuentre el intervalo de confianza del 95% de muestras grandes para $p_1 - p_2$.

Solución Puesto que $\frac{x_1}{n_1} = \hat{p}_1 = \frac{16}{200} = 0.08$ y $\frac{x_2}{n_2} = \hat{p}_2 = \frac{14}{400} = 0.035$,

$$\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}$$

$$= 0.08 - 0.035 \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.08)(0.92)}{200} + \frac{(0.035)(0.965)}{400}}$$

o $$0.003 < p_1 - p_2 < 0.087.$$

La primera línea de ensamble tiene una tasa de ajuste extenso entre 3 y 87 de 1,000, mayor que la tasa para la segunda línea de ensamble. ■

Ejercicios

10.19 Un fabricante de bombas sumergibles afirma que cuando mucho 30% de las bombas requieren reparaciones durante los primeros 5 años de operación. Si una muestra aleatoria de 120 de dichas bombas incluye 47 que requieren reparaciones dentro de los primeros 5 años, pruebe la hipótesis nula $p = 0.30$ contra la hipótesis alternativa $p > 0.30$, con un nivel de significancia de 0.05.

10.20 El rendimiento de una computadora se observa durante un periodo de 2 años para comprobar la afirmación de que la probabilidad es de 0.20 de que el tiempo de fuera de servicio superará 5 horas en cualquier semana dada. Para probar la hipótesis nula $p = 0.20$ contra la hipótesis alternativa $p \neq 0.20$, ¿qué se puede concluir con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, si tan solo hubiera 11 semanas en que el tiempo fuera de servicio de la computadora excediera 5 horas?

10.21 Para comprobar la afirmación de un servicio de ambulancias de que al menos 40% de sus llamadas son respecto a emergencias que ponen en riesgo la vida, se tomó una muestra aleatoria de sus archivos, donde se descubrió que únicamente 49 de 150 llamadas eran sobre emergencias que ponían en riesgo la vida. ¿Puede rechazarse la hipótesis nula $p = 0.40$ contra la hipótesis alternativa $p < 0.40$, si la probabilidad de un error tipo I debe ser cuando mucho de 0.01?

10.22 En una muestra aleatoria de 600 automóviles que dan vuelta a la derecha, en cierta intersección, 157 entraron en el carril equivocado. Ponga a prueba la hipótesis nula de que en realidad 30% de todos los conductores cometieron este error en la intersección dada; para ello, utilice la hipótesis alternativa $p \neq 0.30$ y el nivel de significancia

a) $\alpha = 0.05$;

b) $\alpha = 0.01$.

10.23 Una aerolínea afirma que tan solo 6% de todo el equipaje nunca se encuentra. Si, en una muestra aleatoria, 17 de 200 piezas de equipaje perdido no se encuentran, pruebe la hipótesis nula $p = 0.06$ contra la hipótesis alternativa $p > 0.06$, con un nivel de significancia de 0.05.

10.24 Suponga que 4 de 13 estudiantes universitarios de ingeniería afirman que irán a la escuela de posgrado. Pruebe la afirmación del rector de que 60% de los estudiantes universitarios irán a una escuela de posgrado; para ello, utilice la hipótesis alternativa $p < 0.60$ y el nivel de significancia $\alpha = 0.05$. [*Sugerencia:* Use la tabla 1 para determinar la probabilidad de obtener "cuando mucho 4 éxitos en 13 ensayos", cuando $p = 0.60$.]

10.25 Un fabricante de televisores de plasma de alta definición (HDTV) afirma que 95% de un modelo de última generación no fallará durante el periodo de garantía de un año. Usted duda de su afirmación y quiere refutarla sobre la base de una muestra de 1,000 aparatos, donde 937 no fallaron en el periodo de garantía. Primero,

a) Realice una prueba de hipótesis usando $\alpha = 0.05$.

b) A la luz de su decisión en el inciso *a*), ¿qué error podría cometer? Explique en el contexto de este ejercicio.

10.26 Consulte el ejercicio 10.25. Suponga que una muestra de 450 aparatos de un modelo de HDTV de plasma de nivel básico dio como resultado 380 aparatos que no fallaron en el periodo de garantía. Obtenga un intervalo de confianza del 98% para la diferencia entre proporciones.

10.27 Se realizan pruebas acerca de la proporción de vaciados defectuosos producidos por 5 moldes diferentes. Si hubiera 14 defectuosos entre 100 vaciados hechos con el molde I, 33 defectuosos entre 200 vaciados hechos con el molde II, 21 defectuosos entre 180 vaciados hechos con el molde III, 17 defectuosos entre 120 vaciados hechos con el molde IV y 25 defectuosos entre 150 vaciados hechos con el molde V, use el nivel de significancia de 0.01 para probar si la verdadera proporción de defectuosos es la misma para cada molde.

10.28 Un estudio demostró que 64 de 180 personas que vieron una fotocopiadora anunciada durante la transmisión de un juego de béisbol y 75 de otras 180 personas que la vieron anunciada en un programa de variedades recordaron la marca 2 horas después. Utilice el estadístico χ^2 para probar, con un nivel de significancia de 0.05, si la diferencia entre las correspondientes proporciones muestrales es significativa.

10.29 Los siguientes datos provienen de un estudio donde a muestras aleatorias de empleados de tres agencias gubernamentales se les formularon preguntas acerca de su plan de pensión:

	Agencia 1	*Agencia 2*	*Agencia 3*
Por el plan de pensión	67	84	109
Contra el plan de pensión	33	66	41

Use el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula de que son iguales las proporciones reales de empleados que favorecen el plan de pensión.

10.30 El propietario de una tienda debe decidir cuál de dos máquinas expendedoras de bocadillos instalar en su tienda. Si cada máquina se pone a prueba 250 veces y la primera máquina falla en su operación (no entrega el bocadillo ni regresa el dinero) 13 veces y la segunda máquina falla 7 veces, pruebe, con el nivel de significancia de 0.05, si la diferencia entre las correspondientes proporciones muestrales es significativa; para ello, utilice

a) el estadístico χ^2 de la página 286;

b) el estadístico Z de la página 288.

10.31 Con referencia al ejercicio anterior, verifique que el cuadrado del valor obtenido para Z en el inciso *b*) es igual al valor obtenido para χ^2 en el inciso *a*).

10.32 La fotolitografía juega un papel central en la fabricación de circuitos integrados elaborados sobre discos de silicio delgados. Antes de un programa de mejoramiento de la calidad, se requerían demasiadas operaciones de corrección. En una muestra de 200 unidades, 26 requirieron correcciones del paso fotolitográfico. Después de la capacitación en el uso de gráficas de Pareto y otros enfoques para identificar problemas significativos, se realizaron mejorías. Una nueva muestra de tamaño 200 solo tenía 12 que necesitaban corrección.

¿Es esta evidencia suficiente para concluir, con un nivel de significancia de 0.01, que las mejorías son efectivas en la reducción de las correcciones?

10.33 Con referencia al ejercicio 10.32, encuentre un intervalo de confianza del 99% de muestras grandes para la verdadera diferencia de las proporciones.

10.34 Para probar la hipótesis nula de que la diferencia entre dos proporciones poblacionales es igual a alguna constante δ_0, no necesariamente 0, puede usar el estadístico

$$Z = \frac{\dfrac{X_1}{n_1} - \dfrac{X_2}{n_2} - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{X_1}{n_1}\left(1 - \dfrac{X_1}{n_1}\right)}{n_1} + \dfrac{\dfrac{X_2}{n_2}\left(1 - \dfrac{X_2}{n_2}\right)}{n_2}}}$$

que, para muestras grandes, es una variable aleatoria con la distribución normal estándar.

a) Con referencia al ejercicio 10.32, utilice este estadístico para probar, con un nivel de significancia de 0.05, si la verdadera proporción de unidades que requieren corrección ahora es al menos 4% menor que antes de realizadas las mejoras.

b) En una prueba de verdadero o falso, un reactivo se considera bueno si discierne entre estudiantes bien preparados y estudiantes deficientemente preparados. Si 205 de 250 estudiantes bien preparados y 137 de 250 estudiantes deficientemente preparados responden de forma correcta cierto reactivo, pruebe, con un nivel de significancia de 0.01, si para el reactivo dado puede esperarse que la proporción de respuestas correctas sea al menos 15% mayor entre estudiantes bien preparados que entre estudiantes deficientemente preparados.

10.35 Con referencia al inciso *b*) del ejercicio 10.34, encuentre un intervalo de confianza del 99% de muestras grandes para la verdadera diferencia de las proporciones.

10.36 Verifique que las fórmulas para el estadístico χ^2 de la página 285 (sustituyendo $\hat{p}$ por p_i) y de la página 286 son equivalentes.

10.37 Verifique que, si las frecuencias esperadas se determinan de acuerdo con la regla de la página 286, la suma de las frecuencias esperadas para cada fila y cada columna es igual a la suma de las frecuencias observadas correspondientes.

10.38 Verifique que el cuadrado del estadístico Z de la página 288 es igual al estadístico χ^2 de la página 286 para $k = 2$.

10.4 Análisis de tablas $r \times c$

Como ya se sugirió, el método con el cual se analizó el ejemplo de la página 286 también se presta para el análisis de **tablas $r \times c$**, o tablas r por c; esto es, tablas donde los datos se ajustan en una clasificación de doble entrada con r filas y c columnas. Tales tablas surgen esencialmente en dos tipos de problemas. Primero, de nuevo se pueden tener muestras de varias poblaciones, con la distinción de que ahora cada ensayo permite más de dos resultados posibles. Lo anterior ocurriría, por ejemplo, si a individuos que pertenecen a diferentes grupos de ingresos se les pregunta si favorecen a cierto candidato político, si están contra él, si son indiferentes o están indecisos. La otra situación que da lugar a una tabla $r \times c$ es aquella donde se toman muestras de una población, pero cada reactivo se clasifica con respecto a dos categorías (por lo general, cualitativa). Esto ocurriría, por ejemplo, si un servicio de pruebas del consumidor califica automóviles como excelente, superior, promedio o deficiente con respecto al rendimiento, pero también con respecto a la apariencia. Cada auto probado caería, entonces, en una de las 16 celdas de una tabla 4×4; es principalmente en conexión con problemas de este tipo que las tablas $r \times c$ se conocen como **tablas de contingencia**.

La diferencia esencial entre los dos tipos de situaciones que dan lugar a tablas $r \times c$ es que, en el primer caso, los totales de columna (los tamaños muestrales) son fijos, en tanto que en el segundo caso solo el **gran total** (el total de toda la tabla) es fijo. Como resultado, existen, asimismo, diferencias en la hipótesis nula que se quiere someter a prueba. En el primer caso, se quiere probar si la probabilidad de obtener una observación en la i-ésima fila es la misma para cada columna; simbólicamente, se desea probar la hipótesis nula

$$p_{i1} = p_{i2} = \cdots = p_{ic} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r$$

donde p_{ij} es la probabilidad de obtener una observación que pertenece a la i-ésima fila y la j-ésima columna, y

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ij} = 1$$

para cada columna, la hipótesis alternativa es que las p no son todas iguales para al menos una fila. En el segundo caso, se quiere probar la hipótesis nula de que las variables aleatorias representadas por las dos clasificaciones son independientes, de modo que p_{ij} es el producto de la probabilidad de obtener un valor que pertenezca a la j-ésima fila y la probabilidad de obtener un valor que pertenezca a la j-ésima columna. La hipótesis alternativa es que las dos variables aleatorias son dependientes.

A pesar de las diferencias descritas, el análisis de una tabla $r \times c$ es el mismo en ambos casos. Primero se calculan las frecuencias de celda esperadas

$$e_{ij} = \frac{(\text{total de } i\text{-ésima fila}) \times (\text{total de } j\text{-ésima columna})}{\text{gran total}}$$

Cuando los totales de columna son fijos, la prueba se conoce como prueba de homogeneidad.

Hipótesis nula para homogeneidad

$$H_0 : p_{i1} = p_{i2} = \cdots = p_{ic} \qquad \text{para todas las filas } i = 1, 2, \ldots, r$$

EJEMPLO **Tabla de contingencia con totales de columna fijos**

Se contratan tres talleres diferentes para reparar motores eléctricos. Cien motores se envían a cada taller. Cuando un motor regresa, se pone en uso y luego la reparación se clasifica

como completa, como que requiere un ajuste o como incompleta. Los totales de columna son fijos en cada 100 y el gran total en 300. El taller 1 produjo 78 reparaciones completas, 15 ajustes menores y 7 reparaciones incompletas; el taller 2 produjo 56, 30 y 14, respectivamente; mientras que el taller 3 produjo 54 reparaciones completas, 31 ajustes menores y 15 reparaciones incompletas.

		Taller 1	*Taller 2*	*Taller 3*	*Total*
	Completa	78	56	54	188
Reparación	*Ajuste*	15	30	31	76
	Incompleta	7	14	15	36
	Total	100	100	100	300

Calcule las frecuencias esperadas.

Solución Para la celda completa-taller 2 de la tabla,

$$e_{12} = \frac{\text{total de fila 1} \times \text{total de columna 2}}{\text{gran total}} = \frac{188 \times 100}{300} = 62.67$$

Al continuar, se obtienen las frecuencias esperadas, las cuales se muestran en negrillas bajo las frecuencias.

		Taller 1	*Taller 2*	*Taller 3*	*Total*
	Completa	78	56	54	188
		62.7	**62.67**	**62.67**	
Reparación	*Ajuste*	15	30	31	76
		25.33	**25.33**	**25.33**	
	Incompleta	7	14	15	36
		12.00	**12.00**	**12.00**	
	Total	100	100	100	300

Visualmente, el taller 1 tiene más reparaciones completas de las esperadas, así como menos ajustes menores y reparaciones incompletas. Una prueba chi cuadrada, que se describe a continuación, verifica que las probabilidades de reparación para los tres talleres no son homogéneas (véase el ejercicio 10.39). ■

Las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas dan el mismo total para cada fila y cada columna, de modo que solo $(r - 1)(c - 1)$ de la e_{ij} debe calcularse de manera directa; en tanto que las otras se obtienen mediante sustracción de los totales de fila o columna adecuados. Para realizar una **prueba chi cuadrada**, se sustituye entonces en la fórmula

Estadístico χ^2 para análisis de tabla $r \times c$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

y se rechaza la hipótesis nula, si el valor de este estadístico supera χ^2_α para $(r - 1)(c - 1)$ grados de libertad. Esta expresión para el número de grados de libertad se justifica por la observación anterior de que, luego de determinar $(r - 1)(c - 1)$ de las frecuencias de celda esperadas, las otras se determinan automáticamente; esto es, pueden obtenerse mediante sustracción de los totales de fila o columna adecuados.

Cuando solo el gran total está fijo de antemano, la hipótesis nula especifica que cada probabilidad de celda p_{ij} es el producto de los totales marginales $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ y $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$.

Hipótesis nula de independencia

$$H_0: p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \qquad \text{para toda } i, j$$

donde $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ y $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$

EJEMPLO **La prueba chi cuadrada de independencia**

Para determinar si realmente hay una relación entre el rendimiento de un empleado en el programa de capacitación de la empresa y su éxito subsiguiente en el trabajo, la compañía toma una muestra de 400 casos de sus muy extensos archivos, de donde obtiene los resultados que se presentan en la siguiente tabla:

		Rendimiento en programa de capacitación			
		Abajo del promedio	*Promedio*	*Arriba del promedio*	*Total*
Éxito en trabajo (calificación empleador)	*Deficiente*	23	60	29	112
	Promedio	28	79	60	167
	Muy bueno	9	49	63	121
	Total	60	188	152	400

Use el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula de que son independientes el rendimiento en el programa de capacitación y el éxito en el trabajo.

Solución

1. *Hipótesis nula:* el rendimiento en programa de capacitación y el éxito en el trabajo son independientes.
   Hipótesis alternativa: el rendimiento en programa capacitación y el éxito en trabajo son dependientes.
2. *Nivel de significancia*: $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > 13.277$, el valor de $\chi^2_{0.01}$ para $(3-1)(3-1) = 4$ grados de libertad, donde χ^2 está dado por la fórmula anterior.
4. *Cálculos:* al calcular primero las frecuencias de celda esperadas para las primeras dos celdas de las primeras dos filas, se obtiene

$$e_{11} = \frac{112 \cdot 60}{400} = 16.80 \qquad e_{12} = \frac{112 \cdot 188}{400} = 52.64$$

$$e_{21} = \frac{167 \cdot 60}{400} = 25.05 \qquad e_{22} = \frac{167 \cdot 188}{400} = 78.49$$

Luego, mediante sustracción, se encuentra que las frecuencias esperadas para la tercera celda de las primeras dos filas son 42.56 y 63.46, mientras las de la tercera fila son 18.15, 56.87 y 45.98. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(23-16.80)^2}{16.80} + \frac{(60-52.64)^2}{52.64} + \frac{(29-42.56)^2}{42.56} \\ &\quad + \frac{(28-25.05)^2}{25.05} + \frac{(79-78.49)^2}{78.49} + \frac{(60-63.46)^2}{63.46} \\ &\quad + \frac{(9-18.15)^2}{18.15} + \frac{(49-56.87)^2}{56.87} + \frac{(63-45.98)^2}{45.98} \\ &= 20.179\end{aligned}$$

5. *Decisión:* puesto que $\chi^2 = 20.179$ supera 13.277, debe rechazarse la hipótesis nula. Se concluye que hay una dependencia entre el rendimiento de un empleado en el programa de capacitación y su éxito en el trabajo. ■

Este ejemplo podría extenderse aún más con la finalidad de determinar la forma de la dependencia.

EJEMPLO **Exploración de la forma de dependencia**

Con referencia al ejemplo anterior, determine las aportaciones individuales al estadístico chi cuadrada.

Solución Se muestra la tabla de contingencia, pero esta vez se concluye que las frecuencias esperadas están justo abajo de las frecuencias observadas.

		Rendimiento en programa de capacitación			
		Abajo del promedio	*Promedio*	*Arriba del promedio*	*Total*
Éxito en trabajo (calificación del empleador)	*Deficiente*	23 **16.80**	60 **52.64**	29 **42.56**	112
	Promedio	28 **25.05**	79 **78.49**	60 **63.46**	167
	Muy bueno	9 **18.15**	49 **56.87**	63 **45.98**	121
	Total	60	188	152	400

Además, el estadístico χ^2 se escribe como la suma de las aportaciones.

$$\begin{aligned}\chi^2 &= 2.288 + 1.029 + 4.320 \\ &\quad + 0.347 + 0.003 + 0.189 \\ &\quad + 4.613 + 1.089 + 6.300 \\ &= 20.179\end{aligned}$$

A partir de esas dos presentaciones, es evidente que existe una dependencia positiva entre rendimiento en la capacitación y éxito laboral. Para las tres celdas individuales con las mayores aportaciones a χ^2, la frecuencia de celda *arriba del promedio-muy bueno* es alta; en tanto que las frecuencias de celda *arriba del promedio-deficiente* y *abajo del promedio-muy bueno* son bajas. ■

10.5 Bondad de ajuste

Se habla de la **bondad de ajuste** cuando se trata de comparar una distribución de frecuencias observada con los valores correspondientes de una distribución esperada o teórica. Para ilustrar, suponga que, durante 400 intervalos de 5 minutos, el control de tráfico aéreo de un aeropuerto recibió 0, 1, 2,…, o 13 radiomensajes, con frecuencias respectivas de 3, 15, 47, 76, 68, 74, 39, 15, 9, 5, 2, 0 y 1. Suponga, aún más, que se quiere comprobar si dichos datos apoyan la afirmación de que el número de radiomensajes que reciben durante un intervalo de 5 minutos puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson con $\lambda = 4.6$. Al observar las probabilidades de Poisson correspondientes

en la tabla 2 y multiplicarlas por 400 para obtener las frecuencias esperadas, se llega al resultado que se presenta en la siguiente tabla, junto con los datos originales:

Número de radiomensajes	Frecuencias observadas		Probabilidades de Poisson	Frecuencias esperadas	
0	3	18	0.010	4.0	22.4
1	15		0.046	18.4	
2	47		0.107	42.8	
3	76		0.163	65.2	
4	68		0.187	74.8	
5	74		0.173	69.2	
6	46		0.132	52.8	
7	39		0.087	34.8	
8	15		0.050	20.0	
9	9		0.025	10.0	
10	5	8	0.012	4.8	8.0
11	2		0.005	2.0	
12	0		0.002	0.8	
13	1		0.001	0.4	
	400			400.0	

Note que se combinan algunos de los datos, de modo que ninguna de las frecuencias esperadas sea menor que 5.

Para probar si las discrepancias entre las frecuencias observada y esperada pueden atribuirse al azar, se usa el

Estadístico χ^2 para probar la bondad de ajuste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde o_i y e_i son las frecuencias observadas y esperadas. La distribución muestral de este estadístico es aproximadamente la distribución chi cuadrada con $k - m$ grados de libertad, donde k es el número de términos en la fórmula para χ^2 y m es el número de cantidades, obtenidas de los datos observados, que se necesitan para calcular las frecuencias esperadas.

EJEMPLO **Bondad de ajuste de chi cuadrada para la distribución de Poisson**

Con referencia a los datos de radiomensajes anteriores, pruebe con el nivel de significancia de 0.01, si los datos pueden considerarse como valores de una variable aleatoria que tenga la distribución de Poisson con $\lambda = 4.6$.

Solución

1. *Hipótesis nula:* la variable aleatoria tiene una distribución de Poissson con $\lambda = 4.6$.
   Hipótesis alternativa: La variable aleatoria no tiene la distribución de Poisson con $\lambda = 4.6$.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > 16.919$, el valor de $\chi^2_{0.05}$ para $k - m = 10 - 1 = 9$ grados de libertad, donde χ^2 está dada por la fórmula anterior. (El número de grados de libertad es $10 - 1 = 9$, pues solo una cantidad de los datos observados, la frecuencia total de 400, se necesita para calcular las frecuencias esperadas.)

4. *Cálculos:* la sustitución en la fórmula para χ^2 da como resultado

$$\chi^2 = \frac{(18-22.4)^2}{22.4} + \frac{(47-42.8)^2}{42.8} + \cdots + \frac{(9-10.0)^2}{10.0} + \frac{(8-8.0)^2}{8.0}$$
$$= 6.749$$

5. *Decisión:* dado que $\chi^2 = 6.749$ no supera 16.919, no puede rechazarse la hipótesis nula; no puede rechazarse que la distribución de Poisson con $\lambda = 4.6$ brinda un buen ajuste al nivel $\alpha = 0.05$. ■

Ejercicios

10.39 Con referencia al ejemplo de reparación de motores de la página 292, use el nivel de significancia de 0.05 para probar si existe homogeneidad entre las distribuciones de reparación de los talleres.

10.40 Una gran firma de electrónica que contrata a muchos trabajadores con discapacidades quiere determinar si las discapacidades influyen en el desempeño de dichos trabajadores. Utilice el nivel de significancia $\alpha = 0.05$ para decidir, sobre la base de los datos muestrales que se presentan en la siguiente tabla, si es razonable sostener que las discapacidades no tienen efecto sobre el desempeño de los trabajadores:

	Desempeño		
	Arriba del promedio	*Promedio*	*Abajo del promedio*
Ceguera	21	64	17
Sordera	16	49	14
Sin discapacidad	29	93	28

10.41 Las pruebas de la fidelidad y la selectividad de 190 radiorreceptores digitales dieron los resultados que se presentan en la siguiente tabla:

		Fidelidad		
		Baja	*Promedio*	*Alta*
Selectividad	*Baja*	6	12	32
	Promedio	33	61	18
	Alta	13	15	0

Use el nivel de significancia de 0.01 para probar si hay una relación (dependencia) entre fidelidad y selectividad.

10.42 Un ingeniero de control de calidad toma muestras diarias de $n = 4$ tractores provenientes de una línea de ensamble y en 200 días laborales consecutivos se obtienen los datos resumidos en la siguiente tabla:

Número de ajustes requeridos	Número de días
0	101
1	79
2	19
3	1

Para probar la afirmación de que 10% de todos los tractores provenientes de esta línea de ensamblado requieren ajustes, busque las probabilidades correspondientes en la tabla 1, calcule las frecuencias esperadas y realice la prueba chi cuadrada con el nivel de significancia de 0.01. (Combine los datos de modo que el número de días ≥ 5.)

10.43 Con referencia al ejercicio 10.42, verifique que la media de la distribución observada es 0.60, lo que corresponde a 15% de los tractores que requieren ajustes. Luego, busque las probabilidades para $n = 4$ y $p = 0.15$ en la tabla 1, calcule las frecuencias observadas y pruebe con un nivel de significancia de 0.01, si la distribución binomial con $n = 4$ y $p = 0.15$ ofrecen un modelo adecuado para esta situación.

10.44 La siguiente es la distribución del número de camiones que llegan por hora al almacén de una compañía:

Camiones que llegan por hora	Frecuencia
0	52
1	151
2	130
3	102
4	45
5	12
6	5
7	1
8	2

Encuentre la media de esta distribución y, usándola (redondee a un lugar decimal) como el parámetro λ, ajuste una distribución de Poisson. Pruebe la bondad de ajuste al nivel de significancia de 0.05.

10.45 Entre 100 filtros de purificación usados en un experimento, 46 tienen una vida de servicio menor de 20 horas, 19 tienen una vida de servicio de 20 o más pero menor a 40 horas, 17 tienen una vida de servicio de 40 o más pero menor a 60 horas, 12 tienen una vida de servicio de 60 o más pero menor a 80 horas, y 6 tienen una vida de servicio de 80 horas o más. Pruebe, con un nivel de significancia de 0.01, si los tiempos de vida pueden considerarse como una muestra de una población exponencial con $\mu = 40$ horas.

Calcule $P[0 < X < 20]$ y multiplique por 100 para obtener e_1, etcétera.

10.46 Una prueba chi cuadrada se implementa fácilmente en una computadora. Con los conteos

31	42	22	25
19	8	28	25

del ejemplo de la página 287, en las columnas 1 a 4, los comandos *MINITAB*

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Tables > Chisquare Test**
> Escriba *C1 − C4* en **columns containing the table**.
> Haga clic en **OK**.

dan la salida

Expected counts are printed below observed counts

	Method 1	Method 2	Method 3	Method 4	Total
1	31	42	22	25	120
	30.00	30.00	30.00	30.00	
2	19	8	28	25	80
	20.00	20.00	20.00	20.00	
Total	50	50	50	50	200

Chi sq = 0.033 + 4.800 + 2.133
+ 0.050 + 7.200 + 3.200 + 1.250 = 19.550
df = 3

Repita el análisis y use solo los datos de los primeros tres métodos.

10.47 El procedimiento en el ejercicio 10.46 también calcula la prueba chi cuadrada para independencia. Haga el ejercicio 10.40 usando la computadora.

Sí y no

Sí

1. Recuerde que, por lo general, se necesita un tamaño de muestra de algunos cientos para obtener estimaciones precisas de una proporción. Cuando el tamaño de muestra sea grande, calcule el intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)\%$ aproximado para la proporción poblacional p

$$\frac{x}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}}$$

Base una prueba de la hipótesis nula H_0: $p = p_0$ en el estadístico de prueba estándar aproximadamente normal

$$Z = \frac{X - n\,p_0}{\sqrt{n\,p_0\,(1-p_0)}}$$

2. Cuando ambos tamaños de muestra sean grandes, compare dos proporciones al calcular el intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ aproximado para $p_1 - p_2$ con límites

$$\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}$$

Base las pruebas de la hipótesis nula H_0: $p_1 = p_2$ en el estadístico de prueba estándar aproximadamente normal

$$Z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \text{con} \qquad \hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

3. Use la prueba chi cuadrada para analizar tablas de contingencia $r \times c$. El estadístico de prueba

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

con valores esperados estimados

$$e_{ij} = \frac{(\text{total de } i\text{-ésima fila}) \times (\text{total de } j\text{-ésima columna})}{\text{gran total}}$$

y valores observados o_{ij} tiene una distribución chi cuadrada aproximada, con $(r - 1)(c - 1)$ grados de libertad. Este estadístico se aplica para comparar varias proporciones cuando se seleccionan muestras de tamaño n_j de la j-ésima población. El mismo estadístico se aplica para probar la independencia de los dos conjuntos de categorías, cuando una sola muestra de tamaño n se tabula de manera cruzada para crear la tabla $r \times c$.

No

1. No aplique de manera rutinaria los procedimientos de inferencia para una proporción p sin confirmar que los resultados de diferentes ensayos son independientes.
2. Cuando tome muestras sin sustitución de una población finita de tamaño N, no olvide explicar la dependencia cuando el factor de corrección de población finita sea sustancialmente diferente de 1.

Ejercicios de repaso

10.48 En una muestra de 100 pistones cerámicos fabricados para un motor diesel experimental, 18 se agrietaron. Construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de pistones agrietados; para ello, utilice la fórmula del intervalo de confianza de muestra grande.

10.49 Con referencia al ejercicio 10.48, pruebe la hipótesis nula $p = 0.20$ contra la hipótesis alternativa $p < 0.20$ al nivel de 0.05.

10.50 En una muestra aleatoria de 160 trabajadores expuestos a cierta cantidad de radiación, 24 experimentaron algún malestar. Construya un intervalo de confianza del 99% para el correspondiente porcentaje verdadero; para ello, utilice la fórmula del intervalo de confianza de muestra grande.

10.51 Con referencia al ejercicio 10.50, pruebe la hipótesis nula $p = 0.18$ contra la hipótesis alternativa $p \neq 0.18$ al nivel de 0.01.

10.52 En una muestra aleatoria de 100 paquetes embarcados por aire, 16 sufrieron algún daño. Construya un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de paquetes dañados; para ello, utilice la fórmula del intervalo de confianza de muestra grande.

10.53 Con referencia al ejercicio 10.52, pruebe la hipótesis $p = 0.10$ contra la hipótesis alternativa $p > 0.10$, con un nivel de 0.01.

10.54 Si 26 de 200 neumáticos de la marca A fallan para durar 20,000 millas, en tanto que las cifras correspondientes para 200 neumáticos de cada una de las marcas B, C y D son 23, 15, 32, use el nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis nula de que no hay diferencia en la calidad de los cuatro tipos de neumáticos en cuanto a su durabilidad.

10.55 Un método de sembrar nubes resultó exitoso en 57 de 150 intentos, mientras otro método tuvo éxito en 33 de 100 intentos. Con el nivel de significancia de 0.05, ¿se puede concluir que el primer método es mejor que el segundo?

10.56 Con referencia al ejercicio 10.55, encuentre un intervalo de confianza del 95% de muestras grandes para la verdadera diferencia de probabilidades.

10.57 Dos aglutinantes, A y B, están disponibles para fabricar una viga laminada. De 50 vigas fabricadas con el aglutinante A, 11 fracasaron en una prueba de tensión, en tanto que fracasaron 19 de las 50 vigas fabricadas con el aglutinante B. Con un nivel de 0.05, ¿se puede concluir que el aglutinante A es mejor que el aglutinante B?

10.58 Con referencia al ejercicio 10.57, encuentre un intervalo de confianza del 95% de muestras grandes para la verdadera diferencia de las probabilidades de fracaso.

10.59 Las tuberías de enfriamiento en tres plantas de energía nuclear se investigan por depósitos que inhibirían el flujo de agua. A partir de 30 lugares seleccionados al azar en cada planta, 13 de la primera planta, 8 de la segunda planta y 19 de la tercera estaban obstruidos.

a) Use el nivel de 0.05 para probar la hipótesis nula de igualdad.

b) Grafique los intervalos de confianza para las tres probabilidades de quedar obstruido.

10.60 Suponga que en el ejercicio 10.54 se está interesado también en cuántos neumáticos duraron más de 30,000 millas y se obtuvieron los resultados que se presentan en la siguiente tabla:

	Marca A	*Marca B*	*Marca C*	*Marca D*
Fallaron para durar 20,000 *millas*	26	23	15	32
Duraron de 20,000 *a* 30,000	118	93	116	121
Duraron más de 30,000 *millas*	56	84	69	47

a) Use el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula de que no hay diferencia en la calidad de los cuatro tipos de neumáticos con respecto a su durabilidad.

b) Grafique los cuatro intervalos de confianza individuales del 99%, para proporciones que duran más de 30,000 millas.

10.61 La siguiente es la distribución del número diario de fallas de energía eléctrica reportadas en una ciudad occidental en 300 días:

Número de fallas de energía eléctrica	Número de días
0	9
1	43
2	64
3	62
4	42
5	36
6	22
7	14
8	6
9	2

Pruebe, con un nivel de significancia de 0.05, si el número diario de fallas eléctricas en esta ciudad es una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson con $\lambda = 3.2$.

10.62 Con referencia al ejemplo de la página 294, repita el análisis después de combinar las categorías *abajo del promedio* y *promedio* en el programa de capacitación, así como las categorías *deficiente* y *promedio* en éxito. Comente acerca de la forma de la dependencia.

10.63 Ingenieros mecánicos, que prueban una nueva técnica de soldadura en arco, clasificaron las soldaduras tanto con respecto a la apariencia como en una inspección con rayos X.

		Apariencia			
		Mala	*Normal*	*Buena*	*Total*
	Mal	20	7	3	30
Rayos X	*Normal*	13	51	16	80
	Bien	7	12	21	40
	Total	40	70	40	150

Pruebe la independencia usando $\alpha = 0.05$ y encuentre las aportaciones de celda individuales para el estadístico χ^2.

Términos clave

Bondad de ajuste 295
Frecuencia de celda esperada 286
Frecuencia de celda observada 286
Proporción muestral 278
Prueba chi cuadrada 286, 293
Tabla de contingencia 292
Tabla $r \times c$ 292

CAPÍTULO 11

ANÁLISIS DE REGRESIÓN

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

11.1 El método de mínimos cuadrados 301

11.2 Inferencias con base en los estimadores de mínimos cuadrados 309

11.3 Regresión curvilínea 321

11.4 Regresión múltiple 326

11.5 Cómo comprobar si el modelo es adecuado 329

11.6 Correlación 335

11.7 Regresión lineal múltiple (notación matricial) 345

Ejercicios de repaso 350

Términos clave 353

El principal objetivo de muchas investigaciones estadísticas es realizar predicciones, de preferencia sobre la base de ecuaciones matemáticas. Por ejemplo, un ingeniero quizá busque predecir la cantidad de óxido que se formará sobre la superficie de un metal cocido en un horno durante una hora a 200 grados Celsius, o la cantidad de deformación de un anillo sometido a una fuerza de compresión de 1,000 libras, o el número de millas para desgastar un neumático como función del grosor y la composición de la banda de rodamiento. Por lo general, tales predicciones requieren encontrar una fórmula que relacione la variable dependiente (cuyo valor se quiere predecir) con una o más variables independientes.

Los problemas que se relacionan con predicciones basadas en el valor conocido de una variable se tratan en las secciones 11.1 a 11.3 y 11.6; el caso donde las predicciones se basan en los valores conocidos de varias variables se trata en la sección 11.4. La importancia de comprobar las suposiciones concernientes con el modelo de predicción se consideran en la sección 11.5.

11.1 El método de mínimos cuadrados

En esta sección se inicia el estudio del caso donde habrá de predecirse una variable dependiente en términos de una sola variable independiente. En muchos problemas de este tipo, la variable independiente se observa sin error, o con un error que es despreciable cuando se compara con el error (variación azarosa) en la variable dependiente. Por ejemplo, al medir la cantidad de óxido sobre la superficie de un espécimen de metal, la temperatura de cocción usualmente puede controlarse con buena precisión, pero la medición del grosor del óxido puede estar sujeta a una variación aleatoria considerable. Por lo tanto, aun cuando la variable independiente pueda estar fija en x, mediciones repetidas de la variable dependiente quizá conduzcan a valores y que difieren considerablemente. Tales diferencias entre valores y es posible atribuirlas a diversas causas, sobre todo a errores de medición y a la existencia de otras variables no controladas que influirían en el grosor medido, y, cuando x es fija. Por ende, las mediciones del grosor de las capas de óxido llegan a variar en diversos especímenes cocidos durante la misma cantidad de tiempo a la misma temperatura, por la dificultad para medir el grosor, así como por las posibles diferencias en la composición de la atmósfera del horno, las condiciones superficiales de los especímenes y cuestiones similares.

A partir de esta discusión tendría que ser evidente que, en este contexto, el grosor medido de las capas de óxido Y es una variable aleatoria cuya distribución depende de x. En la mayoría de las situaciones de este tipo, uno se interesa principalmente en la relación entre x y la media de la distribución correspondiente de Y, cuya relación se conoce como **curva de regresión de Y sobre x**. (Por el momento, se considerará el caso donde x es fija, es decir, no es aleatoria. En la sección 11.6 se considerará el caso donde x y y son ambas valores de variables aleatorias.)

Primero se tratará el caso donde la curva de regresión de Y sobre x es una curva de **regresión lineal**; esto es, donde, para cualquier x dada, la media de la distribución de las Y está dada por $\alpha + \beta x$. En general, Y diferirá de esta media; tal diferencia se denotará con ε, al escribir

$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

Por ende, ε es una variable aleatoria y siempre puede elegirse α, de modo que la media de la distribución de esta variable aleatoria sea igual a cero. El valor de ε para cualquier observación dada dependerá de un posible error de medición, así como de los valores de variables distintas a x que tengan influencia sobre Y.

Para dar un ejemplo donde la curva de regresión de Y sobre x puede suponerse razonablemente como lineal, suponga que hay que calibrar un anillo de tracción midiendo la desviación a varias cargas. En la siguiente tabla, que da los resultados de 12 mediciones, las x son las fuerzas de carga en miles de libras y los valores y son las desviaciones correspondientes en milésimas de pulgada:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	16	35	45	64	86	96	106	124	134	156	164	182

A partir de la figura 11.1, donde se graficaron dichos datos, es razonable suponer que la relación (curva de regresión) es lineal. Esto es, una línea recta ofrece una muy buena aproximación sobre el rango de los datos disponibles. Este tipo de diagrama, que indica cómo se dispersan los puntos de datos, se conoce como **gráfico** o **diagrama de dispersión**.

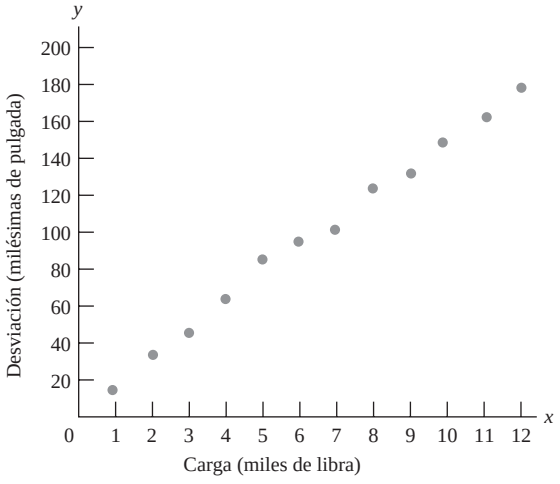


Figura 11.1
Diagrama de dispersión que indica regresión lineal

Ahora se enfrenta el problema de utilizar los datos observados para estimar los parámetros α y β de la línea de regresión que, de algún modo, ofrece el mejor ajuste a los datos. En conexión con la figura 11.1, sería muy satisfactorio hacer esto visualmente. Si diferentes experimentadores tuvieran que ajustar una línea de esta forma, quizá todos predecirían que, para una carga de 7,500 libras, la desviación sería cercana a 0.115 pulgadas. Sin embargo, si se tiene que lidiar con datos como los graficados en la figura 11.2, el problema de encontrar una línea de mejor ajuste no es tan evidente. Para manejar los problemas de este tipo, debe buscarse un método no subjetivo para ajustar líneas rectas que reflejen algunas propiedades estadísticas deseables.

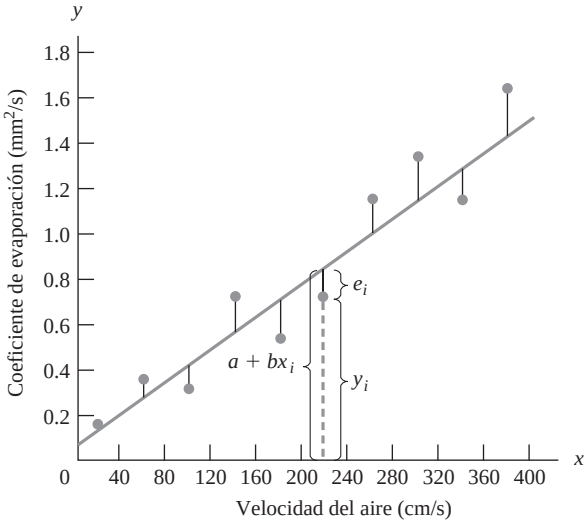


Figura 11.2
Diagrama para criterio de mínimos cuadrados que presenta las desviaciones verticales

Para enunciar el problema de manera formal, se tienen n observaciones pareadas (x_i, y_i), para las cuales es razonable suponer que la regresión de Y sobre x es lineal, pero se quiere determinar la línea (esto es, la ecuación de la línea) que, en cierto sentido, ofrece el mejor ajuste. Hay varias formas para interpretar el término "mejor", el significado que se dará aquí se explica del siguiente modo. Si se predice y con la ecuación

$$\hat{y} = a + bx$$

donde a y b son constantes, entonces, e_i, el error en predecir el valor de y, que corresponde a la x_i dada, es

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

y se quiere determinar a y b, de modo que dichos errores en cierto sentido sean tan pequeños como sea posible.

Dado que no es posible minimizar simultáneamente cada una de las e_i de manera individual, se puede intentar su suma $\sum_{i=1}^{n} e_i$ tan cercana a cero como sea posible. Sin embargo, ya que esta suma puede igualarse a cero para muchas opciones de líneas totalmente inadecuadas, para las cuales se cancelan los errores positivo y negativo, se deberá minimizar la suma de los cuadrados de las e_i (por la misma razón que se trabajó con los cuadrados de las desviaciones de la media en la definición de la desviación estándar). En otras palabras, se aplica el **principio de mínimos cuadrados** y se eligen a y b, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

sea un mínimo. Note en la figura 11.2 que esto es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales desde los puntos hasta la línea.

El procedimiento de encontrar la ecuación de la línea que ajuste mejor un conjunto dado de datos pareados, llamado **método de mínimos cuadrados**, da como resultado valores para a y b (estimaciones de α y β) que tienen muchas propiedades deseables, algunas de las cuales se mencionan en la página 309.

Antes de minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado para obtener los **estimadores de mínimos cuadrados**, es conveniente introducir cierta notación para las sumas de cuadrados y las sumas de productos cruz.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

Las primeras expresiones se prefieren en ámbitos conceptuales, ya que resaltan las desviaciones de la media, y en ámbitos de cálculo porque son menos susceptibles al error por redondeo. Las segundas expresiones son para calculadoras de bolsillo.

A continuación se demuestra que las estimaciones de mínimos cuadrados son

Estimaciones de mínimos cuadrados

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} \quad \text{y} \quad b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

donde $\overline{y}$ y $\overline{x}$ son, respectivamente, las medias de los valores de x y y.

Las estimaciones de mínimos cuadrados determinan la línea de mejor ajuste

Línea de regresión ajustada (o estimada)

$$\widehat{y} = a + b\,x$$

donde $\widehat{\ }$ sobre y indica el valor estimado.

Las desviaciones individuales de las observaciones y_i de sus valores ajustados $\widehat{y}_i = a + b\,x_i$ se denominan **residuos**.

Residuos

$$\text{observación} - \text{valor ajustado} = y_i - a - b\,x_i$$

El valor mínimo de la suma de cuadrados se conoce como **suma de cuadrados residual** o **suma de cuadrados del error**. A continuación se demuestra que

$$\text{SCR} = \text{suma de cuadrados residual} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)^2$$

$$= S_{yy} - S_{xy}^2 / S_{xx}$$

EJEMPLO

Un ejemplo numérico de ajuste de una línea recta mediante mínimos cuadrados

Las siguientes son mediciones de la velocidad del aire y el coeficiente de evaporación de gotas de combustible quemado en un motor de impulso:

Velocidad del aire (cm/s) x	Coeficiente de evaporación (mm^2/s) y
20	0.18
60	0.37
100	0.35
140	0.78
180	0.56
220	0.75
260	1.18
300	1.36
340	1.17
380	1.65

Ajuste una línea recta a tales datos usando el método de mínimos cuadrados; úsela para estimar el coeficiente de evaporación de una gotita cuando la velocidad del aire sea de 190 cm/s.

Solución Para los $n = 10$ pares (x_i, y_i), se calcula primero

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}000 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 532{,}000$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 8.35 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2{,}175.40$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 9.1097$$

y luego se obtiene

$$S_{xx} = 532{,}000 - (2{,}000)^2/10 = 132{,}000$$
$$S_{xy} = 2{,}175.40 - (2{,}000)(8.35)/10 = 505.40$$
$$S_{yy} = 9.1097 - (8.35)^2/10 = 2.13745$$

En consecuencia,

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{505.40}{132{,}000} = 0.00383$$

y entonces

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{8.35}{10} - 0.00383\,\frac{2{,}000}{10} = 0.069$$

Por consiguiente, la ecuación de la línea recta que se ajusta mejor a los datos dados en el sentido de mínimos cuadrados es

$$\hat{y} = 0.069 + 0.00383\,x$$

mientras que para $x = 190$ se predice que el coeficiente de evaporación será

$$\hat{y} = 0.069 + 0.00383(190) = 0.80 \text{ mm}^2/\text{s}$$

Finalmente, la suma de cuadrados residual es

$$S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = 2.13745 - \frac{(505.40)^2}{132{,}000} = 0.20238$$

■

Para evitar confusión, se deja en claro que hay dos posibles líneas de regresión.

EJEMPLO **Un diagrama de dispersión pero dos líneas ajustadas diferentes**

Ingenieros que fabrican un nuevo multiplicador de electrones de tipo transmisión[1] crearon un arreglo de nanopilares de silicio (véase la figura 2.5) sobre una membrana de silicio plana. La estructura precisa puede influir en las propiedades eléctricas, de modo que, posteriormente, se midieron la altura y los anchos de 50 nanopilares (véase el ejercicio 11.23) en nanómetros (nm) o $10^{-9} \times$ metros. Los estadísticos de resumen, con x = ancho y y = altura, son

$$n = 50 \qquad \bar{x} = 88.34 \qquad \bar{y} = 305.58$$
$$S_{xx} = 7{,}239.22 \quad S_{xy} = 17{,}840.1 \quad S_{yy} = 66{,}975.2$$

a) Encuentre la línea de mínimos cuadrados para predecir la altura a partir del ancho.

b) Determine los mínimos cuadrados para predecir el ancho a partir de la altura.

c) Elabore un diagrama de dispersión y muestre ambas líneas. Comente.

Solución *a*) Aquí y = altura, en tanto que las estimaciones de mínimos cuadrados son

$$\text{pendiente} = b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{17{,}840.1}{7{,}239.22} = 2.464 \quad \text{y}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 305.58 - \frac{17{,}840.1}{7{,}239.22} \times 88.34 = 87.88$$

La línea ajustada es

$$\text{altura} = 87.88 + 2.464 \text{ ancho.}$$

b) Ahora el ancho es la variable respuesta y la altura el predictor, de modo que x y y deben intercambiarse.

$$\text{pendiente} = b = \frac{17{,}840.1}{66{,}976.2} = 0.266 \quad \text{y}$$

$$a = 88.34 - 0.2664 \times 305.58 = 6.944$$

La línea ajustada es

$$\text{ancho} = 6.944 + 0.266 \text{ altura.}$$

c) Al usar los datos en el ejercicio 11.23, se construye el diagrama de dispersión de la figura 11.3 y se incluyen las dos líneas. La línea del inciso *b*) se escribe como

$$\text{altura} = -\frac{6.944}{0.266} + \frac{1}{0.266}\text{ancho} = -26.11 + 3.759\,\text{ancho}$$

Note que ambas pasan a través del punto medio $(\bar{x}, \bar{y}) = (88.34, 305.58)$. La elección de la línea ajustada depende de cuál variable se desee predecir. ■

[1]H. Qin, H. Kim y R. Blick, Nanopillar arrays on semiconductor membranes as electron emission amplifiers, *Nanotechnology* 19 (2008), 095504 (5pp).

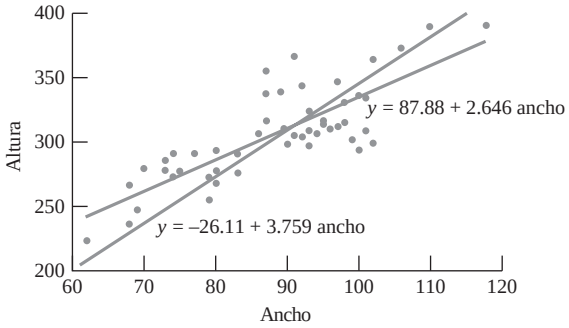


Figura 11.3
Diagrama de dispersión y dos líneas ajustadas

Determinación de los estimadores de mínimos cuadrados

Ahora se demuestra que la elección de estimaciones

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

minimiza la suma de cuadrados,

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2$$

sobre todas las opciones de a y b. Primero se encuentra una expresión alternativa para la suma de cuadrados para cualquier a y b. Al sumar y restar $b\bar{x} - \bar{y}$, se obtiene

$$y_i - a - b x_i = (y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x}) + (\bar{y} - a - b\bar{x})$$

Al elevar al cuadrado ambos lados,

$$\begin{aligned}(y_i - a - b x_i)^2 = {} & (y_i - \bar{y})^2 + b^2(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{y} - a - b\bar{x})^2 \\ & -2b(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \\ & -2b(\bar{y} - a - b\bar{x})(x_i - \bar{x}) \\ & +2(y_i - \bar{y})(\bar{y} - a - b\bar{x})\end{aligned}$$

Ahora, al sumar sobre ambos lados, los dos últimos términos desaparecen, de modo que

$$\begin{aligned}S(a, b) &= S_{yy} + b^2 S_{xx} + n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 - 2b S_{xy} \\ &= n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 + \left(b^2 S_{xx} - 2b S_{xy} + \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) + S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \\ &= n(\bar{y} - a - b\bar{x})^2 + \left(b\sqrt{S_{xx}} - \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}}\right)^2 + S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\end{aligned}$$

De acuerdo con el principio de mínimos cuadrados, deben seleccionarse valores para a y b que minimizarán esta suma de cuadrados. Los tres términos a la derecha son no negativos, en tanto que el tercer término no depende de la elección de a y b. El segundo término puede igualarse a cero, su valor mínimo, al tomar $b = S_{xy}/S_{xx}$. Con esta elección de b, el primer término puede igualarse a cero al tomar $a = y - b\bar{x}$. Lo anterior confirma la fórmula para los estimadores de mínimos cuadrados que viene en la página 304.

Más aún, se demostró que la suma de cuadrados minimizada es igual al tercer término. Esto es, la suma de cuadrados del error

$$\text{SCR} = S_{yy} - S_{xy}^2 / S_{xx}$$

como se enunció en la página 304.

La estimación de σ^2 es

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2}{n-2} \quad \text{o} \quad s_e^2 = \frac{S_{yy} - S_{xy}^2 / S_{xx}}{n-2}$$

Ecuaciones normales para los estimadores de mínimos cuadrados

Una condición necesaria de que la suma de desviaciones al cuadrado,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

sea un mínimo es la desaparición de las derivadas parciales, con respecto a a y b. Por consiguiente,

$$2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b x_i)](-1) = 0$$
$$2\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b x_i)](-x_i) = 0$$

por lo que estas dos ecuaciones pueden reescribirse como

Ecuaciones normales

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = an + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Este conjunto de dos ecuaciones lineales en las incógnitas a y b, llamadas **ecuaciones normales**, ofrece los mismos valores de a y b para la línea que brinda el mejor ajuste a un conjunto dado de datos pareados, en concordancia con el criterio de mínimos cuadrados.

EJEMPLO

Las estimaciones de mínimos cuadrados obtenidos a partir de las ecuaciones normales

Resuelva las ecuaciones normales para los datos en el ejemplo anterior y confirme los valores para las estimaciones de mínimos cuadrados.

Solución Con los cálculos del ejemplo anterior, las ecuaciones normales son

$$8.35 = 10a + 2{,}000b$$
$$2{,}175.40 = 2{,}000a + 532{,}000b$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, usando determinantes o el método de eliminación, se obtiene $a = 0.069$ y $b = 0.00383$.

Como debe ser, dichos valores son los mismos que los obtenidos en el ejemplo anterior. ■

Es imposible plantear un enunciado exacto acerca de la "bondad" de una estimación como esta, a menos que se hagan suposiciones sobre las distribuciones subyacentes de las variables aleatorias en las cuales se está interesado y sobre la verdadera naturaleza

de la regresión. Al observar los valores de a y b como estimaciones de los verdaderos coeficientes de regresión α y β, al lector se le pedirá demostrar, en el ejercicio 11.20, que tales estimaciones son lineales en las observaciones y_i y que son valores de estimadores insesgados de α y β. Con tales propiedades, puede hacerse referencia al notable **teorema de Gauss-Markov**, el cual establece que, entre todos los estimadores insesgados para α y β que son lineales en la Y_i, los estimadores de mínimos cuadrados tienen la menor varianza. En otras palabras, los estimadores de mínimos cuadrados son los más confiables, en el sentido de que están sujetos a las menores variaciones aleatorias. Una prueba del teorema de Gauss-Markov se encuentra en el libro de Johnson y Wichern que se cita en la bibliografía.

11.2 Inferencias con base en los estimadores de mínimos cuadrados

El método de la sección anterior se utiliza cuando la relación entre x y la media de Y es lineal o suficientemente cercana a una línea recta, de modo que la línea de mínimos cuadrados dé como resultado predicciones razonablemente buenas. En lo que sigue, se supondrá que la regresión *es* lineal en x y, más aún, que las n variables aleatorias Y_i tienen distribución normal independiente, con las medias $\alpha + \beta x_i$ y la varianza común σ^2 para $i = 1, 2, \ldots, n$. De igual manera, el modelo se escribe como

Modelo estadístico para regresión lineal

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

donde se supuso que las ε_i son variable aleatorias con distribución normal independiente, con medias cero y la varianza común σ^2.

Las diversas suposiciones realizadas aquí se ilustran en la figura 11.4, donde se muestran las distribuciones de Y_i para diversos valores de x_i. Observe que dichas suposiciones adicionales se requieren para discutir la bondad de las predicciones basadas en ecuaciones de mínimos cuadrados, las propiedades de a y b como estimaciones de α y β, etcétera. No se requieren para obtener las estimaciones originales basadas en el método de mínimos cuadrados.

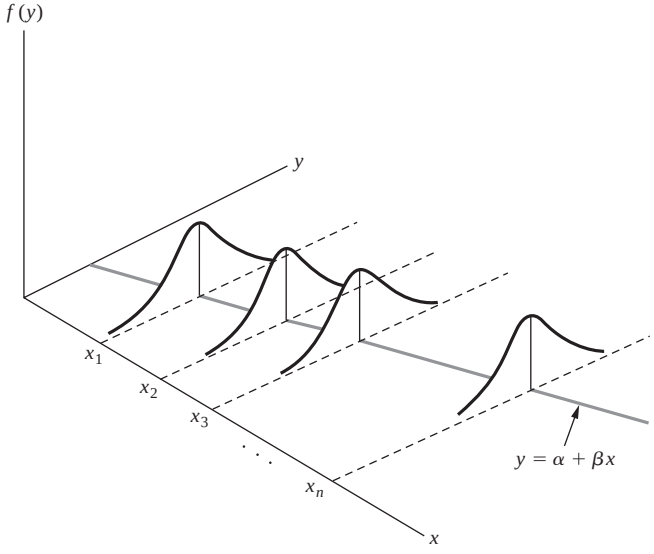


Figura 11.4
Diagrama que muestra las suposiciones subyacentes al teorema 11.1

Antes de enunciar un teorema concerniente a la distribución de los estimadores de mínimos cuadrados de α y β, se revisan las fórmulas para calcular los estimadores de mínimos cuadrados, luego se presenta una estimación del error de varianza σ^2.

Recuerde, de la página 304, que los valores para los estimadores de mínimos cuadrados de α y β están dados por

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \qquad b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

donde S_{xx} y S_{xy} también se definen junto con S_{yy}.

Advierta la estrecha relación entre S_{xx} y S_{yy}, así como las respectivas varianzas muestrales de las x y las y; de hecho, $s_x^2 = S_{xx}/(n-1)$ y $s_y^2 = S_{yy}/(n-1)$; en ocasiones se utilizará esta notación alternativa.

La varianza σ^2 definida en la página 309, por lo general, se estima en términos de las desviaciones verticales de los puntos muestra, desde la línea de mínimos cuadrados. La i–ésima de tales desviaciones es $y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i)$, mientras la estimación de σ^2 es

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

donde s_e, tradicionalmente, se conoce como **error estándar de la estimación**. La estimación s_e^2 es la **suma de cuadrados residual**, o la **suma de cuadrados del error**, dividida entre $n - 2$. Una fórmula equivalente para esta estimación de σ^2, que es más conveniente para calculadoras de bolsillo, está dada por

Estimación de σ^2

$$s_e^2 = \frac{S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}}{n-2}$$

En dichas fórmulas, el divisor $n - 2$ se utiliza para hacer que el estimador resultante para σ^2 no tenga sesgo. Es posible demostrar que, con las suposiciones dadas, $(n-2)s_e^2/\sigma^2$ es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con $n - 2$ grados de libertad. La "pérdida" de dos grados de libertad se explica por el hecho de que los dos coeficientes de regresión α y β deben sustituirse por sus estimadores de mínimos cuadrados.

Con base en las suposiciones hechas en cuanto a la distribución de los valores de Y, uno puede probar el siguiente teorema respecto de las distribuciones de los estimadores de mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión α y β.

Estadísticos para inferencias acerca de α y β

Teorema 11.1 Con las suposiciones dadas en la página 309, los estadísticos

$$t = \frac{(a - \alpha)}{s_e} \sqrt{\frac{nS_{xx}}{S_{xx} + n(\bar{x})^2}}$$

y

$$t = \frac{(b - \beta)}{s_e} \sqrt{S_{xx}}$$

son valores de variables aleatorias que tienen la distribución t con $n - 2$ grados de libertad.

Para construir intervalos de confianza para los coeficientes de regresión α y β, el término medio de $-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}$ se sustituye con al estadístico t adecuado del teorema 11.1. Luego, el álgebra simple conduce a

Límites de confianza para coeficientes de regresión

$$\alpha : a \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

y

$$\beta : b \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{S_{xx}}}$$

EJEMPLO **Un intervalo de confianza para la ordenada al origen**

Con referencia al ejemplo de la página 305, construya un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de regresión α.

Solución Con los resultados numéricos de la página 305, $n = 10$, $\bar{x} = 200$,

$$S_{xx} = 132{,}000$$
$$S_{yy} = 2.13745$$
$$S_{xy} = 505.40$$
$$s_e^2 = \frac{2.13745 - (505.40)^2/132{,}000}{8} = \frac{0.20238}{8} = 0.0253$$

Puesto que $t_{0.025} = 2.306$ para $10 - 2 = 8$ grados de libertad y $s_e = \sqrt{.0253} = 0.159$, se obtienen los límites de confianza del 95%

$$0.069 \pm (2.306)(0.159)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(200)^2}{132{,}000}}$$

y, por consiguiente, el intervalo de confianza del 95%

$$-0.164 < \alpha < 0.302$$

Note que 0 es un valor factible para α, de modo que la línea podría pasar a través del origen. ■

En conexión con las pruebas de hipótesis concernientes a los coeficientes de regresión α y β, las relacionadas con β son de importancia fundamental, porque β es la **pendiente de la línea de regresión**. Esto es, β es el cambio en la media de Y que corresponde a un aumento unitario en x. Si $\beta = 0$, la línea de regresión es horizontal y la media de Y no depende linealmente de x. Para pruebas de la hipótesis nula $\beta = \beta_0$, se usa el segundo estadístico del teorema 11.1 y los criterios son como los de la tabla en la página 233, con μ en sustitución de β.

EJEMPLO **Una prueba de hipótesis concerniente al parámetro pendiente**

Con referencia al ejemplo de la página 305, pruebe la hipótesis nula $\beta = 0$ contra la hipótesis alternativa $\beta \neq 0$ en el nivel de significancia de 0.05.

Solución

1. *Hipótesis nula*: $\beta = 0$
   Hipótesis alternativa: $\beta \neq 0$
2. *Nivel de significancia*: $\alpha = 0.05$
3. *Criterios:* Rechazar la hipótesis nula si $t < -2.306$ o $t > 2.306$, donde 2.306 es el valor de $t_{0.025}$ para $10 - 2 = 8$ grados de libertad y t está dado por la segunda fórmula del teorema 11.1.

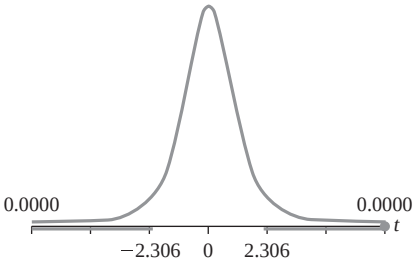


Figura 11.5
El valor P extremadamente pequeño

4. *Cálculos:* Con las cantidades obtenidas en el ejemplo anterior y en la página 305, se obtiene

$$t = \frac{0.00383 - 0}{0.159}\sqrt{132{,}000} = 8.75$$

5. *Decisión:* Puesto que $t = 8.75$ supera 2.306, debe rechazarse la hipótesis nula; se concluye que hay una relación entre la velocidad del aire y el coeficiente de evaporación promedio. (De acuerdo con la gráfica de dispersión de la figura 11.2, la suposición de una relación en línea recta parece ser válida.)

La evidencia para una pendiente β distinta de cero es extremadamente fuerte con valor P menor que 0.00000. (Véase la figura 11.5.) ■

La mayoría de los programas de software estadístico incluyen un ajuste por mínimos cuadrados de una línea recta. Cuando el número de pares (x_i, y_i) es de moderado a grande, se debe utilizar una computadora. Lo anterior se ilustra con los datos de desviación de fuerza que vienen en la página 302. El primer paso consiste en graficar los datos (véase el ejercicio 11.22); pero esto ya se hizo en la página 302. La salida típica de un programa de análisis de regresión incluye

```
  THE REGRESSION EQUATION IS
(1) Y = 4.35 + 14.8 X

  PREDICTOR        COEF        STDEV      T-RATIO        P
  CONSTANT      (2)  4.348     2.244    (3)  1.94   (4) 0.081
  X            14.8182        0.3049       48.60       0.000

(5) S = 3.646
```

La línea de mínimos cuadrados (1) es $\hat{y} = 4.35 + 14.8x$ y la estimación de σ^2 es $s_e^2 = (3.646)^2 = 13.29$ al emplear (5) $s_e = 3.646$.

Puesto que (3) $t = 48.60$, con $n - 2 = 10$ grados de libertad, es enormemente significativo, la pendiente es diferente de cero. Se esperaría que la desviación sea 0 a carga 0, pero esto está afuera del rango de experimentación. Incluso así, en este caso, el análisis de mínimos cuadrados da como resultado $t = 1.94$, lo cual sugiere que es posible que el término constante α no se necesite en la ecuación. No es significativamente distinto de 0. Más aún, el gran valor $P = 0.081$ (4) apoya la conclusión de que el término constante no se requiere para ajustar los datos.

En el ejercicio 11.22 se describen más salidas, pero también se modifica el análisis de mínimos cuadrados para tratar un posible valor atípico en $x = 5$.

La figura 11.6 proporciona la salida de SAS para un ajuste mediante mínimos cuadrados con los datos de desviación de fuerza. Note que se dan más lugares decimales, por ejemplo, (5) s_e = *error cuadrático medio* = 3.64609, en tanto el valor P (4) 0.0001 = *Prob* > $|T|$ está dado por probar $\beta = 0$ contra $\beta \neq 0$.

En la sección 11.5 se regresará a este ajuste usando mínimos cuadrados, donde se investigarán las suposiciones de un modelo en línea recta y la distribución normal para errores.

Dependent Variable: *Y*

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob > F
Model	1	31399.72727	31399.72727	2361.958	0.001
Error	10	132.93939	13.29394		
C Total	11	31532.66667			

Root MSE	(5) 3.64609	R-square	0.9958
Dep Mean	100.66667	Adj R-sq	0.9954
C.V.	3.62194		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for HO: Parameter = 0	Prob > |T|
Intercept	1	(2) 4.348485	2.24401050	(3) 1.938	(4) 0.0814
X	1	14.818182	0.30490099	48.600	0.0001

SUM OF RESIDUALS 1.59872E-14
SUM OF SQUARED RESIDUALS 132.9394

Figura 11.6
Salida de SAS seleccionada para un análisis de regresión usando los datos de desviación de fuerza de la página 302

Otro problema, estrechamente relacionado con el problema de estimar los coeficientes de regresión α y β, es estimar $\alpha + \beta x$; a saber, la media de la distribución de Y para un valor dado de x. Si x se mantiene fijo en x_0, la cantidad que se quiere estimar es $\alpha + \beta x_0$, por lo que parecería razonable utilizar $a + b x_0$, donde a y b de nuevo son los valores obtenidos por el método de mínimos cuadrados. De hecho, puede demostrarse que este estimador no tiene sesgo, pero presenta la varianza

$$\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]$$

y que los límites de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ para $\alpha + \beta x_0$ están dados por

Límites de confianza para $\alpha + \beta x_0$

$$(a + bx_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

donde el número de grados de libertad para $t_{\alpha/2}$ es $n - 2$.

EJEMPLO **Un intervalo de confianza para la respuesta media en $x_0 = 190$**

Con referencia al ejemplo de la página 305, construya un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de evaporación, cuando la velocidad del aire es de 190 cm/s.

Solución Al sustituir en la fórmula anterior las diversas cantidades ya calculadas en las páginas 305 y 311, se obtiene

$$0.80 \pm (2.306)(0.159) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(190 - 200)^2}{132{,}000}}$$

y, por lo tanto, el intervalo de confianza del 95%

$$(0.68, 0.92)$$

para el coeficiente de evaporación medio $\alpha + 190\beta$. ■

Todavía de mayor importancia que la estimación de $\alpha + \beta x_0$ es la predicción de un valor futuro de Y, cuando $x = x_0$, donde x_0 está dentro del rango de experimentación. Se agregó "dentro del rango de experimentación" porque, aquí, como en cualquiera otra parte, la extrapolación es riesgosa y una relación lineal observada quizá no continúe más allá de dicho rango. Por ende, para el ejemplo, en la página 306, ya se demostró que, para una velocidad de aire de 190 cm/s, un valor bien adentro del rango de experimentación, el coeficiente de evaporación predicho es de 0.80 mm^2/s.

Para enfatizar el riesgo inherente cuando se extrapola más allá del rango de experimentación, considere la gráfica de conductividad contra temperatura de la figura 11.7. (*Fuente:* K. Onnes (1912), *Communications of the Physical Laboratory at the University of Leiden*, núm. 124, figura sin número.) Si la línea se extiende para predecir conductividad a 4.10º Kelvin, se predecirían 0.10 ohms, lo cual es mucho mayor que el valor de 0, que Onnes observó cuando descubrió superconductividad a 4.19º Kelvin. Esto es, el modelo físico cambia drásticamente afuera del rango experimental mostrado.

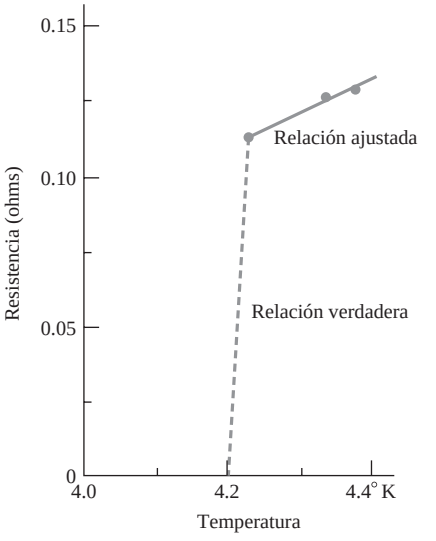


Figura 11.7
Resistencia contra temperatura para un espécimen de mercurio. Un cambio de modelo invalida la extrapolación a 4.2º K y menores

Ahora se indicará un método para construir un intervalo donde puede esperarse que una observación futura, Y, caiga con una probabilidad dada (o confianza), cuando $x = x_0$. Si se conocieran α y β, se podría usar el hecho de que Y es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con la media $\alpha + \beta x_0$ y la varianza σ^2 (o que $Y - \alpha - \beta x_0$ es una variable aleatoria que tiene una distribución normal con media cero y varianza σ^2). Sin embargo, si α y β no se conocen, debería considerarse la cantidad $Y - a - b x_0$, donde Y, a y b son todas variables aleatorias, en tanto que la teoría resultante conduce a los siguientes **límites de predicción** para un futuro valor observado Y, cuando $x = x_0$:

Límites de predicción para futura Y en x_0

$$(a + b x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

donde el número de grados de libertad para $t_{\alpha/2}$ es $n - 2$.

EJEMPLO **Límites de predicción del 95% para una observación futura en $x_0 = 190$**

Con referencia al ejemplo de la página 305, encuentre límites de predicción del 95% para una observación del coeficiente de evaporación, cuando la velocidad del aire es de 190 cm/s.

Solución Al sumar 1 bajo el radical en el ejemplo anterior,

$$0.80 \pm (2.306)(0.159)\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(190 - 200)^2}{132{,}000}}$$

y, por lo tanto, los límites de predicción son 0.80 − 0.39 = 0.41 y 0.80 + 0.39 = 1.19. ■

Observe que, aunque la media de la distribución de Y cuando $x = 190$ puede estimarse muy estrechamente, el valor de una sola observación futura no logra predecirse con mucha precisión. De hecho, incluso conforme $n \to \infty$, la diferencia entre los límites de predicción no tiende a cero; el ancho limitante del intervalo de predicción depende de s_e, que mide la variabilidad inherente de los datos.

Note incluso que, si se quiere extrapolar, el intervalo de predicción (y también el intervalo de confianza para $\alpha + \beta x_0$) se vuelve cada vez más ancho.

EJEMPLO **Los límites de predicción se vuelven más anchos si x_0 está más alejado de $\bar{x}$**

Con referencia al ejemplo de la página 305, suponga que la relación lineal continúa más allá del rango de experimentación; además encuentre límites de predicción del 95% para una observación del coeficiente de evaporación, cuando la velocidad del aire es de 450 cm/s.

Solución Al sustituir en la fórmula anterior las diversas cantidades ya calculadas en las páginas 305 y 311, se obtiene

$$1.79 \pm (2.306)(0.159)\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(450 - 200)^2}{132{,}000}}$$

y, en consecuencia, los límites de predicción son 1.79 − 0.46 = 1.33 y 1.79 + 0.46 = 2.25 mm^2/s. El ancho de este intervalo de predicción es 2(0.46) = 0.92, comparado con el ancho de 2(0.39) = 0.78 que se obtuvo en el ejemplo anterior. ■

Ejercicios

11.1 Un ingeniero químico descubrió que, al agregar diferentes cantidades de un aditivo a la gasolina, podría reducir la cantidad de óxidos nitrosos (NOx) provenientes del motor de un automóvil. Una cantidad específica se agregará a un galón de gasolina y se recolectará la cantidad total de NOx en el escape. Inicialmente, se realizaron cinco ensayos con 1, 2, 3, 4 y 5 unidades de aditivo.

a) ¿Cómo haría usted aleatorio este experimento?

b) Suponga que calcula de manera adecuada una estimación puntual del valor medio de NOx, cuando la cantidad de aditivo es 8. ¿Qué peligro adicional existe al utilizar tal estimación?

11.2 Un ingeniero descubrió que, al incluir pequeñas cantidades de un compuesto en baterías recargables para computadoras portátiles, podría extender su tiempo de vida. Experimentó con diferentes cantidades del aditivo y los datos fueron

Cantidad de aditivo	Vida (horas)
0	2
1	4
2	3
3	7
4	9

a) Obtenga el ajuste por mínimos cuadrados de una línea recta para la cantidad de aditivo.

b) Pruebe si la pendiente es o no $\beta = 0$. Considere $\alpha = 0.10$ como su nivel de significancia.

c) Dé una estimación puntual de la vida media de la batería cuando la cantidad de aditivo es 12.

d) ¿Qué peligro adicional existe cuando usa su estimación del inciso *c*)?

c) ¿Cómo volvería aleatorio este experimento?

11.3 Una compañía de sustancias químicas, que busca estudiar el efecto del tiempo de extracción sobre la eficiencia de una operación de extracción, obtuvo los datos que se presentan en la tabla siguiente:

Tiempo de extracción (minutos) x	Eficiencia de extracción (%) y
27	57
45	64
41	80
19	46
35	62
39	72
19	52
49	77
15	57
31	68

a) Dibuje un diagrama de dispersión para verificar que una línea recta dará un buen ajuste a los datos, dibuje una línea recta visualmente, y úsela para predecir la eficiencia de extracción que se esperaría cuando el tiempo de extracción es de 35 minutos.

b) Ajuste una línea recta a los datos dados con el método de mínimos cuadrados y úsela para predecir la eficiencia de extracción que se esperaría cuando el tiempo de extracción es de 35 minutos.

11.4 En la siguiente tabla, x es la fuerza de tensión aplicada a una muestra de acero en miles de libras, mientras y es la elongación resultante en milésimas de pulgada:

x	1	2	3	4	5	6
y	14	33	40	63	76	85

a) Grafique los datos para verificar que sea razonable suponer que la regresión de Y sobre x es lineal.

b) Encuentre la ecuación de la línea de mínimos cuadrados y úsela para predecir la elongación cuando la fuerza de tensión es de 3.5 miles de libras.

11.5 Con respecto al ejercicio anterior,

a) construya un intervalo de confianza del 95% para β, la elongación por mil libras de esfuerzo de tensión;

b) encuentre los límites de predicción del 95% para la elongación de una muestra con $x = 3.5$ mil libras.

11.6 La siguiente tabla indica cuántas semanas ha trabajado una muestra de 6 personas en una estación de inspección automotriz, así como el número de automóviles que cada uno inspeccionó entre mediodía y las 2 P.M. en un día dado:

Número de semanas empleadas x	Número de autos inspeccionados y
2	13
7	21
9	23
1	14
5	15
12	21

a) Encuentre la ecuación de la línea de mínimos cuadrados que le permitirá predecir y en términos de x.

b) Use el resultado del inciso *a*) para estimar cuántos autos se esperaría que inspeccione, durante el periodo dado de 2 horas, alguien que ha trabajado 8 semanas en la estación de inspección.

11.7 Con respecto al ejercicio anterior, pruebe la hipótesis nula $\beta = 1.2$ contra la hipótesis alternativa $\beta < 1.2$, con un nivel de significancia de 0.05.

11.8 Con respecto al ejercicio 11.6, determine

a) un intervalo de confianza del 95% para el número promedio de autos inspeccionados, en el periodo dado, por una persona que ha trabajado 8 semanas en la estación de inspección;

b) límites de predicción del 95% para el número de autos que inspeccionará, en el periodo dado, una persona que ha trabajado 8 semanas en la estación de inspección.

11.9 Los siguientes datos pertenecen al número de trabajos de cómputo por día y el tiempo requerido por la unidad de procesamiento central (CPU).

Número de trabajos x	Tiempo de CPU y
1	2
2	5
3	4
4	9
5	10

a) Use el primer conjunto de expresiones en la página 304, que incluya las desviaciones de la media, para obtener un ajuste por mínimos cuadrados de una línea a las observaciones en tiempo de CPU.

b) Use la ecuación de la línea de mínimos cuadrados para estimar el tiempo de CPU medio en $x = 3.5$.

11.10 Con respecto al ejercicio 11.9, construya un intervalo de confianza del 95% para α.

11.11 Con respecto al ejercicio 11.9, pruebe la hipótesis nula $\beta = 1$ contra la hipótesis alternativa $\beta > 1$, con un nivel de significancia de 0.05.

11.12 El material bruto utilizado en la producción de una fibra sintética se almacenó en un lugar que no tenía control de humedad. Las mediciones de la humedad relativa en el lugar de almacenamiento y el contenido de agua de una muestra del material bruto (ambos en porcentajes) en 12 días dieron los siguientes resultados:

Humedad x	Contenido de agua y
42	12
35	8
50	14
43	9
48	11
62	16
31	7
36	9
44	12
39	10
55	13
48	11

a) Elabore un diagrama de dispersión para verificar que sea razonable suponer que la regresión de Y sobre x es lineal.

b) Ajuste una línea recta usando el método de mínimos cuadrados.

c) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para el contenido de agua medio del material bruto, cuando la humedad del lugar de almacenamiento es de 40%.

11.13 Con respecto al ejercicio anterior, encuentre los límites de predicción del 95% para el contenido de agua del material bruto, cuando la humedad del lugar de almacenamiento es de 40%. Indique también en qué medida el ancho del intervalo resulta afectado por el tamaño de la muestra y en qué medida lo afecta la variabilidad inherente de los datos.

11.14 Con respecto al ejercicio 11.3, exprese los límites de predicción del 95% para la eficiencia de extracción en términos del tiempo de extracción x_0. Con la elección de valores adecuados de x_0, bosqueje gráficas de los *loci* de los límites de predicción superior e inferior en el diagrama del inciso *a*) del ejercicio 11.3. Observe que, puesto que cualesquier dos conjuntos de límites de predicción obtenidos de dichas bandas son dependientes, deberían usarse solo una vez para un solo tiempo de extracción x_0.

11.15 En el ejercicio 11.4 habría sido completamente razonable establecer la condición $\alpha = 0$ antes de ajustar una línea recta con el método de mínimos cuadrados.

a) Utilice el método de mínimos cuadrados para derivar una fórmula para estimar β, cuando la línea de regresión tiene la forma $y = \beta x$.

b) Con respecto al ejercicio 11.4, use la fórmula obtenida en el inciso *a*) para estimar β, luego compare el resultado con la estimación obtenida anteriormente, sin la condición de que la línea deba pasar por el origen.

11.16 El costo de fabricar un lote de cierto producto depende del tamaño del lote, como muestran los siguientes datos muestrales:

Costo (dólares)	30	70	140	270	530	1,010	2,500	5,020
Tamaño de lote	1	5	10	25	50	100	250	500

a) Dibuje un diagrama de dispersión para verificar la suposición de que la relación es lineal, luego haga que el tamaño del lote sea x y el costo y.

b) Ajuste una línea recta a dichos datos, con el método de mínimos cuadrados, y use el tamaño del lote como la variable independiente; dibuje su gráfica en el diagrama obtenido en el inciso *a*).

11.17 Con respecto al ejercicio 11.16, encuentre un intervalo de confianza del 90% para α que pueda interpretarse como el costo general fijo de fabricación.

11.18 Con respecto al ejercicio 11.16, ajuste una línea recta a los datos con el método de mínimos cuadrados, luego use el costo como la variable independiente y dibuje su gráfica en el diagrama obtenido en el inciso *a*) del ejercicio 11.16. Advierta que no coinciden las dos líneas de regresión estimadas.

11.19 Cuando la suma de los valores de x es igual a cero, el cálculo de los coeficientes de la línea de regresión de Y en x se simplifica considerablemente; de hecho, sus estimaciones están dadas por

$$a = \frac{\sum y}{n} \quad \text{y} \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

Tal simplificación también se logra cuando los valores de x están igualmente espaciados; esto es, cuando están en progresión aritmética. Luego se codifican los datos al sustituir x por los valores …, –2, –1, 0, 1, 2, …, cuando n es impar, o los valores …, –3, –1, 1, 3, …, cuando n es par. Entonces, las fórmulas anteriores se usan junto con los datos codificados.

a) Durante sus primeros 7 años de operación, el ingreso bruto de una compañía, a partir de las ventas, fue de 1.4, 2.1, 2.6, 3.5, 3.7, 4.9 y 5.5 millones de dólares. Ajuste una línea de mínimos cuadrados y, si supone que la tendencia es continúa, prediga el ingreso bruto de la compañía a partir de las ventas durante el octavo año de operación.

b) A finales de los años de 2002 a 2009, una compañía manufacturera tuvo las siguientes inversiones netas en plantas y equipo: 1.0, 1.7, 2.3, 3.1, 3.5, 3.4, 3.9 y 4.7 en millones de dólares. Ajuste una línea de mínimos cuadrados y, si supone que la tendencia es continua, prediga la inversión neta de la compañía en planta y en equipo al final de 2011.

11.20 Con las fórmulas de la página 304 para a y b, demuestre que

a) la expresión para a es lineal en y_i

b) a es una estimador insesgado de α

c) la expresión para b es lineal en y_i

d) b es una estimador insesgado de β

11.21 La descomposición de las sumas de cuadrados en una aportación debida al error y una aportación debida a la regresión está bajo el análisis de mínimos cuadrados. Considere la identidad

$$y_i - \overline{y} - (\widehat{y}_i - \overline{y}) = (y_i - \widehat{y}_i)$$

Advierta que

$$\widehat{y}_i = a + b\,x_i = \overline{y} - b\overline{x} + b\,x_i = \overline{y} + b(x_i - \overline{x}) \text{ de modo que } \widehat{y}_i - \overline{y} = b(x_i - \overline{x})$$

Al usar esta última expresión, luego la definición de b y nuevamente la última expresión, se observa que

$$\sum (y_i - \overline{y})(\widehat{y}_i - \overline{y}) = b \sum (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) = b^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 = \sum (\widehat{y}_i - \overline{y})^2$$

y la suma de cuadrados acerca de la media puede descomponerse como

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}_{\textit{suma de cuadrados total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2}_{\textit{suma de cuadrados del error}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2}_{\textit{suma de cuadrados de regresión}}$$

Por lo general, se descubre que el ajuste en línea recta es aceptable si la razón

$$r^2 = \frac{\text{suma de cuadrados de regresión}}{\text{suma de cuadrados total}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}$$

es cercano a 1.

Calcule la descomposición de la suma de cuadrados y calcule r^2 con las observaciones del ejercicio 11.9.

11.22 Es tedioso realizar un análisis de mínimos cuadrados sin usar una computadora. Aquí se ejemplifica un análisis basado en computadora usando el paquete *MINITAB*. Las observaciones de la página 302 se ingresan en C1 y C2 de la hoja de trabajo.

DATA 11-24.DAT

LOAD:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
DEFLECTION:	16	35	45	64	86	96	106	124	134	156	164	182

Primero, obtenga el diagrama de dispersión para ver si es evidente un patrón en línea recta.

Dialog box:
Graph > Plot
Escriba *C*2 en la columna **Y** y escriba *C*1 en la columna **X**. Haga clic en **OK**.

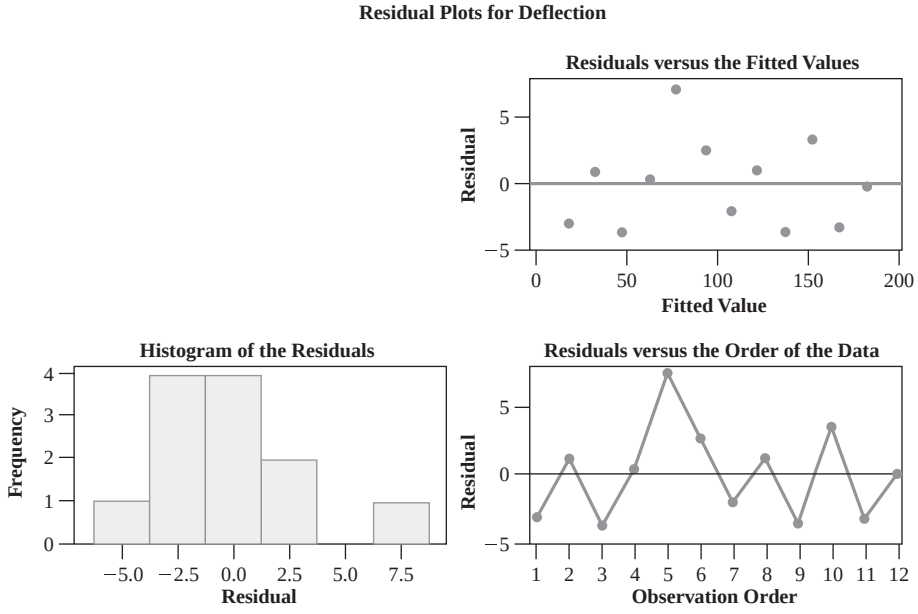
Entonces,

Dialog box:
Stat > Regression > Regression
Escriba *C*2 en **Response**. Escriba *C*1 en **Predictors**. Haga clic en **OK.**

produce la salida

```
The regression equation is
y = 4.35 + 14.8x

The regression equation is      Coef     Stdev     t-ratio       p
Predictor Constant             4.348     2.244        1.94   0.081
x                            14.8182    0.3049       48.60   0.000

S = 3.646          R-square = 99.6%.

Analysis of Variance
SOURCE          DF         SS       MS
Regression       1      31400    31400
Error           10        133       13
Total           11      31533

Unusual Observations
Obs.      x,        y      Fit      Residual
   5     5.0    86.00    78.44        7.56
```

Después de los dos primeros pasos anteriores, y antes de que haga clic en **OK**, haga clic en **Graphs**. Elija **Four in one**. Haga clic en **OK**
Esto producirá las tres gráficas que se introdujeron para comprobar las suposiciones.



a) La salida indica un posible valor atípico en $x = 5$. Remueva dicho par de observaciones y repita el análisis.

b) Con respecto al ejercicio anterior, identifique la descomposición de las sumas de cuadrados dados como el análisis de varianza.

11.23 Con respecto al ejemplo de nanopilares de la página 306, los datos acerca de la altura (nm) y el ancho (nm) son

Ancho	Altura	Ancho	Altura	Ancho	Altura	Ancho	Altura
62	221	77	290	102	298	93	323
68	234	80	292	95	312	92	343
69	245	83	289	90	297	98	330
80	266	73	284	98	314	101	333
68	265	79	271	86	305	97	346
79	253	100	292	93	296	102	364
83	274	93	308	91	304	91	366
70	278	92	303	90	310	87	355
74	290	101	308	95	315	110	390
73	276	87	315	97	311	106	373
74	272	96	309	87	337	118	391
75	276	99	300	89	338		
80	276	94	305	100	336		

a) Ajuste una línea recta con y = altura y x = ancho mediante los mínimos cuadrados.

b) Pruebe, con $\alpha = 0.05$, que la pendiente es diferente de cero.

c) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la altura media, cuando el ancho = 100.

d) Grafique los valores residuales contra los valores predichos.

11.24 Recientemente se han creado los nanoalambres, delgados alambres de solo algunas millonésimas de centímetro de grosor que giran en espiral y tienen una apariencia de pino.[2] La meta final de los investigadores es elaborar mejores nanoalambres para circuitos integrados, láseres y biosensores de alto rendimiento. El giro, en radianes por longitud unitaria, debería seguir una teoría de deformación mecánica llamada giro de Eshelby. La cantidad de giro debe relacionarse linealmente con el recíproco de la sección transversal. Los autores brindan algunos de sus datos en y (rad/μm) = giro y x(μm^{-2}) = sección transversal recíproca.

x	y	x	y	x	y
62	46	286	126	92	94
57	46	72	162	138	112
49	90	168	172	250	306
161	113	286	248	189	291
180	121	337	288	96	133
103	193	315	262	45	143
103	89	354	224	168	120
43	122	509	381	25	122
144	124	144	76	326	137
182	124	127	90	169	100

(*cortesía de Song Jin*)

a) Ajuste una recta usando mínimos cuadrados.

b) Pruebe, con $\alpha = 0.05$, que la pendiente es diferente de cero.

c) Encuentre un intervalo de confianza del 98% para el ángulo de giro medio, cuando $x = 148$.

d) ¿Parece aplicarse este aspecto de la teoría del giro de Eshelby?

[2] M. Bierman, Y. Lau, A. Kvit, A. Schmitt, y S. Jin. Dislocation-driven nanowire growth y Eshelby Twist, Science, 23 de mayo de 2008, Vol. 320, 1060–1063.

11.3 Regresión curvilínea

Hasta el momento, únicamente se ha estudiado el caso donde la curva de regresión de Y en x es una línea recta, es decir, donde, para cualquier x dada, la media de la distribución de Y está dada por $\alpha + \beta x$. En esta sección se investigan primero los casos donde la curva de regresión no es lineal, pero donde, no obstante, son aplicables los métodos de la sección 11.1; luego se aborda el problema de la regresión polinomial; esto es, los problemas donde, para cualquier x dada, la media de la distribución de Y está dada por

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p$$

El ajuste mediante curva polinomial también se utiliza para obtener aproximaciones cuando se desconoce la forma funcional exacta de la curva de regresión.

Es práctica común que los ingenieros grafiquen datos por pares en varias escalas transformadas, como la raíz cuadrada o la escala logarítmica, con la finalidad de determinar si los puntos transformados caerán cerca de una línea recta. Si existe la transformación que sugiere una ecuación de regresión en línea recta, las constantes (parámetros) necesarias pueden estimarse al aplicar el método de la sección 11.1 a los datos transformados. Por ejemplo, si un conjunto de datos pareados, que consisten en n puntos (x_i, y_i) "se alinean" cuando $\log y_i$ se grafica contra x_i, ello indica que la curva de regresión de Y sobre x es **exponencial**; a saber, que para cualquier x dada la media de la distribución de los valores de Y está dada por $\alpha \cdot \beta^x$. Si se toman logaritmos a base 10 (o alguna base conveniente), la ecuación de predicción $y = \alpha \cdot \beta^x$ se convierte en

$$\log y = \log \alpha + x \cdot \log \beta$$

y ahora pueden obtenerse estimaciones de $\log \alpha$ y $\log \beta$; por lo tanto, también de α y β, aplicando el método de la sección 11.1 a los n pares de valores $(x_i, \log y_i)$.

EJEMPLO **Una gráfica de log y contra x conduce a ajustar una línea recta**

Los siguientes son datos acerca del porcentaje de neumáticos radiales de alto rendimiento elaborados por cierto fabricante, que todavía son útiles después de haberse conducido durante el número de millas dado:

Millas recorridas (miles) x	Porcentaje utilizable y
1	98.2
2	91.7
5	81.3
10	64.0
20	36.4
30	32.6
40	17.1
50	11.3

a) Grafique $\log y_i$ contra x_i para verificar que sea razonable suponer que la relación es exponencial.

b) Ajuste una curva exponencial al aplicar el método de mínimos cuadrados a los puntos de datos $(x_i, \log y_i)$.

c) Utilice el resultado del inciso *b*) para estimar el porcentaje de los neumáticos radiales de alto rendimiento del fabricante, que durarán al menos 25,000 millas.

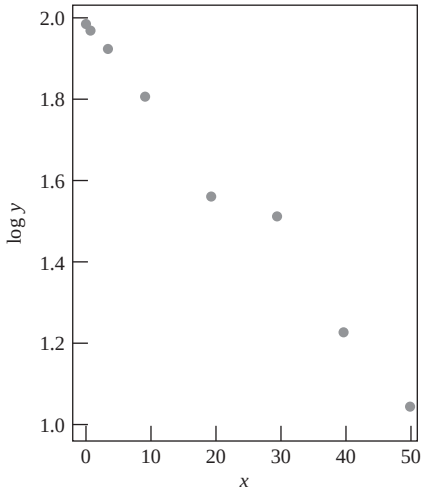


Figura 11.8
Gráfica de datos transformados del ejemplo

Solución *a*) Como se observa en la figura 11.8, el patrón general es lineal, lo cual justifica ajustar una curva exponencial.

b) Al determinar primero los logaritmos, a base 10, de los ocho valores de y, se obtiene 1.9921, 1.9624, 1.9101, 1.8062, 1.5611, 1.5132, 1.2330 y 1.0531, en tanto las sumas requeridas para sustitución en las ecuaciones normales son

$$\sum x = 158 \qquad \sum x^2 = 5{,}530 \qquad \sum \log y = 13.0312$$
$$\sum x \cdot \log y = 212.1224$$

donde los subíndices y los límites de las sumas se omitieron para ganar sencillez.

Para ajustar la línea $\log y = c + d\,x$, calcule

$$S_{\log y,\, x} = 212.1224 - \frac{(158)(13.0312)}{8} = -45.2438$$
$$S_{xx} = 5{,}530 - \frac{(158)^2}{8} = 2{,}409.50$$
$$\overline{x} = \frac{158}{8} = 19.750 \qquad \overline{\log y} = \frac{13.0312}{8} = 1.6289$$

de modo que $c = 2.0002$ y $d = -0.0188$. Por ende, la ecuación de la curva de regresión estimada se escribe como

$$\widehat{\log y} = 2.0002 - 0.0188\,x$$

en **forma logarítmica**, o bien, dado que

$$10^c = 100.0 \quad \text{y} \quad 10^d = 0.96$$
$$\widehat{y} = 100.0(0.96)^x$$

en **forma exponencial**.

c) Al usar la forma logarítmica, que es más conveniente, se obtiene

$$\widehat{\log y} = 2.0002 - 0.0188(25)$$
$$= 1.5302$$

y, en consecuencia, $\widehat{y} = 33.9\%$. ■

El análisis de las relaciones transformadas se implementa con facilidad en una computadora (véase el ejercicio 11.41).

Otras dos relaciones que surgen frecuentemente en aplicaciones de ingeniería y pueden ajustarse con el método de la sección 11.1, después de las transformaciones adecuadas, son la **función recíproca**

$$y = \frac{1}{\alpha + \beta x}$$

y la **función potencia** $y = \alpha \cdot x^{\beta}$. La primera de ellas representa una relación lineal entre x y $\frac{1}{y}$; a saber,

$$\frac{1}{y} = \alpha + \beta x$$

y se obtienen estimaciones de α y β al aplicar el método de la sección 11.1 a los puntos $\left(x_i, \frac{1}{y_i}\right)$. La segunda representa una relación lineal entre $\log x$ y $\log y$; a saber,

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x$$

y se obtienen estimaciones de $\log \alpha$ y $\log \beta$, y en consecuencia de α y β, al aplicar el método de la sección 11.1 a los puntos $(\log x_i, \log y_i)$. En el ejercicio 11.29, se ofrece otro ejemplo de una curva que puede ajustarse mediante el método de mínimos cuadrados, después de una transformación adecuada.

Si no hay un indicio claro acerca de la forma funcional de la regresión de Y en x, a menudo se supone que la relación subyacente es al menos "bien comportada", en la medida en que tiene una expansión en serie de Taylor, y que los primeros términos de esta expansión producirán una aproximación bastante buena. Por ende, los datos se ajustan a una **regresión polinomial**; esto es, la media de Y en x tiene la forma

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p$$

donde el grado se determina por inspección de los datos o por un método más riguroso que se estudiará a continuación.

Dado un conjunto de datos que consisten en n puntos (x_i, y_i), se estiman los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ del polinomio de grado p al minimizar

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \cdots + \beta_p x_i^p)]^2$$

En otras palabras, ahora se aplica el criterio de mínimos cuadrados al minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales, desde los puntos a la curva (véase la figura 11.9).

Al tomar derivadas parciales con respecto a $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, igualar dichas derivadas parciales a cero, reordenar algunos de los términos y hacer b_i la estimación de β_i, se

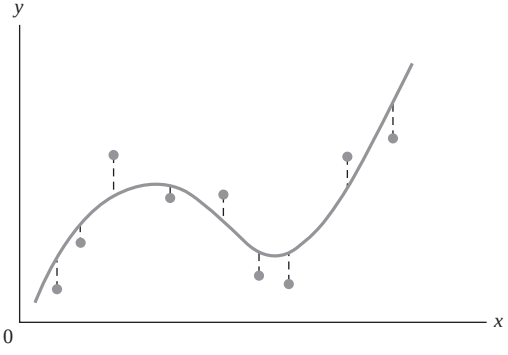


Figura 11.9
Criterio de mínimos cuadrados para ajuste de curva polinomial

obtienen las $p + 1$ **ecuaciones normales**

Ecuaciones normales para regresión polinomial

$$\begin{aligned}
\sum y &= n\,b_0 + b_1 \sum x + \cdots + b_p \sum x^p \\
\sum x\,y &= b_0 \sum x + b_1 \sum x^2 + \cdots + b_p \sum x^{p+1} \\
&\vdots \\
\sum x^p y &= b_0 \sum x^p + b_1 \sum x^{p+1} + \cdots + b_p \sum x^{2p}
\end{aligned}$$

donde los subíndices y los límites de suma se omiten por sencillez. Observe que este es un sistema de $p + 1$ ecuaciones lineales con $p + 1$ incógnitas $b_0, b_1, b_2, \ldots$, y b_p. Si las x incluyen $p + 1$ valores distintos, entonces, las ecuaciones normales tendrán una solución única.

EJEMPLO **Ajuste de una función cuadrática con el método de mínimos cuadrados**

Los siguientes son datos acerca del tiempo de secado de cierto barniz y la cantidad de aditivo que tiene la intención de reducir el tiempo de secado:

Cantidad de aditivo para barniz (gramos) x	Tiempo de secado (horas) y
0	12.0
1	10.5
2	10.0
3	8.0
4	7.0
5	8.0
6	7.5
7	8.5
8	9.0

a) Dibuje un diagrama de dispersión para verificar que sea razonable suponer que la relación es parabólica.

b) Ajuste un polinomio de segundo grado con el método de mínimos cuadrados.

c) Utilice el resultado del inciso *b*) para predecir el tiempo de secado del barniz, cuando se usan 6.5 gramos del aditivo.

Solución *a*) Como se ilustra en la figura 11.10, el patrón general sugiere ajustar un polinomio de segundo grado que tenga un mínimo relativo.

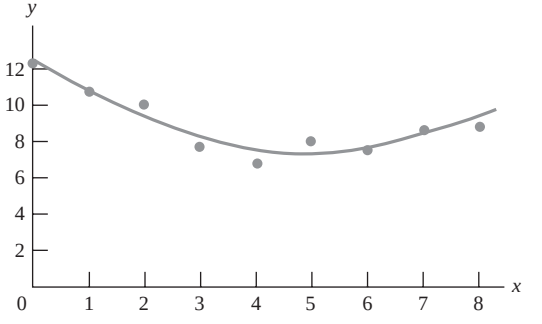


Figura 11.10
Parábola ajustada a datos del ejemplo

b) El enfoque preferido consiste en usar software de computadora (véase el ejercicio 11.42). Una salida parcial incluye

$Y = 12.1848 - 1.84654X + 0.182900X**2$
R-Sq = 92.3%.

De manera alternativa, la suma requerida para sustitución en las ecuaciones normales es

$$\sum x = 36 \qquad \sum x^2 = 204 \qquad \sum x^3 = 1{,}296 \qquad \sum x^4 = 8{,}772$$

$$\sum y = 80.5 \qquad \sum xy = 299.0 \qquad \sum x^2 y = 1{,}697.0$$

Por ende, hay que resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas: b_0, b_1 y b_2:

$$\begin{aligned} 80.5 &= 9b_0 + 36b_1 + 204b_2 \\ 299.0 &= 36b_0 + 204b_1 + 1{,}296b_2 \\ 1{,}697.0 &= 204b_0 + 1{,}296b_1 + 8{,}772b_2 \end{aligned}$$

Al hacer $b_0 = 12.2$, $b_1 = -1.85$ y $b_2 = 0.183$, se tiene que la ecuación del polinomio de mínimos cuadrados es

$$\hat{y} = 12.2 - 1.85x + 0.183x^2$$

c) Al sustituir $x = 6.5$ en esta ecuación,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 12.2 - 1.85(6.5) + 0.183(6.5)^2 \\ &= 7.9 \end{aligned}$$

esto es, un tiempo de secado predicho de 7.9 horas. ■

Advierta que, en el ejemplo anterior, habría sido riesgoso predecir el tiempo de secado que corresponde a, por decir, 24.5 gramos del aditivo. Los riesgos inherentes en la extrapolación, analizados en la página 314 junto con el ajuste de líneas rectas, aumenta considerablemente cuando se usan polinomios para aproximar funciones de regresión desconocidas.

En la práctica real, sería difícil determinar el grado de los polinomios para ajustarse a un conjunto dado de datos pareados. Como siempre es posible encontrar un polinomio de grado cuando mucho $n - 1$, que pasará a través de cada uno de los n puntos que corresponden a n valores distintos de x, debería ser claro que lo que en realidad se busca es un polinomio de menor grado que describa "adecuadamente" los datos. Como se hizo en el ejemplo, a menudo se puede determinar el grado del polinomio mediante una inspección de los datos.

También existe un método más riguroso para determinar el grado del polinomio para ajustarse a un conjunto dado de datos. En esencia, consiste en primero ajustar una línea recta, así como un polinomio de segundo grado, y poner a prueba la hipótesis nula $\beta_2 = 0$; a saber, que no se gana algo al incluir el término cuadrático. Si esta hipótesis nula puede rechazarse, entonces se ajusta un polinomio de tercer grado y se prueba la hipótesis $\beta_3 = 0$; a saber, que no se gana algo al incluir el término cúbico. Este procedimiento continúa hasta que la hipótesis nula $\beta_i = 0$ no puede rechazarse en dos pasos sucesivos y, por ende, no hay ventaja aparente al acarrear los términos adicionales. Note que, con la finalidad de efectuar dichas pruebas, es necesario plantear las suposiciones de normalidad, independencia y varianzas iguales introducidas en la sección 11.2. Además, dichas pruebas nunca deben utilizarse ciegamente; esto es, sin inspección del patrón general de los datos.

El uso de esta técnica es bastante tedioso, por lo que no se ilustrará en el texto. En el ejercicio 11.33, se pedirá al lector dar instrucciones detalladas para aplicarlas a los datos de tiempo de secado del aditivo de barniz, con la finalidad de comprobar si realmente vale la pena acarrear el término cuadrático.

11.4 Regresión múltiple

Antes de extender los métodos de las secciones anteriores a problemas con más de una variable independiente, se puntualiza que las curvas obtenidas (y las superficies que se obtendrán) no se utilizan solamente para hacer predicciones. Con frecuencia también se usan con propósitos de optimización; a saber, para determinar para qué valores de la variable (o variables) independiente(s), la variable dependiente es un máximo o un mínimo. En el ejemplo de la página 324 se utiliza el polinomio ajustado a los datos para concluir que el tiempo de secado es un mínimo cuando la cantidad de aditivo de barniz utilizado es de 5.1 gramos (véase el ejercicio 11.34).

A los métodos estadísticos de predicción y optimización con frecuencia se les conoce con la denominación general de **análisis de superficie de respuesta**. Dentro del ámbito de este texto, es posible introducir dos métodos más de análisis de superficie de respuesta: **regresión múltiple** aquí y problemas relacionados de **experimentación factorial** en el capítulo 13.

En la regresión múltiple, se trata con datos que consisten en n $(r + 1)$-tuplas $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}, y_i)$, donde las x nuevamente se suponen conocidas sin error, mientras que las y son valores de variables aleatorias. Los datos de este tipo surgen, por ejemplo, en estudios diseñados para determinar el efecto de varias condiciones climáticas sobre la resistencia de un metal a la corrosión; el efecto de la temperatura de horno, la humedad y el contenido de hierro sobre la resistencia de un recubrimiento cerámico; o bien, el efecto de la producción fabril, el nivel de consumo y las existencias en almacén sobre el precio de un producto.

Como en el caso de una variable independiente, primero se tratará el problema donde la ecuación de regresión es lineal, es decir, donde, para cualquier conjunto de valores dados $x_1, x_2, \ldots$, y x_r, para las r variables independientes, la media de la distribución de Y está dada por

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r$$

Para dos variables independientes, este es el problema de ajustar un plano a un conjunto de n puntos con coordenadas (x_{i1}, x_{i2}, y_i), como se ilustra en la figura 11.11.

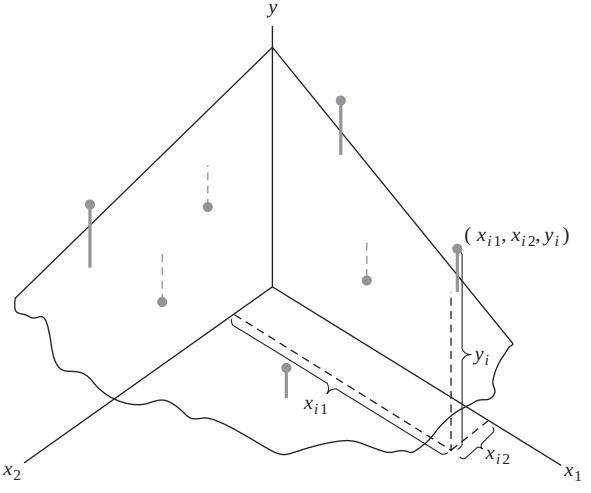


Figura 11.11
Plano de regresión

Al aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener estimaciones de los coeficientes β_0, β_1 y β_2, se minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales, desde las observaciones y_i al plano (véase la figura 11.11); simbólicamente, se minimiza

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})]^2$$

y se dejará al lector verificar, en el ejercicio 11.35, que las ecuaciones normales resultantes son

Ecuaciones normales para regresión múltiple con $r = 2$

$$\sum y = n\,b_0 + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2$$
$$\sum x_1\,y = b_0 \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1\,x_2$$
$$\sum x_2\,y = b_0 \sum x_2 + b_1 \sum x_1\,x_2 + b_2 \sum x_2^2$$

Como antes, se escriben las estimaciones de mínimos cuadrados de β_0, β_1 y β_2 como b_0, b_1 y b_2. Note que, en la notación abreviada, $\sum x_1$ representa $\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$, $\sum x_1\,x_2$ representa $\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\,x_{i2}$, $\sum x_1\,y$ representa $\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\,y_i$, y así sucesivamente.

EJEMPLO **Una regresión múltiple con dos variables predictoras**

Los siguientes son datos acerca del número de giros requeridos para romper cierto tipo de barra de aleación forjada, así como los porcentajes de dos elementos de aleación presentes en el metal:

Número de giros y	Porcentaje del elemento A x_1	Porcentaje del elemento B x_2
41	1	5
49	2	5
69	3	5
65	4	5
40	1	10
50	2	10
58	3	10
57	4	10
31	1	15
36	2	15
44	3	15
57	4	15
19	1	20
31	2	20
33	3	20
43	4	20

Ajuste un plano de regresión de mínimos cuadrados y use su ecuación para estimar el número de giros requeridos para romper una de las barras, cuando $x_1 = 21.5$ y $x_2 = 12$.

Solución Al sustituir $\sum x_1 = 40$, $\sum x_2 = 200$, $\sum x_1^2 = 120$, $\sum x_1\,x_2 = 500$, $\sum x_2^2 = 3{,}000$, $\sum y = 723$, $\sum x_1\,y = 1{,}963$ y $\sum x_2\,y = 8{,}210$ en las ecuaciones normales, se obtiene

$$723 = 16\,b_0 + 40\,b_1 + 200\,b_2$$
$$1{,}963 = 40\,b_0 + 120\,b_1 + 500\,b_2$$
$$3{,}210 = 200\,b_0 + 500\,b_1 + 3{,}000\,b_2$$

La solución única de este sistema de ecuaciones es $b_0 = 46.4$, $b_1 = 7.78$, $b_2 = -1.65$, mientras la ecuación del plano de regresión estimado es

$$\hat{y} = 46.4 + 7.78\,x_1 - 1.65\,x_2$$

Finalmente, al sustituir $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 12$ en esta ecuación,

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 46.4 + 7.78\,(2.5) - 1.65\,(12)\\ &= 46.0\end{aligned}$$

Advierta que b_1 y b_2 son estimaciones del cambio promedio en Y, que resulta de un aumento unitario en la correspondiente variable independiente cuando la otra variable independiente se mantiene fija. ■

Las computadoras eliminan el trabajo engorroso de los cálculos de un análisis de regresión múltiple. (Véase el ejercicio 11.40.) Una salida típica incluye

```
THE REGRESSION EQUATION IS
Y = 46.4 + 7.78 X1 - 1.65 X2 (1)

PREDICTOR        COEF        STDEV      T-RATIO        p
CONSTANT       46.438        3.517        13.20    0.000
X1             7.7750 (2)    0.9485 (3)    8.20    0.000 (7)
X2            -1.6550        0.1897       -8.72    0.000

S = 4.242   (6)     R-SQ = 91.7%   (5)

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE          DF      (4)  SS          MS
REGRESSION       2         2578.5      1289.3
ERROR           13          233.9        18.0
TOTAL           15         2812.4
```

Ahora se identifican algunas partes importantes de la salida.

1. El plano de regresión de mínimos cuadrados es

$$(1) \quad \hat{y} = 46.4 + 7.78\,x_1 - 1.65\,x_2$$

Esta ecuación estima que el número promedio de giros requeridos para romper una barra aumenta en 7.78, si el porcentaje del elemento A aumenta en 1% y x_2 permanece fija.

2. Las estimaciones de mínimos cuadrados y sus errores estándar estimados correspondientes son

$$\begin{aligned} b_0 &= 46.438 \quad \text{con error estándar estimado } 3.517\\ (2) \quad b_1 &= 7.7750 \quad \text{con error estándar estimado } 0.9485\\ b_2 &= -1.6550 \quad \text{con error estándar estimado } 0.1897\end{aligned}$$

3. Las razones t 13.20, 8.20, –8.72 son muy significativas, de modo que todos los términos se necesitan en el modelo (3).

4. En cualquier análisis de regresión con un término β_0, la descomposición

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})$$

produce la descomposición de la suma de cuadrados

$$④ \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}_{\textit{suma de cuadrados total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}_{\textit{suma de cuadrados del error}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{\textit{suma de cuadrados de regresión}}$$

o bien,

$$2{,}812.4 = 233.9 + 2{,}578.5$$

Por lo tanto, la proporción de variabilidad explicada por la regresión es (véase el ejercicio 11.61)

$$⑤ \quad R^2 = \frac{2{,}578.5}{2{,}812.4} = 1 - \frac{233.9}{2{,}812.4} = 0.917$$

5. La estimación de σ^2 es $s_e^2 = 233.9/13 = 18.0$, de modo que $s_e = 4.242$. ⑥

6. Los valores P ⑦ confirman el significado de las razones t y, por ende, el hecho de que todos los términos se requieren en el modelo.

Para fines comparativos, la salida del programa de regresión SAS se presenta en la figura 11.12.

```
Dependent Variable: Y
                          Analysis of Variance

                          Sum of           Mean
Source       DF       ④ Squares         Squares      F Value      Prob>F

Model         2      2578.52500      1289.26250       71.652      0.0001
Error        13       233.91250        17.99327
CTotal       15      2812.43750

   Root MSE      ⑥ 4.24185     R-square      0.9168  ⑤
   Dep Mean        45.18750    Adj  R-sq     0.9040

                     Parameter Estimates
                  Parameter      Standard      T  for  H0:

Variable   DF      Estimate         Error   Parameter = 0     Prob > |T|
INTERCEP    1     46.437500   3.51715405          13.203         0.0001
X1          1      7.775000   0.94850591           8.197         0.0001
X2          1     -1.655000   0.18970118          -8.724         0.0001
                     ②                            ③             ⑦

SUM OF RESIDUALS                    -6.21725E-15
SUM OF SQUARED RESIDUALS                233.9125
```

Figura 11.12
Salida de SAS seleccionada para un análisis de regresión múltiple usando los datos del ejemplo de la página 327

11.5 Cómo comprobar si el modelo es adecuado

Si se supone que el modelo de regresión es adecuado, se puede usar la ecuación ajustada para realizar inferencias. Antes de hacerlo, es imperativo que se comprueben las suposiciones subyacentes al análisis. En el contexto del modelo de regresión con dos predictores, se cuestiona si Y_i es igual a $\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, donde los errores ε_i son independientes y tienen la misma variación σ^2.

Toda la información acerca de la falta de ajuste está contenida en los residuos

$$
\begin{aligned}
e_1 &= y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - b_0 - b_1 x_{11} - b_2 x_{12} \\
e_2 &= y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - b_0 - b_1 x_{21} - b_2 x_{22} \\
&\vdots \\
e_n &= y_n - \hat{y}_n = y_n - b_0 - b_1 x_{n1} - b_2 x_{n2}
\end{aligned}
$$

Los residuos deberían graficarse en varias formas, para detectar alejamientos sistemáticos de las suposiciones.

Una gráfica de los residuos contra los valores predichos es una importante herramienta de diagnóstico. La figura 11.13 ilustra *a*) la banda constante ideal y dos transgresiones típicas; *b*) que la varianza aumenta con la respuesta y se necesita una transformación, y *c*) que el modelo $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ no es adecuado. En el último caso, pueden necesitarse los términos con x_1^2 y x_2^2.

También se recomienda graficar los residuos contra el tiempo, con la finalidad de detectar posibles tendencias sobre el tiempo.

El gráfico residual para el ejemplo de la página 302, dado en la figura 11.14, tiene la apariencia de una banda horizontal, de modo que no se indican transgresiones al modelo. En el ejercicio 11.24 se marcó como posible valor atípico el residuo grande. Es buena idea quitar dicha observación y volver a efectuar el análisis. Si no hay mucha oportunidad, entonces acaso quiera dejarlo. De otro modo, hay que buscar razones más profundas antes de descartarlo. Este mismo residuo destaca en la gráfica de puntuaciones normales de la figura 11.15.

Aunque es difícil valorar la normalidad solo con 12 residuos, los valores mayor y menor dan a la gráfica de la figura 11.15 una apariencia curva, además de volver sospechosa la suposición normal. Por fortuna, la suposición normal por lo general no es crucial para la inferencia, en tanto no estén presentes valores atípicos serios.

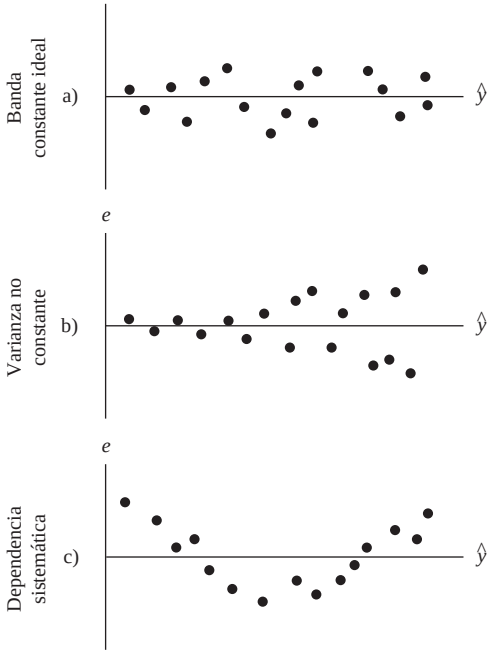


Figura 11.13
Gráficas residuales

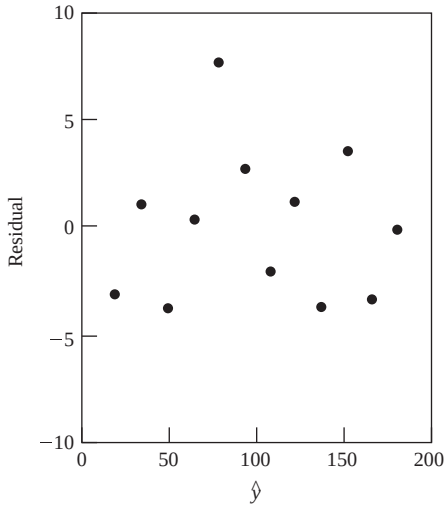


Figura 11.14
Gráfica de los residuos contra valores predichos $\hat{y}$

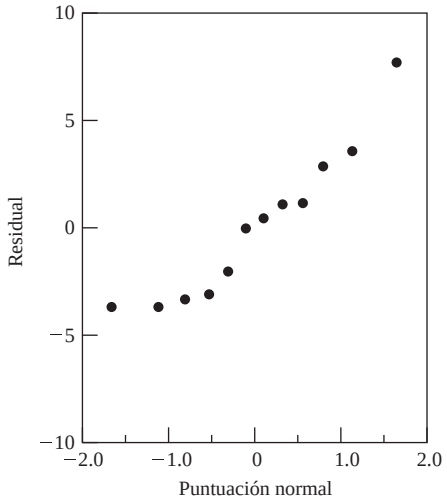


Figura 11.15
Gráfica de puntuaciones normales de los residuos

Ejercicios

11.25 Los siguientes datos pertenecen al crecimiento de una colonia de bacterias en un medio de cultivo:

Días desde la inoculación x	Conteo y
3	115,000
6	147,000
9	239,000
12	356,000
15	579,000
18	864,000

a) Grafique $\log y_i$ contra x_i para verificar que sea razonable ajustar una curva exponencial.

b) Ajuste una curva exponencial a los datos dados.

c) Use el resultado obtenido en el inciso *b*) para estimar el conteo de bacterias al final de 20 días.

11.26 Los siguientes datos pertenecen a dosis de rayos cósmicos medidas a varias altitudes:

Altitud (pies) x	Tasa de dosis (mem/año) y
50	28
450	30
780	32
1,200	36
4,400	51
4,800	58
5,300	69

a) Ajuste una curva exponencial.

b) Use el resultado obtenido en el inciso *a*) para estimar la dosis media a una altitud de 3,000 pies.

11.27 Con respecto al ejercicio anterior, cambie la ecuación obtenida en el inciso *a*) a la forma $\hat{y} = a \cdot e^{-cx}$, luego use el resultado para volver a trabajar el inciso *b*).

11.28 Los siguientes datos pertenecen a la demanda de un producto (en miles de unidades) y su precio (en dólares) cobrado en cinco diferentes áreas de mercado:

Precio x	Demanda y
20	22
16	41
10	120
11	89
14	56

Ajuste una función potencia y úsela para estimar la demanda cuando el precio del producto es de 12 dólares.

11.29 Ajuste una **curva de Gompertz** de la forma

$$y = e^{e^{\alpha x + \beta}}$$

a los datos del ejercicio 11.26.

11.30 Grafique la curva obtenida en el ejercicio anterior y la obtenida en el ejercicio 11.26 en un diagrama, luego compare el ajuste de esas dos curvas.

11.31 El número de pulgadas que una estructura recientemente construida se asienta en el suelo está dado por

$$y = 3 - 3e^{-\alpha x}$$

donde x es su edad en meses.

x	2	4	6	12	18	24
y	1.07	1.88	2.26	2.78	2.97	2.99

Emplee el método de mínimos cuadrados para estimar α. [*Sugerencia:* Note que la relación entre $\ln(3 - y)$ y x es lineal.]

11.32 Los siguientes datos pertenecen a la cantidad de hidrógeno presente, y, en partes por millón, en sondeo con testigos realizados a intervalos de 1 pie a lo largo de la longitud de un lingote moldeado al vacío, x, ubicación del testigo en pies desde la base:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.28	1.53	1.03	0.81	0.74	0.65	0.87	0.81	1.10	1.03

a) Dibuje un diagrama de dispersión para comprobar si es razonable ajustar una parábola a los datos dados.

b) Ajuste una parábola con el método de mínimos cuadrados.

c) Use la ecuación obtenida en el inciso *b*) para estimar la cantidad de hidrógeno presente en $x = 7.5$.

11.33 Cuando se ajusta un polinomio a un conjunto de datos pareados, por lo general se comienza por ajustar una línea recta y por usar el método de la página 311 para probar la hipótesis nula $\beta_1 = 0$. Entonces, se ajusta un polinomio de segundo grado y se prueba si vale la pena acarrear el término cuadrático al comparar $\hat{\sigma}_1^2$, la **varianza residual** después de ajustar la línea recta, con $\hat{\sigma}_2^2$, la varianza residual después de ajustar el polinomio de segundo grado. Cada una de dichas varianzas residuales está dada por la fórmula

$$\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\text{grados de libertad}} = \frac{\text{SCR}}{\nu}$$

con $\hat{y}$ determinado, respectivamente, de la ecuación de la línea y la ecuación del polinomio de segundo grado. La decisión de acarrear el término cuadrático se basa en el estadístico

$$F = \frac{\text{SCR}_1 - \text{SCR}_2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{\nu_1 \hat{\sigma}_1^2 - \nu_2 \hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_2^2}$$

que (con las suposiciones de la sección 11.2) es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución F con 1 y $n - 3$ grados de libertad.

a) Ajuste una línea recta a los datos de tiempo de secado del aditivo de barniz en la página 324, pruebe la hipótesis nula $\beta_1 = 0$ al nivel de significancia de 0.05 y calcule $\hat{\sigma}_1^2$.

b) Con el resultado del ejemplo del aditivo de barniz, calcule $\hat{\sigma}_2^2$ para los datos dados y pruebe, con nivel de 0.05, si se debe acarrear el término cuadrático. (Advierta que podría continuar este procedimiento y probar si hay que acarrear un término cúbico mediante una comparación correspondiente de varianzas residuales. Luego, podría probar si hay que acarrear un término de cuarto grado, etcétera. Se acostumbra terminar el procedimiento después de que dos pasos sucesivos no dan resultados significativos.)

11.34 Con respecto al ejemplo de la página 324, verifique que el tiempo de secado predicho sea mínimo cuando la cantidad de aditivo usado es de 5.1 gramos.

11.35 Verifique que el sistema de ecuaciones normales de la página 326 corresponde a la minimización de la suma de cuadrados.

11.36 Doce especímenes de chapa de acero laminada en frío, que tienen diferentes contenidos de cobre y temperaturas de recocido, se miden en su dureza con los siguientes resultados:

Dureza (Rockwell 30-T)	Contenido de cobre (%)	Temperatura de recocido (grados F)
78.9	0.02	1,000
65.1	0.02	1,100
55.2	0.02	1,200
56.4	0.02	1,300
80.9	0.10	1,000
69.7	0.10	1,100
57.4	0.10	1,200
55.4	0.10	1,300
85.3	0.18	1,000
71.8	0.18	1,100
60.7	0.18	1,200
58.9	0.18	1,300

Ajuste una ecuación de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$, donde x_1 representa el contenido de cobre, x_2 representa la temperatura de recocido y y representa la dureza.

11.37 Con respecto al ejercicio 11.36, estime la dureza de una hoja de acero con un contenido de cobre de 0.05% y una temperatura de recocido de 1,150 grados Fahrenheit.

11.38 Un compuesto se produce para un proceso de recubrimiento. Se agrega a un recipiente fijo en otras circunstancias y se completa el proceso de recubrimiento. Luego se mide la adhesión. Los siguientes datos tienen que ver con la cantidad de adhesión, así como con su relación con la cantidad de un aditivo y la temperatura de una reacción.

Aditivo x_1	Temperatura x_2	Adhesión y
0	100	10
70	100	48
35	140	41
0	180	40
70	180	39
70	140	44
0	140	24
35	100	31
35	180	44

(*Cortesía de Asit Banerjee*)

Ajuste una ecuación de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ a los datos dados y úsela para estimar la cantidad de adhesión, cuando la cantidad de aditivo sea de 40 y la temperatura sea de 130.

11.39 Los siguientes datos de muestra se recolectaron para determinar la relación entre las variables de procesamiento y la ganancia real de un transistor en el circuito integrado:

Tiempo de difusión (horas) x_1	Resistencia de la hoja (Ω-cm) x_2	Ganancia actual y
1.5	66	5.3
2.5	87	7.8
0.5	69	7.4
1.2	141	9.8
2.6	93	10.8
0.3	105	9.1
2.4	111	8.1
2.0	78	7.2
0.7	66	6.5
1.6	123	12.6

Ajuste un plano de regresión y use su ecuación para estimar la ganancia actual esperada, cuando el tiempo de difusión sea de 2.2 horas y la resistencia de la hoja sea de 90 Ω-cm.

11.40 La regresión múltiple se implementa mejor en una computadora. Los siguientes comandos *MINITAB* ajustan los valores y en C1 como valores predictores en C2 y C3.

Dialog box:
Stat > **Regression** > **Regression**
Escriba *C*1 en **Response**. Escriba *C*2 y *C*3 en **Predictors**. Haga clic en **OK**.

Ello produce una salida como la de la página 328. Use una computadora para realizar el análisis de regresión múltiple del ejercicio 11.36.

11.41 Con *MINITAB* se pueden transformar los valores x en C1 y/o los valores y en C2. Por ejemplo, para obtener el logaritmo a la base 10 de y, seleccione

> **Cuadro de diálogo:**
> **Calc > Calculator**
> Escriba *C*3 en **Store**, *LOGT*(*C*2) en **Expression**. Haga clic en **OK**.

Utilice la computadora para repetir el análisis del ejercicio 11.27.

11.42 Para ajustar el modelo de regresión cuadrática usando *MINITAB*, cuando los valores de x están en C1 y los valores de y en C2, hay que seleccionar

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Regression > Fitted Line Plot**
> Ingrese *C*2 en **Response** (**Y**) e ingrese *C*1 en **Predictor** (**X**)
> Debajo de **Type of Regression Model**, elija **Quadratic**. Haga clic en **OK**.

Use la computadora para repetir el análisis del ejemplo que viene en la página 324.

11.43 Con respecto al ejercicio 11.40, con la finalidad de graficar los residuos, se debe seleccionar

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Regression > Regression**
> Ingrese *C*1 en **Response**, luego ingrese *C*2 y *C*3 en **Predictors**.
> Haga clic en **Storage**. Marque **Residuals** y **Fits**. Haga clic en **OK** dos veces.

Los pasos adicionales

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Regression > Regression**
> Haga clic en **Graphs**. Marque **Residuals versus fits**.
> Haga clic en **OK** dos veces

producirán una gráfica de los residuos contra $\hat{y}$. Consulte el ejercicio 5.102, página 167, para obtener una gráfica de valores normales de los residuos.

Use una computadora para analizar los residuos del análisis de regresión múltiple en

a) el ejemplo de la página 327;

b) el ejercicio 11.36.

11.44 Con respecto al ejercicio 11.39, analice los residuos del plano de regresión.

11.45 Los siguientes residuos y valores predichos se obtuvieron de un experimento que relacionó la producción de un proceso químico (y) con la concentración inicial (x) de un componente (el orden temporal de los experimentos está dado entre paréntesis):

Predicho	Residuo	Predicho	Residuo
4.1 (5)	− 2	3.5 (3)	0
3.2 (9)	− 1	4.0 (12)	3
3.5 (13)	3	4.2 (4)	− 2
4.3 (1)	− 3	3.9 (11)	2
3.3 (7)	− 1	4.3 (2)	− 5
4.6 (14)	5	3.7 (10)	0
3.6 (8)	0	3.2 (6)	1

Examine los residuos en busca de evidencia de una transgresión de las suposiciones.

11.6 Correlación

Hasta aquí, se han estudiado problemas donde la variable (o variables) independiente(s) se supuso (supusieron) conocida(s) sin error. Aunque esto se aplica a muchas situaciones experimentales, también hay problemas donde las x, así como las y, son valores supuestos por variables aleatorias. Este sería el caso, por ejemplo, si se estudia la relación entre entrada y salida de una planta de tratamiento de aguas de desecho, la relación entre el esfuerzo de tensión y la dureza del aluminio, o bien, la relación entre impurezas en el aire y la incidencia de cierta enfermedad. A problemas como estos se les conoce como problemas de **análisis de correlación**, donde se supone que los puntos de datos (x_i, y_i) para $i = 1, 2, \ldots, n$ son valores de un par de variables aleatorias cuya densidad conjunta está dada por (x_i, y_i).

El diagrama de dispersión ofrece una impresión visual de la relación entre los valores x y y en un conjunto de datos bivariado. A menudo, los puntos parecen dispersarse en torno a una recta. La cercanía de la dispersión a una línea recta se expresa numéricamente en términos del coeficiente de correlación. La mejor interpretación del coeficiente de correlación muestral está en términos de las observaciones estandarizadas

$$\frac{\text{Observación} - \text{media muestral}}{\text{Desviación estándar muestral}} = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}$$

donde el subíndice x en s distingue la varianza muestral de las observaciones x,

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2/(n-1) = S_{xx}/(n-1)$$

de la varianza muestral de las observaciones y.

El **coeficiente de correlación muestral** r es la suma de productos de las variables estandarizadas dividida entre $n - 1$, el mismo divisor usado para varianza muestral.

Coeficiente de correlación muestral

$$r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \overline{y}}{s_y}\right)$$

Cuando la mayoría de los pares de observaciones son tales que, o ambos componentes están simultáneamente arriba de sus medias muestrales, o ambos están simultáneamente abajo de sus medias muestrales, los productos de los valores estandarizados tenderán a ser grandes y positivos, de modo que r será positivo. Este caso corresponde a un patrón suroeste a noreste en el diagrama de dispersión. [Véanse las figuras 11.16*a*) a *b*).]

De manera alternativa, si un componente del par tiende a ser grande cuando el otro es pequeño, y viceversa, el coeficiente de correlación r es negativo. Este caso corresponde a un patrón noroeste a sureste en el diagrama de dispersión.

Se puede demostrar que el valor de r siempre está entre –1 y 1, inclusive.

1. La magnitud de r describe la fortaleza de una relación lineal, mientras su signo indica la dirección.

$r = +1$ si todos los pares $f(x, y)$ caen exactamente sobre una línea recta que tenga una pendiente positiva.
$r > 0$ si el patrón en el gráfico de dispersión va del extremo inferior izquierdo al superior derecho.
$r < 0$ si el patrón en el gráfico de dispersión va del extremo superior izquierdo al inferior derecho.
$r = -1$ si todos los pares $f(x, y)$ yacen exactamente sobre una línea recta que tenga una pendiente negativa.
Un valor de r cercano a –1 o +1 describe una relación lineal fuerte.

2. Un valor de r cercano a cero implica que la asociación *lineal* es débil. Todavía puede existir una asociación fuerte a lo largo de una curva. [Véase la figura 11.16(f).]

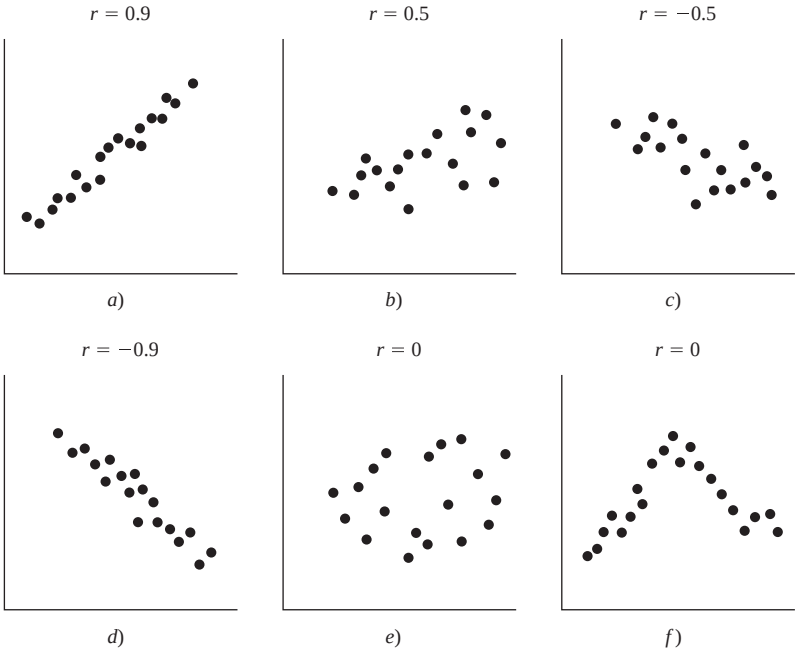


Figura 11.16
Correspondencia entre los valores de r y la cantidad de dispersión

A partir de las definiciones de S_{xx}, S_{xy} y S_{yy}, de la página 304, se obtiene una fórmula de cálculo más sencilla para r.

Cálculo alternativo para el coeficiente de correlación muestral

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

EJEMPLO **Cómo calcular el coeficiente de correlación muestral**

Los siguientes son los números de minutos que tardan 10 mecánicos en ensamblar una pieza de maquinaria en la mañana, x, y en la tarde, y:

x	y
11.1	10.9
10.3	14.2
12.0	13.8
15.1	21.5
13.7	13.2
18.5	21.1
17.3	16.4
14.2	19.3
14.8	17.4
15.3	19.0

Calcule r.

Solución El primer paso siempre consiste en graficar los datos para asegurarse de que existe un patrón lineal y que no hay valores atípicos. Un cálculo por computadora genera el diagrama de dispersión de la figura 11.17 y el valor $r = 0.732$ (véase el ejercicio 11.64 para detalles).

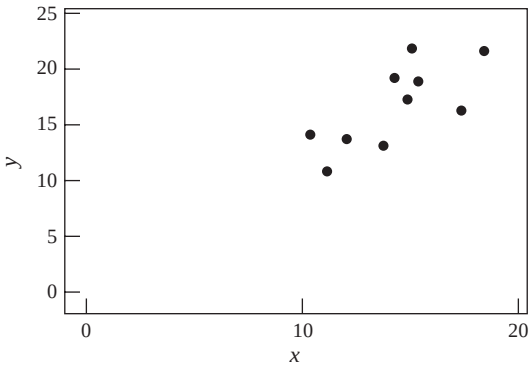


Figura 11.17
Correlación (Pearson) de x y y, $r = 0.732$

De manera alternativa, al usar una calculadora se determinan primero las sumatorias

$$\sum x = 142.3 \qquad \sum y = 166.8 \qquad \sum x^2 = 2{,}085.31$$

$$\sum x\,y = 2{,}434.69 \qquad \sum y^2 = 2{,}897.80$$

Luego, al sustituir en las fórmulas de la página 304, se obtiene

$$S_{xx} = 2{,}085.31 - (142.3)^2/10 = 60.381$$
$$S_{xy} = 2{,}434.69 - (142.3)(166.8)/10 = 61.126$$
$$S_{yy} = 2{,}897.80 - (166.8)^2/10 = 115.576$$

y, por lo tanto,

$$r = \frac{61.126}{\sqrt{(60.381)(115.576)}} = 0.732$$

El valor positivo para r confirma una asociación positiva donde los tiempos de ensamble largos tienden a aparearse, igual que hacen los tiempos de ensamble cortos. Más aún, ello capta la orientación del patrón de la figura 11.7, que va del extremo inferior izquierdo al superior derecho. Puesto que $r = 0.732$ es moderadamente grande, el patrón de dispersión es moderadamente estrecho. ■

EJEMPLO **Interpretación de la exploración de la correlación**

Los metales pesados pueden inhibir el tratamiento biológico de los desechos en las plantas de tratamiento municipales. En una planta de tratamiento de última generación, se realizaron mediciones mensuales de la cantidad de cromo ($\mu g/l$) tanto en caudal de entrada como en caudal de salida.

entrada	250	290	270	100	300	410	110	130	1100
salida	19	10	17	11	70	60	18	30	180

a) Elabore un diagrama de dispersión.

b) Elabore un diagrama de dispersión después de tomar el logaritmo natural de ambas variables.

c) Calcule el coeficiente de correlación, r, en el inciso *a*) y el inciso *b*).

d) Comente acerca de lo adecuado de r en cada caso.

Solución Los diagramas de dispersión se muestran en las figuras 11.18*a*) y *b*), respectivamente.

c) Un cálculo por computadora da $r = 0.942$ y $r = 0.747$, respectivamente.

d) r en realidad no es adecuado para los datos originales, pues la observación grande en el extremo superior derecho tiene demasiada influencia. Si se elimina el par (1100, 180), r cae a 0.578. La situación en *b*) es la mejor. ■

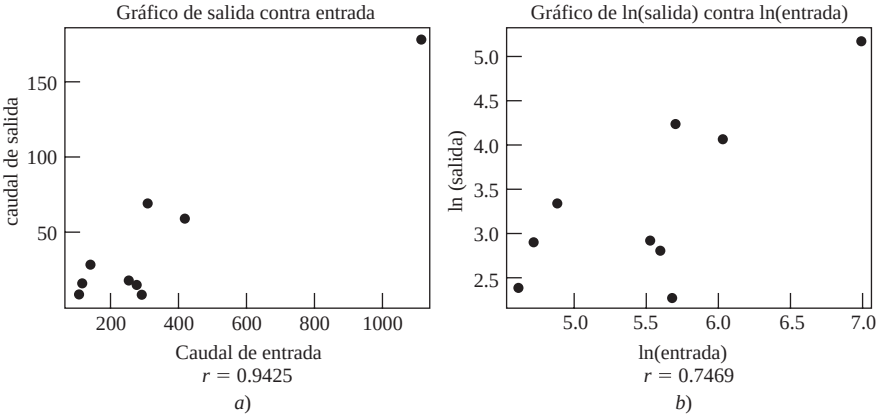


Figura 11.18
Diagramas de dispersión, datos originales y datos transformados

Correlación y regresión

Hay dos relaciones importantes entre r y el ajuste con mínimos cuadrados de una recta. Primero,

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\,S_{yy}}} = \frac{\sqrt{S_{xx}}}{\sqrt{S_{yy}}}\,\frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sqrt{S_{xx}}}{\sqrt{S_{yy}}}\,b$$

de modo que el coeficiente de correlación muestral, r, y la estimación de pendiente con mínimos cuadrados, b, tienen el mismo signo.

La segunda relación tiene que ver con la proporción de la variabilidad en y, explicada mediante x en un ajuste mediante mínimos cuadrados. La variación total en y es

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

mientras que la parte no explicada de la variación es la suma de residuos al cuadrado o $S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$. Esto deja la diferencia $S_{yy} - (S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}) = S_{xy}^2/S_{xx}$ como la **suma de cuadrados de regresión** debida al ajuste de x, lo cual descompone la variabilidad total de y en dos componentes: uno debido a regresión y el otro debido al error.

Descomposición de variabilidad

S_{yy}	=	S_{xy}^2/S_{xx}	+	$S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$
Variabilidad total de y		Variabilidad explicada por la relación lineal		Variabilidad residual o no explicada

Para que la línea recta dé un buen ajuste a los datos, la suma de cuadrados debida a regresión, S_{xy}^2/S_{xx}, tiene que ser una proporción sustancial de la suma total de cuadrados S_{yy}.

La **proporción de la variabilidad y explicada por la relación lineal** es

$$\frac{\text{Suma de cuadrados debida a regresión}}{\text{Suma de cuadrados total de } y} = \frac{S_{xy}^2/S_{xx}}{S_{yy}} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}\,S_{yy}} = r^2$$

donde r es el coeficiente de correlación muestral. Para resumir, la fortaleza de la relación lineal se mide con la proporción de la variabilidad y, explicada por la relación lineal, el cuadrado del coeficiente de correlación muestral.

La proporción de variabilidad y, explicada por la relación lineal = r^2

EJEMPLO

Cómo calcular la proporción de variación de y atribuida a la relación lineal

Consulte el ejemplo de la página 336 relacionado con los datos acerca de tiempos de ensamble. Encuentre la proporción de variación en y, los tiempos de ensamble vespertinos, que pueden explicarse mediante una ajuste en línea recta a x, los tiempos de ensamble matutinos.

Solución En el ejemplo anterior, se obtuvo $r = 0.732$. En consecuencia, la proporción de variación en y atribuida a x es $r^2 = (0.732)^2 = 0.536$.

El resultado obtenido aquí implica que $r^2 = 53.6\%$ de la variación entre los tiempos vespertinos se explica mediante (se explica por o puede atribuirse a) las diferencias correspondientes entre los tiempos matutinos. ■

Correlación y causación

En ocasiones, los científicos llegan a conclusiones injustificadas al confundir una alta correlación observada por una relación de causa y efecto. La observación de que dos variables tienden a variar simultáneamente en la misma dirección no implica una relación directa entre ellas. No sería sorprendente, por ejemplo, obtener una alta correlación positiva entre las ventas anuales de goma de mascar y la incidencia del crimen en ciudades de varios tamaños en Estados Unidos, pero uno no podría concluir que el crimen se reduciría si se prohibiera la venta de goma de mascar. Ambas variables dependen del tamaño de la población, y es esta relación mutua con una tercera variable (tamaño de población) la que produce la correlación positiva. La tercera variable, llamada **variable** o **factor de confusión**, a menudo se pasa por alto cuando se afirma equivocadamente que x causa y.

Cuando utilice el coeficiente de correlación como una medida de relación, debe tratar de evitar la posibilidad de que una importante variable de confusión influya en el cálculo.

También puede existir una relación causal que sea opuesta a la correlación observada. Durante la fabricación de papel para impresora de alta calidad, se miden la blancura y la cantidad de partículas metálicas. Los especímenes más blancos de papel tienen el menor contenido de metal, y viceversa. Esto es, hay una correlación fuerte, aunque negativa. Para alguien poco familiarizado con el proceso de elaboración de papel, ello sugeriría eliminar las partículas metálicas. Sin embargo, la relación causal es justo la opuesta: hay una correlación positiva fuerte. Las partículas metálicas mejoran la blancura, pero solo se agregan a papeles fronterizos para asegurarse de que pasan los estándares de prueba.

Inferencia acerca del coeficiente de correlación (poblaciones normales)

Para desarrollar una medida de asociación, o correlación, poblacional para dos variables aleatorias X y Y, comience con las dos variables estandarizadas

$$\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \text{ y } \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$$

Cada una de estas dos variables estandarizadas está libre de su unidad de medición, de modo que su producto está libre de ambas unidades de medición. El valor esperado de este producto,

que también es la covarianza, es entonces la medida de asociación entre X y Y llamada **coeficiente de correlación poblacional**. Esta medida de relación o asociación se denota con ρ (rho).

Coeficiente de correlación poblacional

$$\rho = E\left[\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]$$

El coeficiente de correlación poblacional ρ es positivo cuando ambos componentes (X, Y) son simultáneamente grandes o simultáneamente pequeños con alta probabilidad. Un valor negativo para ρ prevalece cuando, con alta probabilidad, un miembro del par (X, Y) es grande y el otro es pequeño. El valor de ρ siempre está entre –1 y 1, inclusive. Los valores extremos +1 surgen tan solo cuando la probabilidad 1 se asigna a pares (x, y), donde $(y - \mu_2)/\sigma_2 = (\pm 1)(x - \mu_1)/\sigma_1$, respectivamente, es decir, la probabilidad 1 se asigna a una recta y la probabilidad 0 al resto del plano.

En resumen, cuando $\rho = \pm 1$, se dice que hay una correlación (relación o asociación) lineal perfecta entre las dos variables aleatorias; cuando $\rho = 0$, se considera que no hay correlación (relación o asociación) entre las dos variables aleatorias.

Aunque el coeficiente de correlación muestral no es un estimador insesgado de ρ, se usa ampliamente como un estimador puntual, cualquiera que sea la forma de la población bivariada.

Las pruebas de hipótesis acerca de ρ y los intervalos de confianza requieren suposiciones más restrictivas. En lo que resta de esta sección, se supone que la distribución conjunta de X y Y es, hasta una aproximación razonable, la **distribución normal bivariada**. Esta distribución tiene función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$.

Para la distribución normal bivariada, se tiene una propiedad más fuerte. Cuando $\rho = 0$, la densidad conjunta se factoriza (véase el ejercicio 11.60), de modo que la correlación cero también implica que las dos variables aleatorias sean independientes.

Las inferencias acerca de ρ se basan en el coeficiente de correlación muestral. Siempre que r se base en una muestra aleatoria de una población normal bivariada, es posible realizar una prueba de significancia (una prueba de la hipótesis nula $\rho = \rho_0$), o bien, construir un intervalo de confianza para ρ sobre la base de la **transformación $\mathcal{Z}$ de Fisher**:

Transformación $\mathcal{Z}$ de Fisher

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r}{1 - r}$$

Este estadístico es un valor de una variable aleatoria que tiene aproximadamente una distribución normal con

$$\text{media} \quad \mu_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad \text{y} \quad \text{varianza} \quad \frac{1}{n - 3}$$

Por lo tanto, las inferencias acerca de ρ pueden basarse en

Estadístico para inferencias acerca de ρ

$$Z = \frac{\mathcal{Z} - \mu_Z}{1/\sqrt{n-3}} = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \cdot \ln \frac{(1+r)(1-\rho)}{(1-r)(1+\rho)}$$

que es una variable aleatoria que tiene aproximadamente la distribución normal estándar.

En particular, se puede probar la hipótesis nula de falta de correlación; a saber, la hipótesis nula $\rho = 0$, con el

Estadístico para probar la hipótesis nula $\rho = 0$

$$Z = \sqrt{n-3} \cdot \mathcal{Z} = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r}$$

EJEMPLO

Cómo poner a prueba la correlación distinta de cero en una población normal

Con respecto al ejemplo de la página 336, donde se tenía $n = 10$ y $r = 0.732$, pruebe la hipótesis nula $\rho = 0$ contra la hipótesis nula $\rho \neq 0$, con nivel de significancia de 0.05.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\rho = 0$
   Hipótesis alternativa: $\rho \neq 0$
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* Rechazar la hipótesis nula si $Z < -1.96$ o $Z > 1.96$, donde $Z = \sqrt{n-3} \cdot \mathcal{Z}$.
4. *Cálculos:* El valor de $\mathcal{Z}$ que corresponde a $r = 0.732$ es

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + 0.732}{1 - 0.732} \right) = 0.933$$

de modo que

$$Z = \sqrt{10-3} \cdot (0.933) = 2.47$$

5. *Decisión:* Dado que $z = 2.47$ supera 1.96, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que hay una relación entre los tiempos matutino y vespertino que tarda un mecánico en ensamblar el tipo dado de maquinaria. ■

Para construir un intervalo de confianza para ρ, primero construya un intervalo de confianza para $\mu_{\mathcal{Z}}$, la media de la distribución muestral de $\mathcal{Z}$, luego convierta a r y ρ usando la transformación inversa. Para obtener esta transformación, despeje

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

para r

$$r = \frac{e^{\mathcal{Z}} - e^{-\mathcal{Z}}}{e^{\mathcal{Z}} + e^{-\mathcal{Z}}}$$

Al usar la teoría anterior, puede escribir el primero de dichos intervalos de confianza como

Intervalo de confianza para $\mu_{\mathcal{Z}}$ (población normal)

$$\mathcal{Z} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} < \mu_{\mathcal{Z}} < \mathcal{Z} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$$

EJEMPLO **Determinación de un intervalo de confianza para ρ (población normal)**

Si $r = 0.70$ para las calificaciones de matemáticas y física de 30 estudiantes, construya un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de correlación poblacional.

Solución El valor de $\mathcal{Z}$ que corresponde a $r = 0.70$ es

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+.7}{1-.7}\right) = 0.867$$

Al sustituirlo junto con $n = 30$ y $z_{0.025} = 1.96$ en la fórmula del intervalo de confianza anterior para $\mu_{\mathcal{Z}}$, se obtiene

$$0.867 - \frac{1.96}{\sqrt{27}} < \mu_{\mathcal{Z}} < 0.867 + \frac{1.96}{\sqrt{27}}$$

o bien,

$$0.490 < \mu_{\mathcal{Z}} < 1.244$$

Entonces, al transformar los límites de confianza de vuelta a los correspondientes valores de r,

$$r = \frac{e^{0.490} - e^{-0.490}}{e^{0.490} + e^{-0.490}} = 0.45 \quad \text{y} \quad \frac{e^{1.244} - e^{-1.244}}{e^{1.244} + e^{-1.244}} = 0.85$$

se obtiene el intervalo de confianza del 95%

$$0.45 < \rho < 0.85$$

para la verdadera fortaleza de la relación lineal entre las calificaciones de los estudiantes en las dos materias dadas. ■

Note que, en este ejemplo, el intervalo de confianza para ρ es bastante amplio, lo cual ilustra el hecho de que los coeficientes de correlación basados en muestras relativamente pequeñas por lo general no son muy informativos.

Se concluye con la revisión de dos equivocaciones serias en la interpretación del coeficiente de correlación. Primero, debe enfatizarse que r es una estimación de la fortaleza de la relación lineal entre los valores de dos variables aleatorias. Por ende, como se ilustra en la figura 11.16*f*), r podría estar cerca de 0, cuando en realidad hay una fuerte relación (pero no lineal). Segundo, y quizá de mayor importancia, una correlación significativa no necesariamente implica una relación causal entre las dos variables aleatorias.

(Opcional) La distribución normal bivariada y el modelo de regresión en línea recta

Aquí se desarrollan la función de densidad conjunta normal bivariada en términos de la densidad condicional $f_2(y \mid x)$ y la densidad marginal $f_1(x)$, como se definió en la sección 5.10. En cuanto a $f_2(y \mid x)$, las condiciones que se impondrán son prácticamente idénticas a las utilizadas en conexión con la teoría de muestreo de la sección 11.2.

Para cualquier x dada, se supondrá que $f_2(y \mid x)$ es una distribución normal con la media $\alpha + \beta x$ y la varianza σ^2.

$E(Y \mid x)$ se conoce como **regresión** de Y en x

y es lineal. La varianza de la densidad condicional no depende de x. Al intercambiar x y y, se obtiene la otra regresión que se estimó en la figura 11.3.

Más aún, se supondrá que la densidad marginal $f_1(x)$ es normal con la media μ_1 y la varianza σ_1^2. Por lo tanto, con la relación $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y \mid x)$ dada en la página 150, se obtiene

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[y-(\alpha+\beta x)]^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sigma \cdot \sigma_1} e^{-\left\{\frac{[y-(\alpha+\beta x)]^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$. Note que esta distribución conjunta implica los *cinco* parámetros μ_1, σ_1, α, β y σ.

Por razones de simetría y otras consideraciones a explicar más adelante, es usual expresar la densidad normal bivariada en términos de los parámetros μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 y ρ. Aquí μ_2 y σ_2^2 son la media y la varianza de la distribución marginal $f_2(y)$, mientras que ρ, en esta notación, está dada por

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}$$

con ρ considerada positiva cuando β es positiva y negativa cuando β es negativa. Al dejar al lector demostrar, en el ejercicio 11.59, que

$$\mu_2 = \alpha + \beta\mu_1 \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta^2\sigma_1^2$$

a continuación se sustituye en la expresión anterior para $f(x, y)$ y se obtiene la siguiente forma de la distribución normal bivariada:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$ (véase el ejercicio 11.59).

En cuanto al coeficiente de correlación ρ, note que $-1 \leq \rho \leq +1$, ya que $\sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta^2\sigma_1^2$; por lo tanto, $\sigma_2^2 \geq \sigma^2$. Más aún, ρ puede ser igual a -1 o $+1$ tan solo cuando $\sigma^2 = 0$, lo cual representa el caso espurio donde toda la probabilidad se concentra a lo largo de la línea $y = \alpha + \beta x$ y, en consecuencia, hay una relación lineal perfecta entre las dos variables aleatorias. (Esto es, para un valor dado de x, Y debe ser igual a $\alpha + \beta x$.)

Ejercicios

11.46 Los datos, recolectados durante siete años, revelan una correlación positiva entre el salario inicial anual de los ingenieros y las ventas anuales de bebidas dietéticas. ¿Comprar más bebidas dietéticas aumentará los salarios iniciales? Explique su respuesta y sugiera una posible variable de confusión.

11.47 Los datos, recolectados de ciudades de tamaños ampliamente variables, revelaron una alta correlación positiva entre la cantidad de cerveza consumida y el número de matrimonios el año pasado. ¿Consumir mucha cerveza aumenta el número de matrimonios? Explique su respuesta.

11.48 Utilice el primer conjunto de expresiones de la página 304, que implican las desviaciones de la media, al calcular r para los siguientes datos.

x	y
8	3
1	4
5	0
4	2
7	1

11.49 Calcule r para las velocidades de aire y coeficientes de evaporación del ejemplo de la página 305. Además, si se considera que se satisfacen las suposiciones necesarias, pruebe la hipótesis nula $\rho = 0$ contra la hipótesis alternativa $\rho \neq 0$ en el nivel de significancia de 0.05.

11.50 Los siguientes datos pertenecen a la resistencia (ohms) y el tiempo de falla (minutos) de ciertas resistencias sobrecargadas:

Resistencia	Tiempo de falla
43	32
29	20
44	45
33	35
33	22
47	46
34	28
31	26
48	37
34	33
46	47
37	30
36	36
39	33
36	21
47	44
28	26
40	45
42	39
33	25
46	36
28	25
48	45
45	36

Calcule r.

11.51 Con respecto al ejercicio 11.50, pruebe $\rho = 0$ contra $\rho \neq 0$ a $\alpha = 0.01$.

11.52 Calcule r para los tiempos de extracción y las eficiencias de extracción del ejercicio 11.3. Si se considera que se satisfacen las suposiciones necesarias, pruebe la hipótesis nula $\rho = 0.75$ contra la hipótesis alternativa $\rho > 0.75$ en el nivel de significancia de 0.05.

11.53 Calcule r para las humedades y los contenidos de agua del ejercicio 11.12. Si considera que se satisfacen las suposiciones necesarias, construya un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de correlación poblacional ρ.

11.54 Las siguientes son mediciones del contenido de carbono y el índice de permeabilidad de 22 mezclas de aglomerado:

Contenido de carbono (%)	Índice de permeabilidad
4.4	12
5.5	14
4.2	18
3.0	35
4.5	23
4.1	13
4.9	19
4.7	22
5.0	20
4.6	16
4.9	29
4.6	16
5.0	12
4.7	18
5.1	21
4.4	27
3.6	27
4.9	21
5.1	13
4.8	18
5.2	17
5.2	11

a) Calcule r.

b) Encuentre límites de confianza del 99% para ρ.

11.55 Con respecto al ejemplo concerniente a los nanopilares de la página 306, calcule el coeficiente de correlación entre altura y ancho.

11.56 Si $r = 0.83$ para un conjunto de datos pareados y $r = 0.60$ para otro, compare las fortalezas de las dos relaciones.

11.57 Si los datos acerca de edades y precios de 25 piezas de equipo dieron $r = -0.58$, pruebe la hipótesis nula $\rho = -0.40$ contra la hipótesis alternativa $\rho < -0.40$ en el nivel de significancia de 0.05. Suponga normalidad bivariada.

11.58 Si considera que se satisfacen las suposiciones necesarias, construya un intervalo de confianza del 95% para ρ cuando

a) $r = 0.72$ y $n = 19$;

b) $r = 0.35$ y $n = 25$;

c) $r = 0.57$ y $n = 40$.

11.59 *a*) Al evaluar las integrales necesarias, verifique las identidades

$$\mu_2 = \alpha + \beta\,\mu_1 \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta^2\sigma_1^2$$

de la página 343.

b) Sustituya $\mu_2 = \alpha + \beta\mu_1$ y $\sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta^2\sigma_1^2$ en la fórmula para la densidad bivariada dada en la página 343, luego demuestre que esto produce la forma final que se presenta en dicha página.

11.60 Demuestre que, para la distribución normal bivariada,

a) independencia implica correlación cero;

b) correlación cero implica independencia.

11.61 En vez de usar la fórmula para calcular de la página 336, puede obtenerse el coeficiente de correlación r con la fórmula

$$r = \pm\sqrt{1 - \frac{\sum(y - \hat{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}}$$

que es similar a la fórmula usada para definir ρ. Aunque los cálculos requeridos por el uso de esta fórmula son tediosos, la fórmula tiene la ventaja de que también puede utilizarse para medir la fortaleza de las relaciones no lineales o las relaciones en varias variables. Por ejemplo, en el caso de regresión lineal múltiple de la página 327, uno podría calcular los valores predichos mediante la ecuación

$$\hat{y} = 46.4 + 7.78\,x_1 - 1.65\,x_2$$

y luego determinar r como una medida de cuán fuertemente y, los giros requeridos para romper una de las barras de aleación forjada, depende de los porcentajes de los elementos presentes en la aleación.

a) Con los datos de la página 327, encuentre $\sum(y - \bar{y})^2$ mediante la fórmula

$$\sum(y - \bar{y})^2 = \sum y^2 - b\,\bar{y}^2$$

b) Con la ecuación de regresión obtenida, que viene en la página 328, calcule $\hat{y}$ para los 16 puntos y luego determine $\sum(y - \hat{y})^2$.

c) Sustituya los resultados obtenidos en *a*) y *b*) en la fórmula anterior para r. El resultado se conoce como **coeficiente de correlación múltiple**.

11.62 Con respecto al ejercicio 11.39, use la teoría del ejercicio anterior para calcular el coeficiente de correlación múltiple (que mide cuán fuertemente la ganancia actual se relaciona con las dos variables independientes.)

11.63 Con respecto a los datos de giro de los nanoalambres del ejercicio 11.24, calcule el coeficiente de correlación.

11.64 Para calcular r usando *MINITAB* cuando los valores x están en $C1$ y los valores y están en $C2$, utilice

> **Cuadro de diálogo:**
> **Stat > Basic Statistics > Correlation**
> Escriba $C1$ y $C2$ en **Variables**. Haga clic en **OK**.

Además, se puede elaborar un diagrama de dispersión con el procedimiento de graficación del ejercicio 11.22.

Use la computadora para realizar el ejercicio 11.50.

11.7 Regresión lineal múltiple (notación matricial)

El modelo que se utiliza en la regresión lineal múltiple se presta exclusivamente a un tratamiento unificado en notación matricial.[3] Esta notación permite enunciar resultados generales en forma compacta y usar, con gran ventaja, muchos de los resultados de la teoría de matrices.

Es usual denotar las matrices con letras mayúsculas en tipo negrillas y los vectores con minúsculas en negrillas. Para expresar las ecuaciones normales que vienen en la página 327 en notación matricial, se definen las tres matrices siguientes.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

[3]En esta sección se supone que el lector está familiarizado con el material que se suele cubrir en un primer curso de álgebra lineal. Puesto que la notación matricial no se usa en otra parte de este libro, esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

La primera, **X**, es una matriz $n \times (2 + 1)$ que, en esencia, consiste en los valores dados de las x con la columna de los 1 adjunta, para alojar el término constante. **y** es una matriz $n \times 1$ (o vector columna) que consiste en valores observados de la variable de respuesta y **b** es la matriz $(2 + 1) \times 1$ (o vector columna) que consiste en las estimaciones de mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión.

Con estas matrices, ahora es posible escribir las siguientes soluciones simbólicas de las ecuaciones normales de la página 327. Las estimaciones de mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión múltiple están dadas por

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

donde $\mathbf{X}'$ es la transpuesta de **X** y $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ es la inversa de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

Para verificar esta relación, determine primero $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}$ y $\mathbf{X}'\mathbf{y}$.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 n + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 \\ b_0 \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 \\ b_0 \sum x_2 + b_1 \sum x_2 x_1 + b_2 \sum x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

Al identificar los elementos $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}$ como las expresiones a la derecha de las ecuaciones normales de la página 327, así como las de $\mathbf{X}'\mathbf{y}$ como las expresiones del lado izquierdo, se escribe

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Al multiplicar la izquierda por $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, se obtiene

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

y, finalmente,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

ya que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es igual a la matriz identidad $(2 + 1) \times (2 + 1)$ **I**, y por definición $\mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Aquí se supuso que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es no singular, de modo que existe su inversa.

EJEMPLO

Cómo calcular las estimaciones de mínimos cuadrados usando $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

Con respecto al ejemplo de la página 327, use las expresiones matriciales para determinar las estimaciones de mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión múltiple.

Solución

Al sustituir $\sum x_1 = 40$, $\sum x_2 = 200$, $\sum x_1^2 = 120$, $\sum x_1 x_2 = 500$, $\sum x_2^2 = 3{,}000$, y $n = 16$ en la expresión anterior para $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, se obtiene

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 16 & 40 & 200 \\ 40 & 120 & 500 \\ 200 & 500 & 3{,}000 \end{bmatrix}$$

Entonces, la inversa de esta matriz se obtiene usando diversas técnicas; al emplear aquella que se basa en cofactores, se descubre que

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{160{,}000}\begin{bmatrix} 110{,}000 & -20{,}000 & -4{,}000 \\ -20{,}000 & 8{,}000 & 0 \\ -4{,}000 & 0 & 320 \end{bmatrix}$$

donde 160,000 es el valor de $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$, el determinante de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

Al sustituir $\sum y = 723$, $\sum x_1 y = 1{,}963$ y $\sum x_2 y = 8{,}210$ en la expresión para $\mathbf{X}'\mathbf{y}$ de la página 346, se obtiene entonces

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 723 \\ 1{,}963 \\ 8{,}210 \end{bmatrix}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} &= \frac{1}{160{,}000}\begin{bmatrix} 110{,}000 & -20{,}000 & -4{,}000 \\ -20{,}000 & 8{,}000 & 0 \\ -4{,}000 & 0 & 320 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 723 \\ 1{,}963 \\ 8{,}210 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{160{,}000}\begin{bmatrix} 7{,}430{,}000 \\ 1{,}244{,}000 \\ -264{,}800 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 46.4375 \\ 7.7750 \\ -1.6550 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que los resultados obtenidos aquí son idénticos a los mostrados en la impresión de computadora en la página 328. ■

La suma de cuadrados residual también tiene una expresión matricial conveniente. Los valores predichos $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2}$ pueden recolectarse como una matriz (vector columna).

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{b}$$

Por lo tanto, la suma de cuadrados residual

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$$

En consecuencia, las estimaciones s_e^2 de σ^2 se expresan como

$$s_e^2 = \frac{1}{n-3}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$$

Las mismas expresiones matriciales para **b** y la suma de cuadrados residual se mantienen para cualquier número de variables predictoras. Si la media de Y tiene la forma $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$, se definen las matrices

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad \text{y} \quad s_e^2 = \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{y} - \mathbf{Xb})'(\mathbf{y} - \mathbf{Xb})$$

Por lo general, el error de la suma de cuadrados, *ESC*, tiene grados de libertad (g.l.)

$$\text{g.l.} = n - \text{número de las } \beta's \text{ en el modelo} = n - (k + 1)$$

EJEMPLO **Ajuste de una recta usando las fórmulas matriciales**

Use las relaciones matriciales para ajustar una recta a los datos

x	0	1	2	3	4
y	8	9	4	3	1

Solución Aquí, $k = 1$ y, al eliminar el subíndice 1,

$\mathbf{X}'$	$\mathbf{y}$	$\mathbf{X}'\mathbf{X}$	$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$	$\mathbf{X}'\mathbf{y}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 25 \\ 30 \end{bmatrix}$

En consecuencia,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y la ecuación ajustada es

$$\hat{y} = 9 - 2x$$

El vector de valores ajustados es

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que el vector de residuos

$$\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la suma de cuadrados residual es

$$[-1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

Finalmente,

$$s_e^2 = \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{5-2}(6) = 2.00$$ ■

La elegancia de las expresiones que usan matrices va un paso más adelante. Es posible expresar las varianzas y covarianzas estimadas de los estimadores de mínimos cuadrados como

$$\begin{bmatrix} \widehat{Var}(b_0) & \widehat{\text{Cov}}(b_0, b_1) & \cdots & \widehat{\text{Cov}}(b_0, b_k) \\ \widehat{\text{Cov}}(b_1, b_0) & \widehat{Var}(b_1) & \cdots & \widehat{\text{Cov}}(b_1, b_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\text{Cov}}(b_k, b_0) & \widehat{\text{Cov}}(b_k, b_1) & \cdots & \widehat{Var}(b_k) \end{bmatrix} = s_e^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Es decir, para obtener la varianza estimada, $\widehat{Var}(b_i)$, de b_i, se multiplica la entrada diagonal correspondiente de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ por s_e^2, que es la estimación de σ^2.

EJEMPLO **Estimación de la varianza de los estimadores de mínimos cuadrados**

Con respecto al ejemplo anterior, use las relaciones matriciales para obtener las varianzas estimadas $\widehat{Var}(b_0)$ y $\widehat{Var}(b_1)$.

Solución Se tiene

$$\begin{bmatrix} \widehat{Var}(b_0) & \widehat{\text{Cov}}(b_0, b_1) \\ \widehat{\text{Cov}}(b_1, b_0) & \widehat{Var}(b_1) \end{bmatrix} = s_e^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= (2.00)\begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

donde los valores para $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ y s_e^2 son los obtenidos en el ejemplo anterior. Por lo tanto, las estimaciones son $\widehat{Var}(b_0) = 1.2$ y $\widehat{Var}(b_1) = 0.2$. Note además que la covarianza estimada de b_0 y b_1 es $\widehat{\text{Cov}}(b_0, b_1) = -0.4$. ■

Sí y no
Sí
1. Como primer paso, grafique la variable respuesta contra la variable predictora. Si hay más de una variable predictora, elabore gráficas separadas para cada una. Examine la gráfica para saber si hay una relación lineal o de otro tipo.
2. Aplique el principio de mínimos cuadrados para obtener estimaciones de los coeficientes cuando ajuste una recta o un modelo de regresión múltiple.

3. Estime la línea de mínimos cuadrados $\hat{y} = a + bx$ con las estimaciones de mínimos cuadrados

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad a = \overline{y} - b\overline{x}$$

y la varianza σ^2 del término del error mediante

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}{n-2} = \frac{S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}}{n-2}$$

donde $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ y $S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$.

4. Determine los intervalos de confianza de $100(1-\alpha)\%$ usando los límites de confianza

$$\text{ordenada al origen } \alpha: \qquad a \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}}$$

$$\text{pendiente } \beta: \qquad b \pm t_{\alpha/2} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{S_{xx}}}$$

5. Recuerde que el coeficiente de correlación muestral

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

es una medida libre de unidades de la asociación lineal entre las dos variables.

No

1. No acepte rutinariamente el análisis de regresión que se presenta en las salidas de computadora. En cambio, examine el modelo mediante inspección de los residuos de los valores atípicos y la falta de normalidad de moderada a drástica. Una gráfica de valores normales es útil cuando hay aproximadamente más de 20 residuos, lo cual puede sugerir una transformación.
2. No confunda una correlación alta con una relación causal.

Ejercicios de repaso

11.65 Los datos a la derecha pertenecen al número de horas de uso de motores de aviones de reacción y al número de horas requeridas para su reparación.

a) Use el primer conjunto de expresiones de la página 304, que implican las desviaciones de la media, para ajustar una línea de mínimos cuadrados a las observaciones.

b) Utilice la ecuación de la línea de mínimos cuadrados para estimar el tiempo de reparación medio $x = 4.5$.

Número de horas (cientos)	Tiempo de reparación (horas)
1	10
2	40
3	30
4	80
5	90

c) ¿Qué dificultad se podría encontrar si usa la línea de mínimos cuadrados para predecir el tiempo de reparación medio para un motor de avión de reacción con 700 horas?

11.66 Con respecto al ejercicio 11.65, construya un intervalo de confianza del 95% para α.

11.67 Con respecto al ejercicio 11.65, pruebe la hipótesis nula $\beta = 5$ contra la hipótesis alternativa $\beta > 5$ con nivel de significancia de 0.05.

11.68 Con respecto al ejercicio 11.65,

a) determine un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de reparación medio en $x = 4.5$;

b) encuentre límites de predicción del 95% para el tiempo de reparación de un motor que operará durante $x = 4.5$ cientos de horas.

11.69 Un ingeniero químico descubrió que, al agregar diferentes cantidades de un aditivo a la gasolina, podía reducir la cantidad de óxidos nitrosos (NOx) provenientes de un motor de automóvil. Una cantidad especificada se agregó a un galón de gasolina y se recolectó la cantidad total de NOx en el escape. Suponga, en unidades adecuadas, que los datos son

Cantidad de aditivo	NOx
1	19
2	17
3	14
4	13
5	12

a) Obtenga el ajuste con mínimos cuadrados, de una línea recta, para la cantidad de NOx.

b) Pruebe si la pendiente es o no $\beta = 0$. Considere $\alpha = 0.10$ como su nivel de significancia.

c) Proporcione un intervalo de confianza del 99% para el valor medio de NOx cuando la cantidad de aditivo sea de 9.

d) ¿Qué riesgo adicional existe cuando usa su estimación en el inciso *c*)?

11.70 Con respecto al ejercicio 11.69, encuentre los límites de predicción del 95% cuando la cantidad de aditivo sea de 4.5.

11.71 Con referencia al ejercicio 11.69, encuentre la proporción de varianza en la cantidad de NOx explicada por la cantidad de aditivo.

11.72 Para determinar cuán bien los análisis químicos existentes pueden detectar el plomo en especímenes de prueba de agua, un ingeniero civil envía a un laboratorio especímenes marcados con concentraciones conocidas de plomo. A los químicos solo se les dice que todas las muestras provienen de un estudio acerca de mediciones en concentraciones "bajas", pero no se les indica el rango de valores a esperar. En ocasiones, a esto se le llama problema de calibración, pues la meta es relacionar la concentración medida (y) con la concentración conocida (x). Dados los datos

x	0.00	0.00	1.25	1.25	2.50	2.50	2.50	5.00	10.00	10.00
y	0.7	0.5	1.1	2.0	2.8	3.5	2.3	5.3	9.1	9.4

a) grafique la concentración medida contra la concentración conocida; comente acerca del patrón;

b) ajuste una recta usando mínimos cuadrados;

c) si la prueba química es correcta, en promedio, se esperaría una línea recta que tenga pendiente 1. Obtenga un intervalo de confianza del 95% para β;

d) pruebe $H_0: \beta = 1$ contra $H_1: \beta \neq 1$ con nivel $\alpha = 0.05$.

11.73 Con respecto al ejercicio anterior, construya un intervalo de confianza del 95% para α.

11.74 Con respecto al ejemplo de la página 337,

a) encuentre la línea de mínimos cuadrados para predecir el cromo en el caudal de salida, a partir del que se encuentra en el caudal de entrada, después de tomar logaritmos naturales de cada variable;

b) prediga el ln (caudal salida) medio cuando el caudal de entrada tiene 500 $\mu g/l$ de cromo.

11.75 En un experimento diseñado para determinar la razón de calor específico γ para cierto gas, se midió la presión p correspondiente con los siguientes resultados:

p (lb/ in^2)	16.6	39.7	78.5	115.5	195.3	546.1
V(in^3)	50	30	20	15	10	5

Si supone la ley de los gases ideales, $p \cdot V^{\gamma} = C$, use dichos datos para estimar γ para este gas.

11.76 Con respecto al ejercicio 11.75, use el método de la sección 11.2 para construir un intervalo de confianza del 95% para γ. Indique qué suposiciones deberá hacer.

11.77 El aumento de corriente en un circuito inductivo que tiene la constante de tiempo τ está dado por

$$I = 1 - e^{-t/\tau}$$

donde t es el tiempo medido desde el instante cuando se cierra el interruptor, mientras I es la razón entre la corriente y el tiempo t para el valor completo de la corriente dada por la ley de Ohm. Dadas las mediciones

I	0.073	0.220	0.301	0.370	0.418	0.467	0.517	0.578
t (s)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8

estime la constante de tiempo de este circuito a partir de los resultados experimentales dados. [*Sugerencia:* Note que la relación entre $\ln(1 - I)$ y t es lineal.]

11.78 Los siguientes son datos de muestra ofrecidos por una compañía de mudanzas acerca de los pesos de seis embarques, las distancias

que se transportaron y los daños en que se incurrió:

Peso (1,000 libras) x_1	Distancia (1,000 millas) x_2	Daño (dólares) y
4.0	1.5	160
3.0	2.2	112
1.6	1.0	69
1.2	2.0	90
3.4	0.8	123
4.8	1.6	186

a) Ajuste una ecuación de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

b) Use la ecuación obtenida en el inciso *a*) para estimar el daño cuando un embarque que pesa 2,400 libras se transporta 1,200 millas.

11.79 Con respecto al ejercicio 11.9,

a) encuentre un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de CPU medio requerido para $x = 3.0$ trabajos;

b) encuentre límites de predicción del 95% para el tiempo de CPU requerido en un día futuro cuando $x = 3.0$ trabajos que deben realizarse.

11.80 Use el primer conjunto de expresiones de la página 304, que implique las desviaciones de la media, para calcular r para los siguientes datos.

x	y
8	4
5	5
6	1
2	3
9	2

11.81 Si $r = 0.41$ para un conjunto de datos pareados y $r = 0.29$ para otro, compare las fortalezas de las dos relaciones.

11.82 Si, para ciertos datos pareados, $n = 18$ y $r = 0.44$, pruebe la hipótesis nula $\rho = 0.30$ contra la hipótesis alternativa $\rho > 0.30$ en el nivel de significancia de 0.01.

11.83 Si considera que se satisfacen las suposiciones necesarias, construya un intervalo de confianza del 95% para ρ cuando

a) $r = 0.78$ y $n = 15$;

b) $r = -0.62$ y $n = 32$;

c) $r = 0.17$ y $n = 35$.

11.84 Con respecto al ejercicio 11.78, use la teoría del ejercicio 11.61 para calcular el coeficiente de correlación múltiple (que mide cuán fuertemente se relaciona el daño tanto con el peso como con la distancia).

11.85 Robert A. Millikan (1865-1953) produjo las primeras mediciones precisas acerca de la carga e de un electrón. Millikan diseñó un método para observar una sola gota de agua o aceite bajo la influencia de los campos eléctrico y gravitacional. Por lo general, una gotita transporta muchos electrones, por lo que cálculos directos basados en voltaje, tiempo de caída, etcétera, proporcionaron una estimación de la carga total. [*Fuente: Philosophical Magazine* **19** (1910); 209-228.]

x (Núm. de e)	Observaciones ($10^9 \times$ carga)									
3	1.392	1.392	1.398	1.368	1.368	1.368	1.345			
4	1.768	1.768	1.910	1.768	1.746	1.746	1.886	1.768	1.768	1.768
5	2.471	2.471	2.256	2.256	2.471					
2	0.944	0.992								
6	2.981	2.688								

a) Encuentre la ecuación de la línea de mínimos cuadrados para los datos de Millikan.

b) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la pendiente β, la carga e en un solo electrón.

c) Pruebe la hipótesis nula $\alpha = 0$ contra la hipótesis alternativa $\alpha \neq 0$.

d) Examine los residuos.

11.86 Robert Boyle (1627-1691) estableció la ley de que (presión $\times$ volumen) = constante para un gas a una temperatura constante. Al verter mercurio en la parte abierta del lado largo de un tubo con forma de J, aumentó la presión en el aire atrapado en el extremo corto. El volumen del aire atrapado = $h \times$ sección transversal, donde h es la altura del

aire en el extremo corto. Si y = altura de mercurio, ajustada para la presión de la atmósfera en el extremo abierto, entonces y y $x = 1/h$ obedecería una relación en línea recta. [*Fuente: The Laws of Gases*, editado por Carl Barus (1899), Nueva York: Harper and Brothers Publishers.]

h	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24
y	$29\frac{2}{16}$	$30\frac{9}{16}$	$31\frac{15}{16}$	$33\frac{8}{16}$	$35\frac{5}{16}$	37	$39\frac{5}{16}$	$41\frac{10}{16}$	$44\frac{3}{16}$	$47\frac{1}{16}$	$50\frac{5}{16}$	$54\frac{5}{16}$	$58\frac{13}{16}$

h	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
y	$61\frac{5}{16}$	$64\frac{1}{16}$	$67\frac{1}{16}$	$70\frac{11}{16}$	$74\frac{2}{16}$	$77\frac{14}{16}$	$82\frac{12}{16}$	$87\frac{14}{16}$	$93\frac{1}{16}$	$100\frac{7}{16}$	$107\frac{13}{16}$	$117\frac{9}{16}$

a) Ajuste una recta con mínimos cuadrados para los datos de Boyle.

b) Compruebe los residuos para una posible transgresión de las suposiciones.

Términos clave

Análisis de correlación 335
Análisis de superficie de respuesta 326
Coeficiente de correlación muestral 335
Coeficiente de correlación múltiple 345
Coeficiente de correlación poblacional 340
Curva de regresión 301
Diagrama de dispersión 302
Distribución normal bivariada 340
Ecuaciones normales 308, 324
Error estándar de la estimación 310
Estimadores de mínimos cuadrados 304
Forma exponencial 322
Forma logarítmica 322
Función potencia 323
Función recíproca 323
Gráfico de dispersión 302
Límites de predicción 314
Método de mínimos cuadrados 303
Pendiente de línea de regresión 311
Principio de mínimos cuadrados 303
Regresión exponencial 321
Regresión lineal 302
Regresión múltiple 326
Regresión polinomial 323
Residuo 304
Suma de cuadrados de regresión 338
Suma de cuadrados del error 304
Suma de cuadrados residual 304
Teorema de Gaus-Markov 309
Transformación $\mathcal{Z}$ de Fisher 340
Variable de confusión 339

CAPÍTULO

12 ANÁLISIS DE VARIANZA

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

12.1 Algunos principios generales 354

12.2 Diseños completamente al azar 357

12.3 Diseños de bloques al azar 370

12.4 Comparaciones múltiples 377

12.5 Análisis de covarianza 382

Ejercicios de repaso 388

Términos clave 390

Algunos de los ejemplos del capítulo 11 ya mostraron que puede haber ahorros considerables en los cálculos al planear, de manera adecuada, un experimento por adelantado. Lo que es más importante: la planeación experimental adecuada proporcionaría un aseguramiento razonable de que los resultados de un experimento ofrecerán respuestas claras a las preguntas que se investigan. Aunque es imposible brindar en este capítulo un análisis completo del diseño experimental, incluidos los equívocos diversos a los que está expuesto el experimentador, se comenzará por presentar algunos de los principios generales del diseño experimental. En secciones posteriores, se verán muchos de los diseños utilizados con más frecuencia en ingeniería y otras investigaciones aplicadas.

En las secciones 12.2 y 12.3 se estudiarán los diseños frecuentemente usados de clasificación unidireccional y bidireccional, mientras en el resto del capítulo se introducen pruebas para comparar varias medias, así como el análisis de un experimento balanceado en presencia de una variable concomitante o covariada.

12.1 Algunos principios generales

Muchos de los aspectos más importantes de **diseño experimental** se ilustran con un ejemplo tomado del importante campo de la medición en ingeniería.

Suponga que un molino de acero suministra placas de estaño a 3 fabricantes de latas, siendo la principal especificación que el peso del recubrimiento de estaño debería ser de al menos 0.25 libras por base de caja. El molino y cada fabricante de latas tienen un laboratorio donde se realizan mediciones de los pesos del recubrimiento de estaño a muestras tomadas de cada embarque. Suponga, además, que surge cierto desacuerdo acerca de los pesos reales del recubrimiento de estaño de la placa de estaño que se embarca, por lo que se decide planear un experimento para determinar si los 4 laboratorios llevan a cabo mediciones consistentes. Un factor que complica la situación es que parte del proceso de medición consiste en la remoción química del estaño de la superficie de la base metálica; por ende, es imposible que cada laboratorio mida la muestra idéntica para determinar cuán cercanamente corresponden las mediciones.

Una posibilidad es enviar varias muestras (en la forma de discos circulares con áreas iguales) a cada uno de los laboratorios. Aunque tales discos en realidad pueden no tener idénticos pesos de recubrimiento de estaño, se espera que esas diferencias sean pequeñas y que más o menos estén en un promedio. En otras palabras: se supondrá que cualquier diferencia que haya entre las medias de las 4 muestras no será posible atribuirla a ninguna otra causa, más que a las diferencias sistemáticas en las técnicas de medición y la variabilidad por azar, lo cual haría factible determinar si los resultados producidos por los laboratorios son consistentes al comparar la variabilidad de las 4 medias muestrales con una medida adecuada de variación por azar.

Ahora continúa el problema de decidir cuántos discos enviar a cada laboratorio y cómo se seleccionan realmente los discos. La cuestión del tamaño de la muestra puede responderse en muchas formas distintas, una de las cuales es utilizar la fórmula de la página

247 para obtener la desviación estándar de la diferencia entre dos medias. Al sustituir los valores conocidos de σ_1 y σ_2 y especificar qué diferencias entre las medias verdaderas de cualesquiera 2 de los laboratorios se detectarían con una probabilidad de, al menos, 0.95 (o 0.98 o 0.99), es posible determinar $n_1 = n_2 = n$ (véase el ejercicio 12.13). Suponga que este método y, acaso también las consideraciones de costo y disponibilidad de los especímenes necesarios, conducen a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

El problema de seleccionar los 48 discos requeridos y asignar 12 a cada laboratorio no es tan directo como parecería al principio. Para comenzar, suponga que se selecciona una hoja de placa de estaño, suficientemente larga y suficientemente ancha, así como que los 48 discos se cortan como se indica en la figura 12.1. Los 12 discos cortados de la tira 1 se envían al primer laboratorio, los 12 discos de la tira 2 se envían al segundo laboratorio, y así sucesivamente.

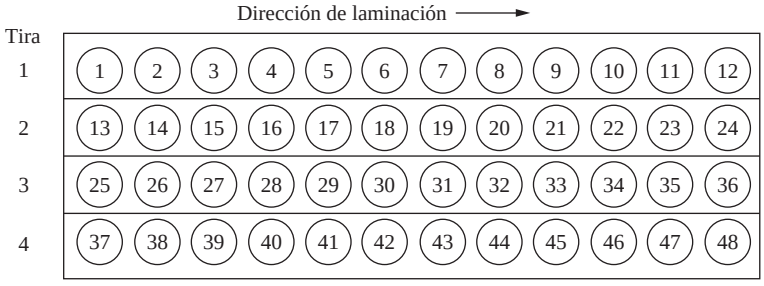


Figura 12.1
Numeración de muestras de placa de estaño

Si luego se descubre que los 4 pesos de recubrimiento medio difieren significativamente, ¿esto permitiría concluir que dichas diferencias pueden atribuirse a falta de consistencia en las técnicas de medición? Suponga, por ejemplo, que una investigación adicional muestra que la cantidad de estaño depositada electrolíticamente sobre una hoja de acero larga tiene un patrón distinto y repetitivo de variación perpendicular a la dirección en la cual se lamina. (Tal patrón podría ser causado por la colocación de los electrodos, efectos del borde, etcétera.) Por lo tanto, incluso si los 4 laboratorios miden la cantidad de estaño consistentemente y sin error, habría una causa para diferencias en las determinaciones del peso del recubrimiento de estaño. La asignación de una tira completa de discos a cada laboratorio es tal que las inconsistencias entre las técnicas de medición de los laboratorios son inseparables de (o se **confunden** con) cualquier diferencia que haya en la cantidad real de estaño depositado perpendicular a la dirección en la que se lamina la hoja de acero.

Una forma de evitar ese tipo de confusión es numerar los discos y asignarlos a los cuatro laboratorios al azar, como en el siguiente arreglo, que se obtuvo con la ayuda de una tabla de números aleatorios:

Laboratorio A:	3	38	17	32	24	30	48	19	11	31	22	41
Laboratorio B:	44	20	15	25	45	4	14	5	39	7	40	34
Laboratorio C:	12	21	42	8	27	16	47	46	18	43	35	26
Laboratorio D:	9	2	28	23	37	1	10	6	29	36	33	13

Si hubiera algún patrón real de grosor de recubrimiento de estaño sobre la hoja de placa de estaño, se rompería por la **aleatoriedad**.

Aunque se identificó y contrarrestó un posible patrón sistemático de variación, no hay seguridad de que no pueda haber otros. Por ejemplo, quizás haya diferencias sistemáticas en las áreas de los discos provocadas por el desgaste progresivo del instrumento de corte, o tal vez haya rayones u otras imperfecciones en una parte de la hoja que afecten las mediciones. Por consiguiente, siempre existe la posibilidad de que diferencias en medias atribuidas

a inconsistencias entre los laboratorios en realidad sean ocasionadas por alguna otra variable incontrolada. **El propósito de la aleatoriedad es evitar confundir la variable que se investiga con otras variables incontroladas**.

Al distribuir los 48 discos entre los 4 laboratorios completamente al azar, no se tiene opción más que incluir cualquier variación que pueda atribuirse a causas extrañas bajo el encabezado de *variación por azar*, lo cual ofrecería una estimación excesivamente grande de variación por azar que, a la vez, dificultaría la detección de diferencias entre las verdaderas medias de laboratorio. Con la finalidad de evitar esto, quizá se podría usar únicamente discos cortados de la misma tira (o de una región homogénea de alguna otra manera). Por desgracia, este tipo de **experimentación controlada** tiene nuevas complicaciones. ¿De qué utilidad sería, por ejemplo, realizar un experimento que permita concluir que los laboratorios son consistentes (o inconsistentes), *si tal conclusión está limitada a mediciones realizadas a una distancia fija de un borde de una hoja*? Considere otro ejemplo: suponga que un fabricante de materiales de plomería (fontanería) quiere comparar el rendimiento de varios tipos de material a usar en tuberías hidráulicas subterráneas. Si se mantuvieran fijas condiciones como acidez del suelo, profundidad de la tubería y contenido mineral del agua, cualquier conclusión acerca de qué material es mejor sería válida tan solo para el conjunto dado de condiciones. Lo que realmente quiere saber el fabricante es cuál material es mejor bajo una variedad bastante amplia de condiciones, así como al diseñar un experimento adecuado sería aconsejable (y, de hecho, necesario) especificar que la tubería de cada material se enterrará a diversas profundidades en cada uno de los varios tipos de suelo y en ubicaciones donde el agua varía en dureza.

Este ejemplo sirve para ilustrar que, durante un experimento, rara vez es deseable mantener todos o la mayoría de los factores extraños constantes, con la finalidad de obtener una estimación de variación por azar que no esté inflada por variaciones debidas a otras causas. (De hecho, rara vez, si acaso, es posible ejercer tal control estricto; esto es, mantener *todas* las variables extrañas fijas.) En la práctica real, los experimentos deben planearse de modo que la fuente de variabilidad conocida varía de manera deliberada a través de un rango tan amplio como se requiera. Más aún, deben variarse en tal forma que su variabilidad pueda eliminarse de la estimación de la variación por azar. Una forma de lograr esto consiste en repetir el experimento en varios **bloques**, donde las fuentes conocidas de variabilidad (esto es, las variables extrañas) se mantengan fijas en cada bloque, pero que varíen de un bloque a otro.

En consecuencia, en el problema del recubrimiento con estaño se pueden explicar las variaciones en la hoja de acero al asignar aleatoriamente 3 discos de cada tira a cada uno de los laboratorios, como en el siguiente ordenamiento:

	Tira 1	*Tira 2*	*Tira 3*	*Tira 4*
Laboratorio A	8, 4, 10	23, 24, 19	26, 29, 35	37, 44, 48
Laboratorio B	2, 6, 12	21, 15, 22	34, 33, 32	45, 43, 46
Laboratorio C	1, 5, 11	16, 20, 13	36, 27, 30	41, 38, 47
Laboratorio D	7, 3, 9	17, 18, 14	28, 31, 25	39, 40, 42

En esta plantilla experimental, las tiras forman los bloques; además, si la estimación de la variación por azar se basa en la variabilidad, *dentro* de cada uno de los 16 conjuntos de 3 discos, tal estimación no estaría inflada por la variable extraña; esto es, las diferencias entre las tiras. (Note también que, con este arreglo, las diferencias entre las medias obtenidas de los 4 laboratorios no pueden atribuirse a diferencias entre las tiras. El ordenamiento de la página 355 no tiene tal propiedad ya que, por ejemplo, 5 discos de la tira 1 se asignan al laboratorio D.)

En la sección 12.3 se estudia el análisis de experimentos donde se usa la **formación de bloques** para eliminar una fuente de variabilidad.

12.2 Diseños completamente al azar

En esta sección se considera el análisis estadístico del **diseño completamente al azar**, o **clasificación unidireccional**. Se supondrá que el experimentador tiene disponibles los resultados de k muestras aleatorias independientes, de k poblaciones diferentes (esto es, datos concernientes a k tratamientos, k grupos, k métodos de producción, etcétera), y que se desea probar la hipótesis de que las medias de dichas k poblaciones son todas iguales.

En general, la j-ésima observación en la i-ésima muestra se denota y_{ij}, en tanto que el esquema para una clasificación unidireccional es el siguiente:

	Observaciones	*Medias*	*Suma de cuadrados*
Muestra 1:	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1n_1}$	$\overline{y}_1$	$\sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - \overline{y}_1)^2$
Muestra 2:	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2n_2}$	$\overline{y}_2$	$\sum_{j=1}^{n_2} (y_{2j} - \overline{y}_2)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Muestra i:	$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{in_i}$	$\overline{y}_i$	$\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \overline{y}_i)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Muestra k:	$y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kj}, \ldots, y_{kn_k}$	$\overline{y}_k$	$\sum_{j=1}^{n_k} (y_{kj} - \overline{y}_k)^2$

Para simplificar los cálculos siguientes, use la notación $T_{\bullet}$ para la suma de todas las observaciones y N para el tamaño de muestra total.

$$T_{\bullet} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

La media muestral general $\overline{y}$ es

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{T_{\bullet}}{N}$$

Un ejemplo de tal experimento, con $k = 4$ tratamientos e iguales tamaños muestrales $n_i = 12$, está dado en la página 355, donde y_{ij} es el j-ésimo peso de recubrimiento de estaño medido por el i-ésimo laboratorio, $\overline{y}_i$ es la media de las mediciones obtenidas por el i-ésimo laboratorio y $\overline{y}$ es la media general (o **gran media**) de todas las $n = 48$ observaciones.

El análisis estadístico que lleva a una comparación de las k medias poblacionales diferentes consiste, en esencia, en dividir la suma de cuadrados acerca de la gran media general $\overline{y}$ en un componente debido a diferencias de tratamiento y un componente debido al error o la variación dentro de una muestra. Es instructivo ver cómo emana este análisis a partir de una descomposición de las observaciones individuales.

Suponga que 3 fórmulas de secado para curar un pegamento se estudian, donde se observan los siguientes tiempos.

Fórmula A:	13	10	8	11	8	
Fórmula B:	13	11	14	14		
Fórmula C:	4	1	3	4	2	4

En total hay $N = 5 + 4 + 6 = 15$ observaciones y totalizan $T_{\bullet} = 120$.

Sea la gran media

$$\bar{y} = T_{\bullet}/N = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/N$$

Cada observación y_{ij} se descompondrá como

$$\underset{\textit{observación}}{y_{ij}} = \underset{\textit{gran media}}{\bar{y}} + \underset{\textit{desviación debida al tratamiento}}{(\bar{y}_i - \bar{y})} + \underset{\textit{error}}{(y_{ij} - \bar{y}_i)}$$

Por ejemplo, $13 = 8 + (10 - 8) + (13 - 10) = 8 + 2 + 3$. Al repetir la descomposición para cada observación, se obtienen los arreglos

$$\underset{\substack{\textit{observación}\\ y_{ij}}}{\begin{bmatrix} 13 & 10 & 8 & 11 & 8 & \\ 13 & 11 & 14 & 14 & & \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\textit{gran media}\\ \bar{y}}}{\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & \\ 8 & 8 & 8 & 8 & & \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}}$$

$$+ \underset{\substack{\textit{efectos del tratamiento}\\ \bar{y}_i - \bar{y}}}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 5 & 5 & 5 & 5 & & \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}} + \underset{\substack{\textit{error}\\ y_{ij} - \bar{y}_i}}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 & -2 & \\ 0 & -2 & 1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Al tomar la suma de cuadrados como medida de variación para todo el arreglo,

$$\begin{aligned} \textit{suma de cuadrados de tratamientos} &= \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= 5(2)^2 + 4(5)^2 + 6(-5)^2 = 270 \\ \textit{suma de cuadrados del error} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \\ &= 3^2 + 0^2 + (-2)^2 + \cdots + (-1)^2 + 1^2 = 32 \end{aligned}$$

Su suma, $302 = 270 + 32$, es la suma de cuadrados total, también es igual a la suma de las entradas al cuadrado en el arreglo de observación menos la suma de cuadrados de las entradas en el gran arreglo medio. Esto es, el arreglo para el total de la suma de cuadrados tiene entradas $y_{ij} - \bar{y}$ cuya suma de cuadrados es 302.

La descomposición también ofrece una interpretación de los grados de libertad asociados con cada suma de cuadrados. En este ejemplo, el arreglo de los efectos del tratamiento solo tiene 3 entradas posiblemente distintas: $\bar{y}_1 - \bar{y}$, $\bar{y}_2 - \bar{y}$ y $\bar{y}_3 - \bar{y}$. Más aún, la suma de entradas en el arreglo de efectos del tratamiento,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})$$

siempre es cero. De este modo, por ejemplo, el tercer valor está determinado por los dos primeros. En consecuencia, hay $3 - 1 = 2$ grados de libertad asociados con tratamientos. En el caso general, hay $k - 1$ grados de libertad.

Entre las entradas del arreglo de error, cada renglón suma cero, de modo que se pierde 1 grado de libertad para cada renglón. El arreglo tiene $n_1 + n_2 + n_3 - 3 = 5 + 4 + 6 - 3 = 12$ grados de libertad. En el caso general, existen $n + n + \cdots + n - k$ grados de libertad.

El arreglo de la gran media tiene un solo valor $\bar{y}$ y, por lo tanto, 1 grado de libertad; mientras el arreglo de observación tiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ posibles entradas distintas y, en consecuencia, dicho número de grados de libertad. El total de la suma de cuadrados, con base en la diferencia de estos dos últimos arreglos, tiene

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k - 1 = 5 + 4 + 6 - 1 = 14$$

grados de libertad.

Para resumir los cálculos para los tiempos de curado, se ingresan los grados de libertad y las sumas de cuadrados en una tabla llamada tabla de *análisis de varianza*.

Tabla de análisis de varianza para tiempos de curado

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados
Tratamiento	2	270
Error	12	32
Total	14	302

Para mayor referencia, también se resume la descomposición de los grados de libertad asociados con la suma de cuadrados total, de tratamientos y del error, para el análisis de varianza unidireccional general.

Descomposición de los grados de libertad

g.l. Total = g.l. Tratamiento + g.l. Error

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - 1 = k - 1 \qquad + \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

Con respecto a la **suma de cuadrados total**

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$$

ahora se probará el siguiente teorema.

Identidad para análisis de varianza unidireccional

Teorema 12.1

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

La prueba de este teorema se basa en la identidad

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y})$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y sumar sobre i y j, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{y}_{ij}-\overline{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{y}_i-\overline{y})^2$$
$$+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)(\overline{y}_i-\overline{y})$$

A continuación, observe que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)(\overline{y}_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{k}(\overline{y}_i-\overline{y})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)=0$$

ya que $\overline{y}_i$ es la media de la i-ésima muestra y, por consiguiente,

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)=0 \text{ para toda } i$$

Para completar la prueba del teorema 12.1, únicamente tiene que observar que el sumando de la segunda suma del lado derecho de la identidad anterior no incluye el subíndice j y que, en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{y}_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{y}_i-\overline{y})^2$$

Se acostumbra denotar a la suma de cuadrados total, el miembro izquierdo de la identidad del teorema 12.1, mediante *SST*. Al primer término del lado derecho se le llama **suma de cuadrados del error**, *SSE*. El término *suma de cuadrados del error* expresa la idea de que la cantidad estima al error aleatorio (o por azar). El segundo término en el lado derecho de la identidad del teorema 12.1 se conoce como **suma de cuadrados entre muestras** o **suma de cuadrados de tratamientos**, *SS*(Tr). (La mayoría de las primeras aplicaciones de este tipo de análisis fueron en el campo de la agricultura, donde las k poblaciones representaban diferentes **tratamientos**, como fertilizantes, aplicados a parcelas agrícolas.)

Para probar la hipótesis de que las muestras se obtuvieron a partir de k poblaciones con medias iguales, se harán varias suposiciones. Específicamente, se supondrá que se trata de *poblaciones normales* cuyas *varianzas son iguales*. Sin embargo, los métodos desarrollados en este capítulo son bastante **robustos**; esto es, son relativamente insensibles a transgresiones de la suposición de normalidad, así como a la suposición de varianzas iguales.

Si μ_i denota la media de la i-ésima población y σ^2 denota la varianza común de las k poblaciones, cada observación Y_{ij} se expresa como μ_i, más el valor de un componente aleatorio; es decir, se puede escribir[1]

$$Y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,k \qquad j=1,2,\ldots,n_i$$

En concordancia con las suposiciones precedentes, las ε_{ij} son variables aleatorias independientes con distribución normal, media cero y varianza común σ^2.

[1]Note que esta ecuación, o modelo, puede considerarse como una ecuación de regresión múltiple; al introducir las variables x_{il} que son iguales a 0 o 1, lo cual depende de si los dos subíndices son distintos o iguales, puede escribirse

$$Y_{ij}=\mu_1x_{i1}+\mu_2x_{i2}+\cdots+\mu_kx_{ik}+\varepsilon_{ij}$$

Los parámetros μ_i pueden interpretarse como coeficientes de regresión y estimarse usando los métodos de mínimos cuadrados del capítulo 11.

Para lograr uniformidad con las ecuaciones correspondientes en tipos de diseños más complicados, se suele sustituir μ_i por $\mu + \alpha_i$, donde μ es la media

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \ \mu_i / N$$

de la μ_i en el experimento y α_i es el **efecto** del i-ésimo tratamiento; por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0$$

(Véase el ejercicio 12.14.)

Con estos nuevos parámetros, se escribe la **ecuación del modelo** para la clasificación unidireccional como

Ecuación del modelo para clasificación unidireccional

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k; \qquad j = 1, 2, \ldots, n_i$$

y la hipótesis nula de que las k medias poblacionales son iguales puede sustituirse por la hipótesis nula de que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. La hipótesis alternativa de que, al menos, dos de las medias poblacionales son distintas es equivalente a la hipótesis alternativa de que $\alpha_i \neq 0$ para alguna i.

Para probar la hipótesis nula de que las k medias poblacionales son iguales, deben compararse dos estimaciones de σ^2: una basada en la variación entre las medias muestrales y otra basada en la variación dentro de las muestras.

Cada suma de cuadrados se convierte primero en un **cuadrado medio**, de modo que sea posible realizar una prueba para la igualdad de las medias de tratamientos.

Cuadrado medio

$$\textbf{cuadrado medio} = \frac{\text{suma de cuadrados}}{\text{grados de libertad}}$$

Cuando las medias poblacionales son iguales, tanto

$$\text{cuadrado medio de tratamientos} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{k - 1}$$

como

$$\text{cuadrado medio del error} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N - k}$$

son estimaciones de σ^2. Sin embargo, cuando la hipótesis nula es *falsa*, se esperaría que el **cuadrado medio entre muestras** o **de tratamientos** sea superior al **cuadrado medio dentro de muestras** o **del error**. Si la hipótesis nula es verdadera, se puede demostrar que los dos cuadrados medios son independientes y que su razón

Razón *F* para tratamientos

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 / (N-k)} = \frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/(N-k)}$$

tiene una distribución F con $k-1$ y $N-k$ grados de libertad.

Un valor grande para F indica diferencias grandes entre las medias muestrales. Por lo tanto, se rechazará la hipótesis nula, en el nivel α, si el valor de F supera F_α donde F_α se obtiene de la tabla 6 del apéndice B con $k-1$ y $N-k$ grados de libertad.

Para probar la igualdad de los tiempos del curado medio, complete la **tabla de análisis de varianza (ANOVA)**, incluyendo los cuadrados medios de los errores y el valor de F.

Tabla de análisis de varianza para tiempos de curado

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos	2	270	135	50.6
Error	12	32	2.667	
Total	14	302		

El valor de $F_{0.05}$ con 2 y 12 grados de libertad es 3.89, así que se rechaza la hipótesis nula de medias iguales.

En general, los resultados obtenidos al analizar la suma de cuadrados total en sus componentes se resumen convenientemente en la **tabla de análisis de varianza**:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos	$k-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(k-1)$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Error	$N-k$	SSE	$MSE = SSE/(N-k)$	
Total	$N-1$	SST		

donde

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Note que cada **cuadrado medio** se obtiene al dividir la correspondiente suma de cuadrados entre sus grados de libertad.

Las sumas de cuadrados requeridas para sustitución en esta última fórmula por lo general se obtienen con las siguientes fórmulas rápidas, que al lector se le pedirá verificar en el ejercicio 12.15. Calcule primero SST y $SS(Tr)$ usando las fórmulas

Fórmulas rápidas: sumas de cuadrados

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

donde C, llamado **término de corrección para la media**, está dado por

$$C = \frac{T_{\bullet}^2}{N}$$

con

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad T_{\bullet} = \sum_{i=1}^{k} T_i \quad \text{y} \quad T_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

Esto es, en dichas fórmulas, T_i es el total de las n_i observaciones en la i-ésima muestra; en tanto que $T_{\bullet}$ es el gran total de las N observaciones. El error de la suma de cuadrados, SSE, se obtiene entonces mediante sustracción; de acuerdo con el teorema 12.1, se puede escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

EJEMPLO

Cómo realizar un análisis de varianza unidireccional

Para ilustrar el **análisis de varianza** (como esta técnica se llama de manera adecuada) para una clasificación unidireccional, suponga que, en concordancia con la plantilla de la página 355, cada laboratorio mide los pesos del recubrimiento de estaño de 12 discos y que los resultados son los siguientes:

Laboratorio A	Laboratorio B	Laboratorio C	Laboratorio D
0.25	0.18	0.19	0.23
0.27	0.28	0.25	0.30
0.22	0.21	0.27	0.28
0.30	0.23	0.24	0.28
0.27	0.25	0.18	0.24
0.28	0.20	0.26	0.34
0.32	0.27	0.28	0.20
0.24	0.19	0.24	0.18
0.31	0.24	0.25	0.24
0.26	0.22	0.20	0.28
0.21	0.29	0.21	0.22
0.28	0.16	0.19	0.21

Construya una tabla de análisis de varianza.

Solución

Los totales para las $k = 4$ muestras del tamaño de muestra $n_i = 12$ son, respectivamente, 3.21, 2.72, 2.76 y 3.00; el gran total es $T_{\bullet} = 11.69$; y los cálculos requeridos para obtener

las sumas de cuadrados necesarias son los siguientes:

$$N = 12 + 12 + 12 + 12 = 48$$

$$C = \frac{(11.69)^2}{48} = 2.8470$$

$$SST = (0.25)^2 + (0.27)^2 + \cdots + (0.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SS(Tr) = \frac{(3.21)^2}{12} + \frac{(2.72)^2}{12} + \frac{(2.76)^2}{12} + \frac{(3.00)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

$$SSE = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Puesto que el valor obtenido para F supera 2.82, el valor de $F_{0.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula puede rechazarse al nivel de significancia de 0.05; se concluye que los laboratorios *no* obtienen resultados consistentes. ■

Para estimar los parámetros $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ (o $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$), se emplea el método de mínimos cuadrados, al minimizar

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

con respecto a μ y α_i, sujetos a la restricción de que

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0$$

Lo anterior puede hacerse al eliminar una de las α o, mejor, al utilizar el método de multiplicadores de Lagrange, que se trata en la mayoría de los textos de cálculo avanzado. En cualquier caso, se obtienen las estimaciones intuitivamente obvias $\hat{\mu} = \bar{y}$ y $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, mientras las correspondientes estimaciones para las μ_i están dadas por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

EJEMPLO **Estimación de los efectos del tratamiento**

Estime los parámetros del modelo de clasificación unidireccional para los pesos de recubrimiento de estaño dados en el ejemplo anterior.

Solución Para los datos de los 4 laboratorios, se obtiene

$$\hat{\mu} = \frac{11.69}{48} = 0.244, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{3.21}{12} - 0.244 = 0.024$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{2.72}{12} - 0.244 = -0.017, \quad \hat{\alpha}_3 = \frac{2.76}{12} - 0.244 = -0.014$$

y

$$\hat{\alpha}_4 = \frac{3.00}{12} - 0.244 = 0.006$$ ■

EJEMPLO **Comparación de la resistencia al corte medio en tres ubicaciones del techo**

Como parte de la investigación del colapso del techo de una construcción, a un laboratorio de prueba se le proporcionan todos los pernos disponibles que conectaban la estructura de acero en 3 diferentes posiciones del techo. Las fuerzas requeridas para cortar cada uno de dichos pernos (valores codificados) son los siguientes:

Posición 1:	90	82	79	98	83	91	
Posición 2:	105	89	93	104	89	95	86
Posición 3:	83	89	80	94			

Realice un análisis de varianza para probar, con un nivel de significancia de 0.05, si las diferencias entre las medias muestrales en las 3 posiciones son significativas.

Solución Con los mismos pasos que en los capítulos anteriores para las pruebas de hipótesis, se tiene

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
   Hipótesis alternativa: Las μ_i no son todas iguales.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $F > 3.74$, el valor de $F_{0.05}$ para $k - 1 = 3 - 1 = 2$ y $N - k = 17 - 3 = 14$ grados de libertad, donde F se determinará mediante un análisis de varianza.
4. *Cálculos:* al sustituir $n_1 = 6$, $n_2 = 7$, $n_3 = 4$, $N = 17$, $T_1 = 523$ $T_2 = 661$, $T_3 = 346$, $T_{\cdot} = 1{,}530$ y

$$\sum \sum y_{ij}^2 = 138{,}638$$

en las fórmulas de cálculo para las sumas de cuadrados,

$$SST = 138{,}638 - \frac{1{,}530^2}{17} = 938$$

$$SS(Tr) = \frac{523^2}{6} + \frac{661^2}{7} + \frac{346^2}{4} - \frac{1530^2}{17} = 234$$

y

$$SSE = 938 - 234 = 704$$

El resto del trabajo se presenta en la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Posiciones	2	234	117	2.33
Error	14	704	50.3	
Total	16	938		

5. *Decisión:* puesto que $F = 2.33$ no supera 3.74, la hipótesis nula no puede rechazarse. No es posible concluir que haya una diferencia en las resistencias al corte medias de los pernos en las tres posiciones diferentes del techo. ■

Cuando se rechaza la hipótesis nula de efectos de tratamientos iguales, las magnitudes de las diferencias deberían estimarse usando intervalos de confianza. La diferencia de medias muestrales para el tratamiento i y para el tratamiento l, $\overline{y}_i - \overline{y}_l$ estima la diferencia en respuesta media $\mu + \alpha_i - \mu - \alpha_l$. Al utilizar el error cuadrático medio, s^2, de la tabla ANOVA, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para la verdadera diferencia en respuesta media es

$$\overline{y}_i - \overline{y}_l \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_l}\right)}$$

Cuando es necesario comparar muchas medias, α puede modificarse a $2\ \alpha/k(k-1)$ de acuerdo con el procedimiento de Bonferroni, que se estudia en la sección 12.4. Observe que se usó $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ para contar el número de comparaciones pareadas.

EJEMPLO **Comparación de las resistencias medias de diferentes resinas**

Deben compararse las resistencias de enlace internas de 3 resinas diferentes, ED, MD y PF. Se preparan cinco especímenes con cada una de las resinas.

Resina	Resistencia					Media
ED	0.99	1.19	0.79	0.95	0.90	0.964
MD	1.11	1.53	1.37	1.24	1.42	1.334
PF	0.83	0.68	0.94	0.86	0.57	0.776

La tabla de análisis de varianza indica que hay una diferencia estadísticamente significativa en el nivel $\alpha = 0.05$. (Véase el ejercicio 12.44.)

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F	Valor P
Resina	2	0.8060	0.4030	17.2	0.000
Error	12	0.2810	0.0234		
Total	14	1.0870			

Determine los intervalos de confianza individuales del 95% para las 3 diferencias de medias.

Solución Los intervalos de confianza usan el ECM = 0.0234 como la estimación de s^2 y los grados de libertad = 12, de modo que $t_{0.025} = 2.179$. Los tres intervalos de confianza se convierten en

$$\text{MD} - \text{ED}:\ 1.334 - 0.964 \pm 2.179\sqrt{0.0.234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}\ \text{o}\ (0.159, 0.581)$$

$$\text{MD} - \text{PF}:\ 1.334 - 0.776 \pm 2.179\sqrt{0.0.234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}\ \text{o}\ (0.347, 0.769)$$

$$\text{ED} - \text{PF}:\ 0.964 - 0.776 \pm 2.179\sqrt{0.0.234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}\ \text{o}\ (-0.023, 0.399)$$

La resina MD tiene mayor poder adhesivo interno que las otras dos, lo cual no puede distinguirse.

EJEMPLO **Intervalos de confianza cuantifican la cantidad de diferencia**

La antigua forma de probar la resistencia del papel con una máquina de cortado especial es mediante la prueba de un solo pliego (ply). Se ha sugerido que medir 5 pliegos juntos (5 plys) y luego ajustar la resistencia a un grosor individual sería un mejor procedimiento. La primera pregunta es si los dos procedimientos dan o no esencialmente el mismo valor de la resistencia. Hay un fuerte elemento de diseño experimental implicado aquí. Cinco piezas de papel se cortan a la mitad. Una mitad de cada pieza se selecciona al azar y se obtiene su resistencia. A continuación, las 5 mitades restantes se prueban juntas como el espécimen de 5 pliegos. Entonces, el científico calcula el promedio de las 5 lecturas individuales menos la lectura de 5 pliegos ajustada. Este procedimiento se repite 3 veces para cada uno de los 4 tipos de papel, diferentes pero representativos. Las observaciones de las diferencias se incluyen en la siguiente tabla.

Tipo de papel	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Media
Núm. 1	2.80	0.75	3.70	2.417
Núm. 2	0.00	− 0.10	3.45	1.117
Núm. 3	1.15	1.75	4.20	2.367
Núm. 4	1.88	2.65	2.70	2.410

Pruebe, al nivel 0.05, la hipótesis nula de que no hay diferencia entre los dos métodos de someter a prueba la resistencia del papel. Además, resuma los resultados con intervalos de confianza.

Solución De manera formal, se prueba si la diferencia media cambia con el tipo de papel. Al omitir los detalles, un cálculo por computadora genera la tabla del ANOVA:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tipo	3	3.70	1.23	0.54
Error	8	18.39	2.30	
Total	11	22.08		

Puesto que $F = 0.54$ es menor que 1, no se puede rechazar $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, incluso en el nivel de 50%. Debido a esta evidencia, es razonable tratar las 12 diferencias como provenientes de la misma población. Calcule $\overline{y} = 2.078$ y la desviación estándar = 1.417. Puesto que, con los grados de libertad $12 - 1 = 11$, $t_{0.025} = 2.201$, el intervalo de confianza del 95% para la media de las diferencias es

$$2.078 \pm 2.201 \frac{1.417}{\sqrt{12}} \quad \text{o} \quad (1.18, 2.98)$$

La resistencia al corte basada en la lectura de 5 pliegos es aproximadamente de 1 a 3 unidades menor que la de lecturas individuales. Queda a criterio del científico decidir si tal discrepancia es importante en la aplicación de ingeniería. ■

Ejercicios

12.1 Se realiza un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes, el detergente A y el detergente B. Veinte muestras de ropa se ensucian con suciedad y grasa, de las cuales cada una se lava con uno de los detergentes en una máquina del tipo agitador y, luego, se mide su blancura. Critique los siguientes aspectos del experimento:

a) Todo el experimento se lleva a cabo con agua blanda.

b) Quince de las muestras se lavan con el detergente A y cinco con el detergente B.

c) Para acelerar el procedimiento de prueba, en el experimento se utiliza agua muy caliente y tiempos de lavado de 30 segundos.

d) Primero se toman las lecturas de blancura de todas las muestras con el detergente A.

12.2 Cierto individuo, que desea averiguar la causa de sus resacas frecuentes, efectúa el siguiente experimento. La primera noche tan solo bebe whiskey y agua; la segunda noche bebe vodka y agua; la tercera noche bebe ginebra y agua; y la cuarta noche bebe ron y agua. Cada mañana siguiente tiene resaca, por lo que concluye que el factor común, el agua, lo hizo sentirse mal.

a) Evidentemente, tal conclusión no está garantizada pero, ¿puede afirmar cuáles principios de diseño experimental se infringen?

b) Dé un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga la misma anomalía.

c) Suponga que este amigo modificó el experimento, de modo que cada una de las 4 bebidas alcohólicas se usó con y sin agua, así como que el experimento duró 8 noches. ¿Los resultados de este experimento ampliado servirían como apoyo o rechazo de la hipótesis de que el agua era la causa de las resacas? Explique.

12.3 Con la teoría de campos, se sugieren tres escenarios para el campo magnético que ayudan a las partículas a bombardear un disco como blanco y guía a los átomos liberados a cubrir un disco duro de computadora. En un experimento realizado para comparar las producciones de fabricación con los tres escenarios, los experimentadores registran el número de discos duros cubiertos antes de desgastar el blanco. Suponga que los datos son

Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
573	591	572
577	581	577
567	587	576
571	585	579

a) Sin las fórmulas rápidas, calcule

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$$

$$\text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2$$

y verifique la identidad del teorema 12.1.

b) Verifique los resultados obtenidos para las tres sumas de cuadrados usando las fórmulas rápidas de la página 363.

12.4 Con las sumas de cuadrados obtenidas en el ejercicio 12.3, pruebe, con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, si las diferencias entre las medias obtenidas para las 3 muestras son significativas.

12.5 Los siguientes son los números de errores cometidos en 5 días sucesivos por 4 técnicos que trabajan para un laboratorio fotográfico:

Técnico I	Técnico II	Técnico III	Técnico IV
6	14	10	9
14	9	12	12
10	12	7	8
8	10	15	10
11	14	11	11

Pruebe, con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$, si las diferencias entre las 4 medias muestrales pueden atribuirse al azar.

12.6 Las siguientes son las pérdidas de peso de ciertas piezas de maquinaria (en miligramos) debidas a fricción, con 3 diferentes lubricantes usados en condiciones controladas:

Lubricante A:	12.2	11.8	13.1	11.0	3.9	4.1	10.3	8.4
Lubricante B:	10.9	5.7	13.5	9.4	11.4	15.7	10.8	14.0
Lubricante C:	12.7	19.9	13.6	11.7	18.3	14.3	22.8	20.4

a) Pruebe, con un nivel de significancia de 0.01, si las diferencias entre las medias puede atribuirse al azar.

b) Estime los parámetros del modelo usado en el análisis de este experimento.

12.7 Dadas las siguientes observaciones, recolectadas de acuerdo con el diseño de análisis de varianza unidireccional,

Tratamiento 1:	6	4	5		
Tratamiento 2:	13	10	13	12	
Tratamiento 3:	7	9	11		
Tratamiento 4:	3	6	1	4	1

a) descomponga cada observación y_{ij} como

$$y_{ij} = \bar{y} + (\bar{y}_i - \bar{y}) + (y_{ij} - \bar{y}_i)$$

luego obtenga la suma de cuadrados y grados de libertada para cada componente;

b) construya la tabla de análisis de varianza y pruebe la igualdad de tratamientos usando $\alpha = 0.05$.

12.8 Con referencia al ejemplo de la página 357, suponga que está disponible una observación adicional $y_{25} = 8$, usando la fórmula *B*. Construya la tabla del análisis de varianza y pruebe la igualdad de los tiempos de cuadrados medios con $\alpha = 0.05$.

12.9 Para encontrar el mejor ordenamiento de instrumentos en un panel de control de un avión, se pusieron a prueba 3 diferentes ordenamientos al simular una condición de emergencia y observar el tiempo de reacción requerido para corregir tal condición. Los tiempos de reacción (en décimas de segundo) de 28 pilotos (asignados al azar a los diferentes ordenamientos) fueron los siguientes:

Ordenamiento 1:	14	13	9	15	11	13	14	11				
Ordenamiento 2:	10	12	9	7	11	8	12	9	10	13	9	10
Ordenamiento 3:	11	5	9	10	6	8	8	7				

Pruebe, con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$, si es posible rechazar la hipótesis nula de que las diferencias entre los ordenamientos no tienen efecto.

12.10 Muchas diferentes aleaciones de aluminio están bajo consideración para su uso en aplicaciones de alambrado de circuitos de uso rudo. Entre las propiedades deseadas está la baja resistencia eléctrica, mientras los especímenes de cada alambre se someten a prueba aplicando un voltaje fijo a una longitud dada de alambre y midiendo el paso de corriente a través del alambre. Dados los siguientes resultados, ¿concluiría usted que dichas aleaciones difieren en resistencia? (Use el nivel de significancia de 0.01.)

Aleación	Corriente (amperes)				
1	1.085	1.016	1.009	1.034	
2	1.051	0.993	1.022		
3	0.985	1.001	0.990	0.988	1.011
4	1.101	1.015			

12.11 Se realizan dos pruebas de la resistencia a la compresión de cada una de 6 muestras de concreto colado. La fuerza requerida para demoler cada uno de los 12 especímenes cilíndricos, medida en kilogramos, es la siguiente:

	Muestra					
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Prueba 1	110	125	98	95	104	115
Prueba 2	105	130	107	91	96	121

Pruebe, con un nivel de significancia de 0.05, si dichas muestras difieren en resistencia a la compresión.

12.12 Se midieron las tasas de corrosión (porcentual) para 4 diferentes metales que se sumergieron en una solución enormemente corrosiva:

Aluminio:	75	77	76	79	74	77	75	
Acero inoxidable:	74	76	75	78	74	77	75	77
Aleación I:	73	74	72	74	70	73	74	71
Aleación II:	71	74	74	73	74	73	71	

a) Realice un análisis de varianza y pruebe las diferencias debidas a metales usando $\alpha = 0.05$.

b) Mencione las estimaciones de las tasas de corrosión para cada metal.

c) Encuentre los intervalos de confianza del 95% para las diferencias de tasas de corrosión medias.

12.13 Con respecto a la discusión que viene en la página 355, suponga que las desviaciones estándar de los pesos de recubrimiento de estaño, determinadas por cualquiera de los 4 laboratorios, tienen el valor común $\sigma = 0.012$ y que es deseable estar 95% seguros de detectar una diferencia en medias entre cualesquiera 2 de los laboratorios mayor de 0.01 libras por base de caja. Demuestre que dichas suposiciones conducen a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

12.14 Demuestre que, si $\mu_i = \mu - \alpha_i$ y μ es la media de μ_i, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0$$

12.15 Verifique las fórmulas rápidas para calcular *SST* y *SS*(*Tr*) dadas en la página 363.

12.16 Con respecto al ejercicio 12.9, determine los intervalos de confianza individuales del 99% para las diferencias de tiempos de reacción medios.

12.17 Muestras de mantequilla de cacahuate producidas por 2 fabricantes diferentes se someten a prueba por contenido de aflatoxina, de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

Contenido aflatoxina (ppb)	
Marca A	Marca B
0.5	4.7
0.0	6.2
3.2	0.0
1.4	10.5
0.0	2.1
1.0	0.8
8.6	2.9

a) Use análisis de varianza para probar si las dos marcas difieren en contenido de aflatoxina.

b) Pruebe la misma hipótesis usando una prueba t de dos muestras.

c) En la página 193 se demostró que el estadístico t con ν grados de libertad y el estadístico F con 1 y ν grados de libertad se relacionan mediante la fórmula

$$F(1, \nu) = t^2(\nu)$$

Con este resultado, pruebe que los métodos de análisis de varianza y la prueba t de dos muestras son equivalentes en este caso.

12.18 El análisis de varianza unidireccional se implementa convenientemente con *MINITAB*. Con respecto el ejemplo de la página 357, primero se establecen las observaciones en las columnas:

DATA:

C1:	13	10	8	11	8	
C2:	13	11	14	14		
C3:	4	1	3	4	2	4

Cuadro de diálogo:
Stat > ANOVA > One-way (Unstacked)
Ingrese *C*1 – *C*3 en **Responses**. Haga clic en **OK**.

Análisis de varianza unidireccional

```
ANALYSIS  OF  VARIANCE
SOURCE    DF        SS        MS        F        P
FACTOR     2    270.00    135.00    50.63    0.000
ERROR     12     32.00      2.67
TOTAL     14    302.00
                                INDIVIDUAL 95 PCT CI'S FOR MEAN
                                BASED ON POOLED STDEV

LEVEL    N       MEAN   STDEV   -------+---------+---------+-------.
C1       5     10.000   2.121                     (---*---)
C2       4     13.000   1.414                               (---*---)
C3       6      3.000   1.265    (---*--)
                                -------+---------+---------+-------.
POOLED STDEV = 1.633                   4.0       8.0       12.0
```

Use la computadora para realizar el análisis de varianza sugerido en el ejercicio 12.9.

12.3 Diseños de bloques al azar

Como se observó en la sección 12.1, a menudo puede reducirse la estimación de variación aleatoria (el error experimental); esto es, liberarse de la variabilidad debida a causas extrañas, al dividir en bloques las observaciones en cada clasificación. Lo anterior se logra cuando las fuentes de variabilidad conocidas (es decir, las variables extrañas) son fijas en cada bloque, pero varían de un bloque a otro.

En esta sección se supondrá que el experimentador tiene mediciones disponibles pertenecientes a a tratamientos distribuidos sobre b bloques. Primero se considerará el caso donde hay exactamente una observación de cada tratamiento en cada bloque. Con referencia a la figura 12.1 de la página 355, este caso surgiría si cada laboratorio probara un disco de cada tira. Si y_{ij} denota la observación perteneciente al i-ésimo tratamiento y al j-ésimo

bloque, $y_{i\bullet}$ la media de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $\overline{y}_{\bullet j}$ la media de las a observaciones en el j-ésimo bloque y $\overline{y}_{\bullet\bullet}$ la gran media de todas las ab observaciones, se utilizará la siguiente plantilla para este tipo de **clasificación bidireccional**:

	Bloques						
	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_b	*Medias*
Tratamiento 1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1b}	$\overline{y}_{1\bullet}$
Tratamiento 2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2j}	$\cdots$	y_{2b}	$\overline{y}_{2\bullet}$
				$\vdots$			
Tratamiento i	y_{i1}	y_{i2}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{ib}	$\overline{y}_{i\bullet}$
				$\vdots$			
Tratamiento a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{aj}	$\cdots$	y_{ab}	$\overline{y}_{a\bullet}$
Medias	$\overline{y}_{\bullet 1}$	$\overline{y}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\overline{y}_{\bullet j}$	$\cdots$	$\overline{y}_{\bullet b}$	$\overline{y}_{\bullet\bullet}$

Este tipo de arreglo también se conoce como **diseño de bloques al azar**, ya que los tratamientos se asignan al azar *dentro* de cada bloque. Note que cuando se usa un punto en lugar de un subíndice, ello significa que la media se obtiene al sumar sobre dicho subíndice.

El modelo subyacente que se supondrá para el análisis de este tipo de experimento, con una observación por celda (esto es, hay una observación que corresponde a cada tratamiento dentro de cada bloque), está dado por

Ecuación del modelo para el diseño de bloques al azar

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, a; \quad j = 1, 2, \ldots, b$$

Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento y β_j es el efecto del j-ésimo bloque, mientras las ε_{ij} son variables aleatorias *independientes, con distribución normal*, que tienen *medias cero* y la *varianza común* σ^2. Similar a lo que ocurre con el modelo para la clasificación unidireccional, los parámetros se restringen al imponer las condiciones de que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ y $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$. (Véase el ejercicio 12.29.)

En el análisis de una clasificación bidireccional, donde cada tratamiento se representa una vez en cada bloque, el principal objetivo es probar la significancia de las diferencias entre las $y_{i\bullet}$; esto es, someter a prueba la hipótesis nula

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$

También sería deseable probar si la formación de bloques resultó efectiva; esto es, si la hipótesis nula

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

puede rechazarse. En cualquier caso, la hipótesis alternativa es que al menos uno de los efectos es diferente de cero.

Como en el análisis de varianza unidireccional, dichas pruebas de significancia se basarán en comparaciones de estimaciones de σ^2: una basada en la variación entre tratamientos, una basada en la variación entre bloques y una que mida el error experimental. Advierta que solo la última es una estimación de σ^2 cuando alguna (o ambas) de las hipóte-

sis nulas no se sostiene. Las sumas requeridas las proporcionan los tres componentes entre los que se divide la suma de cuadrados total mediante el siguiente teorema:

Identidad para análisis de clasificación bidireccional

Teorema 12.2

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}_{\cdot\cdot})^2$$
$$+\,b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2+a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2$$

El lado izquierdo de esta identidad representa la suma de cuadrados total, *SST*, y los términos del lado derecho son, respectivamente, la suma de cuadrados del error, *SSE*; la suma de cuadrados de tratamientos, *SS*(*Tr*), y la **suma de cuadrados de los bloques**, *SS*(*Bl*). Para probar este teorema, se usará la identidad

$$y_{ij}-\bar{y}_{\cdot\cdot}=(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}_{\cdot\cdot})+(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})+(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})$$

En esencia, se seguirá el mismo argumento que en la prueba del teorema 12.1.

Están disponibles algunas fórmulas convenientes para calcular *SST*, *SS*(*Tr*) y *SS*(*Bl*) usando calculadoras portátiles.

Suma de cuadrados para análisis de varianza bidireccional

$$SST=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}^2-C$$

$$SS(Tr)=\frac{\sum_{i=1}^{a}T_{i\cdot}^2}{b}-C$$

$$SS(Bl)=\frac{\sum_{j=1}^{b}T_{\cdot j}^2}{a}-C$$

donde C, el término de corrección, está dado por

$$C=\frac{T_{\cdot\cdot}^2}{ab}$$

En dichas fórmulas, $T_{i\cdot}$ es la suma de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $T_{\cdot j}$ es la suma de las α observaciones en el j-ésimo bloque y $T_{\cdot\cdot}$ es el gran total de todas las observaciones. Note que los divisores para *SS*(*Tr*) y *SS*(*Bl*) son el número de observaciones en los respectivos totales, $T_{i\cdot}$ y $T_{\cdot j}$. La suma de cuadrados del error se obtiene entonces mediante sustracción; de acuerdo con el teorema 12.2, es posible escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE=SST-SS(Tr)-SS(Bl)$$

En el ejercicio 12.30 se pedirá al lector verificar que todas estas fórmulas de cálculo, de hecho, son equivalentes a los correspondientes términos de la identidad del teorema 12.2.

Al usar las sumas de cuadrados, se puede rechazar la hipótesis nula de que las α_i son todas iguales a cero en el nivel de significancia α si

Razón *F* para tratamientos

$$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(a-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

supera F_α con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. La hipótesis nula de que las β_j son todas iguales a cero puede rechazarse en el nivel de significancia α si

Razón *F* para bloques

$$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE} = \frac{SS(Bl)/(b-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

supera F_α con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Note que los cuadrados medios, $MS(Tr)$, $MS(Bl)$ y MSE, de nuevo, se definen como las correspondientes sumas de cuadrados divididas entre sus grados de libertad.

Los resultados obtenidos en este análisis se resumen en la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	*F*
Tratamientos	$a-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{(a-1)}$	$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
Bloques	$b-1$	$SS(Bl)$	$MS(Bl) = \frac{SS(Bl)}{(b-1)}$	$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE}$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$ab-1$	SST		

Es instructivo ver cómo el análisis de varianza para un experimento de bloques al azar se sigue de la descomposición de cada observación. Dadas las observaciones

	Bloques			
	1	2	3	4
Tratamiento 1	13	7	9	3
Tratamiento 2	6	6	3	1
Tratamiento 3	11	5	15	5

cada observación y_{ij} se descompondrá como

$$\underset{\textit{observación}}{y_{ij}} = \underset{\textit{gran media}}{\bar{y}_{\cdot\cdot}} + \underset{\textit{desviación debida a tratamientos}}{(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})} + \underset{\textit{desviación debida a bloques}}{(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})}$$

$$+ \underset{\textit{error}}{(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})}$$

Por ejemplo, $13 = 7 + (8 - 7) + (10 - 7) + (13 - 8 - 10 + 7) = 7 + 1 + 3 + 2$. Al repetir esta descomposición para cada observación, se obtienen los arreglos

$$\underset{y_{ij}}{\overset{\textit{observación}}{\begin{bmatrix} 13 & 7 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 1 \\ 11 & 5 & 15 & 5 \end{bmatrix}}} = \underset{\bar{y}_{\cdot\cdot}}{\overset{\textit{media}}{\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}}} + \underset{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}}{\overset{\textit{tratamiento}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$$+ \underset{\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot}}{\overset{\textit{bloque}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}}} + \underset{y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot}}{\overset{\textit{error}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Al tomar la suma de cuadrados para cada arreglo,

$$\begin{aligned}
\textit{suma de cuadrados de tratamiento} &= b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \\
&= 4(1)^2 + 4(-3)^2 + 4(2)^2 = 56 \\
\textit{suma de cuadrados de bloques} &= a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \\
&= 3(3)^2 + 3(-1)^2 + 3(2)^2 + 3(-4)^2 = 90 \\
\textit{suma de cuadrados del error} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \\
&= 2^2 + 0^2 + \cdots + 4^2 + 0^2 = 52
\end{aligned}$$

se obtienen las entradas en el cuerpo de la tabla de análisis de varianza. Su suma, $90 + 56 + 52 = 198$, es la suma de cuadrados total, pero también es igual a la suma de cuadrados de las observaciones, 786, menos la suma de cuadrados $12 \times 7^2 = 588$ para el arreglo de gran media.

El arreglo de media, que tiene una sola entrada $\bar{y}_{\cdot\cdot}$, tiene 1 grado de libertad. Los 3 valores distintos en el arreglo de tratamiento siempre suman cero, de modo que tiene $3 - 1 = 2$ grados de libertad. En general, tiene $a - 1$ grados de libertad cuando hay α tratamientos. De igual modo, el arreglo de bloques tiene $4 - 1 = 3$ grados de libertad en este ejemplo y $b - 1$ cuando hay b bloques.

El número de grados de libertad asociados con el arreglo de error es $(a - 1) \cdot (b - 1) = (2)(3) = 6$. Puesto que cada suma de renglón es cero, la última columna siempre está determinada a partir del primer $b - 1$. De igual modo, el último renglón siempre está determinado por el primer $a - 1$. Por ende, hay $(a - 1)(b - 1)$ entradas sin restricción. En resumen, los grados de libertad pueden descomponerse como

$$\underset{\textit{total}}{ab - 1} = \underset{\textit{tratamientos}}{(a - 1)} + \underset{\textit{bloques}}{(b - 1)} + \underset{\textit{error}}{(a - 1)(b - 1)}$$

EJEMPLO **Construcción de la tabla del análisis de varianza para bloques al azar**

Construya el análisis de varianza a partir de la descomposición de las observaciones recién dadas.

Solución Con las sumas de cuadrados y sus grados de libertad asociados, se tiene

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F
Tratamientos	2	56.0	28.00	3.23
Bloques	3	90.0	30.00	3.46
Error	6	52.0	8.67	
Total	11	198.0		

El valor de $F_{0.05}$ con 2 y 6 grados de libertad es 5.14, por lo que no es posible rechazar la hipótesis nula de iguales efectos de tratamiento. ■

En la práctica, son preferibles los cálculos por computadora. Con calculadoras de bolsillo se obtienen las sumas de cuadrados necesarias, usando las fórmulas rápidas de la página 372.

EJEMPLO **Comparación de cuatro detergentes usando una prueba *F***

Un experimento se diseñó para estudiar el rendimiento de 4 detergentes diferentes para limpiar inyectores de combustible. Las siguientes lecturas de "limpieza" se obtuvieron con equipo especialmente diseñado para 12 tanques de gasolina distribuidos en 3 modelos de motores diferentes:

	Motor 1	*Motor 2*	*Motor 3*	*Totales*
Detergente A	45	43	51	139
Detergente B	47	46	52	145
Detergente C	48	50	55	153
Detergente D	42	37	49	128
Totales	182	176	207	565

Al considerar los detergentes como tratamientos y los motores como bloques, obtenga la tabla de análisis de varianza adecuada y pruebe, con un nivel de significancia de 0.01, si hay diferencias en los detergentes o en los motores.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
   Hipótesis alternativa: las α no son todas iguales a cero; las β no son todas iguales a cero.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterios:* para tratamientos, rechace la hipótesis nula si $F > 9.78$, el valor de $F_{0.01}$ con $a - 1 = 4 - 1 = 3$, y $(a - 1)(b - 1) = (4 - 1)(3 - 1) = 6$ grados de libertad; para bloques, rechace la hipótesis nula si $F > 10.92$, el valor de $F_{0.01}$ para $F_{0.01}$ para $b - 1 = 3 - 1 = 2$, y $(a - 1)(b - 1) = (4 - 1)(3 - 1) = 6$ grados de libertad.

4. *Cálculos:* al sustituir $a = 4$, $b = 3$, $T_{1\bullet} = 139$, $T_{2\bullet} = 145$, $T_{3\bullet} = 153$, $T_{4\bullet} = 128$, $T_{\bullet 1} = 182$, $T_{\bullet 2} = 176$, $T_{\bullet 3} = 207$, $T_{\bullet\bullet} = 565$ y

$$\sum \sum y_{ij}^2 = 26{,}867$$

en las fórmulas para las sumas de cuadrados, se obtiene

$$C = \frac{(565)^2}{12} = 26{,}602$$

$$SST = 45^2 + 43^2 + \cdots + 49^2 - 26{,}602 = 26{,}867 - 26{,}602 = 265$$

$$SS(Tr) = \frac{139^2 + 145^2 + 153^2 + 128^2}{3} - 26{,}602 = 111$$

$$SS(Bl) = \frac{182^2 + 176^2 + 207^2}{4} - 26{,}602 = 135$$

$$SSE = 265 - 111 - 135 = 19$$

Luego, al dividir las sumas de cuadrados entre sus respectivos grados de libertad para obtener los cuadrados medios adecuados, se obtienen los resultados de la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F
Detergentes	3	111	37.0	11.6
Motores	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

5. *Decisiones:* dado que $F_{tr} = 11.6$ supera 9.78, el valor de $F_{0.01}$ con 3 y 6 grados de libertad, se concluye que hay diferencias en la efectividad de los 4 detergentes. Además, puesto que $F_{Bl} = 21.2$ supera 10.92, el valor de $F_{0.01}$ con 2 y 6 grados de libertad, se concluye que las diferencias entre los resultados obtenidos para los 3 motores son significativos. Existe un efecto debido a los motores, de modo que la formación de bloques fue importante. Para hacer el efecto de esta formación de bloques todavía más evidente, al lector se le pedirá verificar, en el ejercicio 12.25, que la prueba de las diferencias entre los detergentes *no* produciría resultados significativos si los datos se consideran como una clasificación unidireccional. ■

A partir de este ejemplo, es claro que el modelo de la página 371 y el análisis de un experimento de bloques al azar se extiende a casos donde los bloques podrían definirse manteniendo constante el nivel de un segundo factor. Sin embargo, el resultante **diseño bidireccional sin duplicación** equilibrado no debería correrse al fijar un nivel para el segundo factor y, luego, al tratar a cada uno de los niveles del primer factor una vez, y así sucesivamente. En cambio, el orden de corrida para las $a \cdot b$ condiciones habrá de seleccionarse al azar.

Es posible someter a prueba la igualdad de las máquinas, $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, al simplemente reetiquetar la suma de cuadrados de bloques, así como el cuadrado medio como suma de cuadrados y cuadrados medios de los motores, como en el ejemplo. Numéricamente, el mismo estadístico F se obtiene para el segundo factor, de modo que se rechaza H_0.

El efecto del i-esimo detergente puede estimarse mediante la fórmula $\widehat{\alpha}_i = \overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet}$, que se obtiene con el método de mínimos cuadrados. Las estimaciones resultantes son

$$\widehat{\alpha}_1 = 46.3 - 47.1 = -0.8 \qquad \widehat{\alpha}_2 = 48.3 - 47.1 = 1.2$$
$$\widehat{\alpha}_3 = 51.0 - 47.1 = 3.9 \qquad \widehat{\alpha}_4 = 42.7 - 47.1 = -4.4$$

Cálculos similares conducen a $\widehat{\beta}_1 = -1.6$, $\widehat{\beta}_2 = -3.1$, y $\widehat{\beta}_3 = 4.7$ para los efectos estimados de los motores.

Debería observarse que una clasificación bidireccional automáticamente permite repeticiones de las condiciones experimentales; por ejemplo, en el experimento anterior cada detergente se sometió a prueba 3 veces. Más repeticiones podrían manejarse en varias formas, pero debe tenerse cuidado de que el modelo utilizado describa la situación de manera adecuada. Una forma de lograr más repeticiones en una clasificación bidireccional es incluir bloques adicionales, por ejemplo, para probar cada detergente utilizando varios motores adicionales, y hacer aleatorio el orden de las pruebas para cada motor. Observe que en esencia el modelo permanece igual que antes, y el único cambio es un aumento en b y un aumento correspondiente en los grados de libertad para bloques y para el error. Lo último es importante, porque un aumento en los grados de libertad para el error hace que la prueba de la hipótesis nula $\alpha_i = 0$ para toda i sea *más sensible* a pequeñas diferencias entre las medias de tratamiento. De hecho, el verdadero objetivo de este tipo de repetición es aumentar los grados de libertad para el error, lo cual, por consiguiente, incrementa la sensibilidad de las pruebas F (véase el ejercicio 12.28).

Un segundo método consiste en repetir todo el experimento y usar un nuevo patrón de aleatoriedad para obtener $a \cdot b$ observaciones adicionales. Esto solo es posible si los bloques son *identificables*; esto es, si las condiciones que definen cada bloque pueden repetirse. En el experimento de peso de recubrimiento de estaño descrito en la sección 12.1, por ejemplo, los bloques son tiras a través de la dirección de laminación de una hoja de placa de estaño y, dada una nueva hoja, es posible identificar cuál es la tira 1, cuál la tira 2, etcétera. En el ejemplo de esta sección, el tipo de repetición (por lo general, llamada **duplicación** o **réplica**) requeriría que las condiciones de los motores se duplicaran exactamente; véase también los ejercicios 12.26 y 12.27.

Un tercer método de repetición es incluir n observaciones para cada tratamiento en cada bloque. Cuando un experimento se diseña de esta forma, las n observaciones en cada "celda" se consideran duplicadas, aunque se espera que su variabilidad sea un poco menor que el error experimental. Para ilustrar lo anterior, suponga que los pesos de recubrimiento de estaño de 3 discos de posiciones adyacentes en una tira se miden en secuencia por uno de los laboratorios, usando las mismas soluciones químicas. La variabilidad de dichas mediciones probablemente será mucho menor que la de 3 discos de la misma tira, medidos en dicho laboratorio en momentos diferentes usando soluciones químicas distintas y quizá técnicos diferentes. El análisis de varianza adecuado para este tipo de repetición se reduce esencialmente a un análisis de varianza bidireccional aplicado a las *medias* de los n duplicados en las $a \cdot b$ celdas; por ende, *no habría ganancia en grados de libertad para el error* y, en consecuencia, *ninguna ganancia en sensibilidad de las pruebas F*. Sin embargo, se esperaría que hubiera cierta reducción en el error cuadrático medio, pues ahora mide la varianza residual de las *medias* de varias observaciones.

12.4 Comparaciones múltiples

Las pruebas F utilizadas hasta el momento en este capítulo muestran si las diferencias entre varias medias son significativas, pero no indican si una media dada (o grupos de medias) difieren significativamente de otra media dada (o grupo de medias). En la práctica real, esto último es el tipo de información que un investigador realmente busca; por ejemplo,

al determinar en la página 364 que las medias de los pesos de recubrimiento de estaño obtenidas por los 4 laboratorios difieren significativamente, sería importante encontrar cuál(es) laboratorio(s) difiere(n) de cuáles otros.

Si un experimentador se enfrenta con k medias, parecería razonable al inicio probar las diferencias significativas entre todos los pares posibles; esto es, realizar

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

pruebas t de dos muestras, como se describe en la página 252. Además del hecho de que esto requeriría un gran número de pruebas, incluso si k fuera relativamente pequeña, dichas pruebas no serían independientes, por lo que prácticamente sería imposible asignar un nivel de significancia general a dicho procedimiento.

Se han propuesto diversos procedimientos de **comparaciones múltiples** para superar tales dificultades. Un procedimiento, llamado **método de Bonferroni**, simplemente modifica este nivel de α a $2\alpha/k(k-1)$ para cada una de las $k(k-1)/2$ diferencias. Ello requiere ingresar la tabla t con $\alpha/k(k-1)$ en vez de $\alpha/2$. Entonces, el nivel de confianza α pertenece a todos los $k(k-1)/2$ intervalos de confianza que cubren las diferencias respectivas de medias poblacionales. (Véase el ejercicio 12.36.) Los intervalos de confianza ayudan a juzgar si las diferencias estadísticamente significativas son lo suficiente grandes como para tener importancia práctica.

EJEMPLO

Cálculo de intervalos de confianza simultáneos de Bonferroni para la media de la resistencia de resina

Con respecto a los datos de resistencia de resina, en el ejemplo de la página 366, obtenga los intervalos de confianza simultáneos del 94% de Bonferroni para las tres diferencias de medias.

Solución Los intervalos de confianza emplean el ECM = 0.0234 como la estimación de s^2. Puesto que $\alpha = 0.06$ y $k = 3$, el procedimiento de Bonferroni usa el punto $\alpha/k(k-1) = 0.01$ de la distribución t con 12 grados de libertad, de modo que $t_{0.01} = 2.681$. Los tres intervalos de confianza se convierten en

$$\text{MD} - \text{ED}: \ 1.334 - 0.964 \pm 2.681\sqrt{0.0234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} \ \text{o} \ (0.111, 0.629)$$

$$\text{MD} - \text{PF}: \ 1.334 - 0.776 \pm 2.681\sqrt{0.0234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} \ \text{o} \ (0.299, 0.817)$$

$$\text{ED} - \text{PF}: \ 0.964 - 0.776 \pm 2.681\sqrt{0.0234\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} \ \text{o} \ (-0.071, 0.447)$$

Note que son más grandes que los intervalos individuales del 95% anteriormente calculados, lo cual se debe a que se tiene 94% de confianza de que los 3 se sostienen simultáneamente. ■

Otro enfoque para las comparaciones múltiples es poner a prueba todas las diferencias usando la **prueba de rango múltiple de Duncan**. Las suposiciones subyacentes a la prueba de rango múltiple de Duncan son, en esencia, las del análisis de varianza unidireccional para el que los tamaños de muestra son iguales. La prueba compara el rango de cualquier conjunto de p medias con un adecuado **rango mínimo significativo**, $\boldsymbol{R_p}$, dado por

Rango mínimo significativo

$$R_p = s_{\bar{y}} \cdot r_p$$

Aquí, $s_{\overline{y}}$ es una estimación de $\sigma_{\overline{y}} = \sigma/\sqrt{n}$, que se calcula mediante la fórmula

Error estándar de la media

$$s_{\overline{y}} = \sqrt{\frac{ECM}{n}}$$

donde *ECM* es el error cuadrático medio en el análisis de varianza. El valor de r_p depende del nivel de significancia deseado y del número de grados de libertad que correspondan al *ECM*; pueden obtenerse de las tablas 8*a*) y *b*), en el apéndice B, para $\alpha = 0.05$ y 0.01; para $p = 2, 3, \ldots, 10$, y para varios grados de libertad de 1 a 120.

EJEMPLO

Cómo realizar la prueba de rango múltiple de Duncan

Con respecto a los datos de peso de recubrimiento de estaño que vienen en la página 363, realice una prueba de rango múltiple de Duncan para determinar cuáles medias de laboratorio difieren de cuáles otras; para ello, utilice el nivel de significancia de 0.05.

Solución

Primero se arreglan las 4 medias muestrales del modo siguiente, en orden de magnitud creciente:

Laboratorio	*B*	*C*	*D*	*A*
Media	0.227	0.230	0.250	0.268

A continuación, con el error cuadrático medio 0.0015 del análisis de varianza para el ejemplo de la página 364 y el tamaño de muestra común $n = 12$, calcule $s_{\overline{y}}$.

$$s_{\overline{y}} = \sqrt{\frac{0.0015}{12}} = 0.011$$

Entonces (mediante interpolación lineal) se obtienen, de la tabla 8*a*), los siguientes valores de r_p para $\alpha = 0.05$ y 44 grados de libertad:

p	2	3	4
r_p	2.85	3.00	3.09

Al multiplicar cada valor de r_p por $s_{\overline{y}} = 0.011$, finalmente se obtiene

p	2	3	4
R_p	0.031	0.033	0.034

El rango de *las 4 medias* es 0.268 – 0.227 = 0.041, que supera $R_4 = 0.034$, el rango mínimo significativo. Este resultado debería esperarse, ya que la prueba *F* en el ejemplo de la página 364 demostró que las diferencias entre las 4 medias son significativas en $\alpha = 0.05$. Para probar las diferencias significativas entre *3 medias adyacentes*, se obtienen rangos de 0.038 y 0.023, respectivamente, para 0.230, 0.250, 0.268 y 0.227, 0.230, 0.250. El primero de dichos valores supera $R_3 = 0.033$, de modo que las diferencias observadas en el primer conjunto son significativas. Puesto que el segundo valor no supera 0.033, las diferencias correspondientes no son significativas. Finalmente, para *pares adyacentes* de medias, se

encuentra que ningún par adyacente tiene un rango mayor que el rango mínimo significativo $R_2 = 0.031$. Todos estos resultados pueden resumirse al escribir

$$\underline{0.227 \quad 0.230 \quad \underline{0.250} \quad 0.268}$$

donde *se dibuja una línea bajo cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales el rango sea menor que el valor adecuado de R_p; esto es, con cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales las diferencias no sean significativas.* Por ende, en el ejemplo se concluye que el laboratorio *A* promedió más alto en los pesos de recubrimiento de estaño que los laboratorios *B* y *C*. ■

Si este mismo método se aplica al ejemplo que viene en la página 375, donde se compararon los 4 detergentes, se obtiene (véase también el ejercicio 12.32)

Detergente			
D	*A*	*B*	*C*
42.7	46.3	48.3	51.0

En otras palabras, entre tripletas de medias adyacentes, ambos conjuntos de diferencias son significativos. En cuanto a pares de medias adyacentes, se tiene que solo la diferencia entre 42.7 y 46.3 es significativa. Al interpretar dichos resultados, se concluye que el detergente *D* es significativamente inferior a cualquiera de los otros y el detergente *A* es significativamente inferior al detergente *C*.

Ejercicios

12.19 Un experimento de bloques al azar se realiza con tres tratamientos y cuatro bloques. Las medias de los tres tratamientos son $\bar{y}_{1\bullet} = 6$, $\bar{y}_{2\bullet} = 7$, y $\bar{y}_{3\bullet} = 11$.

La suma de cuadrados totales (corregida) es

$$220 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$$

La tabla de análisis de varianza (ANOVA) toma la forma

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	*F*
Tratamientos				
Bloques		132		
Error				
Total	11	220		

a) Complete las entradas faltantes en la tabla de análisis.

b) Realice la prueba *F* para tratamientos y la prueba *F* para bloques. Utilice $\alpha = 0.05$.

12.20 Un técnico de laboratorio mide la resistencia a la ruptura de cada uno de 5 tipos de hilo de lino mediante 4 instrumentos diferentes, de donde obtiene los siguientes resultados (en onzas):

	Instrumento de medición			
	I_1	I_2	I_3	I_4
Hilo 1	20.6	20.7	20.0	21.4
Hilo 2	24.7	26.5	27.1	24.3
Hilo 3	25.2	23.4	21.6	23.9
Hilo 4	24.5	21.5	23.6	25.2
Hilo 5	19.3	21.5	22.2	20.6

Al buscar los hilos como tratamientos y los instrumentos como bloques, realice un análisis de varianza con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

12.21 Al considerar los días (filas) como bloques, vuelva a trabajar el ejercicio 12.5 con el método de la sección 12.3.

12.22 Cuatro formas diferentes de prueba estandarizada de comprensión de lectura, aunque supuestamente equivalentes, se entregan a cada uno de 5 estudiantes; las siguientes son las calificaciones que obtuvieron:

	Estudiante 1	*Estudiante 2*	*Estudiante 3*	*Estudiante 4*	*Estudiante 5*
Forma A	75	73	59	69	84
Forma B	83	72	56	70	92
Forma C	86	61	53	72	88
Forma D	73	67	62	79	95

Al tratar a los estudiantes como bloques, efectúe un análisis de varianza para probar, con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$, si es razonable tratar las 4 formas como equivalentes.

12.23 La preocupación por la temperatura de operación de un chip de computadora motivó la investigación de 4 tipos diferentes de ventiladores de enfriamiento. Se tuvieron a disposición cinco diferentes computadoras y cada tipo de ventilador de enfriamiento se trató en cada computadora. Dadas las observaciones de temperatura, codificadas al restar el valor más pequeño,

	Bloques				
	1	2	3	4	5
Tratamiento 1	14	6	11	0	9
Tratamiento 2	14	10	16	9	16
Tratamiento 3	12	7	10	9	12
Tratamiento 4	12	9	11	6	7

a) descomponga cada observación y_{ij} como

$$y_{ij} = \bar{y}_{\cdot\cdot} + (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) + (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})$$

b) obtenga las sumas de cuadrados y los grados de libertad para cada componente;

c) construya la tabla de análisis de varianza y pruebe para diferencias entre los tratamientos usando $\alpha = 0.05$.

12.24 Un ingeniero industrial prueba 4 diferentes talleres de diseño al hacer que cada uno de 6 equipos de trabajo construya un subensamble, y al medir los tiempos de construcción (minutos) del modo siguiente:

	Croquis 1	*Croquis 2*	*Croquis 3*	*Croquis 4*
Equipo A	48.2	53.1	51.2	58.6
Equipo B	49.5	52.9	50.0	60.1
Equipo C	50.7	56.8	49.9	62.4
Equipo D	48.6	50.6	47.5	57.5
Equipo E	47.1	51.8	49.1	55.3
Equipo F	52.4	57.2	53.5	61.7

Pruebe, con un nivel de significancia de 0.01, si los 4 talleres producen diferentes tiempos de ensamble y si algunos de los equipos son consistentemente más rápidos para construir este subensamble que los otros.

12.25 Para destacar la importancia de la formación de bloques, vuelva a analizar los datos de limpieza de la página 375, como una clasificación unidireccional con los 4 detergentes como los diferentes tratamientos.

12.26 Si, en una clasificación bidireccional, todo el experimento se repite r veces, el modelo se convierte en

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + \varepsilon_{ijk}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$ y $k = 1, 2, \ldots, r$ donde la suma de las α, la suma de las β y la suma de las ρ son iguales a cero, y donde las ρ representan los efectos de las replicas. Las ε_{ijk} son variables aleatorias independientes con distribución normal, medias cero y varianza común σ^2.

a) Escriba (pero no pruebe) una identidad similar a la del teorema 12.2, al subdividir la suma de cuadrados total en componentes atribuibles a tratamientos, bloques, replicas y error.

b) Generalice las fórmulas de cálculo de la página 372, de modo que se apliquen a un diseño duplicado de bloques al azar. Observe que el divisor en cada caso es igual al número de observaciones en los totales respectivos.

c) Si el número de grados de libertad para la suma de cuadrados de la réplica es $r - 1$, ¿cuántos grados de libertad existen para el error de la suma de cuadrados?

12.27 Los siguientes son el número de defectuosos producidos por los 4 trabajadores que operan, a la vez, 3 máquinas diferentes; en cada caso, la primera cifra representa el número de defectuosos producidos un viernes, mientras la segunda cifra representa el número de defectuosos producidos al siguiente lunes:

	Trabajador			
	B_1	B_2	B_3	B_4
Máquina A_1	37, 43	38, 44	38, 40	32, 36
Máquina A_2	31, 36	40, 44	43, 41	31, 38
Máquina A_3	36, 40	33, 37	41, 39	38, 45

Use la teoría desarrollada en el ejercicio 12.26 para analizar las cifras combinadas para los 2 días como una clasificación bidireccional con duplicación. Use el nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

12.28 Como se indicó en la página 377, las dos formas de aumentar el tamaño de un experimento de clasificación bidireccional son *a*) duplicar el número de bloques y *b*) duplicar todo el experimento. Discuta y compare la ganancia en grados de libertad para el error de la suma de cuadrados por los dos métodos.

12.29 Demuestre que, si $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, la media de μ_{ij} (sumada sobre j) es igual a $\mu + \alpha_i$, así como que la media de μ_{ij} (sumada sobre i y j) es igual a μ, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

12.30 Verifique que las fórmulas de cálculo para SST, $SS(Tr)$, y $SS(Bl)$ y SSE, dadas en la página 372, son equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 12.2.

12.31 Use la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ para probar las diferencias entre los tratamientos en el ejercicio 12.23.

12.32 Verifique los resultados de la prueba de Duncan para la comparación de los 4 detergentes dada en la página 380.

12.33 Con respecto al ejercicio 12.3, use intervalos de confianza simultáneos de Bonferroni, con $\alpha = 0.03$, para comparar el número medio de discos duros producidos por equipo en los 3 diferentes escenarios.

12.34 Use la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ para comparar la efectividad de los 3 lubricantes que se mencionan en el ejercicio 12.6.

12.35 *a*) Use la prueba de Duncan con $\alpha = 0.01$ para comparar la resistencia de los 5 hilos de lino del ejercicio 12.20.

b) Use el enfoque del intervalo de confianza de la página 378, con $\alpha = 0.10$, para comparar las resistencias medias de los hilos de lino del ejercicio 12.20.

12.36 La desigualdad de **Bonferroni** señala que

$$P(\cap_i C_i) \geq 1 - \sum_i P(\overline{C_i})$$

a) Demuestre que esto se mantiene para 3 eventos.

b) Sea C_i el evento de que el i-ésimo intervalo de confianza cubrirá el verdadero valor del parámetro para $i = 1, \ldots, m$. Si $P(\overline{C_i}) \leq \alpha/m$, de modo que la probabilidad de no cubrir el i-ésimo parámetro es cuando mucho α/m, demuestre que la probabilidad de que todos los intervalos de confianza cubran sus respectivos parámetros es cuando menos $1 - \alpha$.

12.5 Análisis de covarianza

El propósito del método utilizado en la sección 12.3 era liberar el error experimental de la variabilidad debida a una causa extraña identificable y controlable. En esta sección se introducirá un método llamado **análisis de covarianza**. Se aplica cuando tales variables extrañas, o **concomitantes**, no logran mantenerse fijas aunque puedan medirse. Este sería el caso, por ejemplo, si se quiere comparar la efectividad de varios programas de capacitación industrial y los resultados dependieran de los CI de los aprendices; si se desea comparar la durabilidad de varios tipos de suelas de piel y los resultados dependieran del peso de los individuos que usan los zapatos, o si se busca comparar los méritos de varios agentes limpiadores y los resultados dependieran de la condición original de las superficies a limpiar. El método mediante el cual se analizan los datos de este tipo es una combinación del método de regresión lineal utiliza en la sección 11.1 y el análisis de varianza de la sección 12.2. El modelo subyacente está dado por

Ecuación modelo para análisis de covarianza

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \delta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Como en el modelo de la página 361, μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento y las ε_{ij} son variables independientes normalmente distribuidas, con medias cero y varianza común σ^2. Como en el modelo de la página 309, donde se le llamó β, δ es la pendiente de la ecuación de regresión lineal.

En el análisis de tales datos, los valores de la variable concomitante, la x_{ij}, se eliminan usando métodos de regresión; a saber, al estimar δ con el método de mínimos cuadrados y, luego, realizando un análisis de varianza sobre las y ajustadas, es decir, sobre las cantidades $y'_{ij} = y_{ij} - \hat{\delta} x_{ij}$. A este procedimiento se le conoce como análisis de covarianza, pues requiere una partición de la **suma de productos** total

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet})(x_{ij} - \bar{x}_{\bullet})$$

de la misma forma que en análisis ordinario de varianza, implica la partición de la suma de cuadrados total. En la práctica real, los cálculos se realizan del modo siguiente:

1. Las sumas de cuadrados total, de tratamientos y del error se calculan para las x con las medias de las fórmulas para una clasificación unidireccional de la página 363; se denotarán SST_X, $SS(Tr)_X$, y SSE_X.

2. Las sumas de cuadrados total, de tratamientos y del error se calculan para las y mediante la fórmulas para una clasificación unidireccional de la página 363; se denotarán SST_y, $SS(Tr)_y$ y SSE_y.
3. Las sumas total, de tratamientos y del error se calculan mediante las fórmulas

Sumas de productos (análisis de covarianza)

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot y_{ij} - C$$

$$SP(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{k} Tx_i \cdot Ty_i}{n} - C$$

$$SPE = SPT - SP(Tr)$$

donde el término de corrección C está dado por

$$C = \frac{Tx \cdot Ty}{k \cdot n}$$

donde Tx_i es el total de las x para el i-ésimo tratamiento, Ty_i es el total de las y para el i-ésimo tratamiento, T_x es el total de todas las x y T_y es el total de todas las y.

4. Las sumas de cuadrados total, del error y de tratamientos se calculan para las y ajustadas mediante las fórmulas

Sumas ajustadas de cuadrados (análisis de covarianza)

$$SST_{y'} = SST_y - \frac{(SPT)^2}{SST_x}$$

$$SSE_{y'} = SSE_y - \frac{(SPE)^2}{SSE_x}$$

$$SS(Tr)_{y'} = SST_{y'} - SSE_{y'}$$

Los resultados obtenidos en dichos cálculos se resumen convenientemente mediante el siguiente tipo de **tabla de análisis de covarianza**:

Fuente de variación	Suma de cuadrados para x	Suma de cuadrados para y	Suma de productos	Suma de cuadrados para y'	Grados de libertad	Cuadrado medio
Tratamientos	$SS(Tr)_x$	$SS(Tr)_y$	$SP(Tr)$	$SS(Tr)_{y'}$	$k - 1$	$MS(Tr)_{y'} = \frac{SS(Tr)_{y'}}{k-1}$
Error	SSE_x	SSE_y	SPE	$SSE_{y'}$	$nk - k - 1$	$MSE_{y'} = \frac{SSE_{y'}}{nk-k-1}$
Total	SST_x	SST_y	SPT	$SST_{y'}$	$nk - 2$	

Note que cada cuadrado medio se obtiene al dividir la suma de cuadrados correspondiente entre sus grados de libertad.

Finalmente, la hipótesis nula $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ se prueba contra la hipótesis alternativa de que las α_i no son iguales a cero sobre la base del estadístico

Razón *F* para tratamientos ajustados

$$F = \frac{MS(Tr)_{y'}}{MSE_{y'}}$$

Se rechaza con un nivel de significancia α si el valor obtenido para F supera F_α con $k - 1$ y $nk - k - 1$ grados de libertad.

EJEMPLO

Cómo realizar un análisis de covarianza con un covariado

Suponga que un investigador tiene tres agentes limpiadores diferentes, A_1, A_2 y A_3, y quiere seleccionar el agente más eficiente para limpiar una superficie metálica. La limpieza de una superficie se mide por su reflectividad, expresada en unidades arbitrarias como la razón entre la reflectividad observada y la de una superficie especular estándar. Debe utilizarse análisis de covarianza, porque el efecto de un agente limpiador sobre la reflectividad dependerá de la limpieza original; a saber, la reflectividad original de la superficie. El investigador obtuvo los siguientes resultados:

A_1	Reflectividad original, x	0.50	0.55	0.60	0.35
	Reflectividad final, y	1.00	1.20	0.80	1.40
A_2	Reflectividad original, x	0.75	1.65	1.00	1.10
	Reflectividad final, y	0.75	0.60	0.55	0.50
A_3	Reflectividad original, x	0.60	0.90	0.80	0.70
	Reflectividad final, y	1.00	0.70	0.80	0.90

Realice un análisis de covarianza para determinar (con un nivel de significancia de 0.05) si hay diferencias en los mejoramientos de reflectividad con los 3 agentes limpiadores.

Solución

1. *Hipótesis nula*: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
   Hipótesis alternativa: las α no son todas iguales a cero.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $F > 4.46$, el valor de $F_{0.05}$ para $k - 1 = 3 - 1 = 2$ y $nk - k - 1 = 4 \times 3 - 3 - 1 = 8$ grados de libertad.
4. *Cálculos:* los totales son $T_{x_1} = 2.00$, $T_{x_2} = 4.50$, $T_{x_3} = 3.00$, $T_x = 9.50$, $T_{y_1} = 4.40$, $T_{y_2} = 2.40$, $T_{y_3} = 3.40$ y $T_y = 10.20$.
   Para las x, el término de corrección es

$$\frac{(9.50)^2}{3 \cdot 4} = 7.52,$$

   y las sumas de cuadrados son

$$SST_x = 0.50^2 + 0.55^2 + \cdots + 0.70^2 - 7.52 = 1.31$$

$$SS(Tr)_x = \frac{2.00^2 + 4.50^2 + 3.00^2}{4} - 7.52 = 0.79$$

$$SSE_x = 1.31 - 0.79 = 0.52$$

Para las y, el término de corrección es

$$\frac{(10.20)^2}{3 \cdot 4} = 8.67,$$

y las sumas de cuadrados son

$$SST_y = 1.00^2 + 1.20^2 + \cdots + 0.90^2 - 8.67 = 0.79$$
$$SS(Tr)_y = \frac{4.40^2 + 2.40^2 + 3.40^2}{4} - 8.67 = 0.50$$
$$SSE_y = 0.79 - 0.50 = 0.29$$

Para las sumas de productos, el término de corrección es

$$\frac{(9.50)(10.20)}{3 \cdot 4} = 8.08$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} SPT &= (0.50)(1.00) + (.055)(1.20) + \cdots + (0.70)(0.90) - 8.08 \\ &= -0.80 \\ SP(Tr) &= \frac{(2.00)(4.40) + (4.50)(2.40) + (3.00)(3.40)}{4} - 8.08 \\ &= -0.63 \\ SPE &= -0.80 - (-0.63) = -0.17 \end{aligned}$$

Finalmente, para las y ajustadas,

$$SST_{y'} = 0.79 - \frac{(-0.80)^2}{1.31} = 0.30$$
$$SSE_{y'} = 0.29 - \frac{(-0.17)^2}{0.52} = 0.23$$
$$SS(Tr)_{y'} = 0.30 - 0.23 = 0.07$$

Todos estos resultados se resumen en la siguiente tabla de análisis de covarianza:

Fuente de variación	Suma de cuadrados para x	Suma de cuadrados para y	Suma de productos	Suma de cuadrados para y'	Grados de libertad	Cuadrado medio
Tratamientos	0.79	0.50	−0.63	0.07	2	0.035
Error	0.52	0.29	−0.17	0.23	8	0.029
Total	1.31	0.79	−0.80	0.30	10	

5. *Decisión:* puesto que

$$F = \frac{0.035}{0.029} = 1.21$$

no supera 4.46, la hipótesis nula no puede rechazarse. En otras palabras, no se podría concluir que alguno de los agentes limpiadores es más efectivo que los otros. ■

```
DEPENDENT VARIABLE

SOURCE     DF    SUM OF SQUARES   MEAN SQUARE   F VALUE   PR > F    R-SQUARE

MODEL       3       0.55421498    0.18473833      6.40   0.0161    0.706006

ERROR       8       0.23078502    0.02884813            ROOT MSE

C TOTAL    11       0.78500000                     0.16984737

SOURCE          DF   TYPE III SS    F VALUE    PR > F

TREATMENTS       2   0.07447755       1.29     0.3267
X                1   0.05421498       1.88     0.2076
```

Figura 12.2
Salida SAS seleccionada para el análisis de covarianza, usando los datos del ejemplo que viene en la página 384

Aunque los cálculos al principio parecerían formidables, se vuelven sencillos con muchos programas estadísticos de computadora. La salida del programa *SAS* para este ejemplo se presenta en la figura 12.2. Puesto que en el ejemplo anterior tan solo se conservan dos puntos decimales, los cálculos por computadora para el *estadístico F* son más precisos. Sin embargo, las conclusiones son las mismas. Se debe solicitar suma de cuadrados tipo III para obtener la salida de SAS correcta. Véase el ejercicio 2.40 para comandos MINITAB.

Los métodos de análisis de covarianza no se usaron extensamente sino hasta años recientes, debido sobre todo a los cálculos más bien extensos que se requieren. Desde luego, con la amplia disponibilidad de las computadoras y el software adecuado, lo anterior ya no es un problema. Hay muchas formas en las cuales puede generalizarse el método de análisis de covarianza que se presenta aquí. Primero, quizás haya más de una variable concomitante; entonces, es posible aplicar el método a tipos más complicados de diseños; por ejemplo, a un diseño de bloques aleatorios, donde el coeficiente de regresión asumiría incluso un valor diferente para cada bloque.

Ejercicios

12.37 Un experimentador quiere comparar el tiempo para falla y después de reconstruir un soldador robótico con tres métodos diferentes, pero ajusta la covariada x = edad de soldador robótico.

Suponga que los datos, en miles de horas, son

Método 1		Método 2		Método 3	
x	y	x	y	x	y
7	2	7	4	6	5
11	5	9	6	3	3
6	2	5	5	3	4

Pruebe, con $\alpha = 0.05$, las diferencias entre los tres métodos y estime el efecto de la edad covariada.

12.38 Para comparar la expectativa de vida de un transistor con 3 condiciones de almacenamiento y explicar al mismo tiempo una fuga de corriente (colector a base), un técnico de laboratorio obtuvo los siguientes resultados, donde la fuga de corriente, x, está en microamperes y los tiempos de vida, y, están en horas:

Condición de almacenamiento 1		Condición de almacenamiento 2		Condición de almacenamiento 3	
x	y	x	y	x	y
4.8	9,912	6.4	9,952	8.8	9,596
7.2	9,383	8.7	9,482	6.2	9,697
5.5	9,734	7.1	9,435	7.5	9,700
6.0	9,551	5.3	9,915	4.9	9,610
8.3	8,959	4.6	9,492	5.4	10,145
7.6	9,474	6.0	9,565	5.8	10,191
5.9	9,179	7.2	9,704	7.3	9,855
8.0	9,359	8.8	9,636	8.6	9,682
4.3	9,580	5.4	9,608	8.8	10,160
5.1	9,245	7.8	9,548	6.0	9,982

Realice un análisis de covarianza, usando el nivel de significancia $\alpha = 0.05$. Además, estime el valor del coeficiente de regresión.

12.39 Cuatro configuraciones transversales diferentes de riel de ferrocarril se sometieron a prueba, con la finalidad de determinar cuál es más resistente al rompimiento en condiciones de uso. Diez millas de cada tipo de vía se tendieron en cada una de 5 ubicaciones; luego, durante un periodo de uso de dos años, se midió el número de grietas y otras condiciones relacionadas con fracturas (y). Sin embargo, para comparar de manera adecuada estos diseños de vía, es necesario corregir para nivel de uso (x), medido en términos del número promedio de trenes por día que corren sobre cada sección de vía. Utilice los siguientes resultados experimentales para probar (con un nivel de significancia de 0.01) si los diseños de vía fueron igualmente resistentes a la ruptura y para estimar el efecto del uso sobre la resistencia a la ruptura.

Diseño de vía *A*		Diseño de vía *B*		Diseño de vía *C*		Diseño de vía *D*	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
10.4	3	16.9	8	17.8	5	19.6	9
19.3	7	23.6	11	24.4	9	25.4	8
13.7	4	14.4	7	13.5	5	35.5	16
7.2	0	17.2	10	20.1	6	16.8	7
16.3	5	9.1	4	11.0	4	31.2	11

12.40 Cálculo con *MINITAB* para análisis balanceado de covarianza

A continuación se ilustran los comandos para el ejemplo acerca de reflectividad de superficie de la página 384.

Datos:

C1(Tr):	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	
C2(x):	0.50	0.55	0.60	0.35	0.75	1.65	1.00	1.10	0.60	0.90	0.80	0.70
C3(y):	1.00	1.20	0.80	1.40	0.75	0.60	0.55	0.50	1.00	0.70	0.80	0.90

Cuadro de diálogo:

Stat > ANOVA > General Linear Model. Escriba *y* en **Responses**.
Escriba *T r* en **Models**. Haga clic en **Covariates** y escriba *x* en **Covariates**.
Haga clic en **OK**. Haga clic en **OK**.

La salida parcial incluye

```
Analysis of Variance for y, using Adjusted SS for Tests

Source  DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
x        1 0.47974  0.05421  0.05421  1.88  0.208
Tr       2 0.07448  0.07448  0.03724  1.29  0.327
Error    8 0.23079  0.23079  0.02885
Total   11 0.78500

S = 0.169847   R-Sq = 70.60%   R-Sq(adj) = 59.58%
```

Use software para trabajar el ejercicio 12.37.

12.41 Use software para trabajar el ejercicio 12.38.

Sí y no

Sí

1. Siempre que sea posible, haga aleatoria la asignación de tratamientos en el diseño completamente al azar. En otros diseños, haga aleatorias las asignaciones de tratamiento dentro de las restricciones del diseño.

2. Cuando tengan que realizarse diversas comparaciones, use un método de comparaciones múltiple para proponer un enunciado de confianza acerca de todo el conjunto de intervalos de confianza.
3. Considere la aplicación del análisis de covarianza cuando una variable extraña importante no pueda mantenerse constante.

No

1. No acepte de manera rutinaria el análisis de varianza presentado en una salida de computadora. En vez de ello, inspeccione los residuos en busca de valores atípicos y falta de normalidad de moderada a severa. Una gráfica de valores normales es útil si existen 20 o más residuos, lo cual sugeriría una transformación.

Ejercicios de repaso

12.42 Suponga que los siguientes datos se rigen por el modelo de análisis de varianza unidireccional.

Tratamiento 1:	13	8	10	11	8	
Tratamiento 2:	1	0	3	0		
Tratamiento 3:	8	5	10	3	7	3

a) Descomponga cada observación y_{ij} como

$$y_{ij} = \bar{y} + (\bar{y}_i - y) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)$$

b) Obtenga las sumas de cuadrados y los grados de libertad para cada arreglo.

c) Construya la tabla del análisis de varianza y pruebe las diferencias entre los tratamientos con $\alpha = 0.05$.

12.43 Para determinar el efecto sobre la carga de polvo de salida en un precipitador electrostático, se realizaron las siguientes mediciones:

Flujo total (ft^3/hr)	Carga de polvo de salida (granos por yarda cúbica en gas de escape)				
200	1.5	1.7	1.6	1.9	1.9
300	1.5	1.8	2.2	1.9	2.2
400	1.4	1.6	1.7	1.5	1.8
500	1.1	1.5	1.4	1.4	2.0

Use el nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ para probar si el flujo a través del precipitador produce un efecto sobre la carga de polvo de salida.

12.44 Verifique la tabla de análisis de varianza para el ejemplo de resina de la página 366. ¿Cuál es la conclusión cuando prueba para un efecto de tratamiento con $\alpha = 0.05$?

12.45 Dados los siguientes datos de un diseño de bloques al azar,

	Bloques 1	2	3	4
Tratamiento 1	9	10	2	7
Tratamiento 2	6	13	1	12
Tratamiento 3	9	16	9	14

a) Descomponga cada observación y_{ij} como

$$y_{ij} = \bar{y}_{\cdot\cdot} + (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) + (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})$$

b) Obtenga las sumas de cuadrados y grados de libertad para cada arreglo.

c) Construya la tabla de análisis de varianza y pruebe las diferencias entre los tratamientos con $\alpha = 0.05$.

12.46 Use la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ para comparar las medias de los tratamientos del ejercicio 12.45.

12.47 Se tomaron muestras de agua subterránea de 5 diferentes sitios de vertedero de desechos tóxicos por cada una de 3 agencias diferentes: la EPA, la compañía propietaria del sitio y un ingeniero consultor independiente. Cada muestra se analizó en busca de presencia de cierto contaminante por cualquier método de laboratorio utilizado rutinariamente por la agencia recolectora de la muestra, con los siguientes resultados:

Concentración (partes por millón)

	Sitio A	*Sitio B*	*Sitio C*	*Sitio D*	*Sitio E*
Agencia 1	23.8	7.6	15.4	30.6	4.2
Agencia 2	19.2	6.8	13.2	22.5	3.9
Agencia 3	20.9	5.9	14.0	27.1	3.0

Use el nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ para responder si:

a) ¿Hay alguna razón para creer que las agencias no son consistentes entre sí en sus mediciones?

b) ¿Los sitios vertederos difieren entre sí en su nivel de contaminación?

12.48 Use la prueba de Duncan, con $\alpha = 0.05$, para comparar los niveles de contaminación de las tres agencias en el ejercicio 12.47.

12.49 Con respecto al ejercicio 12.37.

a) Realice un análisis de varianza, pero ignore la antigüedad.

b) Compare su análisis del inciso *a*) con el análisis de covarianza. Comente cualquier diferencia.

12.50 El departamento de autopistas estatal realiza un experimento para comparar tres tipos de tratamientos de pavimentación y la respuesta y es la rugosidad del camino. La siguiente tabla también proporciona el volumen de tráfico diario en promedio x.

Suponga que los datos, en unidades adecuadas, son

Tratamiento 1		Tratamiento 2		Tratamiento 3	
x	y	x	y	x	y
5	12	3	3	4	9
5	10	2	2	2	5
2	5	1	1	3	7

a) Realice un análisis de varianza sobre la variable de respuesta rugosidad del camino. Considere $\alpha = 0.05$.

b) ¿Existe algún tratamiento de pavimentación que sea mejor que los otros? Responda al encontrar los intervalos de confianza simultáneos de Bonferroni del 95% para las diferencias de las medias.

12.51 Consulte el ejercicio 12.50.

a) Realice un análisis de covarianza. Pruebe una diferencia en el tratamiento usando un nivel de significancia del 0.05.

b) Compare su análisis del inciso *a*) con el análisis de varianza. ¿Es importante el covariado?

12.52 Tres diferentes configuraciones de panel de instrumentos se pusieron a prueba al colocar pilotos de avión en simuladores de vuelo y probar su tiempo de reacción a emergencias de vuelo simulados. Ocho pilotos se asignaron a cada configuración de panel de instrumentos. Cada piloto enfrentó 10 condiciones de emergencia en una secuencia aleatoria y se midió el tiempo total requerido para tomar acción correctiva para las 10 condiciones, con los siguientes resultados:

Panel de instrumentos 1		Panel de instrumentos 2		Panel de instrumentos 3	
x	y	x	y	x	y
8.1	6.55	12.1	5.74	15.2	6.37
19.4	6.40	2.1	5.93	8.7	6.97
11.6	5.93	3.9	6.16	7.2	7.38
24.9	6.79	5.2	5.68	6.1	6.43
6.2	7.16	4.6	5.41	11.8	7.59
3.8	5.64	14.4	6.29	12.1	7.16
18.4	5.87	16.1	5.55	9.5	7.02
9.4	6.31	8.5	4.82	2.6	6.85

En esta tabla, x es el número de años de experiencia del piloto y y es el tiempo de reacción total en segundos. Realice un análisis de covarianza para probar si las configuraciones de panel de instrumentos dieron resultados significativamente diferentes ($\alpha = 0.05$). Además, efectúe un análisis de varianza unidireccional (ignore el covariado, x) y determine de esa forma qué efecto tiene la experiencia sobre los resultados.

12.53 Verifique la tabla de análisis de varianza para el ejemplo de resistencia de papel de la página 367.

12.54 Benjamin Franklin (1706-1790) realizó un experimento para estudiar el efecto de la profundidad del agua sobre la cantidad de arrastre sobre un bote que se jala por un canal. Fabricó un canal de 14 pies y un modelo de bote de 6 pulgadas de largo. Un hilo se ató a la quilla, se pasó por una polea y luego se le unió un peso. Al no tener segundero en su reloj, contó tan rápido como pudo hasta 10 varias veces. Dichos tiempos, para que el modelo de bote atravesara el canal a las diferentes profundidades de agua, son

Agua con 1.5 pulgadas:	100	104	104	106	100	99	100	100
Agua con 2.0 pulgadas:	94	93	91	87	88	86	90	88
Agua con 4.5 pulgadas:	79	78	77	79	79	80	79	81

(*Fuente:* Carta a John Pringle, 10 de mayo de 1768.)

a) Realice un análisis de varianza y pruebe las diferencias debidas a profundidad del agua usando $\alpha = 0.05$.

b) Utilice la prueba de Duncan con $\alpha = 0.05$ para investigar diferencias.

c) Use el enfoque de intervalo de confianza de Bonferroni del 94% en la página 378 para comparar los tiempos medios.

Términos clave

Análisis de covarianza 382
Análisis de varianza 363
Bloques 356
Clasificación bidireccional 371
Clasificación unidireccional 357
Comparaciones múltiples 378
Confundirse 355
Cuadrados:
Cuadrado medio 361
Cuadrado medio del tratamiento 360
Cuadrado medio entre muestras 361
Diseño completamente al azar 357
Diseño de bloques al azar 371
Diseño experimental 354
Duplicación (réplica) 377
Ecuación del modelo 361
Efecto 361
Método de Bonferroni 378
Prueba de rango múltiple
de Duncan 378
Rango mínimo significativo 378
Robusto 360
Suma de cuadrados de los bloques 372
Suma de cuadrados del error 360, 372
Suma de cuadrados total 359
Suma de productos 382
Tabla de análisis de covarianza 383
Tabla de análisis de varianza 362, 373
Término de corrección
para media 363
Variable concomitante 382

CAPÍTULO 13

EXPERIMENTACIÓN FACTORIAL

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

13.1 Experimentos de dos factores 391

13.2 Experimentos multifactoriales 398

13.3 Experimentos factoriales 2^n 409

13.4 Presentación gráfica de experimentos 2^2 y 2^3 416

13.5 Análisis de superficie de respuesta 430

13.6 Confusión en un experimento factorial 2^n 433

13.7 Duplicación fraccional 437

Ejercicios de repaso 442

Términos clave 446

En el capítulo 12 el interés estuvo principalmente en los efectos de una variable, a cuyos valores se hizo referencia como "tratamientos". En este capítulo se considerarán los efectos individual y conjunto de varias variables, mientras las combinaciones de los valores, o niveles, de dichas variables ahora jugarán los papeles de los diferentes tratamientos. Las variables extrañas, si hay alguna, se manejarán como antes usando bloques.

En las secciones 13.1 y 13.2 se tratará con el análisis de experimentos, cuyos tratamientos pueden considerarse combinaciones de los niveles de dos o más factores. En las secciones 13.3 y 13.4 se estudiará el caso especial de factores que tienen dos niveles. La sección 13.5 ilustra un diseño para obtener los niveles de variables, donde la respuesta estimada es un máximo, en tanto que en el resto del capítulo se abordará el análisis de los experimentos donde hay demasiadas combinaciones de todos los factores a incluir en el mismo bloque o programa experimental.

13.1 Experimentos de dos factores

Se introduce la idea de un **experimento de dos factores (dos variables)**, en el contexto de fabricar coque, a partir de carbón para su uso en altos hornos: se busca determinar los efectos de la temperatura del ducto y el ancho del horno en el tiempo requerido para elaborar coque. El experimentador combinará 3 anchos de horno y 2 temperaturas, como se indica a continuación.

Si se corren varios bloques (o repeticiones), cada una consistente en estos 6 tratamientos, sería posible analizar los datos como una clasificación bidireccional y someter a prueba las diferencias significativas entre las 6 medias del tratamiento. Sin embargo, en este caso, el experimentador tiene interés en conocer mucho más que eso; desea saber si variaciones en el ancho de horno o en la temperatura del ducto de escape afectan el tiempo de cocción, pero quizá también si algunos cambios en el tiempo de cocción, atribuibles a variaciones en el ancho de horno, son los mismos a temperaturas diferentes.

Factor A: ancho del horno	Factor B: temp. de ducto
4 (pulgadas	1,600(◦F)
4	1,900
8	1,600
8	1,900
12	1,600
12	1,900

Es posible responder preguntas de este tipo si las condiciones experimentales —los tratamientos— consisten en combinaciones adecuadas de los **niveles** (o valores) de los diversos **factores**. En el ejemplo anterior, los factores son: ancho de horno y temperatura de ducto de escape. El ancho de horno tiene 3 niveles: 4, 8 y 12 pulgadas, en tanto que la temperatura de ducto de escape tiene dos niveles: 1,600 y 1,900 grados Fahrenheit. Note que los 6 tratamientos se eligieron en tal forma que cada nivel de ancho de horno se usa una vez, junto con cada nivel de temperatura del ducto de escape. En general, si 2 factores A y B se investigarán en los niveles a y b, respectivamente, entonces existen $a \cdot b$ condiciones

experimentales (tratamientos) correspondientes a todas las combinaciones factibles de los niveles de los 2 factores. Al experimento resultante se le conoce como **experimento factorial $a \times b$ completo**. Advierta que, si se omite una o más de las $a \cdot b$ condiciones experimentales, el experimento todavía podría analizarse como una clasificación bidireccional, pero no con facilidad como un experimento factorial. Se suele omitir la palabra *completo,* de modo que se entiende que un **experimento factorial $a \times b$** contiene condiciones experimentales correspondientes a todas las combinaciones posibles de los niveles de los dos factores. Con la finalidad de obtener una estimación del error experimental en un experimento de dos factores, es necesario replicar, esto es, repetir todo el conjunto de $a \cdot b$ condiciones experimentales, por decir, un total de r veces, haciendo aleatorio el orden de aplicación de la condición en cada repetición. Si y_{ijk} es la observación en la k-ésima repetición, tomada en el i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B, el modelo supuesto para el análisis de este tipo de experimento por lo general se escribe como

Ecuación del modelo para un experimento de dos factores

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \rho_k + \varepsilon_{ijk}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$ y $k = 1, 2, \ldots, r$. Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor A, β_j es el efecto del j-ésimo nivel del factor B, B, $(\alpha\beta)_{ij}$ es la **interacción**, o efecto conjunto, del i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B, mientras ρ_k es el efecto de la k-ésima repetición. Como en los modelos usados en el capítulo 12, se supondrá que ε_{ijk} son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con medias cero y varianza común σ^2. Además, similar a las restricciones impuestas sobre los modelos que vienen en las páginas 361 y 371, se supondrá que

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \rho_k = 0$$

Es posible demostrar que dichas restricciones supondrán definiciones únicas de los parámetros μ, α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ y ρ_k.

Para ilustrar el modelo subyacente a un experimento de dos factores, considere un experimento con dos repeticiones, en las cuales el factor A ocurre en dos niveles, el factor B ocurre en dos niveles y los efectos de duplicación son cero; esto es, $\rho_1 = \rho_2 = 0$. En vista de las restricciones sobre los parámetros, también se tiene

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad \beta_2 = -\beta_1 \quad (\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{22}$$

así como las medias poblacionales correspondientes a las cuatro condiciones experimentales, definidas por los 2 niveles del factor A, y los 2 niveles del factor B pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\mu_{111} = \mu_{112} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{121} = \mu_{122} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{211} = \mu_{212} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} \\
\mu_{221} = \mu_{222} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}
\end{aligned}$$

Al sustituir por $\mu_{ij1} = \mu_{ij2}$ la media de todas las observaciones obtenidas para el i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B, se obtienen 4 ecuaciones lineales simultáneas que pueden resolverse para los parámetros μ, α_1, β_1 y $(\alpha\beta)_{11}$. (Véase el ejercicio 13.9.)

Para continuar la ilustración, suponga ahora que $\mu = 10$. Si todos los otros efectos se igualan a cero, cada una de las μ_{ijk} se igualaría a 10, por lo que la superficie de respuesta sería el plano horizontal de la figura 13.1*a*). Si ahora se agrega un efecto de factor A, con $\alpha_1 = -4$, la superficie de respuesta se convierte en el plano inclinado que se muestra en la figura 13.1*b*); por otro lado, si a esto se agrega un efecto del factor B, con $\beta_1 = 5$, se obtiene el plano que se muestra en la figura 13.1*c*). Observe que, hasta el momento, los efectos de los

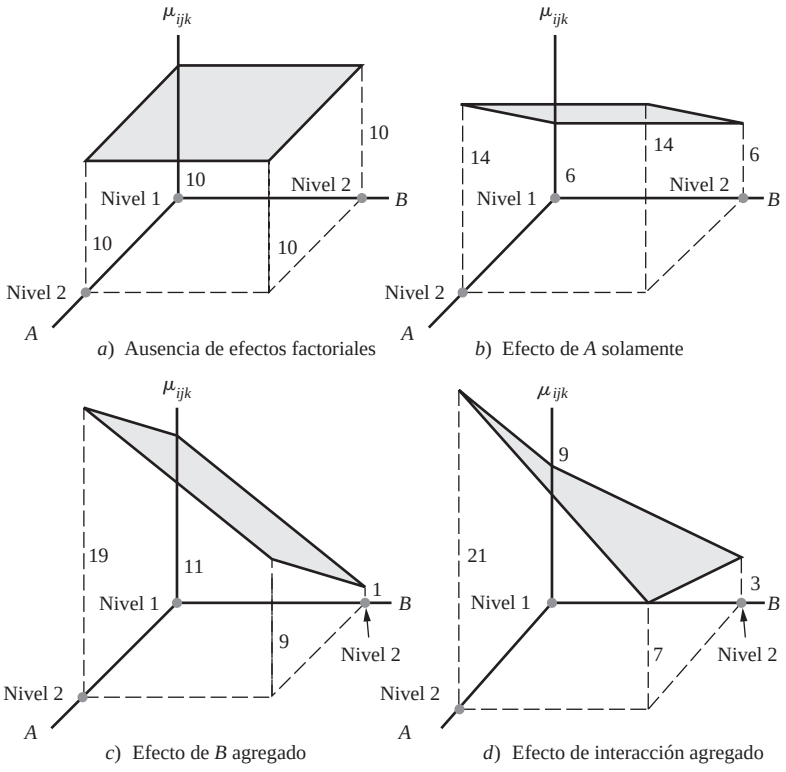


Figura 13.1
Efectos factoriales

factores A y B son *aditivos*; esto es, el cambio en la media para cualquier factor al ir del nivel 1 al 2 no depende del nivel del otro factor, por lo que la superficie de respuesta es un plano. Si ahora se incluye una interacción, con $(\alpha\beta)_{11} = -2$, el plano gira como se indica en la figura 13.1d), los efectos ya no son aditivos, y la superficie de respuesta ya no es un plano. Note, también, que si los efectos de duplicación no se igualan a cero, se habría obtenido una superficie diferente para cada duplicación; para cada duplicación la superficie de la figura 13.1d) habría cambiado un número adecuado de unidades por arriba o por abajo.

Al generalizar las ideas del experimento factorial 2×2, el análisis de un experimento factorial $a \times b$ se basa en la siguiente descomposición de la suma de cuadrados total. Primero, *SST* se divide en componentes atribuidos a tratamientos, repeticiones (o bloques) y error, mediante la identidad

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{\cdots})^2 &= r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2\\ &+ ab\sum_{k=1}^{r}(\bar{y}_{\cdot\cdot k}-\bar{y}_{\cdots})^2\\ &+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot k}+\bar{y}_{\cdots})^2\end{aligned}$$

Excepto por la notación, tal identidad es equivalente a la del teorema 12.2. La suma de cuadrados total, en el lado izquierdo de la identidad, tiene $abr - 1$ grados de libertad. Los términos a la derecha son, respectivamente, la suma de cuadrados de tratamientos con $ab - 1$ grados de libertad, la suma de cuadrados de duplicación (bloques) con $r - 1$ grados de libertad y la suma de cuadrados del error con $(ab-1)(r-1)$ grados de libertad. (Observe que los diversos grados de libertad son iguales a los de la tabla de análisis de varianza de la página 373, si se sustituye ab por a y r por b.)

Hasta el momento, no hay nada nuevo acerca del análisis de los datos; se trata del análisis de una clasificación bidireccional, *pero la característica distintiva de un experimento factorial es que la suma de cuadrados del tratamiento puede subdividirse aún más en componentes que corresponden a los diversos efectos factoriales.* Por consiguiente, para un experimento de dos factores se tiene la siguiente partición, o descomposición, de la suma de cuadrados del tratamiento:

$$r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2 = rb\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2 + ra\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})^2$$

El primer término a la derecha, que mide la variabilidad de las medias que corresponden a los diferentes niveles del factor A, se le conoce como **suma de cuadrados del factor *A***, SSA. De igual modo, el segundo término es la suma de cuadrados para el factor B, SSB y el tercer término es la **suma de cuadrados de la interacción**, $SS(AB)$, que mide la variabilidad de las medias, $\bar{y}_{ij\cdot}$ no atribuible a los efectos individuales (o separados) de los factores A y B. Los $ab-1$ grados de libertad para tratamientos, en concordancia, se subdividen en $a-1$ grados de libertad para el efecto del factor A, $b-1$ para el efecto del factor B y

$$ab-1-(a-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$$

grados de libertad para interacción.

El lector suspicaz notará que la descomposición de la suma de cuadrados total corresponde a la descomposición de las observaciones individuales,

$$\underset{\text{observación}}{y_{ijk}} = \underset{\substack{\text{gran}\\\text{media}}}{\bar{y}_{\cdots}} + \underset{\substack{\text{efecto}\\\text{de factor A}}}{(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdots})} + \underset{\substack{\text{efecto}\\\text{de factor B}}}{(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdots})} + \underset{\text{interacción AB}}{(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{\cdots})} + \underset{\text{duplicación}}{(\bar{y}_{\cdot\cdot k}-\bar{y}_{\cdots})} + \underset{\text{error}}{(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot k}+\bar{y}_{\cdots})}$$

que, a la vez, corresponde a los términos en el modelo de población de la página 392. Al transponer $\bar{y}_{\cdots}$ al lado izquierdo, la descomposición corresponde a la descomposición en variación en torno a la media general.

El siguiente ejemplo ilustra la descomposición sucesiva de la suma de cuadrados. Por la cantidad de cálculo que hay, se nota la amplia disponibilidad de software de cómputo para crear una tabla de análisis de varianza. (Véase el ejercicio 13.10.)

EJEMPLO **Cómo realizar pruebas estadísticas para un diseño experimental factorial 3×2**

Con respecto al experimento de elaboración de coque descrito en la página 391, suponga que 3 repeticiones de este experimento dan como resultado los siguientes tiempos de elaboración (en horas):

Factor A Ancho del horno	Factor B Temperatura del ducto	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Total
4	1,600°F	3.5	3.0	2.7	9.2
4	1,900	2.2	2.3	2.4	6.9
8	1,600	7.1	6.9	7.5	21.5
8	1,900	5.2	4.6	6.8	16.6
12	1,600	10.8	10.6	11.0	32.4
12	1,900	7.6	7.1	7.3	22.0
	Total	36.4	34.5	37.7	108.6

Realice un análisis de varianza con base en este experimento de dos factores y pruebe la significancia de los efectos factoriales; para ello, use el nivel de significancia de 0.01.

Solución Al seguir pasos similares a los utilizados en el análisis de una clasificación bidireccional, se obtiene

1. *Hipótesis nulas:*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0$$
$$(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = (\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta)_{31} = (\alpha\beta)_{32} = 0$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

Hipótesis alternativas: las α no son todas iguales a cero; las β no son todas iguales a cero; los términos $(\alpha\beta)$ no son todos iguales a cero; las ρ no son todas iguales a cero.

2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$ para todas las pruebas.

3. *Criterios:* para las repeticiones, rechace las hipótesis nulas si $F > 7.56$, el valor de $F_{0.01}$ para $r - 1 = 3 - 1 = 2$ y $(ab - 1)(r - 1) = (3 \times 2 - 1) \times (3 - 1) = 10$ grados de libertad; para el efecto principal del factor A, rechace la hipótesis nula si $F > 7.56$, el valor de $F_{0.01}$ para $a - 1 = 3 - 1 = 2$ y $(ab - 1)(r - 1) = (3 \times 2 - 1)(3 - 1) = 10$ grados de libertad; para el efecto principal del factor B, rechace si $F > 10.04$, el valor de $F_{0.01}$ para $b - 1 = 2 - 1 = 1$ y $(ab - 1)(r - 1) = (3 \times 2 - 1)(3 - 1) = 10$ grados de libertad; para el efecto de interacción, rechace si $F > 7.56$, el valor de $F_{0.01}$ para $(a - 1)(b - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$ y $(ab - 1)(r - 1) = (3 \times 2 - 1)(3 - 1) = 10$ grados de libertad.

4. *Cálculos:* al seguir el procedimiento utilizado al analizar una clasificación bidireccional, calcule primero el término de corrección

$$C = \frac{(108.6)^2}{18} = 655.22$$

Entonces, la suma de cuadrados total está dada por

$$SST = (3.5)^2 + (2.2)^2 + \cdots + (7.3)^2 - 655.22 = 149.38$$

mientras las sumas de cuadrados de tratamientos y de duplicación (en vez de bloques) está dada por

$$SS(Tr) = \frac{1}{3}[(9.2)^2 + (6.9)^2 + \cdots + (22.0)^2] - 655.22 = 146.05$$
$$SSR = \frac{1}{6}[(36.4)^2 + (34.5)^2 + (37.7)^2] - 655.22 = 0.86$$

Finalmente, al restar, se obtiene

$$SSE = 149.38 - 146.05 - 0.86 = 2.47$$

La subdivisión de la suma de cuadrados del tratamiento en componentes para los factores A y B, y para la interacción, puede facilitarse al construir el siguiente tipo de tabla bidireccional, donde las entradas son los totales en la columna derecha de la tabla que proporciona los datos originales:

		Factor B *Temperatura de ducto de escape* (°F)		
		1,600	1,900	
Factor A *Ancho de horno*	4	9.2	6.9	16.1
	8	21.5	16.6	38.1
	12	32.4	22.0	54.4
		63.1	45.5	108.6

Al utilizar fórmulas similares a aquellas con las que se calcularon las sumas de cuadrados para varios efectos en el capítulo 12, ahora se tiene, para los dos efectos principales,

$$SSA = \frac{1}{b \cdot r} \sum_{i=1}^{a} T_{i\cdot\cdot}^2 - C$$

$$= \frac{1}{6}[(16.1)^2 + (38.1)^2 + (54.4)^2] - 655.22 = 123.14$$

$$SSB = \frac{1}{a \cdot r} \sum_{j=1}^{b} T_{\cdot j\cdot}^2 - C$$

$$= \frac{1}{9}[(63.1)^2 + (45.5)^2] - 655.22 = 17.21$$

y para la interacción

$$SS(AB) = SS(Tr) - SSA - SSB$$
$$= 146.05 - 123.14 - 17.21 = 5.70$$

Finalmente, al dividir las varias sumas de cuadrados entre sus grados de libertad, y al dividir los cuadrados medios adecuados entre el cuadrado medio del error, se obtienen los resultados que se presentan en la siguiente tabla de análisis de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Repeticiones	2	0.86	0.43	1.72
Efectos principales				
A	2	123.14	61.57	246.0
B	1	17.21	17.21	68.8
Interacción	2	5.70	2.85	11.4
Error	10	2.47	0.25	
Total	17	149.38		

5. *Decisiones:* para repeticiones, dado que $F = 1.72$ no supera 7.56, el valor de $F_{0.01}$ para 2 y 10 grados de libertad, no es posible rechazar la hipótesis nula. Para el efecto principal del factor A, ya que $F = 246$ supera 7.56, y para el efecto principal del factor B, dado que $F = 68.8$ supera 10.04, deben rechazarse las hipótesis nulas. Para el efecto de interacción, como $F = 11.4$ supera 7.56, habrá de rechazarse la hipótesis nula. Como se ilustra en la figura 13.2, la tendencia de los tiempos medios de elaboración de coque para el

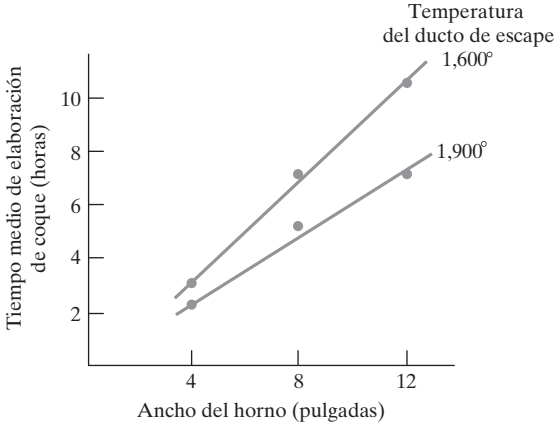


Figura 13.2
Resultados del experimento de elaboración de coque

cambio de ancho del horno es diferente para las dos temperaturas del ducto de escape. De esta figura, resulta evidente que el aumento en el tiempo de elaboración de coque, para el cambio en ancho del horno, es mayor a la temperatura del ducto de escape más baja. En vista de tal interacción, debe tenerse mucho cuidado al establecer los resultados del experimento. Por ejemplo, sería confuso afirmar simplemente que el efecto de aumentar la temperatura del ducto de escape de 1,600 a 1,900 grados Fahrenheit es reducir el tiempo de elaboración de coque en

$$\frac{63.1}{9} - \frac{45.5}{9} = 1.96 \text{ horas}$$

El tiempo de elaboración de coque se reduce, en promedio, tan poco como 0.77 horas cuando el ancho del horno es de 4 pulgadas y hasta 3.47 horas cuando el ancho del horno es de 12 pulgadas.

De manera alternativa, el resumen podría tomar la forma de la tabla bidireccional de medias de celda:

Tabla resumen de medias de celda $\overline{y}_{i\,j\,\cdot}$

		Factor B *Temperatura del ducto de escape* (°F)		
		1,600	1,900	
Factor A *Ancho del horno*	4	3.07	2.30	2.69
	8	7.17	5.53	6.35
	12	10.80	7.33	9.07
		7.01	5.05	6.03

■

Al repetir el análisis del ejemplo anterior, y usar el programa ANOVA del paquete estadístico *SAS*, se obtendría la salida que se presenta en la figura 13.3. Los valores P menores que 0.01 confirman el análisis previo, mientras sus valores muy pequeños fortalecen las conclusiones. Observe que los valores F de la figura 13.3 difieren un poco de los anteriores, porque en los cálculos de computadora se conservan más decimales.

```
DEPENDENT VARIABLE:

SOURCE    DF    SUM OF SQUARE    MEAN SQUARE    F VALUE     PR>F    R-SQUARE

MODEL      7     146.91666667    20.98809524     85.20    0.0001    0.983510

ERROR     10       2.46333333     0.24533333               ROOT MSE

C TOTAL   17     149.38000000                            0.49631979

SOURCE    DF       TYPE 1 SS    F VALUE     PR>F
REP        2      0.86333333       1.75    0.2226
A          2     123.14333333    249.95    0.0001
B          1      17.20888889     69.86    0.0001
A*B        2       5.70111111     11.57    0.0025
```

Figura 13.3
Salida elegida de SAS para anova usando los datos del ejemplo de la página 394

Cuando las repeticiones y las interacciones no son significativas, la influencia del factor A y la influencia del factor B pueden interpretarse por separado. Entonces, cuando un factor es significativo, muchos estadísticos recomiendan comparar los niveles al calcular intervalos de confianza usando el enfoque de dos muestras, pero con s^2. Los intervalos de confianza para la diferencia en respuesta media, en los niveles i_1 e i_2 del factor A, tienen límites

$$\overline{y}_{i_1\cdot\cdot} - \overline{y}_{i_2\cdot\cdot} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\,\frac{2}{b\cdot r}}$$

donde $s^2 = SSE/(ab-1)(r-1)$ es el cuadrado medio del error y el valor $t_{\alpha/2}$ se basa en $(ab-1)(r-1)$ grados de libertad.

De igual modo, para los niveles j_1 y j_2 del factor B, el intervalo de confianza para la diferencia en la respuesta media tiene límites

$$\bar{y}_{\cdot j_1 \cdot} - \bar{y}_{\cdot j_2 \cdot} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{s^2 \frac{2}{a \cdot r}}$$

EJEMPLO

Uso de intervalos de confianza para comparar medias a diferentes niveles del factor

Ilustre el cálculo de los intervalos de confianza para la diferencia en respuesta media; para ello, utilice las medias y s^2 del ejemplo anterior.

Solución A partir de la tabla del análisis de varianza, $s^2 = 0.25$ es el cuadrado medio del error con base en 10 grados de libertad. Para dichos grados de libertad, se tiene $t_{0.025} = 2.228$. Por lo tanto, los intervalos de confianza para las diferencias en media debidas a los niveles $a = 3$ de ancho de horno, factor A, son

$$\bar{y}_{1\cdot\cdot} - \bar{y}_{2\cdot\cdot} \pm t_{0.025} \sqrt{s^2 \frac{2}{b \cdot r}} = 2.69 - 6.35 \pm 2.228 \sqrt{0.25 \frac{2}{2 \cdot 3}}$$

$$\text{o bien, } -4.30 \quad \text{a} \quad -3.02$$

$$\bar{y}_{1\cdot\cdot} - \bar{y}_{3\cdot\cdot} \pm t_{0.025} \sqrt{s^2 \frac{2}{b \cdot r}} = 2.69 - 9.07 \pm 2.228 \sqrt{0.25 \frac{2}{2 \cdot 3}}$$

$$\text{o bien, } -7.02 \quad \text{a} \quad -5.74$$

$$\bar{y}_{2\cdot\cdot} - \bar{y}_{3\cdot\cdot} \pm t_{0.025} \sqrt{s^2 \frac{2}{b \cdot r}} = 6.35 - 9.07 \pm 2.228 \sqrt{0.25 \frac{2}{2 \cdot 3}}$$

$$\text{o bien, } -3.35 \quad \text{a} \quad -2.08$$

Puesto que la interacción es significativa, no es posible interpretar tales intervalos en diferencias de tiempos medios de elaboración de coque, como debidos exclusivamente al cambio en el ancho de horno.

De igual modo, el intervalo de confianza para la diferencia individual en media, debida a las $b = 2$ temperaturas de ducto de escape, es

$$\bar{y}_{\cdot 1 \cdot} - \bar{y}_{\cdot 2 \cdot} \pm t_{0.025} \sqrt{s^2 \frac{2}{a \cdot r}}$$

$$7.01 - 5.05 \pm 2.228 \sqrt{0.25 \frac{2}{3 \cdot 3}}$$

$$\text{o bien, } 1.43 \quad \text{a} \quad 2.49 \text{ horas}$$

■

13.2 Experimentos multifactoriales

Diversas investigaciones y experimentaciones industriales se realizan para determinar los efectos individuales y conjuntos de diversos factores sobre las variables que son más relevantes a los fenómenos en investigación. Los diseños experimentales usados con más frecuencia son del tipo de bloques al azar sencillos o de clasificación bidireccional; no obstante, la característica distintiva de la mayoría de ellos es el ordenamiento factorial de los tratamientos, o condiciones experimentales. Como se observó en la sección anterior, r conjuntos de datos que pertenecen a $a \cdot b$ condiciones experimentales pueden analizarse como un experimento factorial, con r repeticiones, si las condiciones experimentales representan todas las combinaciones posibles de los niveles de dos o más factores A y B. En esta sección se extenderá la discusión a experimentos factoriales que incluyen más de 2 factores, esto es, a experimentos donde las condiciones experimentales representan todas las combinaciones posibles de los niveles de 3 o más factores.

Para ilustrar el análisis de un **experimento multifactorial**, considere la siguiente situación. Un baño caliente de decapado sulfúrico se usa para remover los óxidos de la superficie de un metal antes del chapado, porque se quiere determinar qué factores adicionales a la concentración de ácido sulfúrico afectarían la conductividad eléctrica del baño. Como se considera que la concentración de sal y la temperatura del baño también afectarían la conductividad eléctrica, se planea un experimento para determinar los efectos individual y conjunto de las tres variables sobre la conductividad eléctrica del baño. Con la finalidad de cubrir los rangos de concentraciones y temperaturas que se encuentran generalmente, se decide utilizar los siguientes niveles de los 3 factores:

Factor	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
A. Concentración de ácido (%)	0	6	12	18
B. Concentración de sal (%)	0	10	20	
C. Temperatura del baño (ºF)	80	100		

El experimento factorial resultante requiere $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ condiciones experimentales en cada repetición, donde cada condición experimental es un baño de decapado constituido de acuerdo con las especificaciones. El orden en el que dichos baños de decapado se constituyen debería ser aleatorio. Suponga que realmente se completan 2 repeticiones del experimento (esto es, se midieron las conductividades eléctricas de los diversos baños de decapado) y que los resultados son los que se indican en la siguiente tabla:

Resultados de experimento de baño ácido

Nivel del factor			Conductividad (mhos/cm^2)		
A	*B*	*C*	Rep. 1	Rep. 2	Total
1	1	1	0.99	0.93	1.92
1	1	2	1.15	0.99	2.14
1	2	1	0.97	0.91	1.88
1	2	2	0.87	0.86	1.73
1	3	1	0.95	0.86	1.81
1	3	2	0.91	0.85	1.76
2	1	1	1.00	1.17	2.17
2	1	2	1.12	1.13	2.25
2	2	1	0.99	1.04	2.03
2	2	2	0.96	0.98	1.94
2	3	1	0.97	0.95	1.92
2	3	2	0.94	0.99	1.93
3	1	1	1.24	1.22	2.46
3	1	2	1.12	1.15	2.27
3	2	1	1.15	0.95	2.10
3	2	2	1.11	0.95	2.06
3	3	1	1.03	1.01	2.04
3	3	2	1.12	0.96	2.08
4	1	1	1.24	1.20	2.44
4	1	2	1.32	1.24	2.56
4	2	1	1.14	1.10	2.24
4	2	2	1.20	1.19	2.39
4	3	1	1.02	1.01	2.03
4	3	2	1.02	1.00	2.02
		Total	25.53	24.64	50.17

El modelo que se supondrá para el análisis de este experimento (o para cualquier experimento trifactorial similar) es una extensión inmediata del utilizado en la sección 13.1. Si y_{ijkl} es la medición de conductividad, obtenida en el i-ésimo nivel de concentración ácida, el j-ésimo nivel de concentración de sal, el k-ésimo nivel de temperatura del baño, en la l-ésima repetición, se escribe

Ecuación del modelo para un experimento trifactorial

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \varepsilon_{ijkl}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$, $k = 1, 2, \ldots, c$ y $l = 1, 2, \ldots, r$. También se supone que las sumas de los **efectos principales** (α, β y γ), así como la suma de los efectos de duplicación, son iguales a cero, que las sumas de los **efectos de interacción bidireccionales** sumados en cualquier subíndice son iguales a cero para cualquier valor del otro subíndice y que la suma de los **efectos de interacción tridireccionales**, sumados sobre cualquiera de los subíndices, es cero para cualesquiera de los valores de los otros dos subíndices. Como antes, se supone que los ε_{ijkl} son variables aleatorias normales independientes que tienen media cero y la varianza común σ^2.

El análisis de los datos comienza al tratar el experimento como una clasificación bidireccional con $a \cdot b \cdot c$ tratamientos y r repeticiones (bloques). Al usar las fórmulas rápidas de la página 372, se obtiene

$$C = \frac{(50.17)^2}{48} = 52.4381$$

$$SST = (0.99)^2 + (1.15)^2 + \cdots + (1.00)^2 - 52.4381 = 0.6624$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}\left[(1.92)^2 + (2.14)^2 + \cdots + (2.02)^2\right] - 52.4381 = 0.5712$$

$$SSR = \frac{1}{24}\left[(25.53)^2 + (24.64)^2\right] - 52.4381 = 0.0165$$

$$SSE = 0.6624 - 0.5712 - 0.0165 = 0.0747$$

Los grados de libertad para dichas sumas de cuadrados son, respectivamente, 47, 23, 1 y 23.

A continuación se querrá subdividir la suma de cuadrados de tratamientos en las tres **sumas de cuadrados del efecto principal**, SSA, SSB y SSC; las tres **sumas de cuadrados de la interacción bidireccional**, $SS(AB)$, $SS(AC)$ y $SS(BC)$, y la **suma de cuadrados de la interacción tridireccional**, $SS(ABC)$. Para facilitar el cálculo de dichas sumas de cuadrados, primero construya las siguientes tres tablas similares a la de la página 395:

		B 1	B 2	B 3	
A	1	4.06	3.61	3.57	11.24
	2	4.42	3.97	3.85	12.24
	3	4.73	4.16	4.12	13.01
	4	5.00	4.63	4.05	13.68
		18.21	16.37	15.59	50.17

		C 1	C 2	
A	1	5.61	5.63	11.24
	2	6.12	6.12	12.24
	3	6.60	6.41	13.01
	4	6.71	6.97	13.68
		25.04	25.13	50.17

		B 1	B 2	B 3	
C	1	8.99	8.25	7.80	25.04
	2	9.22	8.12	7.79	25.13
		18.21	16.37	15.59	50.17

Las entradas de dichas tablas son los totales de todas las mediciones obtenidas en los respectivos niveles de las dos variables. Advierta la característica de autoverificación de dichas tablas; los mismos totales marginales aparecen varias veces, lo cual, por lo tanto, brinda una comprobación rápida y efectiva de los cálculos.

Para calcular *SSA, SSB* y *SS*(*AB*), se hará referencia a la primera de las tablas anteriores y a una identidad análoga a la de la página 396. De hecho, los cálculos son paralelos a aquellos que se utilizan para calcular *SSA, SSB* y *SS*(*AB*) en el experimento de dos factores. Para tomar el lugar de la suma de cuadrados de tratamientos, se calcula primero

$$rc \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{ij\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet})^2 = \frac{1}{r \cdot c} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} T_{ij\bullet\bullet}^2 - C$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4.06)^2 + (4.42)^2 + \cdots + (4.05)^2\right] - 52.4381 = 0.5301$$

y luego se obtiene

$$SSA = \frac{1}{bcr} \sum_{i=1}^{a} T_{i\bullet\bullet\bullet}^2 - C$$

$$= \frac{1}{12}\left[(11.24)^2 + \cdots + (3.68)^2\right] - 52.4381$$

$$= 0.2750$$

$$SSB = \frac{1}{acr} \sum_{j=1}^{b} T_{\bullet j\bullet}^2 - C$$

$$= \frac{1}{16}\left[(18.21)^2 + (16.37)^2 + (15.59)^2\right] - 52.4381$$

$$= 0.2262$$

y

$$SS(AB) = 0.5301 - 0.2750 - 0.2262$$
$$= 0.0289$$

Al efectuar los mismos cálculos para la segunda de las tablas de la página 400, se obtiene, de igual modo,

$$SSC = 0.0002 \quad \text{y} \quad SS(AC) = 0.0085$$

de donde el análisis de la tercera tabla da como resultado

$$SS(BC) = 0.0042$$

Para la suma de cuadrados de la interacción tridireccional, finalmente se obtiene, mediante sustracción,

$$SS(ABC) = SS(Tr) - SSA - SSB - SSC$$
$$- SS(AB) - SS(AC) - SS(BC)$$
$$= 0.5712 - 0.2750 - 0.2262 - 0.0002$$
$$- 0.0289 - 0.0085 - 0.0042$$
$$= 0.0282$$

Observe que los grados de libertad para cada efecto principal son uno menos que el número de niveles del factor correspondiente. Los grados de libertad para cada interacción son el *producto* de los grados de libertad por los factores que aparecen en la interacción. Por consiguiente, los grados de libertad para los tres efectos principales son 3, 2 y 1 en este ejemplo, en tanto que los grados de libertad para las interacciones bidireccionales son 6, 3 y 2, mientras los grados de libertad para la interacción tridireccional son 6.

La siguiente tabla muestra el análisis de varianza completo para el experimento del baño ácido:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Repeticiones	1	0.0165	0.0165	5.16
Efectos principales:				
A	3	0.2750	0.0917	28.66
B	2	0.2262	0.1131	35.34
C	1	0.0002	0.0002	< 1
Interacciones bifactoriales:				
AB	6	0.0289	0.0048	1.50
AC	3	0.0085	0.0028	< 1
BC	2	0.0042	0.0021	< 1
Interacción trifactorial:				
ABC	6	0.0282	0.0047	1.47
Error	23	0.0747	0.0032	
Total	47	0.6624		

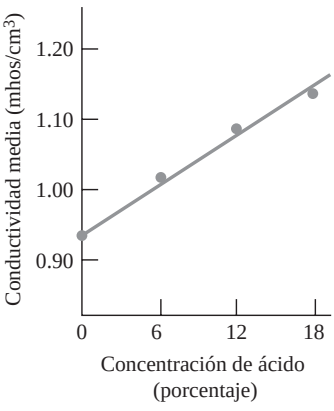


Figura 13.4
Efecto de concentración de ácido

Al obtener los valores adecuados de $F_{0.05}$ y $F_{0.01}$, de la tabla 6, se encuentra que la prueba para repeticiones es significativa con un nivel de 0.05 (quizá las dos repeticiones se efectuaron en condiciones atmosféricas diferentes o el termómetro usado para medir las temperaturas del baño no estaba calibrado, etcétera), las pruebas para los efectos principales de los factores A y B son significativas con un nivel de 0.01 y ninguna de las otras F es significativa en cualquier nivel. A partir de este análisis, se concluye que la variación en concentración de ácido y concentración de sal afectan la conductividad eléctrica, que las variaciones en la temperatura del baño no lo hacen y que no hay interacciones. Para ir un paso más adelante, se pueden investigar las *magnitudes* de los efectos al estudiar gráficas de medias como aquellas que se muestran en las figuras 13.4 y 13.5. Aquí se determina que la conductividad aumenta conforme se agrega ácido y disminuye al agregar sal; al emplear

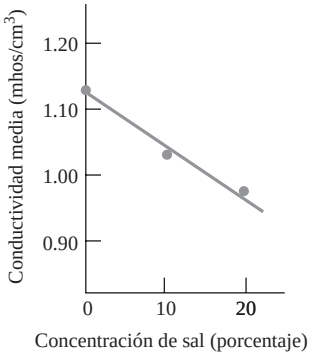


Figura 13.5
Efecto de concentración de sal

los métodos del capítulo 11, incluso se ajustarían líneas, curvas o superficies para describir la superficie de respuesta que relaciona la conductividad con las variables en consideración.

EJEMPLO

Cómo realizar un análisis de varianza para mejorar la seguridad de un arrancador

Un cliente solicitó mejoras en la seguridad de un arrancador. Experimentos diseñados estadísticamente, realizados en la fase de desarrollo, ayudan a brindar calidad en este producto. Se decidió estudiar 3 iniciadores (A), 2 cargas de propulsión (B) y 4 cargas principales (C). Una respuesta medida fue el tiempo de demora (milisegundos). Por cuestiones de seguridad, este debería permanecer por abajo de 30. Se realizan 2 repeticiones del diseño factorial.

			Tiempo de demora (milisegundos)	
A	*B*	*C*	Rep. 1	Rep. 2
Iniciador 1	Polvo	Mc 1	10.70	9.82
Iniciador 1	Pastilla	Mc 1	10.02	13.66
Iniciador 1	Polvo	Mc 2	14.46	20.86
Iniciador 1	Pastilla	Mc 2	11.44	13.76
Iniciador 1	Polvo	Mc 3	15.04	16.02
Iniciador 1	Pastilla	Mc 3	27.26	21.42
Iniciador 1	Polvo	Mc 4	20.82	14.46
Iniciador 1	Pastilla	Mc 4	24.56	36.48
Iniciador 2	Polvo	Mc 1	18.42	18.62
Iniciador 2	Pastilla	Mc 1	22.80	25.14
Iniciador 2	Polvo	Mc 2	33.40	20.62
Iniciador 2	Pastilla	Mc 2	31.86	19.78
Iniciador 2	Polvo	Mc 3	22.94	31.12
Iniciador 2	Pastilla	Mc 3	32.92	21.38
Iniciador 2	Polvo	Mc 4	27.92	59.86
Iniciador 2	Pastilla	Mc 4	31.94	28.32
Iniciador 3	Polvo	Mc 1	7.14	7.98
Iniciador 3	Pastilla	Mc 1	24.32	10.26
Iniciador 3	Polvo	Mc 2	8.30	7.86
Iniciador 3	Pastilla	Mc 2	7.00	8.40
Iniciador 3	Polvo	Mc 3	8.40	10.94
Iniciador 3	Pastilla	Mc 3	17.82	15.28
Iniciador 3	Polvo	Mc 4	9.56	19.04
Iniciador 3	Pastilla	Mc 4	19.98	18.46

Analice este experimento.

Solución Analice este experimento sin incluir un término de duplicación en el modelo. Un programa de software produjo la tabla ANOVA de la página siguiente.

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
A	2	1973.18	986.59	22.22	0.000
B	1	74.90	74.90	1.69	0.206
C	3	864.39	288.13	6.49	0.002
AB	2	141.83	70.91	1.60	0.223
AC	6	200.97	33.50	0.75	0.612
BC	3	122.14	40.71	0.92	0.448
ABC	6	319.57	53.26	1.20	0.340
ERROR	24	1065.86	44.41		
TOTAL	47	4762.84	101.34		

Tan solo los iniciadores y las cargas principales son significativos. Son significativos incluso con $\alpha = 0.01$. Por lo tanto, el experimento puede resumirse con los dos conjuntos de medias muestrales, el de los iniciadores y el de las cargas principales (Mc):

iniciador 1	$\overline{y}_{1\cdots} = 17.55$	Mc 1	$\overline{y}_{\cdot\cdot 1\cdot} = 14.91$
iniciador 2	$\overline{y}_{2\cdots} = 27.94$	Mc 2	$\overline{y}_{\cdot\cdot 2\cdot} = 16.48$
iniciador 3	$\overline{y}_{3\cdots} = 12.55$	Mc 3	$\overline{y}_{\cdot\cdot 3\cdot} = 20.05$
		Mc 4	$\overline{y}_{\cdot\cdot 4\cdot} = 25.95$

De acuerdo con el modelo estimado, donde los efectos de iniciador y de carga principal son aditivos,

$$\hat{y}_{i\cdot k\cdot} = \overline{y}_{\cdots\cdot} + (\overline{y}_{i\cdots} - \overline{y}_{\cdots\cdot}) + (\overline{y}_{\cdot\cdot k\cdot} - \overline{y}_{\cdots\cdot})$$

el menor tiempo de demora estimado proviene de usar el iniciador 3 con carga principal 1 (Mc 1). Este experimento tuvo éxito al identificar mejores componentes para el arrancador.

La desviación estándar de los tiempos de demora se estima mediante s, que es la raíz cuadrada del cuadrado medio del error. Puesto que $s = 6.66$ milisegundos, hay una variación considerable en los tiempos de demora individuales. Los intervalos de confianza para la diferencia en tiempos de demora medios para dos iniciadores son

$$\overline{y}_{i\cdots} - \overline{y}_{m\cdots} \pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{2\cdot 4}} = \overline{y}_{i\cdots} - \overline{y}_{m\cdots} \pm 2.064\sqrt{\frac{44.41}{8}}$$

o bien, $\overline{y}_{i\cdots} - \overline{y}_{m\cdots} \pm 4.86$, de modo que diferencias de 4.86 son significativas. Las tres medias de iniciador son diferentes. Los intervalos de confianza para cargas principales

$$\overline{y}_{\cdot\cdot k\cdot} - \overline{y}_{\cdot\cdot m\cdot} \pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{3\cdot 2}}$$

conducen a que diferencias de 5.62 sean significativas. En consecuencia, dichos datos no establecen diferencia alguna entre las primeras tres cargas Mc 1, Mc 2 y Mc 3. ■

El procedimiento de cálculo general para un experimento multifactorial es similar al método ilustrado aquí para $4 \times 3 \times 2$ experimentos factoriales. Primero se analizan los datos como una clasificación bidireccional (o cualquier otro diseño que se utilice), luego se analiza la suma de cuadrados del tratamiento en los componentes atribuidos a los efectos principales y las interacciones diversas.

Se recomienda especialmente que use un software estadístico estándar para realizar el análisis estadístico de cualquier experimento multifactorial y producir varias gráficas de los residuos.

Ejercicios

13.1 Para determinar las condiciones óptimas para baño de chapado, los efectos de la concentración de sulfona y la temperatura del baño sobre la reflectividad del metal chapado se estudiaron en un experimento factorial 2 × 5. Los resultados de tres repeticiones son los siguientes:

Concentración (gramos/litro)	Temperatura (° F)	Reflectividad		
		Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
5	75	35	39	36
5	100	31	37	36
5	125	30	31	33
5	150	28	20	23
5	175	19	18	22
10	75	38	46	41
10	100	36	44	39
10	125	39	32	38
10	150	35	47	40
10	175	30	38	31

Analice dichos resultados y determine la condición o las condiciones del baño que producen la mayor reflectividad. Construya también un intervalo de confianza del 95% para la reflectividad del baño de chapado correspondiente a tales condiciones óptimas.

13.2 Un ingrediente retardador de descomposición se agrega al elaborar cerveza. Para determinar la medida en que el sabor de la cerveza se ve afectado por la cantidad de este ingrediente agregado a cada lote, y cómo cambia dicho sabor puede depender de la edad de la cerveza, se diseñó un experimento factorial 3 × 4 con dos repeticiones. El sabor de la cerveza se clasificó en una escala de 0, 1, 2 o 3 (siendo 3 el más deseable) por un panel de expertos capacitados, quienes informaron las siguientes puntuaciones medias:

Cantidad de ingrediente (gramos por lote)	Periodo de añejamiento (semanas)	Puntuación media	
		Rep. 1	Rep. 2
2	2	2.1	1.6
2	4	2.6	1.9
2	6	2.9	2.4
3	2	1.4	1.7
3	4	1.9	2.2
3	6	2.3	2.7
4	2	0.5	0.9
4	4	1.2	0.8
4	6	1.7	1.4
5	2	1.0	1.6
5	4	2.2	1.3
5	6	2.3	2.1

a) Analice los datos, primero como una clasificación bidireccional con 12 tratamientos y dos bloques (repeticiones).

b) Calcule las sumas de cuadrados correspondientes a los efectos principales y la interacción, luego presente los resultados en una tabla de análisis de varianza.

c) Interprete los resultados del experimento.

13.3 Suponga que, en el experimento descrito en la página 375, también se quiere determinar si existe una interacción entre los detergentes y los motores; esto es, si un detergente podría desempeñarse mejor en el motor 1, otro podría desempeñarse mejor en el motor 2 y

así sucesivamente. Al combinar los datos de la página 375 con la siguiente repetición del experimento, pruebe una interacción significativa y examine los resultados.

	Motor 1	*Motor 2*	*Motor 3*
Detergente A	39	42	58
Detergente B	44	46	48
Detergente C	34	47	45
Detergente D	47	45	57

13.4 Dadas las dos repeticiones de un experimento factorial 2×3, calcule la tabla del análisis de varianza usando las fórmulas de las páginas 393 y 394 en vez de las fórmulas rápidas del ejemplo.

Factor A	Factor B	Rep. 1	Rep. 2
1	1	15	21
1	2	1	3
1	3	10	8
2	1	1	1
2	2	16	14
2	3	5	13

13.5 Se diseña un experimento para estudiar los efectos del índice (tasa) de flujo de fusión y el contenido de relleno (% de peso) sobre la resistencia de la resina como medida del módulo secante.

Índice de flujo de fusión	Contenido de relleno	Rep. 1	Rep. 2
3	32	1.95	2.14
3	37	2.36	2.28
3	42	2.61	2.56
12	32	2.32	2.31
12	37	2.33	2.28
12	42	2.60	2.53
30	32	2.29	2.36
30	37	2.61	2.50
30	42	2.68	2.52

Analice este experimento.

13.6 El valor comercial de las especies de madera blanda aumentaría si la madera pudiera tratarse para satisfacer estándares de conservación. La respuesta, y, es la cantidad de retención (lb/ft^3) del preservador. Se consideraron dos tratamientos (preservadores) y las muestras o tenían o no incisión. Más aún, las condiciones de los abetos eran no defoliado, parcialmente defoliado o totalmente defoliado.

		Repetición 1		*Repetición 2*	
		Tratamiento 1	*Tratamiento 2*	*Tratamiento 1*	*Tratamiento 2*
No defoliado	*Con incisión*	1.28	1.22	0.77	1.09
		1.28	1.22	1.22	1.17

		Repetición 1		*Repetición 2*	
		Tratamiento 1	*Tratamiento 2*	*Tratamiento 1*	*Tratamiento 2*
Parcialmente defoliado	*Sin incisión*	0.63	0.78	0.64	0.74
		0.39	0.49	0.39	0.53

		Repetición 1		*Repetición 2*	
		Tratamiento 1	*Tratamiento 2*	*Tratamiento 1*	*Tratamiento 2*
Totalmente defoliado	*Con incisión*	0.65	1.09	0.38	0.63
	Sin incisión	0.40	0.82	0.40	0.60

Realice un análisis de varianza adecuado e interprete los resultados.

13.7 Para estudiar los efectos de la ubicación de lingote (*A*), posición de losa (*B*), preparación de muestra (*C*) y temperatura de giro (*D*) sobre el número de vueltas requeridas, para romper una muestra de acero mediante giro, se registraron las siguientes observaciones:

				Núm. de vueltas	
A	*B*	*C*	*D*	Rep. 1	Rep. 2
Sup.	1	Volteado	2,100°F	24	22
Sup.	1	Volteado	2,200	25	28
Sup.	1	Volteado	2,300	41	39
Sup.	1	Molido	2,100	18	18
Sup.	1	Molido	2,200	33	27
Sup.	1	Molido	2,300	35	41
Sup.	2	Volteado	2,100	22	19
Sup.	2	Volteado	2,200	26	31
Sup.	2	Volteado	2,300	37	43
Sup.	2	Molido	2,100	23	7
Sup.	2	Molido	2,200	30	26
Sup.	2	Molido	2,300	34	30
Med.	1	Volteado	2,100	26	19
Med.	1	Volteado	2,200	30	31
Med.	1	Volteado	2,300	39	42
Med.	1	Molido	2,100	19	19
Med.	1	Molido	2,200	31	31
Med.	1	Molido	2,300	26	35
Med.	2	Volteado	2,100	30	26
Med.	2	Volteado	2,200	31	34
Med.	2	Volteado	2,300	39	42
Med.	2	Molido	2,100	22	20
Med.	2	Molido	2,200	32	26
Med.	2	Molido	2,300	38	22
Inf.	1	Volteado	2,100	18	21
Inf.	1	Volteado	2,200	35	32
Inf.	1	Volteado	2,300	34	37
Inf.	1	Molido	2,100	21	19
Inf.	1	Molido	2,200	20	29
Inf.	1	Molido	2,300	44	31
Inf.	2	Volteado	2,100	23	22
Inf.	2	Volteado	2,200	31	26
Inf.	2	Volteado	2,300	38	41
Inf.	2	Molido	2,100	18	19
Inf.	2	Molido	2,200	31	24
Inf.	2	Molido	2,300	35	41

Analice este experimento.

13.8 Se realiza una prueba de mercado para evaluar posición de anaquel, color de etiqueta y tamaño de empaque de un producto alimenticio enlatado, con los resultados de la página siguiente.

Posición de anaquel	Color de etiqueta	Tamaño de empaque (oz.)	Ventas (dólares)		
			Día 1	Día 2	Día 3
Baja	Rojo	10	70.10	68.00	69.50
Baja	Rojo	12	72.25	71.90	74.70
Baja	Rojo	16	78.05	74.85	82.60
Baja	Rojo	24	61.50	62.10	59.15
Baja	Verde	10	65.75	62.35	68.60
Baja	Verde	12	69.45	71.05	75.45
Baja	Verde	16	75.15	70.70	71.25
Baja	Verde	24	64.80	60.85	59.90
Media	Rojo	10	94.10	90.20	88.05
Media	Rojo	12	104.85	99.55	96.80
Media	Rojo	16	109.10	105.80	112.60
Media	Rojo	24	59.90	62.50	54.75
Media	Verde	10	88.95	91.10	90.15
Media	Verde	12	100.60	94.05	101.35
Media	Verde	16	98.70	99.90	96.75
Media	Verde	24	62.50	53.85	59.40
Alta	Rojo	10	92.60	88.80	85.50
Alta	Rojo	12	100.55	102.15	99.10
Alta	Rojo	16	111.95	108.25	109.45
Alta	Rojo	24	61.40	65.20	59.70
Alta	Verde	10	97.35	98.70	92.60
Alta	Verde	12	120.65	115.45	108.65
Alta	Verde	16	118.10	116.35	121.90
Alta	Verde	24	70.30	65.05	71.40

Analice este experimento.

13.9 Resuelva las 4 ecuaciones de la página 392 para μ, α_1, β_1 y $(\alpha\beta)_{11}$ en términos de las medias poblacionales μ_{ijl} correspondientes a las 4 condiciones experimentales de la primera repetición. Observe que dichas ecuaciones sirven como guía para estimar los parámetros en términos de las medias muestrales correspondientes a las diversas condiciones experimentales.

13.10 El cálculo por computadora de la tabla de análisis de varianza dado en la página 394 se ilustra usando *MINITAB*. Los 3 niveles de *A* se codifican como 1, 2 y 3, mientras los 2 niveles de *B* se codifican como 1 y 2. Note que la última columna contiene el número de la repetición.

3.5	1	1	1
3.0	1	1	2
2.7	1	1	3
2.2	1	2	1
...			

Cuadro de diálogo:
Stat > ANOVA > Balanced ANOVA
Escriba *Y* en **Responses**. En **Model** escriba *A B A* $*$ *B REPS*. Haga click en **OK**.

```
Analysis of Variance for Y

Source      DF        SS        MS         F        P
A            2   123.143    61.572    249.95    0.000
B            1    17.209    17.209     69.86    0.000
A*B          2     5.701     2.851     11.57    0.003
REPS         2     0.863     0.432      1.75    0.223
Error       10     2.463     0.246
Total       17   149.380
```

Repita el ejercicio 13.5 usando la computadora.

13.3 Experimentos factoriales 2^n

Los experimentos factoriales ofrecen una poderosa herramienta para entender fenómenos físicos complejos. Su ingrediente principal es la variación sistemática simultánea de todas las variables de entrada. Para saber cuán importante es cambiar más de una variable a la vez, suponga que dos variables de entrada, x_1 y x_2, varían con la intención de ubicar la respuesta máxima. En la situación que se ilustra en la figura 13.6, mover (x_1, x_2) hacia la esquina superior derecha aumentará la respuesta de 6 a 10, incluso más alto. Sin embargo, si el experimentador fija x_1 en 1.6 y varía x_2, observará como ocurre un máximo en $x_2 = 1.7$. Si x_2 está fija en 1.7 y x_1 varía, entonces parecerá como si se confirmara un máximo; esto es, el método clásico de modificar una variable a la vez conduciría a una ubicación falsa de respuesta máxima. Los diseños factoriales son bastante adecuados para estudiar la influencia de varios factores sobre una respuesta.

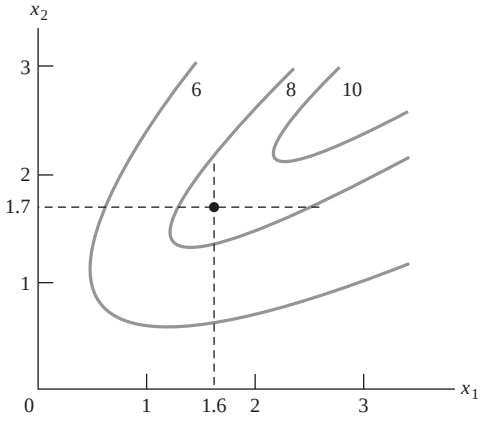


Figura 13.6
Ubicación falsa de una respuesta máxima

Hay varias razones por las que los experimentos factoriales a menudo se realizan con cada factor tomado solo en dos niveles. Principalmente, el número de condiciones experimentales en un experimento factorial aumenta de manera multiplicativa con el número de niveles de cada factor; por lo tanto, si muchos factores se investigan a la vez, sería económicamente imposible incluir más de dos niveles de cada factor. Si hay 3 factores, cada uno con dos niveles, existen $2 \times 2 \times 2$ o 2^3 condiciones posibles diferentes. Si se operan todas las condiciones, el experimento se conoce como diseño 2^3 y a aquel con n factores se le llama diseño 2^n. Otra causa importante para tratar por separado los **experimentos factoriales 2^n** es que el análisis se simplifica. Más aún, para $n = 2$ o 3, gráficos de fácil comprensión pueden ayudar a comunicar las características principales de los datos. Otras ventajas, como la facilidad de confundir interacciones de orden superior y la notación especial usada junto con los experimentos factoriales 2^n que requieren duplicación fraccionaria, se estudiarán en secciones posteriores.

Antes de introducir parte de la notación especial utilizada en los experimentos factoriales 2^n, se indicará que tales experimentos tienen ciertos inconvenientes. Como cada factor se mide solo en dos niveles, sería imposible juzgar si los efectos producidos por las variaciones en un factor son lineales o, acaso, parabólicos o exponenciales. Por esta razón, los experimentos factoriales 2^n se manejan con frecuencia en experimentos de tamizado, seguidos por experimentos que implican menos factores (por lo común aquellos que se encuentran son significativos individual o conjuntamente en el experimento de tamizado), tomados en más de dos niveles.

En el análisis de un experimento factorial 2^n, es conveniente denotar los dos niveles de cada factor con 0 y 1 (en vez de 1 y 2). Por lo tanto, los modelos usados para el análisis de este tipo de experimento difieren de los de la sección 13.2 tan solo en cuanto a que ahora se tiene $i = 0, 1$ en vez de $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 0, 1$ en vez de $j = 1, 2, \ldots, b$, y así sucesivamente. Por ejemplo, para un experimento factorial 2^3, el modelo de la

Ecuación del modelo para un experimento factorial 2^3

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \varepsilon_{ijkl}$$

página 400 se convierte en para $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$ y $l = 1, 2, \ldots, r$. Las ε_{ijkl} se definen como antes y los parámetros ahora están sometidos a las restricciones $\alpha_1 = -\alpha_0$, $\beta_1 = -\beta_0$, $\gamma_1 = -\gamma_0$, $(\alpha\beta)_{10} = (\alpha\beta)_{01} = -(\alpha\beta)_{00} = -(\alpha\beta)_{11}$, con restricciones similares sobre $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ y $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$. Además,

$$\sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0$$

Advierta que, además de los parámetros para repeticiones, tan solo es necesario *un parámetro de cada tipo*: es decir, además de los parámetros para repeticiones, es posible expresar todo el modelo en términos de los parámetros μ, α_0, β_0, γ_0, $(\alpha\beta)_{00}$, $(\alpha\gamma)_{00}$, $(\beta\gamma)_{00}$ y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

Un experimento factorial 2^n requiere 2^n condiciones experimentales. Ya que su número puede ser bastante grande, será conveniente representar las condiciones experimentales mediante una notación especial y mencionarlas en el llamado orden estándar. La notación consiste en representar cada condición experimental mediante el producto de letras minúsculas que correspondan a los factores que se toman en el nivel 1, llamado "nivel superior". Si falta una letra minúscula que corresponde a un factor, ello significa que el factor se toma en el nivel 0, llamado "nivel inferior". Por ende, en un experimento trifactorial, *ac* representa la condición experimental donde los factores *A* y *C* se toman en el nivel superior y el factor *B* se toma en el nivel inferior, *c* representa la condición experimental donde el factor *C* se toma en el nivel superior, mientras los factores *A* y *B* se toman en el nivel inferior, y así sucesivamente. El símbolo "1" sirve para denotar la condición experimental donde todos los factores se toman en el nivel inferior.

Aunque las condiciones experimentales se aplican en un orden aleatorio durante el experimento mismo, con el propósito de analizar los resultados es conveniente ordenarlos en un llamado **orden estándar**. Para $n = 2$, este orden es 1, *a*, *b* y *a b*, en tanto que para $n = 3$ es el orden que se muestra en la siguiente tabla:

Condición Experimental	Nivel del Factor		
	A	*B*	*C*
1	0	0	0
a	1	0	0
b	0	1	0
ab	1	1	0
c	0	0	1
ac	1	0	1
bc	0	1	1
abc	1	1	1

Note que los símbolos para las 4 primeras condiciones experimentales son como las de un experimento de dos factores, así como que los segundos 4 se obtienen al multiplicar cada uno de los primeros 4 símbolos por *c*. De igual modo, el ordenamiento para $n = 4$ de la página 412 se obtiene al mencionar primero los 8 símbolos para un experimento trifactorial y repitiendo el conjunto con cada símbolo multiplicado por *d*.

A lo largo de este y del capítulo anterior, al total de todas las observaciones correspondientes a una condición experimental dada se le refirió como total de tratamientos, mientras dichos totales se representaron mediante símbolos como $T_{i\cdot}$ $T_{ij\cdot\cdot}$, etcétera. Al introducir una notación especial para las condiciones experimentales en un experimento factorial 2^n, se extiende esta notación al hacer que $(1), (a), (b), (ab), (c), \ldots$, sean los totales de La-

tratamientos correspondientes a las condiciones experimentales $1, a, b, ab, c, \ldots$. Por lo tanto, en un experimento trifactorial,

$$(1) = \sum_{l=1}^{r} y_{000l} \quad (a) = \sum_{l=1}^{r} y_{100l}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(bc) = \sum_{l=1}^{r} y_{011l} \quad (abc) = \sum_{l=1}^{r} y_{111l}$$

La simplificación en el análisis consiste en el hecho de que las estimaciones de los diversos efectos principales e interacciones, así como la suma de cuadrados correspondiente, pueden expresarse en términos de combinaciones lineales de los totales de tratamientos. Para ilustrar lo que esto significa, considere la cantidad

$$-(1) + (a) - (b) + (ab) - (c) + (ac) - (bc) + (abc)$$

que es una combinación lineal, con coeficientes +1 y −1, de los totales de tratamiento correspondiente a las 8 condiciones experimentales. Con respecto al modelo de la ecuación de la página 410, y usando las relaciones entre los parámetros (pero dejando todos los detalles al lector en los ejercicios 13.15, 13.16 y 13.17), puede demostrarse que

$$-(1) + (a) - (b) + (ab) - (c) + (ac) - (bc) + (abc) = -8r\,a_0 + \varepsilon_A$$

donde ε_A es una combinación lineal correspondiente de sumas de los ε_{ijkl}. El resultado de la página 153 muestra que ε_A es un valor de una variable aleatoria cuya distribución tiene media cero; de hecho, podría demostrarse que ε_A es un valor de una variable aleatoria que tiene una distribución normal con media cero y la varianza de $8r\sigma^2$. Con respecto a la combinación lineal anterior, como el **total del efecto** $[A]$ para el factor A, se determina que $-[A]/8r$ ofrece una estimación de α_0, el efecto principal para el factor A, por lo que puede demostrarse que $[A]^2/8r$ en realidad es igual a SSA, la suma de cuadrados para el efecto principal del factor A.

De igual modo, al analizar la combinación lineal

$$(1) + (a) - (b) - (ab) - (c) - (ac) + (bc) + (abc)$$

al lector se le pedirá demostrar, en el ejercicio 13.17, que es igual a $8r(\beta\gamma)_{00} + \varepsilon_{BC}$, donde ε_{BC} es una combinación lineal correspondiente de sumas de los ε_{ijkl}. Con respecto a esta combinación lineal de totales del tratamiento, como el total del efecto $[BC]$ para la interacción bidireccional de los factores B y C, se determina que $[BC]/8r$ brinda una estimación de $(\beta\gamma)_{00}$, el efecto de la interacción BC, pero también se puede demostrar que $[BC]^2/8r$ es igual a $SS(BC)$, la suma de cuadrados para la interacción BC. Al proceder de esta forma, es posible presentar las combinaciones lineales de los totales de tratamientos que producen estimaciones de los otros diversos efectos principales y las interacciones, cuyos cuadrados, divididos entre $8r$, dan la suma de cuadrados correspondiente. Dichas combinaciones lineales, o totales del efecto, se obtienen fácilmente con el uso de la siguiente **tabla de signos**:

(1)	(a)	(b)	(ab)	(c)	(ac)	(bc)	(abc)	Totales de efecto
1	1	1	1	1	1	1	1	$[I]$
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	$[A]$
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	$[B]$
1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	$[AB]$
−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	$[C]$
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	$[AC]$
1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	$[BC]$
−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	$[ABC]$

Las entradas de esta tabla son los coeficientes de las combinaciones lineales de los totales de tratamientos para los diversos efectos principales y las interacciones. Como auxi-

liar para construir tablas similares para $n = 4$, $n = 5$ y así sucesivamente, advierta que, para cada efecto principal, hay un "+1" cuando el factor está en el nivel superior, y un "–1" cuando el factor está en el nivel inferior. Los signos para un efecto de interacción se obtienen al multiplicar los coeficientes correspondientes de todos los factores contenidos en la interacción. Por lo tanto, para [*AB*] se multiplica cada signo de [*A*] por el signo correspondiente de [*B*], de donde se obtiene

$$(-1)(-1) \quad (1)(-1) \quad (-1)(1) \quad (1)(1) \quad (-1)(-1) \quad (1)(-1) \quad (-1)(1) \quad (1)(1)$$

o

$$1 \qquad -1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad -1 \qquad -1 \qquad 1$$

Observe también que en la tabla anterior [*I*] representa el gran total de todas las observaciones, de modo que $[I]^2/8r$ produce el término de corrección para calcular *SST*, *SSE*, *SSR* y *SS*(*Tr*).

Aunque el método abreviado anterior se ilustró para obtener las diversas sumas de cuadrados del efecto principal y la interacción con respecto a un experimento factorial 2^3, la única diferencia en un experimento factorial 2^n con $n > 3$ es que se requiere una tabla de signos más extensa y que las sumas de cuadrados respectivas se obtienen al dividir los cuadrados de los totales del efecto entre $r \cdot 2^n$.

Para ilustrar esta técnica e introducir una mayor simplificación, considere el siguiente experimento factorial 2^4, diseñado para determinar los efectos de ciertas variables sobre la confiabilidad de un conmutador de paso giratorio multidireccional. Los factores estudiados fueron los siguientes:

Factor	Nivel inferior	Nivel superior
A. Lubricación	Seco	Lubricado
B. Protección del polvo	Sin protección	Encerrado en cubierta de polvo
C. Supresión de chispa	No	Sí
D. Corriente	0	0.5 Amps

Cada conmutador se operó de manera continua hasta que ocurrió un desperfecto, y se registró el número de horas de operación. Todo el experimento se realizó dos veces, con los siguientes resultados:

Condición experimental	Horas de operación		
	Rep. 1	Rep. 2	Total
1	828	797	1,625
a	997	948	1,945
b	735	776	1,511
ab	807	1,003	1,810
c	994	949	1,943
ac	1,069	1,094	2,163
bc	989	1,215	2,204
abc	889	1,010	1,899
d	593	813	1,406
ad	773	1,026	1,799
bd	740	922	1,662
abd	936	1,138	2,074
cd	748	970	1,718
acd	1,202	1,182	2,384
bcd	1,103	966	2,069
abcd	985	1,154	2,139
Total	14,388	15,963	30,351

Al analizar dichos datos primero como una clasificación bidireccional con 16 tratamientos y 2 repeticiones (bloques), se obtiene

$$C = \frac{(30{,}351)^2}{32} = 28{,}786{,}975$$

$$SST = (838)^2 + (977)^2 + \cdots + (1{,}154)^2 - 28{,}786{,}975$$
$$= 744{,}876$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}[(1{,}625)^2 + (1{,}945)^2 + \cdots + (2{,}139)^2] - 28{,}786{,}975$$
$$= 547{,}288$$

$$SSR = \frac{1}{16}[(14{,}388)^2 + (15{,}963)^2] - 28{,}786{,}975$$
$$= 77{,}520$$

$$SSE = 744{,}876 - 547{,}288 - 77{,}520 = 120{,}068$$

Con la finalidad de subdividir la suma de cuadrados de tratamientos en SSA, $SSB, \ldots,$ y $SS(ABCD)$, se podría construir una tabla de signos como la de la página 411, calcular los totales del efecto y, luego, dividir los cuadrados de los totales del efecto entre $r \cdot 2^n = 2 \cdot 2^4 = 32$. Para el efecto principal del factor A, se obtendría entonces

$$\begin{aligned}[A] = {} & -1{,}625 + 1{,}945 - 1{,}511 + 1{,}810 - 1{,}943 + 2{,}163 - 2{,}204 \\ & + 1{,}899 - 14{,}06 + 1{,}799 - 1{,}662 + 2{,}074 - 1{,}718 + 2{,}384 \\ & - 2{,}069 + 2{,}139 \\ = {} & 2{,}075\end{aligned}$$

y

$$SSA = \frac{(2{,}075)^2}{32} = 134{,}551$$

Dichos cálculos son bastante tediosos si se hacen en calculadoras de bolsillo, pero podrían simplificarse considerablemente al usar un atajo adicional llamado **método de Yates**. Este método para calcular los totales de efecto se ilustra en la tabla siguiente. Las condiciones experimentales y los correspondientes totales se citan en orden estándar. En la columna marcada (1), la mitad superior se obtiene al agregar pares sucesivos de totales de tratamientos, y la mitad inferior se obtiene al restar pares sucesivos. Por ende, en la columna (1) se obtiene

1,625	+	1,945	=	3,570
1,511	+	1,810	=	3,321
			⋮	
2,069	+	2,139	=	4,208
1,945	−	1,625	=	320
1,810	−	1,511	=	299
			⋮	
2,139	−	2,069	=	70

Condición experimental	*Total del tratamiento*	(1)	(2)	(3)	(4)	*Identificación*	*Suma de cuadrados*
1	1,625	3,570	6,891	15,100	30,351	[*I*]	28,786,975
a	1,945	3,321	8,209	15,251	2,075	[*A*]	134,551
b	1,511	4,106	6,941	534	385	[*B*]	4,632
ab	1,810	4,103	8,310	1,541	−1,123	[*AB*]	39,410
c	1,943	3,205	619	−252	2,687	[*C*]	225,624
ac	2,163	3,736	−85	637	−773	[*AC*]	18,673
bc	2,204	4,102	805	−546	−179	[*BC*]	1,001
abc	1,899	4,208	736	−577	−1,119	[*ABC*]	39,130
d	1,406	320	−249	1,318	151	[*D*]	713
ad	1,799	299	−3	1,369	1,007	[*AD*]	31,689
bd	1,662	220	531	−704	889	[*BD*]	24,698
abd	2,074	−305	106	−69	−31	[*ABD*]	30
cd	1,718	393	−21	246	51	[*CD*]	81
acd	2,384	412	−525	−425	635	[*ACD*]	12,601
bcd	2,069	666	19	−504	−671	[*BCD*]	14,070
abcd	2,139	70	−596	−615	−111	[*ABCD*]	385

Note que, en la mitad inferior de la columna (1), el primer total en cada par se resta del segundo. Después, la columna (2) se obtiene al realizar las operaciones idénticas sobre las entradas de la columna (1), y las columnas (3) y (4) se obtienen de la misma forma a partir de las entradas en las columnas (2) y (3), respectivamente. La columna (4), y en general la columna (n), proporciona los totales del efecto en orden estándar, como se indica. Cada suma de cuadrados se obtiene entonces, como antes, al elevar al cuadrado el total de efecto correspondiente y luego dividir el resultado entre $r \cdot 2^n = 2 \cdot 2^4 = 32$.

Al dividir las sumas de cuadrados entre sus grados de libertad para obtener los cuadrados medios, y al dividir los diversos cuadrados medios entre el cuadrado medio del error, se obtiene la siguiente tabla de análisis de varianza para el experimento factorial 2^4:

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	***F***
Repeticiones	1	77,520	77,520	9.68
Efectos principales:				
A	1	134,551	134,551	16.81
B	1	4,632	4,632	< 1
C	1	225,624	225,624	28.19
D	1	713	713	< 1
Interacciones bifactoriales:				
AB	1	39,410	39,410	4.92
AC	1	18,673	18,673	2.33
AD	1	31,689	31,689	3.96
BC	1	1,001	1,001	< 1
BD	1	24,698	24,698	3.09
CD	1	81	81	< 1

(continúa en la siguiente página)

(continúa de la página 414)

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F
Interacciones trifactoriales:				
ABC	1	39,130	39,130	4.89
ABD	1	30	30	< 1
ACD	1	12,601	12,601	1.57
BCD	1	14,070	14,070	1.76
Interacciones cuatrifactoriales:				
ABCD	1	385	385	< 1
Error	15	120,068	8,005	
Total	31	744,876		

Puesto que $F_{0.05} = 4.54$ y $F_{0.01} = 8.68$ para 1 y 15 grados de libertad, se determina que los efectos de duplicación, así como los efectos de lubricación y supresión de chispa, son significativos en el nivel de 0.01, y que hay interacciones significativas en el nivel de 0.05 entre lubricación, protección del polvo y supresión de chispa. En el ejercicio 13.18 se pedirá al lector interpretar dichos resultados y estimar la magnitud de algunos de los efectos.

Una presentación gráfica, llamada **gráfica media-normal**, también ayuda a indicar los efectos más importantes. Para ilustrar esta gráfica en el contexto del ejemplo anterior, primero se dividen las entradas en la columna marcada (4), en la tabla de la página 414, entre $r\ 2^4 = 32$ para obtener los efectos estimados. Sus valores absolutos se ordenan y luego se grafican contra los valores normales positivos correspondientes a una muestra de tamaño 2(15) = 30 o el doble del número de efectos. En la figura 13.7 se ilustra esta gráfica media-normal. En un experimento dado, tan solo algunos de los efectos es probable que sean grandes en magnitud, ya sea positiva o negativa, y la mayoría será cercana a cero. En la gráfica media-normal, cualquier efecto estimado grande debería doblarse hacia arriba a partir del patrón de línea recta formado por los diversos efectos estimados pequeños. Para la gráfica media-normal de la figura 13.7, las estimaciones del efecto principal *A* y *C* son grandes, y evidentemente se agrupan arriba del patrón en línea recta. Contrario a las pruebas *F* significativas para interacciones, la evidencia visual para *AB* y *ABC* no es muy fuerte.

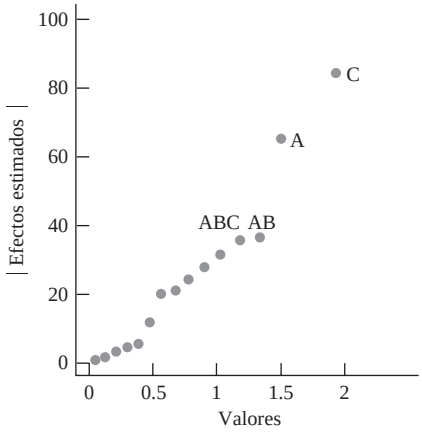


Figura 13.7
Gráfica media-normal de |efecto estimado|

El procedimiento de la gráfica media-normal ofrece una guía en cuanto a los efectos principales, aun cuando solo haya una única repetición. Sin embargo, se debe tener cuidado para comprobar primero que los residuos se comportan bien. *Incluso así, la gráfica media-normal puede malinterpretarse si muchos efectos, en lugar de pocos, son grandes.*

13.4 Presentación gráfica de experimentos 2^2 y 2^3

Los diseños factoriales 2^2 y 2^3 tienen la ventaja adicional de que hay disponibles presentaciones gráficas dramáticas para ofrecer los resultados del experimento. A pesar de su simplicidad, incluso el diseño 2^2 es una poderosa herramienta para mejorar los productos y procesos. La clave es la decisión de realizar cualquier experimento diseñado en absoluto.

Diseño 2^2

Suponga que la producción de un nuevo proceso químico para hacer crecer cristales necesita mejorarse. Puesto que se considera que la temperatura y el pH influyen en la producción, se intenta un diseño 2^2, de donde se obtienen los siguientes resultados para producción.

	Temperatura	pH	Rep. 1	Rep. 2	Total
1	300	2	10	14	24
a	350	2	21	19	40
b	300	3	17	15	32
ab	350	3	20	24	44

Las medias para cada condición experimental se escriben en las esquinas del cuadrado, que representa al diseño, en la figura 13.8. Por ejemplo, $\bar{y}_{00\bullet} = 24/2 = 12$ se coloca en la esquina inferior izquierda.

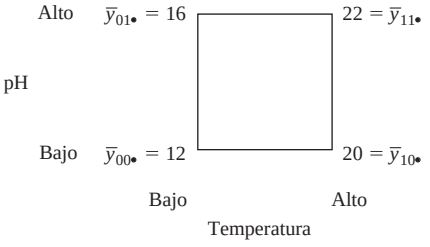


Figura 13.8
Resumen gráfico de un experimento factorial 2^2

A partir de la figura 13.8, es evidente que cambiar la temperatura de bajo (300°F) a alto (350°F) aumenta sustancialmente la producción a ambos niveles de pH. Cambiar el pH tiene poco o ningún efecto. Esta figura es una forma muy efectiva de presentar la información contenida en el experimento.

Si la interacción es significativa, el cuadrado de la figura 13.8, con medias en las esquinas, es una presentación alternativa a la tabla de medias de celda (véase la página 397). Si la interacción no es significativa, continúa el análisis al encontrar estimaciones puntuales e intervalos de confianza, para la magnitud de la diferencia, en la respuesta media que resulta cuando un factor cambia del nivel bajo al nivel alto.

El modelo poblacional no incluirá un término para un efecto de duplicación. Cuando se sospecha un efecto de duplicación, la estimación de varianza necesita refinarse aún más. (Véanse los ejercicios 13.22 y 13.25.) El modelo poblacional para un diseño 2^2, similar

al modelo 2^3 de la página 410, pero sin el término de duplicación, es

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

con $\alpha_1 = -\alpha_0$. En consecuencia, la diferencia en la respuesta media $\alpha_1 - \alpha_0 = 2\alpha_1 = -2\alpha_0$ es el doble del término del efecto de cada factor A. La diferencia en respuesta media $\alpha_1 - \alpha_0$ se estima mediante

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1\cdot\cdot} - \bar{y}_{0\cdot\cdot} &= \frac{1}{2}(\bar{y}_{11\cdot} + \bar{y}_{10\cdot}) - \frac{1}{2}(\bar{y}_{01\cdot} + \bar{y}_{00\cdot}) \\ &= \frac{1}{2}(22 + 20) - \frac{1}{2}(16 + 12) = 7\end{aligned}$$

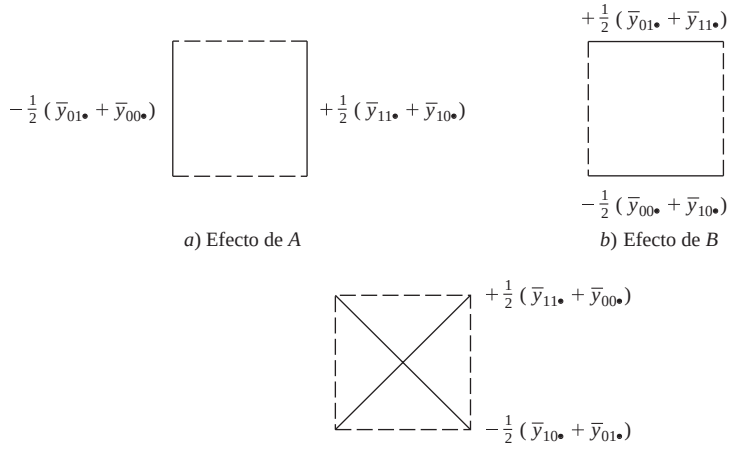
Esto es, se toma el promedio a la derecha y se resta el promedio a la izquierda del cuadrado, como se indica en la figura 13.9.

Para el segundo factor, pH, se estima la diferencia en respuesta media entre el nivel bajo y el nivel alto mediante

$$\begin{aligned}\bar{y}_{\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{\cdot 0\cdot} &= \frac{1}{2}(\bar{y}_{01\cdot} + \bar{y}_{11\cdot}) - \frac{1}{2}(\bar{y}_{00\cdot} + \bar{y}_{10\cdot}) \\ &= \frac{1}{2}(16 + 22) - \frac{1}{2}(12 + 20) = 3\end{aligned}$$

Para estimar la interacción, observe que $\bar{y}_{10\cdot} - \bar{y}_{00\cdot}$ da el aumento en producción en pH = 2, mientras que $\bar{y}_{11\cdot} - \bar{y}_{01\cdot}$ proporciona el aumento en producción en pH = 3. Su diferencia dividida entre 2 es la estimación de la interacción.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\bar{y}_{11\cdot} - \bar{y}_{01\cdot}) - \frac{1}{2}(\bar{y}_{10\cdot} - \bar{y}_{00\cdot}) &= \frac{1}{2}(\bar{y}_{11\cdot} - \bar{y}_{10\cdot} - \bar{y}_{01\cdot} + \bar{y}_{00\cdot}) \\ &= \frac{1}{2}(22 - 20 - 16 + 12) = -1\end{aligned}$$



a) Efecto de *A*

b) Efecto de *B*

c) Interacción *AB*

Figura 13.9
Los signos para las $\bar{y}_{ij\bullet}$ al estimar los efectos en un diseño 2^2

En el ejercicio 13.21, se pide al lector verificar que las estimaciones anteriores sean iguales al doble de los efectos estimados en el modelo del análisis de varianza, o $[A]/2r$, $[B]/2r$ y $[AB]/2r$, respectivamente.

Cada estimador de un efecto es una combinación lineal de las cuatro $Y_{ij\bullet}$ independientes; por lo tanto, tienen la misma varianza. Esta varianza común se estima mediante s^2/r, donde s^2 es el cuadrado medio del error que se obtiene al juntar las estimaciones de las 4

esquinas del cuadrado. (Véase el ejercicio 13.22 para s^2 cuando en el modelo se incluye un término de duplicación.)

$$s^2 = \frac{1}{(r-1)2^2} \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{l=1}^{r} (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$$

$$= \frac{1}{(2-1)2^2}(4+4+1+1+1+1+4+4) = 5$$

Este cuadrado medio del error tiene $(r-1)2^2 = 4$ grados de libertad. El $t_{0.025} = 2.776$, de modo que los intervalos de confianza individuales del 95% resultantes son

efecto de temperatura: $\bar{y}_{1\cdot\cdot} - \bar{y}_{0\cdot\cdot} \pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{r}} = 7 \pm 4.39$ o bien 2.61 a 11.39

efecto de pH: $\bar{y}_{\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{\cdot 0\cdot} \pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{r}} = 3 \pm 4.39$ o bien −1.39 a 7.39

interacción temperatura × pH:

$$\frac{1}{2}(\bar{y}_{11\cdot} - \bar{y}_{10\cdot} - \bar{y}_{01\cdot} + \bar{y}_{00\cdot}) \pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{r}} = -1 \pm 4.39 \quad \text{o} \quad -5.39 \quad \text{a} \quad 3.39$$

Aquí el intervalo de confianza para la interacción cubre 0, de modo que se desprecia la interacción. Lo mismo es cierto para el efecto de pH. Se está 95% seguro de que cambiar la temperatura de 300 a 350 grados aumentará la producción media entre 2.61 y 11.39 unidades.

Un enfoque alternativo al mismo análisis comienza por codificar las variables de entrada. Se codifican al asignar −1 al nivel inferior y +1 al nivel superior de cada factor. Cuando los factores son cuantitativos, como en la presente discusión, los valores codificados se expresan mediante la fórmula

$$x_1 = \frac{\text{Temperatura} - (300 + 350)/2}{(350 - 300)/2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\text{pH} - (2+3)/2}{(3-2)/2}$$

El diseño para el experimento consiste en el par de valores para x_1 y x_2, para cada repetición. Al aumentar el diseño, al incluir una columna para el producto x_1x_2 de las dos variables de entrada, se obtiene

Temperatura del diseño	pH				
x_1	x_2	x_1x_2	Rep. 1	Rep. 2	Total
−1	−1	1	10	14	24
1	−1	−1	21	19	40
−1	1	−1	17	15	32
1	1	1	20	24	44

La primera columna alterna entre –1 y +1 a partir de –1, mientras que la segunda columna alterna dobles a partir de dos –1. Este es el diseño de orden estándar en la notación de variable codificada.

Note que los signos en las columnas x_1, x_2, y x_1x_2 de la tabla anterior son coeficientes para los totales, cuando se calculan los efectos respectivos de cambiar de valores bajos a altos de las variables de entrada. La combinación lineal resultante se divide entre $r2^{2-1}$.

Por ejemplo, la estimación de la interacción temperatura × pH se calcularía como

$$\frac{1}{r2^{2-1}}(24 - 40 - 32 + 44) = -1$$

En la notación de variable codificada, la esquina inferior izquierda del cuadrado correspondiente a temperatura 300 y a pH 2 se ubica en $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$.

Diseño 2^3

Ahora se observarán las presentaciones gráficas para el diseño factorial 2^3. Con la finalidad de ayudar a expandir el mercado de la compañía para un material de envoltura plástica, se pidió a ingenieros mejorar la opacidad. Ellos creyeron que tres factores (tasa de extrusión, cantidad de aditivo y montaje de boquilla) podrían tener un efecto. Para cada factor se seleccionaron dos niveles, en tanto un experimento factorial 2^3 produjo las observaciones:

Factor A Tasa	Factor B Cantidad de aditivo	Factor C Montaje de boquilla	Rep. 1	Rep. 2
0	0	0	4.5	4.1
1	0	0	3.8	3.4
0	1	0	3.1	4.3
1	1	0	7.2	6.8
0	0	1	5.4	5.0
1	0	1	4.5	4.9
0	1	1	4.2	5.4
1	1	1	.7 3	6.9

Si supone que no hay efecto de duplicación, un cubo que representa los factores se ilustra en la figura 13.10. En las esquinas del cubo se unieron las respuestas medias para dicha configuración de condiciones experimentales. Por ejemplo, $(7.3 + 6.9)/2 = 7.1$ aparece en la esquina superior derecha de la cara frontal. A partir de la figura 13.10, es evidente que la respuesta aumenta conforme los factores A y B cambian simultáneamente de sus niveles bajo a alto. Este es un efecto de interacción, pues solo cambiar uno de los factores no siempre aumenta la respuesta. El factor C, montaje de boquilla, también parece tener un efecto.

Estas conclusiones se verifican con el modelo de la página 410, pero sin el efecto de duplicación, de modo que toda $\rho_l = 0$. La diferencia en la respuesta media entre el nivel bajo y el nivel alto del factor A es $\alpha_1 - \alpha_0 = 2\alpha_1 = -2\alpha_0$, o el doble del término del

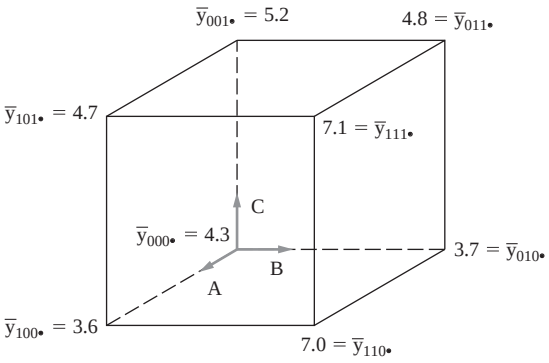


Figura 13.10
Resumen gráfico de un diseño experimental 2^3

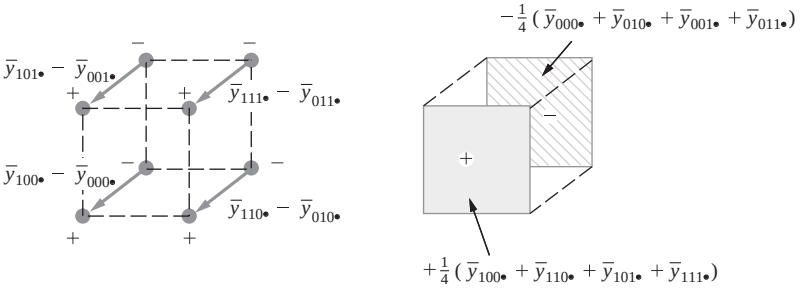
efecto. Esta diferencia media se estima con

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1\cdots} - \bar{y}_{0\cdots} &= \frac{1}{4}(\bar{y}_{100\cdot} + \bar{y}_{110\cdot} + \bar{y}_{101\cdot} + \bar{y}_{111\cdot}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\bar{y}_{000\cdot} + \bar{y}_{010\cdot} + \bar{y}_{001\cdot} + \bar{y}_{011\cdot}) \\ &= \frac{1}{4}(3.6 + 7.0 + 4.7 + 7.1) \\ &\quad - \frac{1}{4}(4.3 + 3.7 + 5.2 + 4.8) = 1.1\end{aligned}$$

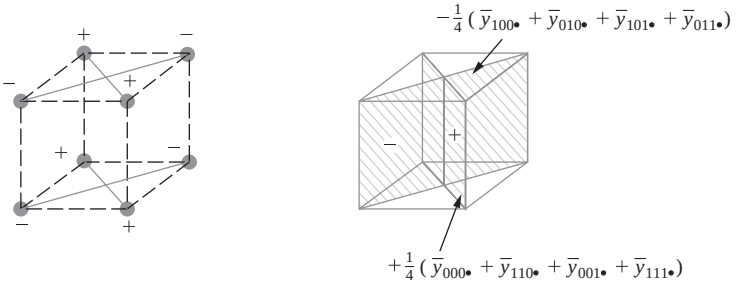
que es el promedio de las cuatro $\bar{y}_{ijk\cdot}$ en la cara frontal menos el promedio de las 4 observaciones en la cara posterior. (Véase la figura 13.11.) De manera alternativa, es el promedio de los 4 aumentos a lo largo de cada borde. Note que cada $\bar{y}_{ijk\cdot}$, en el primer conjunto de paréntesis, se asocia con una condición experimental que tiene un término α en la notación especial. Por ende, los signos son iguales a los utilizados con el algoritmo de Yates.

Las estimaciones de la diferencia en respuesta media, cuando cambia del nivel bajo al alto, tiene una interpretación similar para los otros dos factores:

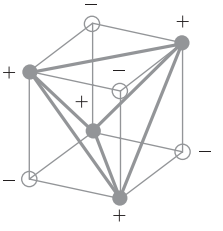
$$\bar{y}_{\cdot 1\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot 0\cdot\cdot} = 1.2$$
$$\bar{y}_{\cdot\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot 0\cdot} = 0.8$$



a) Efecto principal de *A*



b) Interacción *AB*



c) Interacción *ABC*

Figura 13.11
Signos para estimar efectos en un diseño 2^3

La interacción *AB* se estimó como el promedio de la interacción en la cara superior y la interacción en la cara inferior. La figura 13.11 ofrece los signos para las $\overline{y}_{ijk\cdot}$.Para la interacción *AB*, se estima

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\overline{y}_{11\cdot\cdot} - \overline{y}_{10\cdot\cdot} - \overline{y}_{01\cdot\cdot} + \overline{y}_{00\cdot\cdot}) \\
&\quad = \frac{1}{4}(\overline{y}_{111\cdot} - \overline{y}_{101\cdot} - \overline{y}_{011\cdot} + \overline{y}_{001\cdot}) \\
&\qquad + \frac{1}{4}(\overline{y}_{110\cdot} - \overline{y}_{100\cdot} - \overline{y}_{010\cdot} + \overline{y}_{000\cdot}) \\
&\quad = \frac{1}{4}(7.1 - 4.7 - 4.8 + 5.2) + \frac{1}{4}(7.0 - 3.6 - 3.7 + 4.3) = 1.7
\end{aligned}$$

La combinación de signos para las 8 medias se obtiene en forma similar para las otras 2 interacciones del factor.

$$\frac{1}{2}(\overline{y}_{1\cdot 1\cdot} - \overline{y}_{1\cdot 0\cdot} - \overline{y}_{0\cdot 1\cdot} + \overline{y}_{0\cdot 0\cdot}) = -0.2$$

$$\frac{1}{2}(\overline{y}_{\cdot 11\cdot} - \overline{y}_{\cdot 10\cdot} - \overline{y}_{\cdot 01\cdot} + \overline{y}_{\cdot 00\cdot}) = -0.2$$

La interacción trifactorial *ABC* es una medida de la diferencia de la interacción *AB* sobre las caras superiores y la interacción en la cara inferior. (Véase la figura 13.11.) Es decir, cuantifica la influencia de *C* sobre la interacción *AB*. (Aquí hay una simetría y, hasta un signo menos, el mismo resultado se obtiene a partir de cualquier interacción bifactorial.)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(\overline{y}_{111\cdot} - \overline{y}_{101\cdot} - \overline{y}_{011\cdot} + \overline{y}_{001\cdot}) - \frac{1}{4}(\overline{y}_{110\cdot} - \overline{y}_{100\cdot} - \overline{y}_{010\cdot} + \overline{y}_{000\cdot}) \\
&\quad = \frac{1}{4}(7.1 - 4.7 - 4.8 + 5.2) - \frac{1}{4}(7.0 - 3.6 - 3.7 + 4.3) = -0.3
\end{aligned}$$

Los intervalos de confianza se obtienen al sumar y restar

$$t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{2r}}$$

a cada estimación, donde s^2 es el cuadrado medio del error. Cuando en el modelo no hay término de duplicación, dicha estimación de varianza se determina al conjuntar las estimaciones de las 8 esquinas del cubo.

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{(r-1)2^3}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=1}^{r}(y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk\cdot})^2 \\
&= \frac{1}{(2-1)2^3}(0.04 + 0.04 + 0.04 + 0.04 + 0.36 \\
&\qquad + \cdots + 0.36 + 0.36 + 0.04 + 0.04) \\
&= 0.240
\end{aligned}$$

Este cuadrado medio del error tiene $(r-1)2^3 = 8$ grados de libertad, de modo que $t_{0.025} = 2.306$, por lo que los intervalos de confianza individuales del 95% resultante son

efecto de tasa: $\bar{y}_{1\cdots} - \bar{y}_{0\cdots} \pm t_{0.025}\sqrt{\dfrac{s^2}{2r}} = 1.1 \pm 0.56$, o 0.54 a 1.66

efecto de aditivo: $\bar{y}_{\cdot 1\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot 0\cdot\cdot} \pm t_{0.025}\sqrt{\dfrac{s^2}{2r}} = 1.2 \pm 0.56$, o 0.64 a 1.76

efecto de boquilla: $\bar{y}_{\cdot\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot 0\cdot} \pm t_{0.025}\sqrt{\dfrac{s^2}{2r}} = 0.8 \pm 0.56$, o 0.24 a 1.36

interacción tasa × aditivo:

$$\frac{1}{2}(\bar{y}_{11\cdot\cdot} - \bar{y}_{01\cdot\cdot} - \bar{y}_{10\cdot\cdot} + \bar{y}_{00\cdot\cdot})$$

$$\pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{2r}} = 1.7 \pm 0.56, \text{ o } 1.14 \text{ a } 2.26$$

interacción tasa × boquilla:

$$\frac{1}{2}(\bar{y}_{1\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{0\cdot 1\cdot} - \bar{y}_{1\cdot 0\cdot} + \bar{y}_{0\cdot 0\cdot})$$

$$\pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{2r}} = -0.2 \pm 0.56,$$

$$\text{o } -0.76 \text{ a } 0.36$$

interacción aditivo × boquilla:

$$\frac{1}{2}(\bar{y}_{\cdot 11\cdot} - \bar{y}_{\cdot 01\cdot} - \bar{y}_{\cdot 10\cdot} + \bar{y}_{\cdot 00\cdot})$$

$$\pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{2r}} = -0.2 \pm 0.56,$$

$$\text{o } -0.76 \text{ a } 0.36$$

interacción tasa × aditivo × boquilla:

$$\frac{1}{4}(\bar{y}_{111\cdot} - \bar{y}_{101\cdot} - \bar{y}_{011\cdot} + \bar{y}_{001\cdot}) - \frac{1}{4}(\bar{y}_{110\cdot} - \bar{y}_{100\cdot} - \bar{y}_{010\cdot} + \bar{y}_{000\cdot})$$

$$\pm t_{0.025}\sqrt{\frac{s^2}{2r}} = -0.3 \pm 0.56 \qquad \text{o} \qquad -0.86 \text{ a } 0.26$$

Aquí el intervalo de confianza para la interacción trifactorial cubre 0, de modo que se desprecia tal interacción. Sin embargo, se está 95% seguro de que el intervalo de 1.14 a 2.26 contiene la interacción tasa × aditivo, así que no es posible interpretar individualmente los factores tasa y aditivo. El factor C, montaje de boquilla, no interviene en interacción significativa alguna. Con 95% de confianza, se concluye que utilizar el montaje de boquilla alto aumentará la opacidad de la envoltura de plástico de entre 0.24 a 1.36 unidades.

Con el enfoque alternativo, el diseño para el experimento es la colección de valores x_1, x_2 y x_3 para cada repetición. Al aumentar el diseño mediante la inclusión de columnas

adicionales para productos de las columnas originales, se obtiene

Tasa	Diseño Aditivo	Boquilla							
x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Rep. 1	Rep. 2	Total
−1	−1	−1	1	1	1	−1	4.5	4.1	8.6
1	−1	−1	−1	−1	1	1	3.8	3.4	7.2
−1	1	−1	−1	1	−1	1	3.1	4.3	7.4
1	1	−1	1	−1	−1	−1	7.2	6.8	14.0
−1	−1	1	1	−1	−1	1	5.4	5.0	10.4
1	−1	1	−1	1	−1	−1	4.5	4.9	9.4
−1	1	1	−1	−1	1	−1	4.2	5.4	9.6
1	1	1	1	1	1	1	7.3	6.9	14.2

Observe que nuevamente los signos de las columnas son los coeficientes de la combinación lineal de totales. El valor de cada combinación lineal, cuando se divide entre $r2^{3-1}$, es el efecto estimado cuando cambia de los valores bajos a los altos de las variables de entrada. Para el efecto principal de la tasa,

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{3-1}}(-8.6 + 7.2 - 7.4 + 14.0 - 10.4 + 9.4 - 9.6 + 14.2) = 1.1$$

Las estimaciones de los otros efectos principales y las interacciones se obtienen igualmente usando las columnas de signos adecuadas.

Formación de bloques en un diseño 2^3

Siempre es deseable realizar las 8 repeticiones de un diseño 2^3 factorial bajo condiciones que sean tan homogéneas como sea posible, excepto para los escenarios de los 3 factores. Sin embargo, limitaciones de tiempo, espacio, equipo o de personal quizás hagan imposible la realización de las 8 repeticiones con condiciones homogéneas. Por ejemplo, si se necesita cocer piezas cerámicas grandes, el horno tan solo puede contener 4 a la vez. En el ejemplo de un diseño 2^3 para investigar factores que influyen sobre la opacidad, el tiempo para fabricar los grandes rollos de plástico sería una condición limitante. Suponga que, durante un día, se pueden realizar un máximo de 4 repeticiones. En consecuencia, el experimento necesita dividirse de modo que 4 repeticiones puedan efectuarse un día y las otras 4 el día siguiente. ¿Cómo deberían seleccionarse las 4 repeticiones para el primer día de entre el total de 8 repeticiones?

La respuesta se encuentra en el hecho de que la interacción trifactorial a menudo puede despreciarse. La figura 13.12 ilustra cómo dividir el diseño 2^3 en dos grupos de repeticiones o **bloques**, cada uno consistente en cuatro repeticiones. Las 4 repeticiones en cada bloque tienen todas el mismo signo para el término de interacción trifactorial $x_1x_2x_3$ en la tabla de signos de esta página.

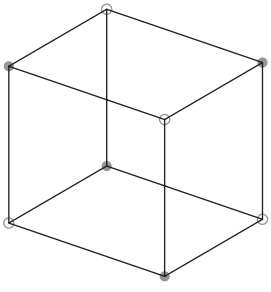


Figura 13.12
Experimento 2^3 ordenado en 2 bloques de 4 repeticiones; los círculos sólidos tienen $x_1x_2x_3 = -1$

Las 4 repeticiones en el primer bloque, con $x_1\,x_2\,x_3 = -1$,son

Bloque 1						
x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
−1	−1	−1	1	1	1	−1
1	1	−1	1	−1	−1	−1
1	−1	1	−1	1	−1	−1
−1	1	1	−1	−1	1	−1

Las del segundo bloque son

Bloque II						
x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	−1	−1	−1	−1	1	1
−1	1	−1	−1	1	−1	1
−1	−1	1	1	−1	−1	1
1	1	1	1	1	1	1

Esta división de las 8 repeticiones en 2 bloques tiende a neutralizar el efecto de diferencias en variables descontroladas entre los 2 días cuando se realiza el experimento. Suponga que, debido a alguna variable descontrolada, todas las repeticiones del segundo día fueron d unidades mayores de lo que serían si se hubieran efectuado el primer día. Cualquiera que sea el valor de d, cancelará la estimación de los 3 efectos principales y las interacciones bifactoriales. Para ver esto, inspeccione la columna adecuada en las tablas de signos para cada uno de los 2 bloques. La columna correspondiente a cada uno de dichos efectos, en cada bloque, tiene 2 signos más y 2 signos menos, de modo que el término d se cancela. De manera alternativa, a partir de la representación geométrica, cada cara del cubo tiene 2 puntos sólidos y 2 puntos blancos. En consecuencia, el promedio sobre cualquier cara no se ve afectado por el efecto aditivo d; por lo tanto, las estimaciones de los efectos principales no resultan afectadas. Los contrastes de diagonal para una interacción bifactorial tienen la misma propiedad en cada cara.

Para dividir el experimento en 2 bloques, se tuvo que ceder información acerca de la interacción trifactorial. Deliberadamente se **confundió** la interacción trifactorial con las diferencias día a día. Donde la interacción trifactorial no es importante, esta elección garantiza que los efectos principales y las interacciones bifactoriales se estimen de manera más precisa de lo que sería el caso si las 8 repeticiones tuvieran que realizarse durante un periodo de dos días en condiciones menos homogéneas.

Ejercicios

13.11 Para determinar el efecto sobre el sabor de 3 diferentes factores en la elaboración de latas de bebida gaseosa, se realizó un experimento donde el sabor de una bebida lo calificaba un juez sobre una escala de 1 a 10. Los resultados son los siguientes:

A Lubricante	*B* Calor	*C* Resina	Calificaciones Rep. 1	Rep. 2
Fresco	Sin calor	*A*	6	8
Fresco	Sin calor	*B*	8	7
Fresco	Caliente	*A*	9	9
Fresco	Caliente	*B*	1	2
Antiguo	Sin calor	*A*	6	7
Antiguo	Sin calor	*B*	6	8
Antiguo	Caliente	*A*	9	8
Antiguo	Caliente	*B*	2	3

a) Analice los resultados, primero como una clasificación bidireccional con 7 grados de libertad para tratamientos y 1 grado de libertad para bloques (repeticiones).

b) Use una tabla de signos adecuada para calcular los totales de efecto $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, $[ABC]$.

c) Con los resultados obtenidos en el inciso *b*), encuentre las sumas de cuadrados correspondientes a los efectos principales y las interacciones, luego compruebe su total contra la suma de cuadrados de tratamientos obtenida en el inciso *a*).

d) Ordene los datos con combinaciones de tratamientos en orden estándar; use el método de Yates para encontrar los totales de efecto. Compare con los resultados obtenidos en el inciso *b*).

e) Construya una tabla de análisis de varianza y analice el experimento.

13.12 Se realiza un experimento de tamizado para determinar qué factores influyen en el control del contenido final de fósforo del acero producido en un convertidor. Los niveles de los factores estudiados y los resultados experimentales se presentan en la siguiente tabla:

E Temp. de vertido (°F)	*D* Razón de cal.	*C* Oxígeno	*B* Fósforo original	*A* Manganeso original	Fósforo final	
					Rep. 1	Rep. 2
2,400	3	5%	0.15%	1%	0.003%	0.001%
2,400	3	5	0.15	3	0.004	0.009
2,400	3	5	0.30	1	0.002	0.008
2,400	3	5	0.30	3	0.015	0.007
2,400	3	15	0.15	1	0.002	0.005
2,400	3	15	0.15	3	0.011	0.006
2,400	3	15	0.30	1	0.004	0.001
2,400	3	15	0.30	3	0.002	0.004
2,400	4	5	0.15	1	0.000	0.003
2,400	4	5	0.15	3	0.008	0.002
2,400	4	5	0.30	1	0.003	0.007
2,400	4	5	0.30	3	0.005	0.012
2,400	4	15	0.15	1	0.010	0.006
2,400	4	15	0.15	3	0.006	0.001
2,400	4	15	0.30	1	0.006	0.014
2,400	4	15	0.30	3	0.011	0.015
2,600	3	5	0.15	1	0.003	0.007
2,600	3	5	0.15	3	0.007	0.004
2,600	3	5	0.30	1	0.011	0.005
2,600	3	5	0.30	3	0.010	0.017
2,600	3	15	0.15	1	0.004	0.008
2,600	3	15	0.15	3	0.019	0.013
2,600	3	15	0.30	1	0.004	0.008
2,600	3	15	0.30	3	0.017	0.023
2,600	4	5	0.15	1	0.007	0.004
2,600	4	5	0.15	3	0.015	0.009
2,600	4	5	0.30	1	0.004	0.011
2,600	4	5	0.30	3	0.010	0.006
2,600	4	15	0.15	1	0.017	0.011
2,600	4	15	0.15	3	0.005	0.010
2,600	4	15	0.30	1	0.014	0.009
2,600	4	15	0.30	3	0.016	0.011

Analice los resultados de este experimento.

13.13 Se realiza un experimento para determinar los efectos de los factores siguientes sobre la ganancia de un dispositivo semiconductor:

Factor	Nivel 0	Nivel 1
A. Ubicación de ensamblado	Laboratorio	Línea producción
B. Presión parcial de material de control	10^{-15}	10^{-4}
C. Humedad relativa	1%	30%
D. Tiempo de añejamiento	72 horas	144 horas

Los resultados fueron los siguientes:

Condición experimental	Ganancia	
	Rep.1	Rep.2
1	39.0	43.2
a	31.8	43.7
b	47.0	51.4
ab	40.9	40.3
c	43.8	40.5
ac	29.3	52.9
bc	34.8	48.2
abc	45.6	58.2
d	40.1	41.9
ad	42.0	40.5
bd	54.9	53.0
abd	39.9	40.2
cd	43.1	40.2
acd	30.1	39.9
bcd	35.6	53.7
abcd	41.4	49.5

Realice un análisis de varianza adecuado, luego interprete los resultados.

13.14 Se realiza un estudio para examinar el efecto de 5 diferentes factores sobre el tiempo requerido para que los odorizantes en gas natural lleguen a la superficie una vez que ocurra una fuga. Los resultados del experimento se reportaron del modo siguiente:

A Odorizante	*B* Concentración de odorizante mg/ml	*C* Humedad del suelo	*D* Tasa de flujo	*E* Temperatura	Tiempo (horas)	
					Rep. 1	Rep. 2
A	4	8%	20	50 °F	20	20
A	4	8	20	70	17	18
A	4	8	80	50	20	19
A	4	8	80	70	18	19
A	4	16	20	50	12	13
A	4	16	20	70	14	16
A	4	16	80	50	15	14
A	4	16	80	70	17	16
A	16	8	20	50	10	9
A	16	8	20	70	9	8
A	16	8	80	50	8	9
A	16	8	80	70	7	8
A	16	16	20	50	7	6
A	16	16	20	70	6	4
A	16	16	80	50	5	6
A	16	16	80	70	4	5
B	4	8	20	50	28	29
B	4	8	20	70	27	26
B	4	8	80	50	25	27
B	4	8	80	70	28	28
B	4	16	20	50	24	25

(continúa en la siguiente página)

(continúa de la página 426)

A Odorizante	*B* Concentración de odorizante mg/ml	*C* Humedad del suelo	*D* Tasa de flujo	*E* Temperatura	Tiempo (horas) Rep. 1	Rep. 2
B	4	16	20	70	26	25
B	4	16	80	50	23	24
B	4	16	80	70	24	25
B	16	8	20	50	26	24
B	16	8	20	70	23	25
B	16	8	80	50	27	26
B	16	8	80	70	25	26
B	16	16	20	50	19	18
B	16	16	20	70	16	17
B	16	16	80	50	20	19
B	16	16	80	70	17	15

Analice los resultados de este experimento.

13.15 Al escribir el total de tratamientos (a) como la suma de las observaciones correspondientes y_{100l}, y sustituir dichas observaciones con las expresiones dadas por la ecuación modelo de la página 410, se demuestra que

$$(a) = r[\mu + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_0 + (\alpha\beta)_{10} + (\alpha\gamma)_{10} + (\beta\gamma)_{00} + (\alpha\beta\gamma)_{100}] + \sum_{l=1}^{r} \varepsilon_{100l}$$

Use las restricciones impuestas sobre los parámetros y vuelva a escribir esta expresión para (α) en términos de los parámetros $\mu, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, (\alpha\beta)_{00}, (\alpha\gamma)_{00}, (\beta\gamma)_{00}$ y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

13.16 Duplique el trabajo del ejercicio 13.15 y exprese $(1), (b), (ab), (c), (ac), (bc)$ y (abc) en términos de los parámetros $\mu, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, (\alpha\beta)_{00}, (\alpha\gamma)_{00}, (\beta\gamma)_{00}$ y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

13.17 Con los resultados de los ejercicios 13.15 y 13.16, verifique las expresiones para $[A]$ y $[BC]$ obtenidas en la página 411. También exprese ε_A en términos de las cantidades ε_{ijkl}.

13.18 Interprete los resultados del análisis de varianza dado por la tabla de la página 415, luego estime la magnitud de los efectos significativos.

13.19 Una verificación computacional de las sumas de cuadrados, obtenidas para los diversos efectos principales y las interacciones, es que su suma debe ser igual a la suma de cuadrados de los tratamientos que se obtuvo al analizar los datos primero como una clasificación bidireccional. Realice esta comprobación sobre las sumas de cuadrados dadas en la tabla de la página 396.

13.20 Si es deseable encontrar una expresión para un total de efecto sin construir una tabla de signos completa, puede usar el siguiente método, que se ilustra al encontrar $[ABC]$ para un experimento factorial 2^4. Tome la expresión $(a \pm 1)(b \pm 1)(c \pm 1)(d \pm 1)$, con un "+", si la letra correspondiente no aparece en el símbolo para el efecto principal, o la interacción para la cual se quiere calcular un total de efecto, y un "–", cuando la letra correspondiente sí aparece. Por lo tanto, para encontrar $[ABC]$, se escribe

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1)(d+1) = {} & abcd + abc - abd - acd - bcd \\ & - ab - ac + ad - bc + bd + cd \\ & + a + b + c - d - 1\end{aligned}$$

después de ordenar los términos en orden estándar y agregar paréntesis, finalmente se obtiene

$$[ABC] = -(1) + (a) + (b) - (ab) + (c) - (ac) - (bc) + (abc) - (d)$$
$$+(ad) + (bd) - (abd) + (cd) - (acd) - (bcd) + (abcd)$$

a) Use este método para expresar $[B]$, $[AC]$ y $[ABC]$ en términos de los totales de tratamiento en un experimento factorial 2^3.

b) Use este método para expresar $[AC]$ y $[BCD]$ en términos de los totales de tratamientos en un experimento factorial 2^4.

13.21 Con respecto al ejemplo de diseño factorial 2^2 de la página 417, use la tabla de signos

1	*a*	*b*	*ab*	Total
1	1	1	1	$[I]$
−1	1	−1	1	$[A]$
−1	−1	1	1	$[B]$
1	−1	−1	1	$[AB]$

a) para verificar el cálculo del cuadrado medio del error;

b) para verificar la expresión

$$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} - \bar{y}_{\bullet 0\bullet} = \frac{[B]}{2r}$$

c) para verificar la expresión

$$\frac{1}{2}(\bar{y}_{11\bullet} + \bar{y}_{00\bullet}) - \frac{1}{2}(\bar{y}_{10\bullet} + \bar{y}_{01\bullet}) = \frac{[AB]}{2r}$$

13.22 Cuando en un diseño 2^2 se sospecha un efecto de duplicación, la suma de cuadrados de duplicación es

$$2^2 \sum_{l=1}^{r} (\bar{y}_{\bullet\bullet l} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$

mientras la suma de cuadrados del error se convierte en

$$SSE = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{l=1}^{r} (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})^2 - 2^2 \sum_{l=1}^{r} (\bar{y}_{\bullet\bullet l} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$

Entonces, $s^2 = SSE/(2^2 - 1)(r - 1)$ tiene $(r - 1)(2^2 - 1)$ grados de libertad. Con respecto al ejemplo de la página 418,

a) obtenga la estimación de s^2 ajustada para un efecto de duplicación;

b) obtenga los intervalos de confianza del 95% para los efectos; para ello, utilice su estimación del inciso *a*).

13.23 Dadas las siguientes observaciones,

Factor A	Factor B	Rep. 1	Rep. 2
0	0	14	6
1	0	15	21
0	1	11	17
1	1	24	16

resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento gráfico de la sección 13.4. Interprete los efectos con base en los intervalos de confianza.

13.24 Se considera que dos factores influyen en la tasa de deposición (segundos) para que un láser de pulsos deposite una monocapa de material. Inicialmente, se corre un diseño 2^2 con dos factores: tamaño de punto de 50 o 60 mm y energía láser de 1.5 o 2.0 J/cm^2.

Tamaño de punto	Energía láser	Rep. 1	Rep. 2
0	0	8.34	7.44
1	0	5.20	4.96
0	1	7.01	7.09
1	1	4.45	4.70

Resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual. Interprete los efectos con base en intervalos de confianza.

13.25 Cuando en un diseño 2^3 se sospecha un efecto de duplicación, la suma de cuadrados de duplicación es

$$2^3 \sum_{l=1}^{r} (\bar{y}_{\cdots l} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2$$

y la suma de cuadrados del error se convierte en

$$SSE = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=1}^{r} (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk\cdot})^2 - 2^3 \sum_{l=1}^{r} (\bar{y}_{\cdots l} - \bar{y}_{\cdots\cdot})^2$$

entonces, $s^2 = SSE/(2^3 - 1)(r - 1)$ tiene $(r - 1)(2^3 - 1)$ grados de libertad. Con respecto al ejemplo de la página 419 concerniente a la opacidad de una envoltura plástica,

a) obtenga la estimación de s^2 ajustada para un efecto de duplicación;

b) obtenga los intervalos de confianza del 95% para los efectos; para ello, utilice su estimación del inciso *a*).

13.26 Un estudiante de ingeniería quiere saber cuáles factores influyen en el tiempo (en segundos) para que su automóvil vaya de 0 a 30 y de 30 a 0 millas por hora. El factor *A* fue el lanzamiento, que fue ya sea sin giro de ruedas o soltando el embrague a 2,500 rpm. El factor *B* es frenar con transmisión en neutral o en segundo cambio (velocidad). El factor *C* es si el acondicionador de aire está apagado o encendido.

Factor A Lanzamiento	Factor B Transmisión	Factor C *A*/*C*	Rep. 1	Rep. 2
0	0	0	9.43	9.34
1	0	0	8.80	8.52
0	1	0	9.17	9.15
1	1	0	8.36	8.43
0	0	1	9.87	9.66
1	0	1	8.81	8.92
0	1	1	9.56	8.94
1	1	1	8.40	8.46

Resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual. Interprete los efectos con base en intervalos de confianza.

13.27 El efecto sobre el desgaste del motor de la viscosidad del aceite, la temperatura y un aditivo especial se probó usando un diseño factorial 2^3. Dados los siguientes resultados del experimento,

Factor A Viscosidad	Factor B Temperatura	Factor C Aditivo	Rep. 1	Rep. 2
0	0	0	3.7	4.1
1	0	0	4.6	5.0
0	1	0	3.1	2.7
1	1	0	3.4	3.8
0	0	1	3.4	3.6
1	0	1	5.3	4.9
0	1	1	2.4	3.2
1	1	1	4.7	4.1

resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual de la sección 13.4. Interprete los efectos con base en intervalos de confianza.

13.28 Dos analistas, *A* y *B*, desarrollan cultivos de bacterias usando muestras de agua de drenaje y de corrientes de agua limpia. Los cultivos de bacterias crecieron en dos medios: C y CP. El diseño se repitió 3 veces. Los valores *y* dados a continuación son los logaritmos de las poblaciones bacterianas medidas.

Fuente	Analista	Medio	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
Drenaje	A	C	3.54	3.79	3.40
Limpia	A	C	1.85	1.76	1.72
Drenaje	B	C	3.81	3.82	3.79
Limpia	B	C	1.72	1.75	1.55
Drenaje	A	CP	3.63	3.67	3.71
Limpia	A	CP	1.60	1.74	1.72
Drenaje	B	CP	3.86	3.86	4.08
Limpia	B	CP	2.05	1.51	1.70

Analice este experimento usando el procedimiento visual y determine si existe una diferencia entre los dos analistas.

13.29 Construya la tabla de análisis de varianza para el ejemplo de la página 419. [*Sugerencia:* la suma de cuadrados para cualquier tratamiento = (efecto estimado)$^2 \times r \times 2^{n-2}$ para un diseño 2^n.]

13.5 Análisis de superficie de respuesta

La meta de un análisis de superficie de respuesta es usar experimentos diseñados para obtener una respuesta óptima. Los diseños factoriales de dos niveles ayudan a los investigadores a ubicar regiones donde la respuesta es un máximo o, si se desea, un mínimo. Una vez ubicada la región general, debería realizarse otro experimento que permita la estimación de una superficie cuadrática. Entonces, por lo general es posible determinar con mayor precisión el mejor escenario de los factores. La idea general se ilustrará con un ejemplo que incluye dos factores. La **superficie de respuesta** es la superficie trazada por el valor esperado de la repuesta conforme cambian los valores de las dos variables.

Se elige un diseño experimental que está compuesto de **i.** un cuadrado y **ii.** una estrella más un punto central.

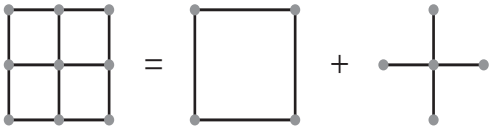


Figura 13.13
Diseño para ajustar una superficie cuadrática en dos variables

Observe que, con solo dos variables, el diseño es el mismo que un diseño factorial 3×3. Pero con tres factores, el cubo tiene 8 puntos y existen 6 puntos estrella más un punto central, lo cual hace un total de 15, no de $27 = 3 \times 3 \times 3$ repeticiones.

Con únicamente dos factores, se ajusta el modelo cuadrático en dos variables x_1 y x_2:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2$$

lo cual brinda una aproximación a la superficie de respuesta.

EJEMPLO **Un diseño de superficie de respuesta para maximizar la producción**

Se produce un compuesto para un proceso de recubrimiento. Se agrega a una receta de otro modo fija y el proceso de recubrimiento está completo. La producción es la variable de respuesta. Dos factores, x_1 y x_2, se identifican como "vitales"; estos son

Factor (x_i)	Rango
Cantidad de aditivo	0–70 gm/kg
Temperatura de reacción	100–180° C

La meta del experimento es mejorar la producción. La empresa requiere que la producción sea mayor que el 95%.

Se efectuó un diseño experimental, cuadrado más estrella y puntos centrales, luego se midió la producción de respuesta.

Corrida	Aditivo	Temperatura	Producción
1	0	100	81
2	70	100	65
3	35	140	92
4	0	180	50
5	70	180	75
6	70	140	75
7	0	140	68
8	35	100	90
9	35	180	77

(*Cortesía de Asit Banerjee*)

Estime la superficie de respuesta y sugiera una buena región dónde operar.

Solución El software *MINITAB* (véase el ejercicio 13.31) proporciona el análisis de regresión

```
Estimated Regression Coefficients for Yield

Term                        Coef     SE Coef       T       P
Constant                  60.2639   18.5242     3.253   0.047
Additive                   0.0417    0.1421     0.293   0.788
Temperature                0.5354    0.2714     1.972   0.143
Additive*Additive         -0.0141    0.0013   -11.269   0.001
Temperature*Temperature   -0.0033    0.0010    -3.467   0.040
Additive*Temperature       0.0073    0.0008     9.424   0.003

S=2.175  R-Sq=98.9%
```

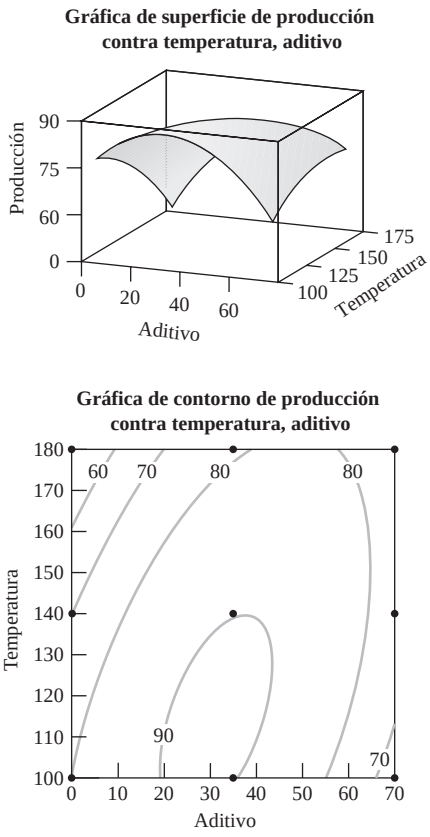


Figura 13.14
Superficie de respuesta estimada para producción

La superficie de respuesta estimada es

$$\hat{y} = 60.2639 + 0.0417\,x_1 + 0.5354\,x_2 - 0.0141\,x_1^2 - 0.0033\,x_2^2 + 0.0073\,x_1\,x_2$$

Por lo general, no es razonable eliminar un término lineal cuando el término cuadrado asociado está en el modelo de superficie de respuesta. La figura 13.14 presenta una gráfica de contorno y una superficie en 3*d*. Hay una pequeña región, cerca de $x_1 = 33$ y $x_2 = 117$, donde la producción estimada es casi máxima. ■

El libro de Box y Draper, que se menciona en la bibliografía, ofrece una excelente introducción a la metodología de las superficies de respuesta.

Ejercicios

13.30 Consulte el ejemplo del recubrimiento de la página 431. Use cálculo para obtener la ubicación de la producción máxima estimada cuando todos los términos se incluyen en el modelo.

13.31 **Análisis de superficie de respuesta con *MINITAB***

Se ilustran los comandos para el ejemplo de recubrimiento con producción de respuesta de la página 431. Comience con Run, Additive, Temperature, Yield en C1-C4.

Cuadro de diálogo:

Stat > DOE > Response Surface. Haga clic en **Define Custom Response . . .**
Escriba *Additive* y *Temperature* en **Factors**. Haga clic en **High/Low** y
escriba 0 y 100 para Additive y 100 y 180 para Temperature.
Haga clic en **OK**. Haga clic en **OK**.

Stat > DOE > Response Surface. Haga clic en **Analyze Response Surface Design**
Escriba *Yield* en **Response**. Haga clic en **Uncoded units**. Elija **Terms**
y luego **full Quadratic**. Haga clic en **OK**. Haga clic en **OK**.

La gráfica de la superficie de respuesta estimada se produce con los comandos

Stat > DOE > Contour/Surface Plots

Haga clic en **Surface plot** y, luego, llene las opciones similares al paso de Analize que ya se mostró.

Repita el análisis del ejemplo, después de agregar un punto central más donde la producción medida es del 93%.

13.32 Consulte el ejercicio 13.31. En el ejemplo del recubrimiento, los investigadores también obtuvieron las nueve respuestas para adhesión. La empresa quiere que la adhesión sea mayor a 45 gramos.

Adhesión	10	48	41	40	39	44	24	31	44

Repita el análisis del ejemplo del recubrimiento de la página 431, pero cambie la respuesta a adhesión.

13.33 ¿Hay alguna región dentro de la región experimental donde la adhesión estimada sea mayor que 45 gramos? Construya una gráfica de contorno para mostrar esta región. Note que *MINITAB* mantiene términos no significativos. Consulte el ejercicio 13.32.

13.6 Confusión en un experimento factorial 2^n

En algunos experimentos, es imposible correr todas las condiciones experimentales requeridas en un bloque. Por ejemplo, si un experimento factorial 2^3 implica 8 combinaciones de pigmentos de pintura, que deban aplicarse a una superficie y cocerse en un horno que aloje tan solo 4 muestras, se hace necesario dividir los ocho tratamientos en 2 bloques (corridas de horno) en cada duplicación. Como se apuntó anteriormente, si el tamaño de bloque es muy pequeño para alojar todos los tratamientos, ello requiere **diseños de bloques incompletos** especiales.

Cuando las condiciones experimentales se distribuyen sobre varios bloques, uno o más de los efectos pueden confundirse (volverse inseparables) con posibles efectos de bloques, es decir, diferencias entre bloques. Por ejemplo, si en el experimento factorial 2^3, al que se refiere el párrafo anterior, se incluyen las condiciones experimentales a, ab, ac y abc en una corrida de horno (bloque 1) y las condiciones experimentales 1, b, c y bc se incluyen en una segunda corrida de horno (bloque 2), entonces, el efecto del bloque, la diferencia entre los dos totales de bloques, está dado por

$$[(a) + (ab) + (ac) + (abc)] - [(1) + (b) + (c) + (bc)]$$

Con respecto a la tabla de signos de la página 411, se observa que esta cantidad es, de hecho, el total del efecto $[A]$, de modo que la estimación del efecto principal del factor A se **confunde** con los bloques. Note que todos los otros efectos factoriales permanecen sin confundir. Para cada otro efecto total existen dos coeficientes +1 y dos coeficientes –1 en cada bloque, de modo que los efectos del bloque se cancelan. Este tipo de argumento también sirve para decidir cuáles condiciones experimentales poner en cada bloque, con la finalidad de confundir un efecto principal o una interacción dados. Por ejemplo, si tuviera que confundir la interacción ABC con los bloques en el ejemplo anterior, se habrían

puesto las condiciones experimentales *a*, *b*, *c* y *abc*, cuyos totales tienen coeficientes +1 en [*ABC*], en un bloque, y las condiciones experimentales 1, *ab*, *ac* y *bc*, cuyos totales tienen coeficientes –1, en otro.

En general, la confusión en un experimento factorial 2^n suele ser mucho más complicada que en el ejemplo recién ofrecido. Para evitar dificultades serias, se requerirá que el número de bloques usado sea una potencia de 2, por decir, 2^p. Se evidencia que el precio pagado por correr un experimento factorial 2^n en 2^p bloques es que un total de $2^p - 1$ efectos se confunden con bloques. Para dejar en claro cuáles efectos se confunden e indicar un método que pueda usarse para confundir solo ciertos efectos y no otros, es útil definir el término *interacción generalizada* del modo siguiente: la **interacción generalizada** de dos efectos es el "producto" de dichos efectos, con la cancelación de letras semejantes. Por consiguiente, la interacción generalizada de *AB* y *CD* es *ABCD*, mientras la interacción generalizada de *ABC* y *BCD* es *ABCBCD*, o *AD*. Para confundir un experimento factorial 2^n en 2^p bloques, puede utilizar el siguiente método: se selecciona cualquier efecto *p* para confundir y se asegura que ninguno sea la interacción generalizada de alguno de los otros seleccionados. Entonces, es posible demostrar que efectos $2^p - (p + 1)$ posteriores se confunden automáticamente con bloques; junto con los *p* efectos originalmente elegidos, esto da un total de $2^p - 1$ efectos confundidos en el experimento. Los efectos confundidos adicionales son, de hecho, las interacciones generalizadas de los *p* efectos originalmente elegidos.

Para ilustrar la construcción de un diseño confundido, divida un experimento factorial 2^4 en 4 bloques, de modo que los efectos deseados se confundan con bloques. En la práctica real, tan solo se suelen confundir las interacciones de orden superior (con la esperanza de que, de cualquier forma, no existan). Puesto que se decidieron 4 bloques, se tiene $2^p = 4$ y $p = 2$, de modo que arbitrariamente se seleccionarán dos interacciones de orden superior para confundir. Si tuviera que seleccionar *ABCD* y *BCD*, entonces, su interacción generalizada, *A*, también se confundiría. Por lo tanto, para evitar confundir algunos efectos principales y tan pocas interacciones bifactoriales como sea posible, se seleccionarán *ABD* y *ACD*, pero note que la interacción *BC* también se confunde. (Observe que es imposible evitar confundir al menos un efecto principal o la interacción bifactorial en este experimento.)

Con la finalidad de asignar las 16 condiciones experimentales a 4 bloques, primero distribúyalas en 2 bloques, de modo que la interacción *ABD* se confunda con bloques. Con respecto a una tabla de signos adecuada, ponga todos los tratamientos cuyos totales tengan "+1" en el renglón para [*ABD*] en un bloque y todos aquellos cuyos totales tengan un "–1" en un segundo bloque, para obtener los siguientes bloques:

Primer bloque:	*a*	*b*	*ac*	*bc*	*d*	*abd*	*cd*	*abcd*
Segundo bloque:	*1*	*ab*	*c*	*abc*	*ad*	*bd*	*acd*	*bcd*

Advierta que cada condición experimental en el primer bloque tiene un *número impar* de letras en común con *ABD*, mientras que cada condición experimental en el segundo bloque tiene un *número par* de letras en común con *ABD*. Esta **regla impar-par** ofrece una forma alternativa de distribuir condiciones experimentales entre 2 bloques para confundir un efecto dado, así como la ventaja de que no requiere la construcción de una tabla de signos completa.

Hasta el momento se confundió la interacción *ABD* al dividir las 16 condiciones experimentales en 2 bloques; ahora se confundirá la interacción *ACD* al dividir cada uno de dichos bloques en 2 bloques de 4 condiciones cada uno. Con la regla impar-par recién descrita (o una tabla de signos), se obtienen los siguientes cuatro bloques:

Bloque 1:	*a*	*bc*	*d*	*abcd*
Bloque 2:	*b*	*ac*	*abd*	*cd*
Bloque 3:	*ab*	*c*	*bd*	*acd*
Bloque 4:	*1*	*abc*	*ad*	*bcd*

Al comparar dichos bloques con una tabla de signos o, de manera equivalente, al aplicar la regla impar-par, al lector se le pedirá verificar, en el ejercicio 13.38, que la interacción *BC* también se confunde con bloques, en tanto que todos los otros efectos principales se dejan sin confundir.

El análisis de un experimento factorial 2^n confundido es similar al de un experimento sin confundir, con la excepción de que las sumas de cuadrados para los efectos confundidos no se calculan, aunque se calcula una suma de cuadrados de bloques, como si el experimento consistiera en *br* bloques, en vez de *b* bloques, en cada una de *r* repeticiones.

Con respecto al ejemplo de un experimento factorial 2^4 con las interacciones *ABD*, *ACD* y *BC* confundidas, así como al usar dos duplicaciones, se tiene el siguiente análisis *dummy* de tabla de varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad
Blocks	7
Efectos principales	4
Interacciones bifactoriales sin confundir	5
Interacciones trifactoriales sin confundir	2
Interacción tetrafactorial	1
Error intrabloque	12
Total	31

La suma de cuadrados para bloques se obtiene, como siempre, al sumar los cuadrados de los 8 totales de bloque, dividir el resultado entre 4 (el número de observaciones en cada bloque) y restar el término de corrección. La suma de cuadrados total y las sumas de cuadrados para los efectos factoriales sin confundir se obtienen de la forma usual, mientras la suma de cuadrados para el **error intrabloque**, una medida de la variabilidad *dentro de bloques*, se obtiene mediante sustracción.

Para ilustrar el análisis de un experimento factorial 2^n confundido, suponga que cada repetición del experimento del conmutador de paso giratorio multidimensional, descrito en la página 412, en realidad se corre en 4 bloques, porque tan solo 4 montajes están disponibles para los 16 conmutadores. (Se supone que el orden de corrida de los bloques se hace aleatorio dentro de cada repetición, así como que la asignación de conmutadores se hace aleatoria dentro de cada bloque.) Si se supone también que las interacciones *ABD*, *ACD* y *BC* se confunden con los bloques, como se muestra en la página 434, se obtienen los siguientes totales de bloque a partir de los datos de la página 412:

	Bloque 1	*Bloque 2*	*Bloque 3*	*Bloque 4*
Repetición 1	3,564	3,488	3,743	3,593
Repetición 2	4,130	3,978	4,056	3,799

Por lo tanto, la suma de cuadrados para bloques está dada por

$$SS(Bl) = \frac{(3{,}564)^2 + (3{,}488)^2 + \cdots + (3{,}799)^2}{4} - 28{,}786{,}975$$
$$= 101{,}240$$

donde el factor de corrección es el mismo que en el análisis de la página 413.

Al copiar la suma de cuadrados total y la suma de cuadrados para los diversos efectos sin confundir, de la tabla de la página 414, se obtiene la tabla de análisis de varianza para el siguiente experimento factorial confundido. En este análisis, los efectos principales *A* y

C de nuevo son significativos en el nivel de 0.01, pero ninguno de los otros efectos principales o interacciones es significativo.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	*F*
Bloques	7	101,240	14,463	1.58
Efectos principales:				
A	1	134,551	134,551	14.68
B	1	4,632	4,632	< 1
C	1	225,624	225,624	24.62
D	1	713	713	< 1
Interacciones bifactoriales sin confundir:				
AB	1	39,410	39,410	4.30
AC	1	18,673	18,673	2.04
AD	1	31,689	31,689	3.46
BD	1	24,698	24,698	2.69
CD	1	81	81	< 1
Interacciones trifactoriales sin confundir:				
ABC	1	39,130	39,130	4.27
BCD	1	14,070	14,070	1.54
Interacción tetrafactorial:				
ABCD	1	385	385	< 1
Error interbloque	12	109,980	9,165	
Total	31	744,876		

Si hay duplicación, parte de la información perdida acerca de los efectos de confusión puede recuperarse mediante una descomposición posterior de las anteriores sumas de cuadrados de bloques. Este análisis consiste en dividir la suma de cuadrados para bloques en un componente para cada uno de los efectos de confusión, un componente para duplicaciones y un componente residual llamado **error interbloque**, que es una medida de la variabilidad *entre bloques*. Al copiar la suma de cuadrados para repeticiones, así como para las de las interacciones *BC*, *ABD* y *ACD* de la tabla de análisis de varianza de la página 414, y copiar las sumas de cuadrados de bloques de la anterior tabla de **análisis de varianza intrabloque**, se obtiene la siguiente tabla de **análisis de varianza interbloque**:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	*F*
Repeticiones	1	77,520	77,520	23.05
Efectos de confusión				
BC	1	1,001	1,001	< 1
ABD	1	30	30	< 1
ACD	1	12,601	12,601	3.75
Error interbloque	3	10,088	3,363	
Total (bloques)	7	101,240		

Observe que el **error interbloque** se obtiene mediante sustracción y que las razones F se determinan al dividir los cuadrados medios para los efectos de confusión, así como los cuadrados medios para repeticiones mediante los cuadrados medios para el error interbloque. Solo la prueba F para repeticiones es significativa (en el nivel de 0.05). El pequeño número de grados de libertad para el error interbloque implica que la sensibilidad de dichas pruebas de significancia es *muy pobre*; de hecho, rara vez es redituable realizar este tipo de análisis interbloque, a menos que el número de repeticiones sea relativamente grande.

El libro de Box, Hunter y Hunter, que se menciona en la bibliografía, presenta un análisis extenso acerca de la confusión en diseños factoriales de dos niveles y diseños factoriales fraccionarios, que se tratan a continuación.

13.7 Duplicación fraccional

En estudios sobre líneas de producción complejas, es posible encontrar procesos químicos en las industrias petrolera, de plásticos o metalúrgica, así como procesos físico-químicos en las industrias de electrónicos o de tecnología espacial. En muchos estudios de ingeniería, los investigadores a menudo enfrentan un gran y desconcertante arreglo de variables interrelacionadas. Los principios de la experimentación factorial tratados hasta el momento en este capítulo ayudan a ordenar dichas variables, a descubrir cuáles de ellas tienen la mayor influencia sobre el proceso en consideración y a encontrar qué importantes interrelaciones pueden existir.

Sin embargo, hay algunas limitaciones serias al estudio simultáneo de un gran número de factores. Incluso si a cada factor se le asignan tan solo 2 niveles, una repetición de un experimento de seis factores requiere 64 observaciones; hay 128 observaciones en una repetición de un experimento de siete factores y 1,024 observaciones en una duplicación de un experimento de 10 factores. Las limitaciones económicas y prácticas de tales grandes números hacen necesario buscar formas en las cuales el tamaño de los experimentos factoriales pueda mantenerse dentro de cotas manejables. Desde luego, debería enfatizarse que no hay un sustituto para la planeación cuidadosa preliminar que, junto con la comprensión ingenieril, pueda resultar en la eliminación de muchos factores innecesarios.

No obstante, a pesar de la mayoría de la planeación preliminar cuidadosa, con frecuencia es difícil evitar tener que incluir hasta seis o 10 (o más) factores en un solo experimento. Una forma de reducir el tamaño de tal experimento sería desglosarlo en varias partes, así como que cada una incluya la variación deliberada de un factor, mientras los demás se mantienen fijos. Ello tendría la indeseable consecuencia de que no se podría estudiar alguna de las interacciones. Incluso si se tuviera que incluir la mitad de los factores en una parte y la otra mitad en otra, como al sustituir un experimento de 10 factores (que requieren 1,024 observaciones) por dos experimentos de cinco factores (donde cada uno requiere 32 observaciones), cualquier interacción entre factores en la primera parte y factores en la segunda parte se perdería de manera irrecuperable. Es posible superar algunas de dichas dificultades al observar que la mayoría de las veces no se está interesado en *todas* las interacciones. Por ejemplo, se puede efectuar tan solo una fracción de un factorial 2^n y aún así obtener la mayoría de la información deseada, por decir, acerca de los efectos principales e interacciones bifactoriales (pero no las interacciones superiores).

Los principios que intervienen en la **duplicación factorial**, esto es, en la realización de únicamente una fracción de un experimento factorial 2^n completo, son similares a las utilizadas en la confusión. Para obtener una **media duplicación**, uno selecciona únicamente uno de los 2 bloques en que se dividieron las condiciones experimentales al confundir un efecto. Para obtener una **duplicación cuarta**, se selecciona solo uno de los 4 bloques en que se dividieron las condiciones experimentales al confundir 2 efectos y así sucesivamente. En contraste con un experimento confundido, como se estudia en la sección 13.6, se encuentra que, en una duplicación fraccional, *los efectos se confunden, no con bloques, sino entre sí mismos*.

Para ilustrar, suponga que tan solo las condiciones experimentales a, b, c y abc se incluyen en una duplicación media de un experimento factorial 2^3. (Este es un bloque de un experimento factorial 2^3, con la interacción abc confundida.) Al considerar la tabla de signos de la página 411 con todas las columnas cruzadas, excepto las correspondientes a a, b, c y abc, se tiene que el total de efecto para el factor A ahora está dado por

$$[A] = (a) - (b) - (c) + (abc)$$

Si se escribe

$$(a) = \sum_{l=1}^{r} y_{100l}, \quad (b) = \sum_{l=1}^{r} y_{010l}, \ldots,$$

y se sustituye y_{ijkl} por las expresiones dadas por la ecuación modelo de la página 400,

$$[A] = -4r[\alpha_0 - (\beta\gamma)_{00}] + \varepsilon$$

donde ε es el valor de una variable aleatoria que tiene media cero. (Véase el ejercicio 13.45.) Por lo tanto, se encuentra que $[A]$ mide el efecto principal del factor A, así como la interacción BC, de modo que dichos dos efectos se vuelven inseparables, o confundidos. Note también que, en la tabla de signos reducida (que tiene columnas que solo corresponden a a, b, c y abc), los signos para $[A]$ y $[BC]$ son idénticos; por consiguiente, $[A] = [BC]$. En el ejercicio 13.46, al lector se le pedirá demostrar que, para la duplicación fraccional dada, el efecto principal para el factor B se confunde igualmente, o se le da un **alias**, con la interacción AC, mientras que el efecto principal del factor C se confunde, o se le da un alias, con la interacción AB. La interacción ABC no se puede estimar.

Con diseño cuidadoso, por lo general es posible confundir todos los efectos principales y las interacciones bifactoriales *solo* con interacciones de orden superior. Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo, donde se construirá una duplicación media de un factorial 2^5. Primero seleccione un efecto (por lo general, una interacción de orden superior) para dividir el experimento en dos bloques, como en la confusión. Al efecto elegido se le llama **contraste definitorio**, que no puede estimarse en absoluto mediante la duplicación fraccional. Cualquier otro efecto es un alias con otro efecto; a saber, su interacción generalizada (véase la página 434) con el contraste definitorio. Por ello, si el contraste definitorio es $ABCDE$, el efecto principal para el factor A tiene la interacción de cuatro factores $BCDE$ como su alias, BC y ADE son un par alias y así sucesivamente. Como se vio, tan solo el efecto combinado (la suma o diferencia de los efectos alias) podría estimarse en el experimento. Sin embargo, si se supone que no hay interacciones de orden superior, uno puede atribuir el efecto del par alias BC y ADE por completo a la interacción bifactorial BC, atribuir el efecto del par alias A y $BCDE$ por completo al efecto principal del factor A, etcétera. Una lista completa de los alias en una duplicación media de un experimento factorial 2^5, que tiene el contraste definitorio $ABCDE$, es la siguiente:

A y $BCDE$	B y $ACDE$	C y $ABDE$	D y $ABCE$
E y $ABCD$	AB y CDE	AC y BDE	AD y BCE
AE y BCD	BC y ADE	BD y ACE	BE y ACD
CD y ABE	CE y ABD	DE y ABC	

Advierta que ningún efecto principal o interacción bifactorial es alias con otro efecto principal u otra interacción bifactorial.

Las 16 condiciones experimentales a incluir en la duplicación media están dadas por las de cualquiera de los 2 bloques contenidos al confundir el contraste definitorio. Al elegir "pares" en la regla impar-par, es decir, las condiciones que tienen un número par de letras

en común con el contraste definitorio *ABCDE*, se obtiene la siguiente duplicación media:

1	*ad*	*ae*	*de*
ab	*bd*	*be*	*abde*
ac	*cd*	*ce*	*acde*
bc	*abcd*	*abce*	*bcde*

Para ir un paso más allá, se ilustra cómo construir una duplicación cuarta del factorial 2^5 dado. Esto se hará al dividir la anterior duplicación media a la mitad y confundir la interacción trifactorial *ABC*. De nuevo, al usar pares, se obtienen las siguientes 8 condiciones experimentales:

1	*de*	*ab*	*abde*
ac	*acde*	*bc*	*bcde*

Como *DE*, la interacción generalizada de los dos efectos confundidos, también es confundida, ahora se tienen los 3 contrastes definitorios, *ABCDE*, *ABC* y *DE*. Ninguno de dichos efectos puede estimarse en la duplicación cuarta y cada otro efecto es alias de sus 3 interacciones generalizadas con los 3 contrastes definitorios. Los alias completos son los siguientes:

Conjuntos de alias			
A	*BCDE*	*BC*	*ADE*
B	*ACDE*	*AC*	*BDE*
C	*ABDE*	*AB*	*CDE*
D	*ABCE*	*ABCD*	*E*
AD	*BCE*	*BCD*	*AE*
BD	*ACE*	*ACD*	*BE*
CD	*ABE*	*ABD*	*CE*

Esta duplicación cuarta se ofrece únicamente como ilustración; difícilmente parecería útil en la práctica real, debido a la desesperante creación de alias de los efectos principales y las interacciones bifactoriales. No obstante, las duplicaciones cuartas de experimentos de seis y siete factores (e incluso octavos de duplicación de experimentos de siete y ocho factores) a menudo ofrecen mucha información útil.

El análisis de un factorial fraccional es prácticamente el mismo que el de un experimento factorial completamente duplicado. Dada la fracción $1/2^p$ de un factorial 2^n, hay 2^{n-p} condiciones experimentales, donde se utiliza el método de Yates como si el experimento fuera un 2^{n-p} factorial. Se debe tener cierto cuidado al ordenar las condiciones experimentales en un orden estándar modificado, como se indica en el ejercicio 13.43.

Cuando se trata con factoriales fraccionarios, existe el problema de obtener una estimación del error experimental. Por ejemplo, en la duplicación media de un factorial 2^5 descrito anteriormente, la descomposición de la suma de cuadrados total, que tiene 15 grados de libertad, genera sumas de cuadrados para efectos principales (5 grados de libertad) y sumas de cuadrados para interacciones bifactoriales (10 grados de libertad), mas no componente (0 grados de libertad) para el error experimental.

En una situación como esta, y en todos los otros casos donde el número de grados de libertad para el error es pequeño, es mejor incluir una cantidad limitada de duplicación. Lo anterior puede lograrse al seleccionar aleatoriamente muchas condiciones experimentales y al realizar observaciones adicionales correspondientes a dichas condiciones. Más aún, si se supone que no hay interacciones de orden superior, el total de las sumas de cuadrados correspondientes a interacciones de orden superior *que no tienen alias con efectos principales o interacciones de orden inferior* puede atribuirse al error y utilizarse en el denominador de la prueba *F*. (Véase el ejercicio 13.44.) De esta forma, se puede usar la duplicación oculta inherente a la mayoría de los experimentos de factorial grande.

Para resumir, la duplicación fraccional es útil siempre que el número de factores a incluir en un experimento sea grande y no sea económicamente factible incluir todas las condiciones experimentales posibles. La reducción en tamaño (y, por ende, en costo) de un experimento de duplicación fraccional merma parcialmente con la pérdida de información causada por los alias, así como por las dificultades inherentes al estimar el error experimental. Un estudio más detallado de la duplicación fraccional, que incluye duplicaciones fraccionales de experimentos 3^n y una variedad de otros diseños, se encuentra en el libro de W. G. Cochran y G. M. Cox que se menciona en la bibliografía.

Ejercicios

13.34 Un experimento factorial 2^5, que tiene los factores *A, B, C, D* y *E*, se correrá en varios bloques. Demuestre cuáles tratamientos se asignan a cada bloque si

a) hay 2 bloques, con la interacción *ACDE* confundida;

b) hay 4 bloques, con las interacciones *BDE* y *ABCE* confundidas. ¿Qué otro efecto o efectos factorial(es) también se confunden?

13.35 Mencione las condiciones experimentales incluidas en cada bloque, si un experimento factorial 2^4 debe confundirse

a) en dos bloques sobre *ABCD*;

b) en cuatro bloques sobre *ABC* y *BCD*.

13.36 Mencione las condiciones experimentales incluidas en cada bloque si un experimento factorial 2^6 debe confundirse en 8 bloques sobre *ABDE*, *BCDF* y *ABC*. ¿Qué otros efectos factoriales se confunden?

13.37 Cuatro nuevos medicamentos deben investigarse para determinar su efectividad como tranquilizantes, individualmente y en combinación con los demás. A cada paciente se le suministra una dosis regular de uno de los 16 tranquilizantes formado a partir de dichos medicamentos (incluido un placebo que corresponde al nivel 0 para cada medicamento) y, después de un periodo de dos semanas, 5 psiquiatras juzgaron el efecto de tales tranquilizantes sobre la estabilidad emocional de cada paciente (en una escala de 1 a 5). Para mantener la carga de trabajo del personal dentro de límites razonables, en este experimento se usaron 2 hospitales, luego el personal de cada hospital seleccionó a 8 pacientes para cada ensayo (replica); por lo tanto, el experimento incluyó 2 replicas de 2 bloques cada uno, con la interacción *ABCD* confundida. Los resultados de los ensayos de 2 semanas fueron los siguientes:

Primer hospital			Segundo hospital		
Combinación tratamiento	Calificación media		Combinación tratamiento	Calificación media	
	Ensayo 1	Ensayo 2		Ensayo 1	Ensayo 2
1	2.0	2.6	*a*	2.8	2.6
ab	3.8	3.4	*b*	3.6	2.0
ac	4.2	4.8	*c*	2.4	1.8
bc	4.8	4.0	*abc*	4.0	3.8
ad	1.8	2.4	*d*	1.8	2.2
bd	3.4	3.8	*abd*	1.6	2.0
cd	4.6	2.8	*acd*	3.6	2.4
abcd	4.2	4.6	*bcd*	3.6	3.8

Si una calificación alta indica progreso satisfactorio, ¿cuál combinación (o combinaciones) de medicamento parecería(n) ser la(s) más prometedora(s)? Realice un análisis de varianza intrabloque para poner a prueba efectos significativos.

13.38 Verifique que, en el ejemplo de la página 435, todos los totales de tratamientos que tienen +1 como coeficiente en [*BC*] están en los bloques 1 y 4, así como que todos los totales de tratamientos que tienen –1 como coeficiente en [*BC*] están en los bloques 2 y 3, así como que, por lo tanto, la interacción *BC* está confundida con los bloques.

13.39 Demuestre que la regla de impar-par para asignar tratamientos a bloques, dada en la página 434, es equivalente al método descrito en el ejercicio 13.20.

13.40 Con respecto al ejercicio 13.35, mencione los conjuntos de alias si un experimento consiste en

a) una media duplicación de un experimento factorial 2^4 con *ABCD* confundido;

b) una duplicación cuarta de un experimento factorial 2^4 con *ABC* y *BCD* confundidos.

13.41 Construya una media duplicación de un factorial 2^6 que tenga el contraste definitorio *ABCDEF*. Mencione los 32 tratamientos en el bloque que contiene la condición experimental 1 y muestre los pares de alias.

13.42 Diseñe un experimento que consista en una duplicación cuarta de un factorial 2^7 con *ABCDE, ABCFG* y *DEFG* confundidos, si debe incluirse la condición experimental con cada factor en el nivel 0. Muestre también los conjuntos de alias.

13.43 Con respecto al ejercicio 13.41, puede definirse un **orden estándar modificado** para las 32 combinaciones de tratamiento en la media duplicación del modo siguiente: primero mencione las 32 combinaciones de tratamiento correspondientes a los cinco factores *A*, *B*, *C*, *D* y *E,* en orden estándar. Luego agregue la letra *f* a 16 de dichas combinaciones de tratamientos, de modo que la lista contenga los mismos que el bloque elegido para la duplicación media.

a) Use este método para listar las combinaciones de tratamiento obtenidas en el ejercicio 13.41, en orden estándar modificado.

b) Generalice la regla anterior al ordenar las combinaciones de tratamiento en orden estándar modificado, de modo que se aplique a una duplicación media de un experimento factorial 2^n. (Para una duplicación $1/2^p$ fraccional de un factorial 2^n, puede obtenerse un orden estándar modificado al notar que cualquier bloque elegido contiene un subconjunto de $n - p$ letras que forman una duplicación completa de un 2^{n-p} factorial. Entonces, el orden estándar modificado se obtiene al usar solamente dichas letras, así como, más adelante, al agregar las restantes p letras para obtener las combinaciones de tratamiento requeridas.)

13.44 Los factores siguientes deben estudiarse en una duplicación media de un experimento factorial 2^6 (contraste definitorio *ABCDEF*), diseñado para evaluar varios químicos como insecticidas:

Factor	Nivel 0	Nivel 1
A. BMC	0%	5%
B. Malatión	3	6
C. Tedión	1	2
D. Clordano	2	5
E. Lindano	1	4
F. Pelitre	2	4

Cada unidad experimental consiste en 10 insectos, y las vidas promedio (en segundos) después de aplicación de los insecticidas respectivos son las siguientes, en el orden aleatorio en el que se obtuvieron:

ce	181	*acdf*	162	*bd*	135	*abdf*	131
ae	172	1	182	*df*	171	*ab*	136
abef	140	*bf*	171	*acef*	159	*bcde*	105
bcdf	165	*cf*	176	*bc*	179	*abcdef*	109
acde	139	*be*	187	*ac*	165	*af*	176
ef	186	*abce*	131	*bcef*	181	*ad*	150
de	164	*abcf*	125	*cdef*	163	*abde*	115
abcd	112	*adef*	158	*bdef*	128	*cd*	166

a) Escriba los pares de alias.

b) Ordene los resultados en orden estándar modificado (véase el ejercicio 13.43) y use el método de Yates para encontrar los totales del efecto.

c) Identifique los totales del efecto del modo siguiente. En la última columna de la tabla de Yates, escriba las 32 combinaciones $[I], [A], [B], [AB], \ldots, [ABCDE]$ en orden estándar. Cada una de ellas tiene alias con otra; identifique los pares de alias usando

el efecto principal o la interacción de orden inferior. (Por ejemplo, *ABCDE* tiene alias con *F*: identifique el efecto total [*ABCDE*] como el del efecto principal *F*.) Note que 10 de los pares de alias son interacciones trifactoriales con alias con interacciones trifactoriales: márquelas como "error".

d) Obtenga los cuadrados medios y complete el análisis de varianza. Advierta que el cuadrado medio del error, que tiene 10 grados de libertad, es el promedio de los cuadrados medios de los 10 efectos marcados con "error".

13.45 Verifique la expresión obtenida para [*A*] en la página 438.

13.46 Al duplicar los pasos indicados en la página 438, demuestre que, en el diseño dado, el efecto principal para el factor *B* se confunde con la interacción *AC*. (*Sugerencia:* Exprese [*B*] y [*AC*] en términos de los parámetros del modelo.)

13.47 En el ejercicio 13.13 de las páginas 425-426, suponga que únicamente una mitad de las duplicaciones puede realizarse en el tiempo disponible. Construya la duplicación media que tenga el contraste definitorio *ABCD*. Con los datos adecuados de Rep. 1, junto con repeticiones de las condiciones experimentales 1, *ab*, *bc* y *abcd*, tomadas de Rep. 2, realice un análisis de esta duplicación media, luego identifique aquellos efectos atribuibles al "error". [*Sugerencia:* Cada uno de los 4 pares de tratamientos duplicados ofrece un grado de libertad adicional para error y aporta $(y_1 - y_2)^2/2$ a la suma de cuadrados del error, donde y_1 es la observación que resulta de aplicar el tratamiento en la primera duplicación y y_2 es la observación correspondiente en la segunda duplicación.]

Sí y no

Sí

1. Siempre que sea posible, haga aleatoria la asignación de tratamientos en un diseño factorial.
2. Siempre cree una presentación gráfica de los datos de diseños 22 y 23, junto con intervalos de confianza para los efectos principales y las interacciones.

No

1. No acepte de manera rutinaria el análisis del diseño factorial presentado en una salida de computadora. En vez de ello, inspeccione los residuos en busca de valores atípicos y falta de normalidad de moderada a severa. Una gráfica de valores normales es útil si hay aproximadamente más de 20 residuos, lo cual quizá sugiera una transformación.

Ejercicios de repaso

13.48 Un experimento de lanzador de cohetes está pobremente diseñado si no se duplica, pues sería imposible someter a prueba si existe una interacción entre los lanzadores y los combustibles de los cohetes. Suponga que se realizan dos duplicaciones, con los siguientes resultados:

		Combustible I	*Combustible II*	*Combustible III*	*Combustible IV*
Rep. 1	*Lanzador X*	62.5	49.3	33.8	43.6
	Lanzador Y	40.4	39.7	47.4	59.8

		Combustible I	*Combustible II*	*Combustible III*	*Combustible IV*
Rep. 2	*Lanzador X*	66.8	51.1	40.1	49.2
	Lanzador Y	47.7	38.2	50.6	64.3

Realice un análisis de varianza adecuado y pruebe la presencia de una interacción.

13.49 Se realiza un estudio para medir el efecto de 3 diferentes ablandadores de carne sobre la pérdida de peso de filetes que tienen los mismos pesos iniciales (antes de cocerse). Los efectos de las temperaturas de cocción y los tiempos de cocción también se midieron al efectuar un experimento $3 \times 2 \times 2$ factorial con 3 repeticiones. Los resultados son los siguientes:

Ablandador	Tiempo de cocción (minutos)	Temperatura de cocción (°F)	Pérdida peso (onzas)		
			Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
A	20	350	1.5	1.3	1.4
A	20	400	1.6	1.4	1.5
A	30	350	1.7	1.8	1.7
A	30	400	1.8	1.9	2.0
B	20	350	1.9	2.1	2.0
B	20	400	2.2	2.4	2.5
B	30	350	2.6	2.3	2.4
B	30	400	2.6	2.7	2.5
C	20	350	0.9	0.8	0.8
C	20	400	1.1	1.0	0.9
C	30	350	0.8	0.9	1.0
C	30	400	1.2	1.0	1.1

a) Analice este experimento, primero, como una clasificación bidireccional con 12 tratamientos y 3 repeticiones (bloques).

b) Complete el análisis al calcular las sumas de cuadrados correspondientes a los diversos efectos principales y las interacciones.

c) Presente los resultados en una tabla de análisis de varianza e interprete el experimento.

13.50 Se realiza un experimento para determinar los efectos de ciertos elementos de aleación sobre la ductilidad de un metal, de donde se obtienen los siguientes resultados:

Níquel	Carbono	Manganeso	Resistencia a la rotura (ft-lb)		
			Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
0.0%	0.3%	0.5%	36.7	39.6	38.2
0.0	0.3	1.0	47.5	43.5	45.9
0.0	0.6	0.5	40.6	36.8	36.0
0.0	0.6	1.0	41.1	45.8	46.4
4.0	0.3	0.5	37.8	32.7	31.6
4.0	0.3	1.0	34.2	37.2	36.5
4.0	0.6	0.5	39.5	41.7	39.1
4.0	0.6	1.0	46.4	43.7	49.4

Realice un análisis de varianza adecuado e interprete los resultados.

13.51 Dadas las dos duplicaciones de un experimento 2×3 factorial, calcule las tablas de análisis de varianza usando las fórmulas de las páginas 393 y 394, en vez de las fórmulas rápidas en el ejemplo.

Factor A	Factor B	Rep. 1	Rep. 2
1	1	29	35
1	2	15	17
1	3	14	22
2	1	15	13
2	2	27	25
2	3	16	24

13.52 Dadas las siguientes observaciones,

Factor A	Factor B	Rep.1	Rep.2
0	0	11	7
1	0	16	14
0	1	10	12
1	1	19	11

resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual dado en la sección 13.4. Interprete los efectos con base en los intervalos de confianza.

13.53 Con respecto al ejemplo de la página 416, suponga que se efectúa una tercera repetición.

	Temperatura	*pH*	Rep. 3
1	300	2	9
a	350	2	23
b	300	3	16
ab	350	3	25

Analice el experimento usando las 3 duplicaciones, de acuerdo con el procedimiento visual dado en la sección 13.4. Interprete los efectos con base en los intervalos de confianza.

13.54 Una nueva máquina de alta tecnología experimenta problemas para unir dos piezas de hoja metálica. Los dos factores considerados primero son la presión (baja/alta) y la temperatura de la bomba baja/alta. La respuesta es el diámetro (mm) de una junta con forma de botón, que es una medida indirecta de la resistencia.

Presión	Temperatura	Rep.1	Rep.2
0	0	8	12
1	0	16	22
0	1	5	11
1	1	16	21

Resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual. Interprete los efectos con base en intervalos de confianza.

13.55 Un ingeniero especializado estudió las propiedades mecánicas de una resina en diferentes condiciones de operación para equipo de moldeado por inyección. La respuesta es la resistencia a la tensión (unidades codificadas). Los factores son niveles de fluido supercríticos (wt%), tamaño de disparo (mm) y rapidez de inyección (%).

Factor A Contenido (wt%)	Factor B Tamaño (mm)	Factor C Rapidez (%)	Rep.1	Rep.2
0	0	0	41.8	42.2
1	0	0	44.5	43.9
0	1	0	56.5	56.3
1	1	0	57.3	56.5
0	0	1	43.4	42.7
1	0	1	42.5	43.1
0	1	1	56.5	55.3
1	1	1	56.5	55.6

Resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual. Interprete los efectos con base en intervalos de confianza.

13.56 Dados los siguientes resultados de un experimento factorial 2^3,

Factor A	Factor B	Factor C	Rep. 1	Rep. 2
0	0	0	13.8	14.6
1	0	0	10.8	8.4
0	1	0	9.0	9.8
1	1	0	10.1	10.9
0	0	1	14.4	13.6
1	0	1	6.2	8.6
0	1	1	7.7	7.9
1	1	1	9.0	8.2

resuma el experimento de acuerdo con el procedimiento visual dado en la sección 13.4. Interprete los efectos con base en los intervalos de confianza.

13.57 Con respecto al ejercicio 13.53, cree la tabla de análisis de varianza.

13.58 Con respecto al ejercicio 13.56, cree la tabla de análisis de varianza.

13.59 ¿Cuál es el mayor número de bloques en los que uno puede realizar un experimento factorial 2^6 sin confundir alguno de los efectos principales?

13.60 Suponga que, en el ejercicio 13.11 de la página 424, el juez califica las bebidas gaseosas en conjuntos de 4, con un periodo de descanso entre ellas, y que el experimento en realidad se efectúa de modo que cada duplicación consiste en 2 bloques con *ABC* confundido. Realice un análisis intrabloque de los datos.

13.61 Suponga que, en el ejercicio 13.12 de la página 425, tan solo pueden probarse 8 muestras en cualquier turno y que el experimento en realidad se efectúa, de modo que cada duplicación consiste en 4 bloques con *ABC*, *ADE* y *BCDE* confundidos.

a) Si, para cada factor, los niveles 0 y 1 son los valores menor y mayor, construya una tabla que muestre cuáles condiciones experimentales van en cada uno de los cuatro bloques.

b) Realice un análisis intrabloque del experimento.

13.62 Con respecto al ejercicio 13.34, suponga que, en cada caso, el bloque que contiene la combinación de tratamiento 1 se elige como una duplicación fraccional de un factorial 2^5.

a) Muestre los pares de alias en la duplicación media resultante.

b) Muestre los conjuntos de alias en la duplicación cuarta resultante. (En la práctica debería usarse selección aleatoria para elegir el bloque que se va a incluir en una duplicación fraccional.)

13.63 En el ejercicio 13.14, que viene en la página 426, construya y analice la duplicación media que tiene el contraste definitorio *ABCDE*; use los resultados experimentales adecuados de Rep. 1.

13.64 Con respecto al ejemplo de la página 403, concerniente al mejoramiento en la seguridad de un arrancador, también se registró el tiempo para alcanzar la presión máxima. Se realizan dos repeticiones del diseño factorial y se registran los tiempos para alcanzar la presión máxima. Analice los resultados de este experimento.

			Tiempo (milisegundos)	
A	*B*	*C*	Rep. 1	Rep. 2
Iniciador 1	Polvo	Mc 1	54.02	49.64
Iniciador 1	Pastilla	Mc 1	60.74	70.66
Iniciador 1	Polvo	Mc 2	37.56	43.72
Iniciador 1	Pastilla	Mc 2	46.40	42.04
Iniciador 1	Polvo	Mc 3	40.54	41.60
Iniciador 1	Pastilla	Mc 3	50.56	45.44

(continúa en la siguiente página)

(continúa de la página 445)

A	B	C	Tiempo (milisegundos) Rep. 1	Rep. 2
Iniciador 1	Polvo	Mc 4	47.08	44.28
Iniciador 1	Pastilla	Mc 4	47.68	60.22
Iniciador 2	Polvo	Mc 1	47.00	58.74
Iniciador 2	Pastilla	Mc 1	51.30	53.96
Iniciador 2	Polvo	Mc 2	59.82	45.66
Iniciador 2	Pastilla	Mc 2	52.20	57.82
Iniciador 2	Polvo	Mc 3	68.46	59.86
Iniciador 2	Pastilla	Mc 3	82.78	57.16
Iniciador 2	Polvo	Mc 4	75.14	90.82
Iniciador 2	Pastilla	Mc 4	82.38	75.38
Iniciador 3	Polvo	Mc 1	35.78	30.34
Iniciador 3	Pastilla	Mc 1	56.06	38.30
Iniciador 3	Polvo	Mc 2	20.60	22.18
Iniciador 3	Pastilla	Mc 2	21.38	21.50
Iniciador 3	Polvo	Mc 3	45.06	43.18
Iniciador 3	Pastilla	Mc 3	50.24	56.74
Iniciador 3	Polvo	Mc 4	44.54	69.96
Iniciador 3	Pastilla	Mc 4	63.42	49.66

Términos clave

Alias 438
Análisis de varianza interbloque 436
Análisis de varianza intrabloque 436
Confusión 424
Contraste definitorio 438
Diseño de bloques incompletos 433
Duplicación cuarta 437
Duplicación factorial 437
Ecuación del modelo para un experimento de dos factores 392
Ecuación del modelo para un experimento factorial 2^3 410
Ecuación del modelo para un experimento trifactorial 400
Efectos principales 400
Error de interbloque 436
Error intrabloque 435
Experimento de dos factores 391
Experimento factorial 392
Experimento factorial 2^n 409
Experimento factorial completo 392
Experimento multifactorial 399
Factores 391
Gráfica media normal 415
Interacción 392
Interacción generalizada 434
Media duplicación 437
Método de Yates 413
Niveles de factores 391
Orden estándar 410
Regla impar-par 434
Suma de cuadrados de la interacción 394
Superficie de respuesta 430
Tabla de signos 411
Total de efecto 411

CAPÍTULO 14

PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

La mayoría de los métodos de inferencia que se han estudiado aquí se basan en la suposición de que las observaciones provienen de poblaciones normales. Si este es el caso, dichos métodos extraen toda la información disponible en una muestra y, por lo general, alcanzan la mejor precisión posible. Sin embargo, puesto que hay muchas situaciones donde es dudoso si la suposición de normalidad puede satisfacerse, los estadísticos desarrollaron técnicas alternativas basadas en suposiciones menos rigurosas, las cuales ahora se conocen como pruebas no paramétricas.

De las diversas pruebas no paramétricas desarrollada en años recientes, la prueba del signo se presenta en la sección 14.2; las pruebas basadas en sumas de rangos se estudian en la sección 14.3; un coeficiente de correlación basado en el rango se introduce en la sección 14.4; una prueba de aleatoriedad se examina en la sección 14.5; las pruebas de bondad del ajuste se estudian en la sección 14.6.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

14.1 Introducción 447

14.2 La prueba del signo 447

14.3 Pruebas de sumas de rangos 449

14.4 Correlación basada en rangos 453

14.5 Pruebas de aleatoriedad 455

14.6 Las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling 458

Ejercicios de repaso 461

Términos clave 462

14.1 Introducción

En este capítulo se extiende la opción de los métodos estadísticos disponibles para inferencias concernientes a una o más poblaciones. La suposición de una población normal subyace a la mayoría de los "métodos estándar" estudiados en los capítulos anteriores, pero con frecuencia resulta difícil verificar dicha suposición tentativa, sobre todo cuando los tamaños de muestra son pequeños. Aquí se introducen pruebas que dependen tan solo de relaciones de orden entre las observaciones. Por consiguiente, debe suponerse mucho menos acerca de la forma de las poblaciones subyacentes. La principal ventaja de tales **pruebas no paramétricas** es que se realizan inferencias exactas cuando no pueden satisfacerse las suposiciones subyacentes a los llamados métodos estándar. Cuando se satisface la suposición normal, las pruebas estándar tendrán más poder. No obstante, la asimetría u otros alejamientos de la normalidad no surtirán efecto sobre la distribución muestral de algún estadístico no paramétrico, cuando la hipótesis nula prevalezca. Más aún, este poder por lo general es satisfactorio aun cuando las poblaciones se desvíen de la normalidad.

Además, las pruebas no paramétricas se aplican aun cuando la elección de una escala numérica particular de medición sea arbitraria. Sin embargo, su valor más fuerte es el hecho de que el nivel de significancia es exacto incluso cuando las poblaciones son bastante anormales.

14.2 La prueba del signo

En esta sección se describirán una alternativa no paramétrica a la prueba t de una muestra, la prueba t de muestra pareada y las pruebas de muestra grande correspondientes. Como alternativa a la prueba t de una muestra, o la prueba de muestra grande correspondiente, la **prueba del signo** se aplica cuando se muestrea una población simétrica continua, de modo que la probabilidad de obtener un valor muestral menor que la media y la probabilidad de

obtener un valor muestral mayor que la media son ambos $\frac{1}{2}$. De manera más general, puesto que generalmente la simetría es difícil de verificar con tamaños muestrales pequeño o moderado, es posible formular la hipótesis en términos de la mediana poblacional $\tilde{\mu}$. Para probar la hipótesis nula $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ contra una alternativa adecuada sobre la base de una muestra aleatoria de tamaño n, se sustituye cada valor muestral mayor que $\tilde{\mu}_0$ con un signo más y cada valor muestral menor que $\tilde{\mu}_0$ con un signo menos, luego se prueba la hipótesis nula de que dichos signos, más y menos, son los resultados de ensayos binomiales con $p = \frac{1}{2}$. Si un valor muestral es igual a $\tilde{\mu}_0$, lo cual bien puede ocurrir, pues los valores de variables aleatorias continuas prácticamente se redondean siempre, entonces se descarta.

Para efectuar este tipo de prueba, cuando la muestra es pequeña, se refiere directamente a una tabla de probabilidades binomiales como la tabla 1 que viene al final del libro; cuando la muestra es grande, se utiliza la prueba descrita en la sección 10.2.

EJEMPLO **Cómo realizar una prueba del signo**

Los siguientes datos constituyen una muestra aleatoria de 15 mediciones de la clasificación de octano de cierto tipo de gasolina:

99.0	102.3	99.8	100.5	99.7	96.2	99.1	102.5
103.3	97.4	100.4	98.9	98.3	98.0	101.6	

Pruebe la hipótesis nula $\tilde{\mu} = 98.0$ contra la hipótesis alternativa $\tilde{\mu} > 98.0$ en el nivel de significancia 0.01.

Solución Puesto que uno de los valores muestrales es igual a 98.0 y debe desecharse, el tamaño de muestra para la prueba del signo tan solo es $n = 14$.

1. *Hipótesis nula:* $\tilde{\mu} = 98.0$ ($p = \frac{1}{2}$)
   Hipótesis alternativa: $\tilde{\mu} > 98.0$ ($p > \frac{1}{2}$)
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* el criterio puede basarse en el número de signos más o el número de signos menos. Al usar el número de signos más, denotados con x, se rechaza la hipótesis nula, si la probabilidad de obtener x o más signos más es menor que o igual a 0.01.
4. *Cálculos:* sustituya cada valor mayor que 98.0 con un signo más y cada valor menor que 98.0 con un signo menos; los 14 valores de muestra dan como resultado

   $$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$$

   Por lo tanto, $x = 12$ y la tabla 1 muestra que, para $n = 14$ y $p = 0.50$, la probabilidad de $X \geq 12$ es $1 - 0.9935 = 0.0065$.
5. *Decisión:* puesto que 0.0065 es menor que 0.01, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que la mediana de la clasificación de octano del tipo dado de gasolina supera los 98.0. ■

La prueba del signo también sirve como alternativa no paramétrica a la prueba t pareada o la prueba de muestra grande correspondiente. En tales problemas, cada par de valores de muestra se sustituye con un signo más, si el primero es mayor que el segundo; con un signo menos, si el primer valor es menor que el segundo; o se desecha, si ambos valores son iguales. El procedimiento es el mismo que el de antes. Sea que $\tilde{\mu}_D$ denota la mediana de las diferencias.

EJEMPLO **Una prueba del signo de la efectividad de un programa de seguridad**

Con referencia al ejemplo de la página 259, que trata con la efectividad de un programa de seguridad industrial, use la prueba del signo en el nivel de significancia de 0.051 para probar si el programa de seguridad es efectivo.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\tilde{\mu} = 0 \quad \left(p = \frac{1}{2}\right)$

   Hipótesis alternativa: $\tilde{\mu} > 0 \quad \left(p > \frac{1}{2}\right)$

2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* si x es el número de signos más, rechace la hipótesis nula si la probabilidad de obtener x o más signos más es menor que o igual a 0.05.
4. *Cálculos:* al sustituir cada par de valores con un signo más si el primer valor es mayor que el segundo, o con un signo menos si el primer valor es menor que el segundo, los 10 pares de muestras producen

   $$+ \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

   Por lo tanto, $x = 9$ y la tabla 1 muestra que, para $n = 10$ y $p = 0.50$, la probabilidad de $X \geq 9$ es $1 - 0.9893 = 0.0107$.
5. *Decisión:* puesto que 0.0107 es menor que 0.05, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que el programa de seguridad es efectivo. ■

14.3 Pruebas de sumas de rangos

En esta sección se introducirán dos pruebas basadas en **sumas de rangos**: la **prueba *U*** se presentará como una alternativa no paramétrica a la prueba t de dos muestras; la **prueba *H***, como una alternativa no paramétrica al análisis de varianza unidireccional que se estudió en el capítulo 12. En otras palabras, la prueba H sirve para probar la hipótesis nula de que k muestras provienen de poblaciones idénticas, contra la alternativa de que las poblaciones no son idénticas.

Para ilustrar cómo se realiza la prueba U (también llamada **prueba de Wilcoxon** o **prueba de Mann-Whitney**, en honor a los estadísticos que contribuyeron a su desarrollo), suponga que en un estudio de rocas sedimentarias se obtuvieron los siguientes diámetros (en milímetros) para dos tipos de arena:

Arena I:	0.63	0.17	0.35	0.49	0.18	0.43	0.12	0.20
	0.47	1.36	0.51	0.45	0.84	0.32	0.40	
Arena II:	1.13	0.54	0.96	0.26	0.39	0.88	0.92	0.53
	1.01	0.48	0.89	1.07	1.11	0.58		

El problema es decidir si las dos poblaciones son iguales o si una tiene más probabilidad de producir observaciones más grandes que la otra. Sea X_1 una variable aleatoria con la primera distribución y X_2 una variable aleatoria con la segunda distribución. Si $P(a < X_1) \leq P(a < X_2)$ para toda a, con desigualdad estricta para alguna a, se dice que la segunda población (distribución) es **estocásticamente mayor** que la primera población (distribución). Se formulan hipótesis unilaterales en términos de esta relación de orden estocástico.

La prueba U comienza al ordenar los datos de manera conjunta, como si comprendieran una muestra, en orden creciente de magnitud, mientras que para los datos se tiene

0.12	0.17	0.18	0.20	0.26	0.32	0.35	0.39	0.40	0.43
I	I	I	I	II	I	I	II	I	I
0.45	0.47	0.48	0.49	0.51	0.53	0.54	0.58	0.63	0.84
I	I	II	I	I	II	II	II	I	I
0.88	0.89	0.92	0.96	1.01	1.07	1.11	1.13	1.36	
II	II	II	II	II	II	II	II	I	

Advierta que, para cada valor, se indicó si se trata de una medición de arena I o de arena II. Al asignar a los datos en este orden, las clasificaciones 1, 2, 3, . . . , y 29, se descubre que los valores de la primera muestra (arena I) ocupan las clasificaciones 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 19, 20 y 29, mientras que las de la segunda muestra (arena II) ocupan las clasificaciones, 8, 13, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 28. Aquí no hay vínculos entre valores que pertenecen a diferentes muestras; si los hubiera, a cada una de las observaciones vinculadas se le asignaría la media de las clasificaciones que ocupan conjuntamente. Por ejemplo, si el tercero y cuarto valores son idénticos, a cada uno se asignaría la clasificación

$$\frac{3 + 4}{2} = 3.5$$

y si el noveno, el décimo y el undécimo valores son idénticos, a cada uno se le asignaría la clasificación

$$\frac{9 + 10 + 11}{3} = 10$$

La hipótesis nula que se quiere probar es que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas, lo cual es la razón para que, en dicho caso, las medias de las clasificaciones asignadas a los valores de las dos muestras deban ser más o menos las mismas. En vez de las medias, también puede comparar las sumas de las clasificaciones asignadas a los valores de las dos muestras, lo que explica de manera adecuada una posible diferencia en su tamaño. Para las dos muestras, las sumas de las clasificaciones son $W_1 = 162$ y $W_2 = 273$, y queda por ver si su diferencia es suficientemente grande como para rechazar la hipótesis nula.

Cuando por primera vez se propuso el uso de las sumas de rangos como una alternativa no paramétrica a la prueba t de dos muestras, la decisión se basó en W_1 o en W_2, pero ahora la decisión se basa en cualquiera de los estadísticos relacionados

Estadísticos U_1 y U_2

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

o bien,

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

o en el estadístico U, que siempre es igual al menor de los dos. Los tamaños de las dos muestras son n_1 y n_2, y como no importa cómo se numeren las muestras, aquí se usará el estadístico U_1.[1]

Con la hipótesis nula de que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas, se demuestra que la media y la varianza de la distribución muestral de U_1 son

Media y varianza del estadístico U_1

$$\mu_{U_1} = \frac{n_1 n_2}{2}$$

y

$$\sigma^2_{U_1} = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

[1]Las pruebas basadas en U_1 y U_2 son equivalentes a las basadas en W_1 y W_2, pero tienen la ventaja de que se prestan con más facilidad a la construcción de tablas de valores críticos. No solo U_1 y U_2 toman valores sobre el intervalo de 0 a n_1n_2 (de hecho, su suma siempre es igual a n_1n_2), pero sus distribuciones muestrales son simétricas en torno a $\frac{n_1n_2}{2}$. El uso de U, que siempre es igual al menor de los valores de U_1 y U_2, tiene la ventaja agregada de que la prueba resultante tiene una cola sin importar la hipótesis alternativa y, por consiguiente, es más sencilla de tabular.

Si hay vínculos en la clasificación, dichas fórmulas dan tan solo aproximaciones, pero si el número de vínculos es pequeño, tales aproximaciones por lo general son buenas.

Puesto que los estudios numéricos demuestran que la distribución muestral de U_1 puede aproximarse cercanamente mediante una distribución normal, cuando n_1 y n_2 son ambas mayores que 8, la prueba de la hipótesis nula de que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas puede basarse en

Estadístico para prueba *U* de muestra grande

$$Z = \frac{U_1 - \mu_{U_1}}{\sigma_{U_1}}$$

que es una variable aleatoria con aproximadamente la distribución normal estándar. Para muestras pequeñas, puede basar la prueba en tablas especiales; por ejemplo, en las que vienen en el libro de Johnson y Bhattacharyya, que se incluyen en la bibliografía.

Advierta que cuando se prueba la hipótesis nula (las dos muestras provienen de poblaciones idénticas) contra la hipótesis alternativa

la población 2 es estocásticamente mayor que la población 1

se rechaza la hipótesis nula, si $Z < -z_\alpha$, ya que valores pequeños de U_1 corresponden a valores pequeños de W_1; en correspondencia, si la hipótesis alternativa es

la población 1 es estocásticamente mayor que la población 2

se rechaza la hipótesis nula, si $Z > z_\alpha$, pues valores grandes de U_1 corresponden a valores grandes de W_1.

EJEMPLO **Cómo realizar la prueba de Wilcoxon con muestras grandes**

Con respecto a los datos del tamaño de grano de la página 449, use la prueba U, en el nivel de significancia, de 0.01 para probar la hipótesis nula de que las dos muestras provienen de poblaciones idénticas contra la hipótesis alternativa de que las poblaciones no son idénticas.

Solución

1. *Hipótesis nula:* las poblaciones son idénticas.
   Hipótesis alternativa: las poblaciones no son idénticas.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z < -2.575$ o $Z > 2.575$, donde Z está dada por la fórmula anterior.
4. *Cálculos:* puesto que $n_1 = 15$, $n_2 = 14$ y ya se demostró que $W_1 = 162$, se encuentra que

$$U_1 = 162 - \frac{15 \cdot 16}{2} = 42$$

$$\mu_{U_1} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

y

$$\sigma^2_{U_1} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 30}{12} = 525$$

y se sigue que

$$z = \frac{42 - 105}{\sqrt{525}} = -2.75$$

5. *Decisión:* puesto que $z = -2.75$ es menor que -2.575, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que hay una diferencia en las poblaciones de tamaño de grano. ■

La **prueba *H***, o **prueba de Kruskal-Wallis**, es una generalización de la prueba U, en cuanto a que permite probar la hipótesis nula de que k muestras aleatorias independientes provienen de poblaciones idénticas. Como en la prueba U, todas las observaciones se clasifican conjuntamente, y si R_i es la suma de rangos ocupada por las n_i observaciones de la i-ésima muestra y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, la prueba se basa en el

Estadístico para prueba *H*

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

Cuando $n_1 > 5$ para toda i y la hipótesis nula es verdadera, la distribución muestral del estadístico H se aproxima bien mediante la distribución chi cuadrada con $k - 1$ grados de libertad. Hay tablas especiales de valores críticos para la prueba H, para valores pequeños seleccionados de n_i y k.

EJEMPLO **Cómo realizar una prueba *H* para comparar tres métodos**

Un experimento, diseñado para comparar tres métodos para prevenir la corrosión, produjeron las siguientes profundidades máximas de pit (en milésimas de pulgada), en piezas de alambre sometidas a los tratamientos respectivos:

Método A:	77	54	67	74	71	66	
Método B:	60	41	59	65	62	64	52
Método C:	49	52	69	47	56		

Utilice el nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis nula de que las tres muestras provienen de poblaciones idénticas.

Solución

1. *Hipótesis nula:* las poblaciones son idénticas.
   Hipótesis alternativa: las poblaciones no son iguales.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $H > 5.991$, el valor de $\chi^2_{0.05}$ para 2 grados de libertad, donde H está dada por la fórmula anterior.
4. *Cálculos:* al clasificar dichas mediciones conjuntamente, de menor a mayor, se descubre que las de la primera muestra ocupan las clasificaciones 6, 13, 14, 16, 17 y 18; las de la segunda muestra ocupan las clasificaciones 1, 4.5, 8, 9, 10, 11 y 12; las de la tercera muestra ocupan las clasificaciones 2, 3, 4.5, 7 y 15. Por lo tanto, $R_1 = 84$, $R_2 = 55.5$ y $R_3 = 31.5$, y la sustitución en la fórmula para H da como resultado

$$H = \frac{12}{18 \cdot 19}\left(\frac{84^2}{6} + \frac{55.5^2}{7} + \frac{31.5^2}{5}\right) - 3 \cdot 19$$
$$= 6.7$$

5. *Decisión:* puesto que $H = 6.7$ supera 5.991, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que los tres métodos preventivos contra la corrosión no son igualmente efectivos. ■

14.4 Correlación basada en rangos

En el capítulo 11 se introdujo el coeficiente de correlación de producto de momento de Pearson como una medida de asociación. Una medida alternativa, llamada **correlación de rangos de Spearman** o **coeficiente de correlación de rangos**, es similar a la correlación de Pearson, r, excepto que Spearman sustituye las observaciones con sus rangos:

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2}}$$

donde R_i es el rango de x_i entre las x y S_i es el rango de y_i entre las y. Puesto que cada una de las clasificaciones $1, 2, \ldots, n$ debe ocurrir exactamente una vez en el conjunto $R_1, R_2, \ldots, R_n$, puede demostrarse que $\overline{R} = \overline{S} = (n+1)/2$ y $\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2 = n(n^2-1)/12 = \sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2$.

Coeficiente de correlación de rangos de Spearman

El coeficiente de correlación de rangos

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(S_i - \frac{n+1}{2}\right)}{n(n^2-1)/12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i S_i - n(n+1)^2/4}{n(n^2-1)/12}$$

1. $-1 \le r_S \le 1$
2. Los valores de r_S cercanos a 1 indican una tendencia de valores grandes para X y Y a parearse juntos. Un r_S cercano a -1 indica la relación opuesta.
3. r_S es una medida de una relación monótona creciente/decreciente que no necesariamente es lineal.

Cuando hay vínculos presentes, asigne el promedio de las clasificaciones correspondiente a cada observación vinculada. Puede demostrarse que

Estadístico de muestra grande para independencia de pruebas

Si X y Y son independientes, entonces,

$$Z = \sqrt{n}\, r_S \qquad \text{se distribuye aproximadamente como normal estándar}$$

siempre que el tamaño de la muestra sea grande.

EJEMPLO

Correlación basada en rangos de un programa de seguridad antes y después

Consulte el ejemplo de la página 259 concerniente a las pérdidas de horas-trabajador, antes y después de programas de seguridad en 10 plantas industriales. Calcule r_S.

Solución Los dos conjuntos de rangos son

$$\begin{array}{lcccccccccc} R_i = \text{rango}(x_i): & 5 & 8 & 6 & 10 & 3 & 7 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ S_i = \text{rango}(y_i): & 5 & 8 & 6 & 10 & 4 & 7 & 9 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Calcule $\sum_{i=1}^{10} R_i S_i = 384$, $(n+1)/2 = 5.5$ y $n(n^2-1) = 990$ de modo que

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i S_i - n(n+1)^2/4}{n(n^2-1)/12} = \frac{384 - 10(5.5)^2}{990/12} = 0.988$$

Este gran valor positivo indica fuerte asociación a lo largo de una curva creciente. Puesto que $\sqrt{n}\, r_S = 3.12$, hay fuerte evidencia contra la independencia. ■

Ejercicios

14.1 En un experimento de laboratorio, 18 determinaciones del coeficiente de fricción entre piel y metal dieron los siguientes resultados: 0.59, 0.56, 0.49, 0.55, 0.65, 0.55, 0.51, 0.60, 0.56, 0.47, 0.58, 0.61, 0.54, 0.68, 0.56, 0.50, 0.57 y 0.53. Use la prueba del signo, con el nivel de significancia de 0.05, para probar la hipótesis nula $\tilde{\mu} = 0.55$ contra la hipótesis alternativa $\tilde{\mu} \neq 0.55$.

14.2 El departamento de control de calidad de un fabricante grande obtuvo los siguientes datos muestrales (en libras) acerca de la resistencia a la rotura de cierto tipo de listón de algodón de 2 pulgadas: 153, 159, 144, 160, 158, 153, 171, 162, 159, 137, 159, 159, 148, 162, 154, 159, 160, 157, 140, 168,163, 148, 151, 153, 157, 155, 148, 168, 152 y 149. Use la prueba del signo, con el nivel de significancia de 0.01, para probar la hipótesis nula $\tilde{\mu} = 150$ contra la hipótesis alternativa $\tilde{\mu} > 150$.

14.3 Con respecto al ejercicio 2.12, que pertenecía a los tiempos de ignición de ciertos materiales de tapicería, use la prueba del signo con el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula $\tilde{\mu} = 6.50$ segundos contra la hipótesis alternativa $\tilde{\mu} < 6.50$ segundos.

14.4 Los siguientes son los números de boletas de infracción (multas) emitidas por 2 oficiales de tránsito en 17 días: 7 y 10, 11 y 13, 14 y 14, 11 y 15, 12 y 9, 6 y 10, 9 y 13, 8 y 11, 10 y 11, 11 y 15, 13 y 11, 7 y 10, 8 y 8, 11 y 12, 9 y 14, 10 y 9, 13 y 16. Use la prueba del signo, en el nivel de significancia de 0.05, para probar la hipótesis nula de que, en promedio, los 2 oficiales de tránsito emitieron igual cantidad de boletas de infracción por día, contra la hipótesis alternativa de que el segundo oficial tiende a emitir más que el primero.

14.5 Al comparar 2 tipos de luces de emergencia, un servicio de pruebas al consumidor obtuvo los siguientes tiempos de iluminación (redondeados a la décima de minuto más cercana):

Marca C:	19.4	21.5	15.3	17.4	16.8	16.6	20.3	22.5	21.3
	23.4	19.7	21.0						
Marca D:	16.5	15.8	24.7	10.2	13.5	15.9	15.7	14.0	12.1
	17.4	15.6	15.8						

Use la prueba *U*, en el nivel de significancia de 0.01, para comprobar si es razonable decir que las poblaciones de tiempos de iluminación de los dos tipos de luces son idénticas.

14.6 Los siguientes son los tiempos autorreportados (horas por mes), empleados en tarea en casa, por muestras aleatorias de estudiantes de penúltimo año en dos diferentes especialidades.

Especialidad 1:	63	72	29	58	81	65	79	57	40	76	47	55	60
Especialidad 2:	41	32	26	43	78	49	39	56	15	54	8	66	64

Use la prueba *U*, en el nivel de significancia de 0.05, para probar si los estudiantes de los 2 grupos dedican o no la misma cantidad de tiempo a las tareas en casa.

14.7 Los siguientes son los datos acerca de la resistencia a la rotura (en libras) de 2 tipos de material:

Material 1:	144	181	200	187	169	171	186	194	176	182
	133	183	197	165	180	198				
Material 2:	175	164	172	194	176	198	154	134	169	164
	185	159	161	189	170	164				

Use la prueba *U*, en el nivel de significancia de 0.05, para probar la afirmación de que la resistencia del material 1 es estocásticamente mayor que la resistencia del material 2.

14.8 Los siguientes son los números de malas impresiones contadas, en páginas seleccionadas al azar, de tres ediciones dominicales de un periódico:

11 de abril:	4	10	2	6	4	12
18 de abril:	8	5	13	8	8	10
25 de abril:	7	9	11	2	14	7

Use la prueba *H*, en el nivel de significancia de 0.05, para probar la hipótesis nula de que las 3 muestras provienen de poblaciones idénticas.

14.9 Las llamadas pruebas de Franklin se realizaron para determinar las propiedades aislantes de muestras de acero al silicio, orientado a grano, que se esmaltaron en cinco atmósferas diferentes con los siguientes resultados:

Atmósfera	Resultados de prueba (amperes)							
1	0.58	0.61	0.69	0.79	0.61	0.59		
2	0.37	0.37	0.58	0.40	0.28	0.44	0.35	
3	0.29	0.19	0.34	0.17	0.29	0.16		
4	0.81	0.69	0.75	0.72	0.68	0.85	0.57	0.77
5	0.26	0.34	0.29	0.47	0.30	0.42		

Use la prueba H, en el nivel de significancia de 0.05, para decidir si puede o no suponerse que dichas 5 muestras provienen de poblaciones idénticas.

14.10 A un panel de 7 expertos se le pidió calificar cada una de 3 industrias sobre la probabilidad de que cambios tecnológicos producirían mejora en la contaminación ambiental durante los próximos 10 años. Sus calificaciones (en forma de probabilidades de juicio) son las siguientes:

	Industria		
Experto	A	B	C
1	0.15	0.75	0.10
2	0.30	0.60	0.20
3	0.20	0.80	0.30
4	0.00	0.50	0.25
5	0.10	0.55	0.15
6	0.25	0.70	0.35
7	0.40	0.95	0.45

Calcule el coeficiente de correlación de rangos, r_S.

a) Con las industrias A y B.

b) Con las industrias A y C.

14.5 Pruebas de aleatoriedad

Cuando se estudió el muestreo aleatorio en el capítulo 6, se presentaron varios métodos que ofrecían cierta seguridad por adelantado acerca de que una muestra tomada será aleatoria. Como también hay situaciones donde no se tiene control sobre la forma en que se seleccionan los datos, es útil contar con una técnica para probar si una muestra puede considerarse como aleatoria después de obtenerse en realidad. Una de tales técnicas se basa en el orden en el cual se obtuvieron los valores de la muestra; de manera más específica, se basa en el número de **rachas** que muestran los resultados muestrales.

Dada una secuencia de dos símbolos, como H y T (que pueden representar la ocurrencia de caras y cruces en lanzamientos repetidos de una moneda), una racha se define como una sucesión de símbolos idénticos contenidos entre diferentes símbolos o ninguno en absoluto. Por ejemplo, la secuencia

$$\underline{T\ T}\quad \underline{H\ H}\quad \underline{T\ T}\quad \underline{H\ H\ H}\quad \underline{T}\quad \underline{H\ H\ H}\quad \underline{T\ T\ T\ T}\quad \underline{H\ H\ H}$$

contiene 8 rachas, como se indica mediante los subrayados. El número total de rachas en una secuencia de n ensayos con frecuencia sirve como indicio de que el arreglo no es aleatorio. Por ejemplo, si solamente se presentan dos rachas que consisten en 10 caras seguidas por 10 cruces, podría sospecharse que la probabilidad de un éxito no permanece constante

de un ensayo a otro. Por otro lado, si la secuencia de 20 lanzamientos consiste en caras y cruces alternadas, puede sospecharse que los ensayos no fueron independientes. En cualquier caso, hay motivos para sospechar una falta de aleatoriedad. Note que la sospecha no surgió por los números de H y T, sino por el orden en el que aparecieron.

Si una secuencia contiene n_1 símbolos de un tipo y n_2 de otro tipo (y ni n_1 ni n_2 es menor que 10), la distribución muestral del **número total de rachas**, u, puede aproximarse de manera cercana mediante una distribución normal con

Media y desviación estándar de *u*

$$\mu_u = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \quad \text{y} \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$$

Por lo tanto, la prueba de la hipótesis nula de que el orden de los símbolos (y, en consecuencia, la muestra) es aleatoria puede basarse en el

Estadístico para pruebas de aleatoriedad

$$Z = \frac{u - \mu_u}{\sigma_u}$$

que tiene aproximadamente la distribución normal estándar. Hay tablas especiales disponibles para realizar la prueba cuando n_1, n_2 o ambas son pequeñas.

EJEMPLO **Cómo realizar una prueba de aleatoriedad**

El siguiente es el arreglo de piezas defectuosas, d, y no defectuosas, n, producidas en el orden dado por cierta máquina:

$$\underline{n\,n\,n\,n\,n}\ \ \underline{d\,d\,d\,d}\ \ \underline{n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n}\ \ \underline{d\,d}\ \ \underline{n\,n}\ \ \underline{d\,d\,d\,d}$$

Pruebe la aleatoriedad en el nivel de significancia de 0.01.

Solución

1. *Hipótesis nula:* el arreglo es aleatorio.
   Hipótesis alternativa: el arreglo no es aleatorio.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z < -2.575$ o bien $Z > 2.575$, donde Z está dada por la fórmula anterior.
4. *Cálculos:* puesto que $n_1 = 10$, $n_2 = 17$ y $u = 6$, se tiene

$$\mu_u = \frac{2 \cdot 10 \cdot 17}{10 + 17} + 1 = 13.59$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 17\,(2 \cdot 10 \cdot 17 - 10 - 17)}{(10 + 17)^2\,(10 + 17 - 1)}} = 2.37$$

y

$$z = \frac{6 - 13.59}{2.37} = -3.20$$

5. *Decisión:* puesto que $z = -3.20$ es menor que -2.575, la hipótesis nula debe rechazarse; se concluye que el arreglo no es aleatorio. De hecho, el número total de rachas es mucho menor que lo esperado, además de que existe un fuerte indicio de que las piezas defectuosas aparecen en grupos o conglomerados; la razón para ello tendrá que descubrirla un ingeniero que esté familiarizado con el proceso. ■

La prueba de rachas también puede usarse para someter a prueba la aleatoriedad de las muestras que consisten en datos numéricos al contar **rachas arriba y abajo de la mediana**. Al denotar una observación que supera la mediana de la muestra con la letra *a* y una observación menor que la mediana con la letra *b*, se puede usar la secuencia resultante de *a* y *b* para probar la aleatoriedad con el método recién indicado. Una aplicación frecuente de esta prueba es el control de calidad, donde las medias de muestras pequeñas sucesivas se muestran en una gráfica en orden cronológico. La prueba de rachas puede usarse, entonces, para comprobar si puede haber una tendencia en los datos, de modo que sea posible ajustar la configuración de una máquina o alguna otra variable del proceso antes de que ocurra cualquier daño serio.

EJEMPLO **Prueba de demasiados cambios**

Un ingeniero está preocupado por la posibilidad de que demasiados cambios se cometen en la configuración de un torno automático. Dados los siguientes diámetros medios (en pulgadas) de 40 ejes sucesivos que giran en el torno

0.261	0.258	0.249	0.251	0.247	0.256	0.250	0.247	0.255	0.243
0.252	0.250	0.253	0.247	0.251	0.243	0.258	0.251	0.245	0.250
0.248	0.252	0.254	0.250	0.247	0.253	0.251	0.246	0.249	0.252
0.247	0.250	0.253	0.247	0.249	0.253	0.246	0.251	0.249	0.253

use el nivel de significancia de 0.01 para probar la hipótesis nula de aleatoriedad, contra la alternativa de que hay un patrón que alterna frecuentemente.

Solución

1. *Hipótesis nula:* el arreglo de valores muestrales es aleatorio.
   Hipótesis alternativa: existe un patrón que alterna frecuentemente.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $Z < 2.33$, donde Z está dada por la fórmula en la página 456 para el número total de rachas arriba y abajo de la mediana.
4. *Cálculos:* la mediana de las 40 mediciones es 0.250, de modo que se obtiene el siguiente arreglo de valores arriba y abajo de 0.250:

$$a\ a\ b\ a\ b\ a\ b\ a\ b\ a\ a\ b\ a\ b\ a\ a\ b\ b\ a\ a\ b\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ a$$

   Por ende, $n_1 = 19$, $n_2 = 16$ y $u = 27$, de modo que

$$\mu_u = \frac{2 \cdot 19 \cdot 16}{35} + 1 = 18.37$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2 \cdot 19 \cdot 16\,(2 \cdot 19 \cdot 16 - 19 - 16)}{(19 + 16)^2\,(19 + 16 - 1)}} = 2.89$$

   y

$$z = \frac{27 - 18.37}{2.89} = 2.98$$

5. *Decisión:* dado que $z = 2.98$ supera los 2.33, la hipótesis nula de aleatoriedad debe rechazarse; puesto que el número de rachas es mucho mayor de lo que uno esperaría debido al azar, es razonable concluir que el torno se ajusta con demasiada frecuencia. ■

14.6 Las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling

Las **pruebas de Kolmogorov-Smirnov** son pruebas no paramétricas para diferencias entre distribuciones acumulativas. La prueba de una muestra se ocupa de la concordancia entre una distribución acumulativa observada, o empírica, de valores muestrales y una función de distribución continua específica; por consiguiente, se trata de una prueba de bondad de ajuste. La prueba de dos muestras se ocupa de la concordancia entre dos distribuciones acumulativas observadas; prueba la hipótesis de si dos muestras independientes provienen de distribuciones continuas idénticas, y es sensible a diferencias poblacionales con respecto a ubicación, dispersión o sesgo.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov de una muestra generalmente es más eficiente que la prueba chi cuadrada para bondad de ajuste para muestras pequeñas, por lo que podría usarse para muestras muy pequeñas, donde la prueba chi cuadrada no se aplique. Sin embargo, se debe recordar que la prueba chi cuadrada de la sección 10.5 puede usarse en conexión con distribuciones discretas, mientras que con la prueba de Kolmogorov-Smirnov no sucede lo mismo.

La prueba de una muestra se basa en la diferencia absoluta máxima D entre los valores de la distribución acumulativa empírica, de una muestra aleatoria de tamaño n, y una distribución acumulativa teórica específica. Para determinar si esta diferencia es mayor de lo que puede esperarse razonablemente para un nivel dado de significancia, se obtiene un valor P (véase el ejercicio 14.15).

EJEMPLO **Cómo usar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para uniformidad**

Se quiere comprobar si los orificios, en una placa de estaño electrolítica, están distribuidos uniformemente a través de una bobina chapada sobre la base de las siguientes distancias en pulgadas de 10 orificios, desde un extremo de una larga tira de placa de estaño de 30 pulgadas de ancho:

4.8 14.8 28.2 23.1 4.4 28.7 19.5 2.4 25.0 6.2

Pruebe la hipótesis nula en el nivel de significancia de 0.05.

Solución

1. *Hipótesis nula:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{30} & \text{para } 0 < x < 30 \\ 1 & \text{para } x \geq 30 \end{cases}$$

donde x es la distancia de un orificio desde el extremo.
Hipótesis alternativa: los orificios no están distribuidos de manera uniforme a lo largo de la placa de estaño.

2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si D es grande, donde D es la diferencia máxima entre la distribución acumulativa empírica y la distribución acumulativa supuesta con la hipótesis nula.
4. *Cálculos:* al graficar las 2 distribuciones acumulativas, como en la figura 14.1, se encuentra que la diferencia es mayor en $x = 6.2$ y que su valor es

$$D = 0.40 - \frac{6.2}{30} = 0.193$$

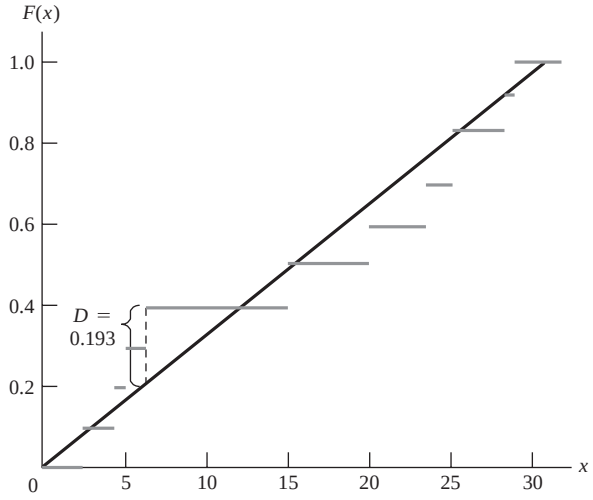


Figura 14.1
Diagrama para prueba de Kolmogorov-Smirnov

5. *Decisión:* se emplea el software *R* para realizar la prueba y calcular el valor *P* (véase el ejercicio 14.14). El valor *P* resultante

$$P(\,|\,D\,|\,>\,0.193\,)\,=\,0.783$$

es tan grande que la hipótesis nula (de que los orificios están distribuidos uniformemente a lo largo de la placa de estaño) no puede rechazarse. ■

A pesar de su apariencia intuitiva, las pruebas de Kolmogorov-Smirnov no tienen buen poder. Las diferencias en las colas pueden ser más fáciles de detectar, si la diferencia entre la distribución acumulativa empírica, F_n, y F se divide entre $\sqrt{F(x)(1-F(x))}$. En particular, la **prueba de Anderson-Darling** se basa en valores grandes del estadístico

$$A^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(x)-F(x)]^2\,\frac{1}{F(x)(1-F(x))}\,f(x)\,dx$$

A primera vista, el cálculo numérico de este estadístico parece difícil. No obstante, se puede demostrar que, para distribuciones continuas

$$A^2 = -\left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(\ln(u_i)+\ln(1-u_{n+1-i}))\right]\Big/\,n-n$$

donde $u_i = F(x_{(j)})$ es el valor de la distribución acumulativa teórica en la i-ésima observación más grande $x_{(i)}$.

La hipótesis nula se rechaza para valores grandes del estadístico A^2. Como lineamiento, los puntos 10, 5 y 1% de muestra grande son 1,933, 2.492 y 3.878. Se ha sugerido que dichos valores críticos son bastante precisos, incluso para muestras tan pequeñas como 10.

EJEMPLO **Evaluación del estadístico de Anderson-Darling**

Con respecto al ejemplo anterior, evalúe el estadístico A^2 de Anderson-Darling.

Solución La observación más pequeña es 2.4, de modo que $u_1 = F(2.4) = 2.4/30 = 0.08000$. A continuación, los valores ordenados de las observaciones y la u_i son

2.4	4.4	4.8	6.2	14.8	19.5	23.1	25.0	28.2	28.7
0.08000	0.14667	0.16000	0.20667	0.49333	0.65000	0.77000	0.83333	0.94000	0.95667

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A^2 &= -[\,(2 \times 1 - 1)(\ln(0.080000) + \ln(1 - 0.95667)) + \cdots \\ &\quad + (2 \times 10 - 1)(\ln(0.95667) + \ln(1 - 0.08000))\,]/10 - 10 \\ &= 0.5267 \end{aligned}$$

De acuerdo con el valor crítico de muestra grande, se falla en rechazar la hipótesis nula de que la distribución de orificios es uniforme, con $\alpha = 0.05$. ■

Ejercicios

14.11 El siguiente arreglo indica si 60 automóviles consecutivos, que pasaron por la caseta de cobro de un puente, tenían placas locales, *L*, o placas de fuera del estado, *O*:

L L O L L L L O O L L L L O L O O L L L L O L O O L L L L L
O L L L O L O L L L L O O L O O O O L L L L O L O O L L L O

Pruebe, en el nivel de significancia de 0.05, si este arreglo de *L* y *O* puede considerarse aleatorio.

14.12 Los siguientes son el número de piezas defectuosas elaboradas por una máquina durante 24 turnos consecutivos: 15, 11, 17, 14, 16, 12, 19, 17, 21, 15, 17, 19, 21, 14, 22, 16, 19, 12, 16, 14, 18, 17, 24 y 13. Pruebe la aleatoriedad en el nivel de significancia de 0.01.

14.13 Los siguientes son 50 tiempos muertos consecutivos de una máquina (en minutos), que se observaron durante cierto periodo de tiempo: 22, 29, 32, 25, 33, 34, 38, 34, 29, 25, 27, 33, 34, 28, 39, 41, 24, 31, 34, 29, 34, 25, 30, 37, 40, 39, 35, 24, 32, 43, 44, 34, 40, 38, 39, 43, 46, 34, 39, 45, 42, 39, 54, 50, 38, 41, 43, 46, 52 y 55. Use el método de rachas arriba y abajo de la mediana, así como el nivel de significancia de 0.05, para probar la hipótesis nula de aleatoriedad contra la alternativa de que hay una tendencia.

14.14 El valor *P*, que viene en la página 459, se calculó usando el comando de software *R*

```
ks.test(x, "punif", 0,30, alternative = "t")
```

Las siguientes son 15 mediciones del punto de ebullición de un compuesto de silicio (en grados Celsius):

166 141 136 154 170 162 155 146 183 157 148 132 160 175 150

a) Use la prueba de Kolmogorov-Smirnov, en el nivel de significancia de 0.01, para probar la hipótesis nula de que los puntos de ebullición provienen de una población normal, con $\mu = 160$ grados Celsius y $\sigma = 10$ grados Celsius. Emplee los comandos del software *R*

```
y = c (166,141,136,154,170,162,155,146,183,157,148,132,160,175,150)
ks.test(y, "pnorm", m = 160, sd = 10)
```

b) Calcule el estadístico de Anderson-Darling.

14.15 En un estudio de vibración, ciertos componentes de avión estuvieron sometidos a vibraciones severas hasta que mostraron fallas estructurales. Dados los siguientes tiempos de falla (en minutos), ponga a prueba si pueden considerarse una muestra de una población exponencial con la media $\mu = 10$:

1.5	10.3	3.6	13.4	18.4	7.7	24.3	10.7	8.4
15.4	4.9	2.8	7.9	11.9	12.0	16.2	6.8	14.7

Use la prueba de Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significancia de 0.05. Consulte el ejercicio 14.14, pero utilice el comando *R*

```
ks.test(x, "pweibull", shape = 1, scale = 10)
```

Sí y no

Sí

1. Cuando compare las ubicaciones de dos muestras y los tamaños muestrales son pequeños, considere aplicar la prueba de Wilcoxon. Esta prueba no requiere que la población sea normal, una suposición difícil de comprobar con tamaños de muestra pequeños.

No

1. No aplique la prueba de Wilcoxon si los diagramas de punto de las dos muestras sugieren cantidades de variación muy diferentes, así como ubicaciones diferentes. La prueba no contará toda la historia acerca de diferencias entre las dos poblaciones.
2. No aplique de manera rutinaria pruebas de rango no paramétricas, sin confirmar que las observaciones sean independientes. Incluso una dependencia temporal moderada en las observaciones puede afectar seriamente el nivel de significancia de una prueba de rango. Las pruebas de rango no están libres de distribución en presencia de dependencia. Además, cuando se muestrea sin sustitución a partir de una población finita de tamaño N, es necesario explicar la dependencia cuando el tamaño de la muestra se vuelve tan grande como de 5% a 10% de la población.

Ejercicios de repaso

14.16 De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la luz debería curvarse cuando pasa a través de un campo gravitacional. Lo anterior se probó experimentalmente por primera vez en 1919, cuando se tomaron fotografías de estrellas cercanas al Sol durante un eclipse total y, nuevamente, cuando el Sol se movió a otra parte del cielo. Dichas fotografías del eclipse mostrarían las estrellas desplazadas hacia afuera desde la posición del Sol. La dirección, en los primeros 2 ejes coordenados, lo cual fue predicho por la teoría, coincidió con la dirección observada para 6 de 7 estrellas. Registre + para coincidencia y – para no coincidencia. La suposición daría probabilidad de $\frac{1}{2}$ a una coincidencia. Use la prueba del signo con nivel de 0.063 para apoyar la afirmación de que la teoría se sostiene con respecto a la coincidencia de la dirección de desplazamiento.

14.17 Con respecto al ejercicio 8.10, que viene en la página 258, use el estadístico U, en el nivel de significancia de 0.05, para probar si el método B es más efectivo.

14.18 Para descubrir el mejor arreglo de instrumentos en un panel de control de un avión, se compararon 2 diferentes arreglos al simular una condición de emergencia y medir el tiempo de reacción requerido para corregir la condición. Los tiempos de reacción (en décimas de segundo) de 20 pilotos (asignados al azar a los 2 diferentes arreglos) fueron los siguientes:

Arreglo 1:	8	15	10	13	17	10	9	11	12	15
Arreglo 2:	12	7	13	8	14	6	16	7	10	9

Use la prueba U, en el nivel de significancia de 0.05, para comprobar la afirmación de que el segundo arreglo es mejor que el primero.

14.19 Las siguientes son las millas por galón que un piloto de prueba obtiene para 10 tanques llenos de cada una de las 3 marcas de gasolina:

Marca 1:	22	25	32	18	23	15	30	27	19	23
Marca 2:	19	22	18	29	28	32	17	33	28	20
Marca 3:	30	29	25	24	15	27	30	27	18	32

Use la prueba H, en el nivel de significancia de 0.05, para probar si existe una diferencia en el rendimiento de las tres marcas de gasolina.

14.20 Para probar si las señales de radio del espacio profundo contienen un mensaje, un intervalo de tiempo podría subdividirse en un número de intervalos muy cortos y, luego, podría determinarse si la fuerza de la señal supera cierto nivel (ruido de fondo) en cada intervalo corto. Suponga que la siguiente es parte de tal registro, donde H denota una fuerza de señal alta y L denota que la fuerza de la señal no supera un nivel de radio dado.

L L H L H L H L H H H L H H H
L H H H L H L H L H L L L L

Pruebe esta secuencia para aleatoriedad (con el nivel de significancia de 0.05) y averigüe si es razonable suponer que la señal contiene un mensaje.

14.21 El número total de tiendas minoristas que entran al negocio y también las que se retiran dentro de los años calendario 1978-2010, en una ciudad grande, fueron

108	103	109	107	125	142	147	122	116	153	144
162	143	126	145	129	134	137	143	150	148	152
125	106	112	139	132	122	138	148	155	146	158

Al usar el hecho de que la mediana es 138, pruebe, en el nivel de significancia de 0.05, si hay una tendencia significativa.

14.22 Cuando dos poblaciones tienen la misma función de densidad de probabilidad, cada resultado de n_1 rangos para la primera muestra, de los valores posibles 1, $2, \ldots, n_1 + n_2$, es igualmente probable.

a) Escriba todos los posibles resultados cuando $n_1 = 3 = n_2$.

b) Evalúe U_1 en cada uno de los resultados, luego construya su distribución de probabilidad.

14.23 Con respecto al ejemplo de la página 14, use el estadístico U para probar la hipótesis nula de igualdad contra la alternativa de que la distribución del contenido de cobre, de la primera eliminatoria, es estocásticamente mayor que la distribución para la segunda eliminatoria. Al seguir el enfoque del ejercicio 14.22, es posible demostrar que la distribución exacta produce $P(U_i \geq 19) = 0.033$. Use esto como el nivel de significancia.

14.24 La diferencia entre el flujo observado y el valor teórico se detectó en 20 puntos dentro de un reactor. Los valores fueron

2	−2	−4	−6	−3	−6	3	−5	2	6
8	5	3	9	7	3	2	−1	−3	−1

Use una prueba del signo en el nivel de 0.036 para probar la hipótesis nula $\tilde{\mu} = 0$ contra la hipótesis alternativa $\tilde{\mu} \neq 0$.

14.25 Con respecto al ejercicio 14.24, pruebe la aleatoriedad con nivel de 0.05.

14.26 Los siguientes son los tiempos de supervivencia (días) de las barras de combustible en un reactor nuclear:

16 11 24 18 31 15 12 21

Pruebe, en el nivel de significancia de 0.01, si tales datos son consistentes con la suposición de una distribución logarítmica normal de tiempos de supervivencia. Use la prueba de Kolmogorov-Smirnov y consulte el ejercicio 14.14.

Términos clave

Coeficiente de correlación de rangos 453
Correlación de rangos de Spearman 453
Estocásticamente mayor 449
Número total de rachas 456
Prueba de Anderson-Darling 459
Prueba de Kolmogorov-Smirnov 458
Prueba de Kruskal-Wallis 452
Prueba de Mann-Whitney 449
Prueba de Wilcoxon 449
Prueba del signo 447
Prueba *H* 452
Prueba *U* 449
Pruebas no paramétricas 447
Racha 455
Rachas arriba y abajo de la mediana 457
Sumas de rangos 449

CAPÍTULO 15

EL CONTENIDO ESTADÍSTICO DE LOS PROGRAMAS DE MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

15.1 Programas de mejoramiento de la calidad 463

15.2 Inicio de un programa de mejoramiento de la calidad 465

15.3 Diseños experimentales para la calidad 467

15.4 Control de calidad 469

15.5 Gráficos de control por mediciones 471

15.6 Gráficos de control por atributos 476

15.7 Límites de tolerancia 482

Ejercicios de repaso 484

Términos clave 486

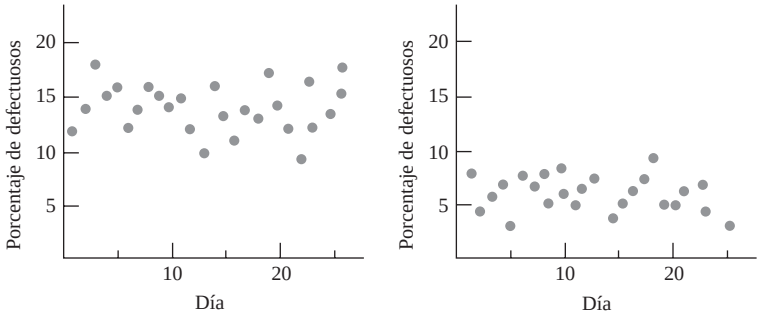
Aunque hay una tendencia a pensar que el monitoreo de la calidad es un desarrollo reciente, no hay nada nuevo acerca de la idea básica de hacer que la calidad de un producto se caracterice por un alto grado de uniformidad. Durante siglos, artesanos habilidosos han luchado por hacer productos distintivos gracias a una calidad superior, y una vez logrado un estándar de calidad, para eliminar a tal grado tanta variabilidad como sea posible entre los productos que fueran nominalmente semejantes.

Lo que es nuevo en el **mejoramiento de la calidad** es la idea de que un producto nunca es suficientemente bueno y debería mejorarse de manera continua. Este concepto, perfeccionado en buena medida en Japón, creó una crisis en el mercado internacional para las firmas que no se adaptaban bien. En los programas de mejoramiento de calidad, el énfasis está en emplear experimentos diseñados para mejorar el producto en las fases de diseño, producción y ensamble, en vez de intentos infructuosos por inspeccionar la calidad de un producto una vez que se fabrica. Estas ideas se introducen en las secciones 15.1 a 15.3.

En este capítulo también se examinan tres técnicas especiales de **aseguramiento de la calidad** (estadística): el control de la calidad se estudia en las secciones 15.4 a 15.6, y el establecimiento de los límites de tolerancia en la sección 15.7. Advierta que la palabra *calidad*, cuando se usa técnicamente como en este análisis, se refiere a alguna propiedad mensurable o contable de un producto, la resistencia a la rotura de un tablero de nanocircuitos, el número de imperfecciones en una pieza de ropa, la potencia de un medicamento, etcétera.

15.1 Programas de mejoramiento de la calidad

¿Qué es un programa de mejoramiento de la calidad? Para responder esta pregunta, se presenta un escenario de lo que sucede cuando se toman medidas para mejorar la calidad. En el contexto de operación de una máquina estampadora, grafique primero la fracción de piezas defectuosas por día [véase la figura 15.1*a*)] para cada día durante un periodo de 5 semanas. Esta gráfica revela la variación estable en torno a un valor de casi 15% de piezas defectuosas; es decir, el proceso es predecible. La media puede estimarse al promediar durante



a) Antes del cambio

b) Después del cambio

Figura 15.1
Fracción de defectuosos por día

días y también al estimar la cantidad de variación (véase la sección 15.4). ¡El hecho de que el proceso sea estable no lo hace bueno! Es el evidenciar demasiadas piezas defectuosas.

Una vez que se dé cuenta de que el proceso necesita mejoras, puede tomar acciones. En la figura 15.2 se ilustra un diagrama de Pareto (véase la sección 2.1) de la recolección de datos en varias posibles fuentes de variación. Los porcentajes acumulados se dan mediante la curva de línea quebrada y se leen en la escala a la derecha.

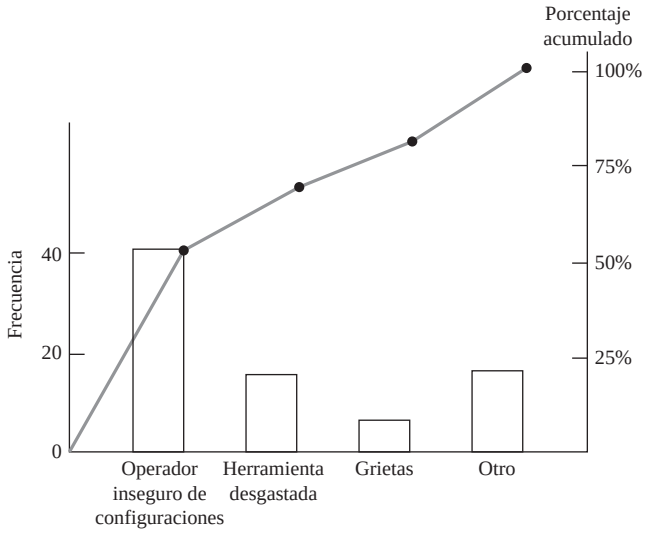


Figura 15.2
Diagrama de Pareto de defectuosos

Con base en dichos datos, se decidió brindar a los operadores más capacitación acerca del uso de la máquina. En la figura 15.1*b*) se grafica el registro durante las siguientes 5 semanas de la fracción de defectuosos diaria, después de la capacitación. El nuevo proceso también parece estable, aunque esta vez en torno a una media más baja. ¿Debería usted estar satisfecho? No. El precepto central del mejoramiento de la calidad requiere que el proceso de mejora sea continuo. Quizá las ganancias serán menores en cada fase progresiva; sin embargo, los esfuerzos deben continuar para reducir la cantidad de variación y la proporción de defectos. Mejoramientos sustanciales adicionales vendrán solo si se toma acción sobre el sistema. Sin embargo, dado que el proceso es estable, los cambios pueden observarse. Los ingenieros pueden hacer innovaciones para mejorar el proceso. Los diseños factoriales de dos niveles estudiados en el capítulo 13 son muy pertinentes.

Existe cierta noción arraigada de que la alta calidad y los costos de producción bajos son incompatibles. No obstante, nuevamente el costo de volver a trabajar los productos malos es un componente relevante del costo de producción. En realidad, es la baja calidad lo que resulta en costos altos. Además de los altos costos de volver a trabajar las piezas para volverlas útiles, también hay costos altos asociados con la pérdida de clientes a quienes se les vendieron productos inferiores.

La transformación hacia la producción de calidad en Japón, que comenzó en 1950, creó una nueva era económica que condujo a una crisis en la década de 1980 para las compañías estadounidenses. Durante corto tiempo, se supo que la mercancía japonesa de la época era de mala calidad. Varios ingenieros con altos puestos en Japón estudiaron la literatura acerca del control de calidad producido en los laboratorios Bell por Walter Shewhart y otros. Los japoneses contrataron a W. Edwards Deming (1900-1993) como experto extranjero. A diferencia de Estados Unidos, donde las aplicaciones de los métodos estadísticos a problemas de calidad caían muy por abajo de sus éxitos en épocas de guerra, pues los gerentes no los apreciaban en absoluto, en Japón los altos directivos llegaron con sus ingenieros para aprender las técnicas. Lo que siguió fue un compromiso en las empresas y las industrias por mejorar la calidad con la educación, que incluía métodos estadísticos. Esta transformación llevó a muchas compañías japonesas a un liderazgo en el mercado mundial.

Con la finalidad de competir en el mercado internacional, otras compañías y países también tuvieron que enfocarse en el mejoramiento de la calidad.

Una teoría de administración para mejorar el producto o el servicio la encabezó W. Edwards Deming. La teoría incluye enunciados concisos acerca de los elementos de la transformación que debe realizarse. Deming resumió sus ideas sobre la transformación de la industria estadounidense en 14 puntos para la administración (véase el libro de Deming, que se menciona en la bibliografía). Se aplican no solo a la fabricación, sino también a las industrias de servicios, y a organizaciones de todos tamaños, grandes y pequeñas.

El principal impulso del enfoque estadístico al mejoramiento de la calidad es que es mejor trabajar corriente arriba en el proceso, con la finalidad de mejorar la calidad. Esto es, acumular calidad en el producto al concentrarse en el equipo, los componentes y los materiales que se utilizan en su fabricación.

El consumidor también tiene una función en la nueva forma de mejoramiento de la calidad, que siempre han sido **1.** diseñar un producto, **2.** fabricarlo y **3.** comercializarlo. Ahora hay un nuevo cuarto paso, **4.** descubrir las reacciones de los compradores ante el producto. Y también indagar por qué otros no compran. Los métodos estadísticos de muestreo brindarán una forma de averiguar qué piensa el consumidor. Entonces, pueden hacerse cambios en el diseño y la producción para ajustar mejor el producto con el mercado. Los cuatro pasos deben repetirse una y otra vez, en la búsqueda de mejoramiento continuo del producto.

15.2 Inicio de un programa de mejoramiento de la calidad

La sabiduría imperante es que los altos ejecutivos deben involucrarse en cualquier programa de mejoramiento de la calidad. Una vez comprometidos, necesitan tomar medidas y seleccionar procesos iniciales para funcionar como proyectos insignia. Es recomendable comenzar con procesos que tengan un gran potencial para mejorar y donde el prospecto de grandes ganancias financieras sea mayor. Aun cuando es decisión de la administración, los programas más exitosos inician con compromisos formados con empleados de todos los niveles. Es posible generar más entusiasmo cuando hay un consenso en cuanto a la selección del proceso. Una técnica Delphi modificada ayudará a que los grupos alcancen unanimidad. Cada individuo escribe sus tres opciones más importantes. Con 3 puntos para el primer lugar, 2 para el segundo y 1 para el tercero, y los totales de cada proceso candidato se tabulan para que todos los vean. Quizá luego de cierta discusión, cada persona vota nuevamente y el proceso continúa hasta que se alcanza una elección unánime.

Suponga que el proceso elegido considera anillos de pistón. El primer paso consiste en recopilar datos. Se hablará con quienes corren el proceso acerca de las causas y los tipos de defectos; no obstante, para comenzar se requieren datos frescos acerca de todos los defectos que ocurren durante un periodo de dos semanas.

Defecto	Número
Altura	30
Diámetro	14
Grietas	4
Ralladuras	2
Otro	5

Esta información se presenta como diagrama de Pareto en la figura 15.3. Se observa que 30 de 55 anillos defectuosos tienen alturas incorrectas.

Para proceder, se reúnen ingenieros, supervisores y operadores que fabrican los anillos para una sesión de lluvia de ideas. Construyen una lista de las posibles causas para la

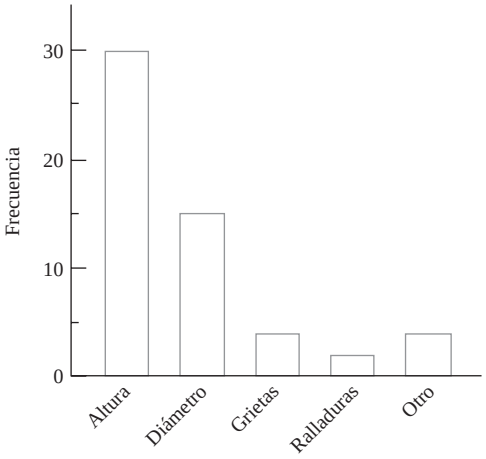


Figura 15.3
Diagrama de Pareto para anillos de pistón

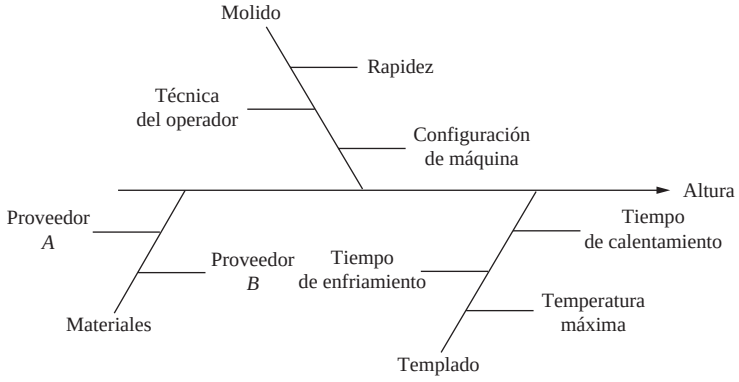


Figura 15.4
Diagrama de causa y efecto para anillos de pistón

variación en altura. Esto puede mostrarse gráficamente en un **diagrama de causa y efecto**, donde se ordenan las causas, y las causas de las causas, como en la figura 15.4 (véase el libro de K. Ishikawa, que se menciona en la bibliografía, para más ejemplos). El diagrama de causa y efecto, que se asemeja al esqueleto de un pez, comienza con una línea horizontal central para un problema principal como la altura incorrecta. Los principales factores que afectan la altura se listan sobre líneas diagonales unidas a la línea horizontal central. Los factores que influyen en los factores principales, como el tiempo de enfriamiento que afecta el templado, se marcan sobre líneas horizontales conectadas a las líneas diagonales. Para avanzar aún más, deben tomarse acciones sobre el sistema.

Un diseño factorial de dos niveles se opera con los proveedores como Factor *A* y dos rapideces para el molido como Factor *B*. La respuesta, el número de defectuosos en 200 anillos fabricados en cada condición, se registra en la figura 15.5. Los resultados confirman uno de los puntos de Deming: trabajar con un solo proveedor.

Si el proceso es estable con el material del proveedor 1, entonces es momento de realizar otro diagrama de Pareto y continuar el ciclo de mejora.

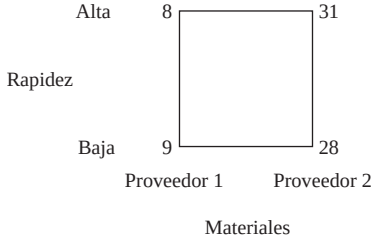


Figura 15.5
Número de anillos defectuosos de un diseño 2^2

Una consecuencia de la forma japonesa de trabajar en conjunto ha sido la formación de grupos pequeños de trabajadores llamados *círculos de calidad*. Tales grupos, que consisten en empleados de todos los niveles, se reúnen regularmente para discutir formas de mejorar continuamente los procesos.

Con todos los trabajadores recibiendo alguna capacitación estadística e ingenieros capacitados de alguna forma en diseño experimental, todos los procesos dentro de la compañía pueden recibir atención y mejorarse.

15.3 Diseños experimentales para la calidad

El énfasis moderno, iniciado en Japón, ha sido desarrollar calidad en el producto, en vez de esperar hasta el final de la línea y tratar de inspeccionar la mala calidad. La función de la calidad se convierte en un trabajo de tiempo completo para todos en la compañía, al trabajar como equipo. Deben aprender acerca del proceso al observar y realizar experimentos estadísticamente diseñados.

Además de los diseños factoriales estudiados en el capítulo 13, el japonés, y el profesor Genichi Taguchi en particular, introdujeron buenas ideas de ingeniería para obtener nuevos procedimientos de diseño. Dos de sus principales aportaciones requieren usar experimentos diseñados para

a) seleccionar una variable de entrada para minimizar la variación, mientras otra variable de entrada mantiene la respuesta en perspectiva;
b) crear productos que no sean sensibles a variaciones en sus componentes o en sus condiciones ambientales.

Para ilustrar el concepto de minimización de la variación, suponga que se corre un diseño 2^3 factorial para estudiar los efectos de la concentración inicial de ácido A, contenido de trapos y tiempo en el digestor sobre la resistencia a la rotura del papel para escribir. En vez de resumir el experimento en términos de las medias $\overline{y}_{ijk\bullet}$ en cada condición experimental, el estadístico G. E. P. Box sugiere un gráfico de los valores individuales. Este gráfico ilustra tanto el nivel con respecto a la meta indicado como la cantidad de variación. A partir de la figura 15.6 se observa que la concentración de ácido puede influir en el nivel medio; mientras que el contenido de trapos puede usarse para reducir la variación. El tercer factor, tiempo en el digestor, no parece tener un efecto. Esto es, puede manipularse el contenido de trapos y la concentración inicial juntos para que ambos estén en perspectiva y reducir la variación.

Al estudiar el efecto de varios factores sobre la varianza, por lo general es mejor considerar $\ln(s^2)$, pues ello es más adecuado para que sea aproximadamente normal.

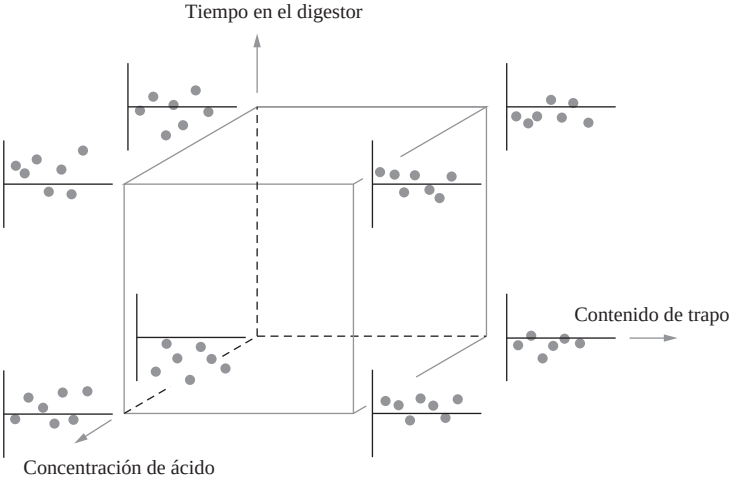


Figura 15.6
Resumen de un diseño para estudiar el efecto sobre la respuesta media y la variación

EJEMPLO **Estimación de los efectos de factor sobre la varianza**

Investigadores repitieron tres veces un experimento 2^3 para estudiar los efectos de x_1 = tipo de solvente, x_2 = tiempo en horno y x_3 = temperatura del horno sobre la resistencia a la tensión de especímenes de prueba de fibra sintética que se va a usar en alfombras. Los principales efectos e interacciones se estimarían en la forma usual. Aquí, para cada repetición, se calculó la varianza de las 3 respuestas y se les colocó de la segunda a última columna de la tabla. Los valores de sus logaritmos naturales se proporcionan en la última columna. Determine si alguno de los factores tiene una influencia sobre la varianza.

Solvente x_1	Tiempo de diseño x_2	Temp. x_3	s_i^2	$\ln(s_i^2)$
− 1	− 1	− 1	2,048	7.6246
1	− 1	− 1	2,813	7.9420
− 1	1	− 1	800	6.6846
1	1	− 1	1,352	7.2093
− 1	− 1	1	2,113	7.6559
1	− 1	1	1,568	7.3576
− 1	1	1	882	6.7822
1	1	1	1,013	6.9207

Solución Al multiplicar la columna de ln(varianza) por la columna adecuada y dividir entre 4, se obtienen los efectos estimados sobre ln(varianza):

$$solvente: \frac{-7.6246 + 7.9420 - 6.6846 + \cdots + 6.9207}{4} = 0.171$$

$$tiempo: -0.746 \quad temp: -0.186 \quad solvente \times tiempo: 0.091$$

$$solvente \times temp: 0.161 \quad tiempo \times temp: -0.250$$

$$solvente \times tiempo \times temp: 0.057$$

Como no hay repetición de valores para s_i^2, no es posible calcular un estadístico F. En vez de ello, se crea una gráfica media normal, como se describió en la página 415. Al graficar los valores absolutos de los efectos estimados en la figura 15.7, se ve que el segundo factor, B (tiempo en horno), parece importante. Está muy por arriba del patrón en línea recta formado por los pequeños efectos estimados. Si el tiempo en horno se mantiene en su nivel superior, la varianza se reducirá.

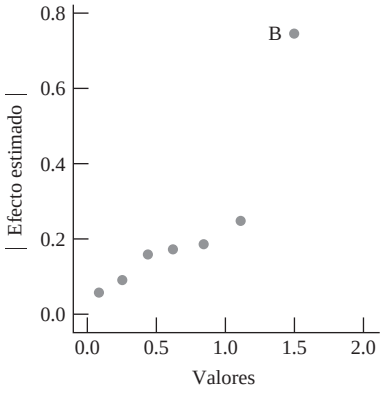


Figura 15.7
Gráfica media-normal del |efecto estimado| para $\ln(s_i^2)$

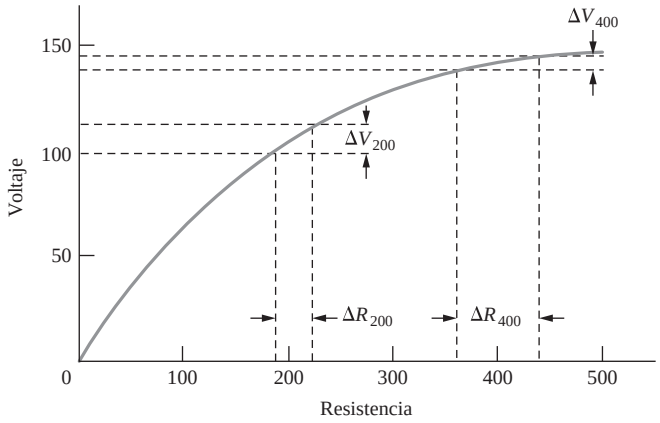


Figura 15.8
Una relación no lineal entre voltaje de salida y resistencia puede explotarse para reducir la variación

Se advierte que 7 pueden ser muy pocos efectos para leer patrones a partir de la gráfica media-normal, de modo que esta conclusión tentativa debe verificarse con experimentación adicional. ■

Para ilustrar la idea de fabricar productos que sean insensibles a la variación, suponga que el voltaje de salida de un circuito se relaciona con el valor de un resistor, como en la figura 15.8. Es posible aprovechar la relación *no lineal* para obtener una salida más estable. Incluso si los resistores tienen una tolerancia de 10% (el resistor nominal de 200 ohm variaría entre 180 y 220, en tanto que el resistor de 400 ohm variaría entre 360 y 440), sería mejor usar el resistor de valor superior, ya que la variación en la respuesta, voltaje de salida, es mucho menor. Entonces, como en la figura 15.6, podría buscar un dispositivo que llevaría el voltaje de salida al rango deseado.

G. Taguchi y Y. Wu, en la referencia que se menciona en la bibliografía, ofrecen un ejemplo de elaboración de un producto insensible a las condiciones ambientales. La compañía Ina Tile experimentó grandes cantidades de material de desecho debido a variaciones de temperatura dentro de su horno. En vez de comprar inmediatamente uno nuevo, un horno más costoso, experimentaron con nuevas recetas para elaborar los mosaicos. Después de correr un diseño factorial fraccional con 7 factores, se descubrió que solo el contenido de cal era importante. Como sugirió la regla de Pareto, que postula unos cuantos elementos vitales y muchos triviales, solo 1 de 7 variables tenían un efecto. Se encontró una solución de bajo costo y el problema se solucionó al aumentar el contenido de cal.

15.4 Control de calidad

A algunos quizá les sorprenda saber que 2 piezas aparentemente idénticas hechas bajo condiciones cuidadosamente controladas, del mismo lote de material bruto, y únicamente separadas por segundos en la misma máquina pueden, no obstante, ser diferentes en muchos aspectos. De hecho, cualquier proceso de fabricación, aunque sea bueno, se caracteriza por cierta cantidad de variabilidad, que es de naturaleza aleatoria y que no logra eliminarse por completo.

Por lo general, los procesos de fabricación pasan a través de varias fases de desarrollo antes de comenzar la producción real. Tienen que realizarse valoraciones para determinar si el proceso logra producir unidades que satisfagan las especificaciones de ingeniería. Si una característica tiene una distribución aproximadamente normal, su variación natural está dentro de más o menos 3 desviaciones estándar de su media. Una valoración típica de línea de referencia consiste en determinar si este intervalo de longitud 6σ está dentro de los límites de especificación. La capacidad del proceso se cuantifica sobre esta base. Sea *LSL* el límite de especificación inferior y *USL* el límite de especificación superior para el proce-

so. Entonces, el potencial proceso puede valorarse a partir de un **índice de capacidad del proceso**, que se estima mediante

$$\widehat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s}$$

donde s es la desviación estándar que se obtiene al medir unidades de una muestra.

Puesto que uno trata con el índice de capacidad estimada, $\widehat{C}_p$, los profesionales sugieren que se requiere un valor de al menos 1.33 antes de que un proceso en marcha se considere capaz.

Cuando la media del proceso no está centrada entre los límites de especificación, la especificación más cercana puede ser más importante. Un índice de capacidad del proceso alternativo que tenga valor estimado

$$\widehat{C}_{pk} = \frac{\min(\overline{x} - LSL,\ USL - \overline{x})}{3s}$$

toma en cuenta esta distancia.

EJEMPLO **Cómo calcular el índice de capacidad del proceso**

Los límites de especificación sobre el diámetro de una válvula (mm) son $LSL = 10.98$ y $USL = 11.01$. Mediciones sobre 80 válvulas dieron $\overline{x} = 10.991$ y $s = 0.0035$. Estime los índices de capacidad del proceso C_p y C_{pk}.

Solución

$$\widehat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} = \frac{11.01 - 10.98}{6(0.0035)} = 1.43$$

de modo que el proceso se juzgaría como capaz.

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{pk} &= \frac{\min(\overline{x} - LSL,\ USL - \overline{x})}{3s} \\ &= \frac{\min(10.991 - 10.98,\ 11.01 - 10.991)}{3(0.0035)} = 1.048\end{aligned}$$

Este segundo índice es sustancialmente menor que el primero porque la media está lejos del centro. ■

De acuerdo con las ideas de mejoramiento de la calidad, conseguir el intervalo de seis sigma dentro de las especificaciones es tan solo un primer paso. Mejorías adicionales podrían conducir a especificaciones más estrictas y a la producción de mejores unidades. Sin embargo, antes de hacer cualquier valoración de la capacidad, el proceso debe hacerse estable o estar bajo control.

Cuando la variabilidad presente en un proceso de producción se confina a variación por azar, se dice que el proceso está en un estado de **control estadístico**. Tal estado generalmente se logra al descubrir y eliminar el problema del orden que causa otro tipo de variación, llamada **variación asignable**, que puede deberse a operadores deficientemente capacitados, materiales brutos de baja calidad, configuraciones defectuosas de máquina, partes gastadas, y cuestiones parecidas. Dado que los procesos de fabricación rara vez están libres de esta clase de problemas, es importante tener algún método sistemático de detección de desviaciones serias de un estado de control estadístico cuando en realidad ocurran, o *antes* si es posible. Con esta finalidad es que se usan principalmente los **gráficos de control**.

En lo que sigue se diferenciará entre **gráficos de control por mediciones** y **gráficos de control por atributos**, dependiendo de si las observaciones en las que uno está interesado son mediciones o conteo de datos (por decir, los números de defectuosos en una muestra de un tamaño dado). En cualquier caso, un gráfico de control consiste en una **línea central**

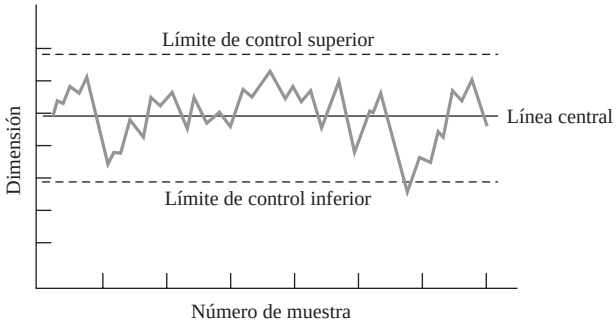


Figura 15.9
Gráfico de control

(véase la figura 15.9) que corresponde a la calidad *promedio* a la que se realiza el proceso, y líneas que corresponden a los **límites de control superior e inferior**. Dichos límites se eligen de modo que los valores que caen entre ellos puedan atribuirse al azar; en tanto que los valores que caen más allá de ellos se interpretan como indicio de falta de control. Al graficar los resultados obtenidos de muestras tomadas periódicamente a intervalos frecuentes, es posible comprobar con tal gráfico si el proceso está bajo control, o si el problema del orden indicado anteriormente entró al proceso. Cuando un punto muestral cae más allá de los límites de control, uno busca el problema, pero incluso si el punto cae entre los límites de control, una tendencia de algún otro patrón sistemático serviría para notar que deberían tomarse medidas para evitar problemas serios.

La habilidad para leer gráficos de control y determinar a partir de ellos cuál acción correctiva debe tomarse es cuestión de experiencia y juicio altamente desarrollado.

Un ingeniero de control de calidad no solo debe comprender los fundamentos estadísticos del tema, sino también tiene que estar profundamente familiarizado con los procesos en sí. Los aspectos de ingeniería y administrativos del control de calidad (y del aseguramiento de la calidad en general), que en la actualidad incluyen materiales brutos entrantes, productos salientes y control en proceso, constituyen un tema extenso por sí mismos. En las siguientes secciones se presentan únicamente los aspectos estadísticos del tema.

15.5 Gráficos de control por mediciones

Cuando se trata con mediciones, se suele ejercer control sobre la calidad promedio de un proceso, así como sobre su variabilidad. La primera meta se logra al graficar las medias de muestras periódicas sobre un **gráfico de control por medias**, llamado ***X* barra** o **gráfico $\overline{x}$**. La variabilidad se controla graficando los rangos muestrales o las desviaciones estándar, respectivamente, sobre un **gráfico *R***, o un **gráfico σ**, dependiendo de cuál estadístico se utilice para estimar la desviación estándar poblacional.

Si se conocen la media y la desviación estándar del proceso, μ y σ, y es razonable tratar las mediciones como muestras de una población normal, se puede afirmar con probabilidad $1 - \alpha$ que la media de una muestra aleatoria de tamaño n caerá entre

$$\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estos dos límites sobre $\overline{x}$ brindan los límites de control superior e inferior y, con las suposiciones dadas, permiten al ingeniero de control de calidad determinar si se realizan o no ajustes en el proceso.

En la práctica real, μ y σ por lo general son desconocidas y es necesario estimar sus valores a partir de una(s) muestra(s) grande(s) tomada(s) mientras el proceso está en control. Por esta razón, y porque puede no haber seguridad de que las mediciones puedan tratarse como muestras de una población normal, el nivel de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ asociado con los límites de control solo es aproximado, y tales límites de probabilidad rara

vez se usan en la práctica. En vez de ello, es práctica común en la industria utilizar **límites tres sigma**, obtenidos al sustituir 3 por $z_{\alpha/2}$. Con los límites tres sigma uno generalmente está muy seguro de que el proceso no se declarará fuera de control cuando, de hecho, en realidad está bajo control.

Si hay una larga historia de un proceso en buen control, μ y σ pueden estimarse a partir de los datos pasados prácticamente sin error. Por lo tanto, la línea central de un gráfico $\overline{x}$ está dada por μ, y los límites de control tres sigma superior e inferior están dados por $\mu \pm A\sigma$, donde $A = 3/\sqrt{n}$ y n es el tamaño de cada muestra.[1] Por conveniencia, los valores de A para $n = 2, 3, \ldots,$ y 15 están dados en la tabla 9. El uso de un tamaño de muestra constante n simplifica el mantenimiento y la interpretación de un gráfico $\overline{x}$, pero como el lector observará en el ejercicio 15.4, dicha restricción no es absolutamente necesaria.

En el caso más común, donde los parámetros de la población son *desconocidos*, es necesario estimar tales parámetros sobre la base de muestras preliminares. Para este propósito, por lo general es deseable obtener los resultados de 20 o 25 muestras consecutivas tomadas cuando el proceso está bajo control. Si se emplean k muestras, cada una de tamaño n, la media de la i-ésima muestra se denotará $\overline{x}_i$, y la gran media de las k medias muestrales con $\overline{\overline{x}}$; esto es,

Gran media de medias muestrales

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i$$

La variabilidad del proceso σ puede estimarse ya sea a partir de las desviaciones estándar o de los rangos de las k muestras. Dado que el tamaño de muestra comúnmente utilizado junto con los gráficos de control por mediciones es pequeño, por lo general hay muy poca pérdida de eficiencia al estimar σ a partir de los rangos muestrales. (Para un ejemplo donde en esta conexión se usan desviaciones estándar muestrales, véase el ejercicio 15.5.) En consecuencia, al denotar con R_i el rango de la i-ésima muestra, se utilizará el estadístico

Media de rango muestral

$$\overline{R} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R_i$$

Puesto que $\overline{\overline{x}}$ ofrecen una estimación insesgada de la media poblacional μ, la línea central para el gráfico $\overline{x}$ está dada por $\overline{\overline{x}}$. El estadístico $\overline{R}$ no ofrece una estimación insesgada de σ pero, al multiplicar $\overline{R}$ por la constante A_2, se obtiene una estimación insesgada de $3\,\sigma/\sqrt{n}$. El multiplicador constante A_2, tabulado en la tabla 9 para diversos valores de n, depende de la suposición de que las mediciones constituyen una muestra de una población normal. Por consiguiente, la línea central y los límites de control tres sigma superior e inferior, UCL y LCL, para un gráfico $\overline{x}$ (con μ y σ estimados a partir de datos pasados) están dados por

Valores de gráfico de control para un gráfico $\overline{x}$

$$\begin{aligned} \textit{línea central} &= \overline{\overline{x}} \\ UCL &= \overline{\overline{x}} + A_2\,\overline{R} \\ LCL &= \overline{\overline{x}} - A_2\,\overline{R} \end{aligned}$$

[1]A lo largo de este capítulo los autores se alejan de la acostumbrada notación de control de calidad, con la finalidad de ser consistentes con la notación estadística más ampliamente aceptada en otras partes de este libro. (Por ejemplo, en control de calidad se acostumbra denotar la media muestral y la desviación estándar con $\overline{x}$ y σ, y los correspondientes parámetros poblacionales con $\overline{x}'$ y σ'.)

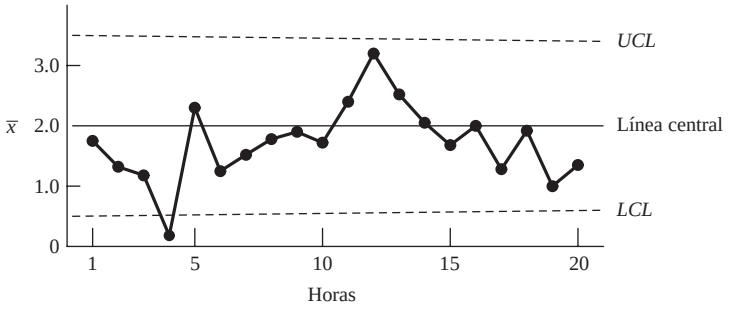


Figura 15.10
Gráfico $\overline{x}$

En la figura 15.10 se presenta un ejemplo de esta clase de gráfico para la media.

Al controlar un proceso, tal vez no sea suficiente monitorear la media poblacional. Aunque un aumento en la variabilidad del proceso puede volverse aparente a partir del aumento en las fluctuaciones de las $\overline{x}$, una prueba más sensible de corrimientos en la variabilidad del proceso la proporciona un gráfico de control separado, un gráfico R basado en los rangos muestrales o un gráfico σ basado en las desviaciones estándar muestrales. Un ejemplo de la última puede encontrarse en el ejercicio 15.5.

La línea central y los límites de control de un gráfico R se basan en la distribución del rango de muestras de tamaño n de una población normal. Como se observó en la página 269, la media y la desviación estándar de esta distribución muestral están dadas por $d_2\sigma$ y $d_3\sigma$, respectivamente, cuando se conoce σ. Por ende, los límites de control tres sigma para el rango están dados por $d_2\sigma \pm 3d_3\sigma$, y el conjunto completo de valores del gráfico de control para un gráfico R (con σ conocida) está dado por

Valores del gráfico de control para un gráfico R (σ conocida)

$$\begin{aligned} \textit{línea central} &= d_2\sigma \\ UCL &= D_2\sigma \\ LCL &= D_1\sigma \end{aligned}$$

Aquí $D_1 = d_2 - 3d_3$ y $D_2 = d_2 + 3d_3$, y los valores de dichas constantes pueden encontrarse en la tabla 9 para diversos valores de n.

Si no se conoce σ, se estima a partir de datos pasados, como se describió anteriormente, y los valores del gráfico de control para el gráfico R (con σ desconocida) son los siguientes:

Valores del gráfico de control para un gráfico R (σ desconocida)

$$\begin{aligned} \textit{línea central} &= \overline{R} \\ UCL &= D_4\overline{R} \\ LCL &= D_3\overline{R} \end{aligned}$$

Aquí $D_3 = D_1/d_2$ y $D_4 = D_2/d_2$, y los valores de dichas constantes también pueden encontrarse en la tabla 9 para diversos valores de n.

Para ilustrar la construcción de un gráfico $\overline{x}$ y un gráfico R, suponga que un fabricante de ciertos cojinetes sabe, a partir del registro preliminar de 20 muestras por hora de tamaño 4, que, para los diámetros de dichos cojinetes, $\overline{\overline{x}} = 0.9752$ y $\overline{R} = 0.0002$. Al codificar sus datos mediante la expresión

$$\frac{x - 0.9750}{0.0001}$$

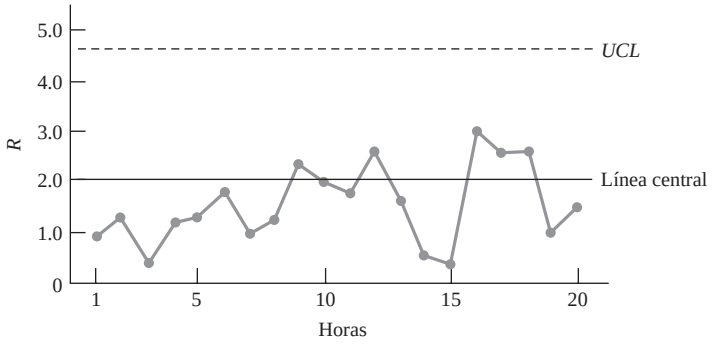


Figura 15.11
Gráfico *R*

esto es, al expresar cada medición como una desviación de 0.9750 en 0.0001 pulgadas, obtiene

Gráfico $\overline{x}$ (codificado)		Gráfico R (codificado)	
línea central	$\overline{\overline{x}} = 2.0$	línea central	$\overline{R} = 2.0$
UCL	$\overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} = 3.5$	*UCL*	$D_4\overline{R} = 4.6$
LCL	$\overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} = 0.5$	*LCL*	$D_3\overline{R} = 0.0$

Los valores de $A_2 = 0.729$, $D_3 = 0$ y $D_4 = 2.282$ para muestras de tamaño 4 se obtuvieron a partir de la tabla 9. Gráficamente, dichos gráficos de control se muestran en las figuras 15.10 y 15.11, donde también se indican los resultados obtenidos posteriormente en las siguientes muestras:

Hora	Valores de muestra codificados				$\overline{x}$	R
1	1.7	2.2	1.9	1.2	1.75	1.0
2	0.8	1.5	2.1	0.9	1.32	1.3
3	1.0	1.4	1.0	1.3	1.18	0.4
4	0.4	−0.6	0.7	0.2	0.18	1.3
5	1.4	2.3	2.8	2.7	2.30	1.4
6	1.8	2.0	1.1	0.1	1.25	1.9
7	1.6	1.0	1.5	2.0	1.52	1.0
8	2.5	1.6	1.8	1.2	1.78	1.3
9	2.9	2.0	0.5	2.2	1.90	2.4
10	1.1	1.1	3.1	1.6	1.72	2.0
11	1.7	3.6	2.5	1.8	2.40	1.9
12	4.6	2.8	3.5	1.9	3.20	2.7
13	2.6	2.8	3.2	1.5	2.52	1.7
14	2.3	2.1	2.1	1.7	2.05	0.6
15	1.9	1.6	1.8	1.4	1.68	0.5
16	1.3	2.0	3.9	0.8	2.00	3.1
17	2.8	1.5	0.6	0.2	1.28	2.6
18	1.7	3.6	0.9	1.5	1.92	2.7
19	1.6	0.6	1.0	0.8	1.00	1.0
20	1.7	1.0	0.5	2.2	1.35	1.7

La inspección de la figura 15.10 indica que tan solo uno de los puntos cae afuera de los límites de control, pero también muestra que, no obstante, puede haber un desplazamiento

descendente en el promedio del proceso. La figura 15.11 ilustra un desplazamiento descendente definido en la variabilidad del proceso; observe sobre todo que la mayoría de los rangos muestrales caen abajo de la línea central del gráfico R.

Quizás el lector haya observado la cercana conexión entre el uso de los gráficos de control y las pruebas de hipótesis. Un punto sobre un gráfico $\overline{x}$ que está fuera de control corresponde a una muestra para la cual se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = \mu_0$. Para ser más precisos, debería decirse que las técnicas del gráfico de control brindan conjuntos de pruebas secuenciales *ordenadas temporalmente*. Se está interesado no tan solo en la posición de puntos individuales, sino también en posibles tendencias u otros patrones mostrados por los puntos que representan muestras sucesivas.

Un gráfico diferente, llamado gráfico de **suma acumulativa (CUSUM)**, es más efectiva para detectar pequeños desplazamientos en la media. Considere las desviaciones *observación – valor meta*. En el contexto del ejemplo, el valor meta debería ser 2.00. Para construir el gráfico CUSUM, grafique el **estadístico CUSUM** contra el orden temporal

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (1.75 - 2.00) = -0.25 \text{ contra } 1 \\
S_2 &= (1.75 - 2.00) + (1.32 - 2.00) = -0.93 \text{ contra } 2 \\
S_3 &= (-0.25) + (-0.68) + (1.18 - 2.00) = -1.75 \text{ contra } 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En la figura 15.12 se ve evidencia de una tendencia descendente inicial constante, enmascarada un poco por variación aleatoria. Este comportamiento indica que el nivel del proceso es una cantidad fija por abajo del valor meta de 2.00. En la observación 11 hay un desplazamiento ascendente distintivo en nivel, como si se hubiera realizado un cambio, pero después de algunas horas parece ocurrir un desplazamiento a un nivel por abajo de 2.0.

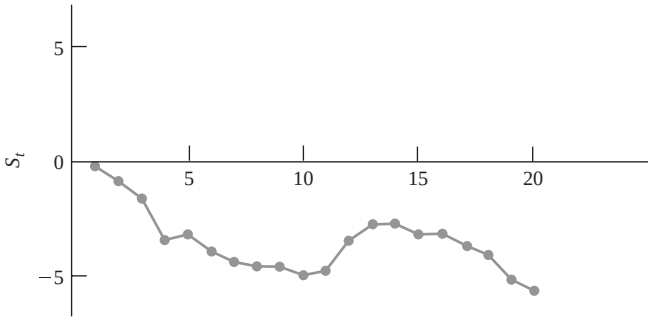


Figura 15.12
Gráfico CUSUM

Gráfico CUSUM de S_t

Crosier propuso un esquema CUSUM bilateral, que primero actualiza la CUSUM previa mediante una nueva observación. Dependiendo del valor actualizado de esta suma, el nuevo valor del CUSUM se iguala a cero o la CUSUM se reduce hacia cero. Esta modificación disminuye las posibilidades de lanzar una falsa alarma.

En particular, la **CUSUM** bilateral de **Crosier** comienza con $S_0 = 0$. En cada paso, se calcula primero el valor absoluto tentativo de la suma $C_n = |\, S_{n-1} + (\, X_n - a\,)\,|$. Luego, el siguiente valor del estadístico S_n se define como

$$
S_n = \begin{cases} 0, & \text{si } C_n \le ks \\ (\, S_{n-1} + X_n - a\,)(\,1 - ks/C_n\,), & \text{de otra forma} \end{cases}
$$

Si μ_0 denota la media en control y μ_1 un valor que debería detectarse rápidamente, la constante k puede establecerse a un medio del desplazamiento medio especificado (expresado en desviaciones estándar).

$$
k = \frac{1}{2}\,\frac{(\,\mu_1 - \mu_0)}{\sigma}
$$

El esquema de Crosier indica que la media se desplazó cuando

$$S_n \geq hs \text{ (aumenta)} \quad \text{o bien,} \quad S_n \leq -hs \text{ (disminuye)}$$

Crosier (consulte el artículo que se menciona en la bibliografía) ofrece valores para h y las longitudes de corrida promedio resultantes en μ_0 y μ_1. Véase también R. Johnson y R. Li, que se incluyen en la bibliografía, para ejemplos y más detalles acerca de los estadísticos CUSUM.

15.6 Gráficos de control por atributos

Aunque por lo general puede obtenerse información más completa a partir de mediciones realizadas sobre un producto terminado, a menudo es más rápido y más barato comprobar el producto contra las especificaciones de un "atributo" o sobre la base "avanzar, no avanzar". Por ejemplo, al verificar el diámetro y la excentricidad de un cojinete de bolas, es mucho más simple determinar si pasará a través de orificios circulares cortados en una plantilla, que realizar varias mediciones del diámetro con un micrómetro. En esta sección, se examinan dos tipos fundamentales de gráficos de control usados junto con el muestreo de atributos, el **gráfico de fracción de defectuosos**, también llamado **gráfico *p***, y el **gráfico de número de defectos**, también llamado **gráfico *c***. Para aclarar la distinción entre "número de defectuosos" y "número de defectos", note que una unidad sometida a prueba puede tener varios **defectos**; mientras que, por otra lado, o es o no es defectuosa. En muchas aplicaciones, una unidad se llama **defectuosa** si tiene al menos un defecto.

Los límites de control para un gráfico de fracción de defectuosos se basan en la teoría del muestreo para proporciones que se introdujo en la sección 10.1 y en la aproximación de curva normal a la distribución binomial. Por lo tanto, si se ofrece un estándar (esto es, si la fracción de defectuosos debe tomar algún valor preasignado p), la línea central es p y los límites de control tres sigma para la fracción de defectuosos en muestras aleatorias de tamaño n están dados por

$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Si no se proporcionan estándares, que en la práctica real es el caso más frecuente, p tendrá que estimarse a partir de datos anteriores. Si están disponibles k muestras, d_i es el número de defectuosos en la i-ésima muestra, y n_i es el número de observaciones en la i-ésima muestra, se suele estimar p como la proporción de defectuosos en las muestras combinadas; a saber, como

Proporción de defectuosos en muestras combinadas

$$\overline{p} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

Valores del gráfico de control para un gráfico de fracción de defectuosos

$$\text{línea central} = \overline{p}$$

$$UCL = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

$$LCL = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

Note que, si p es pequeño, como frecuentemente es el caso en la práctica, la sustitución en la fórmula para el límite de control inferior podría dar como resultado un número negativo. Cuando esto ocurre, se acostumbra a considerar el límite de control inferior como si fuera cero y, en efecto, utilizar solo el límite de control superior. Otra complicación que

puede surgir cuando p es pequeña es que la distribución binomial quizá no se aproxime adecuadamente a la distribución normal. En términos generales, el uso de los límites de control anteriores para los gráficos p no es realista cuando n y p son tales que la distribución binomial subyacente (o hipergeométrica) no puede aproximarse a una curva normal (véase la página 133). En dichos casos, es mejor usar un límite de control superior obtenido directamente de una tabla de probabilidades binomiales o, acaso, utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

Como ilustración de un gráfico p, suponga que es deseable controlar la salida de la línea de producción de cierto circuito integrado para mantener una producción de 60 por ciento; esto es, una proporción defectuosa del 40 por ciento. Para tal finalidad, muestras diarias de 100 unidades se comprueban para especificaciones eléctricas, con los siguientes resultados:

Fecha	Número de defectuosos	Fecha	Número de defectuosos	Fecha	Número de defectuosos
3-12	24	3-26	44	4-09	23
3-13	38	3-27	52	4-10	31
3-16	62	3-30	45	4-13	26
3-17	34	3-31	30	4-14	32
3-18	26	4-01	34	4-15	35
3-19	36	4-02	33	4-16	15
3-20	38	4-03	22	4-17	24
3-23	52	4-06	34	4-20	38
3-24	33	4-07	43	4-21	21
3-25	44	4-08	28	4-22	16

Puesto que el estándar está dado como $p = 0.40$, los valores del gráfico de control son

$$\textit{línea central} = 0.40$$

$$UCL = 0.40 + 3\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{100}} = 0.55$$

$$LCL = 0.40 - 3\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{100}} = 0.25$$

En la figura 15.13 se ilustra el gráfico de control correspondiente con puntos para las 30 muestras de fracciones defectuosas, y presenta algunas características interesantes. Note que tan solo hay 1 punto fuera de control en el lado alto, pero hay 7 puntos fuera de control en el lado bajo. La mayoría de estos 7 puntos bajos ocurrieron después del 1 de abril, y parece una tendencia descendente general. De hecho, hay una racha ininterrumpida de 11 puntos por abajo de la línea central después del 7 de abril. En este gráfico parecería que la

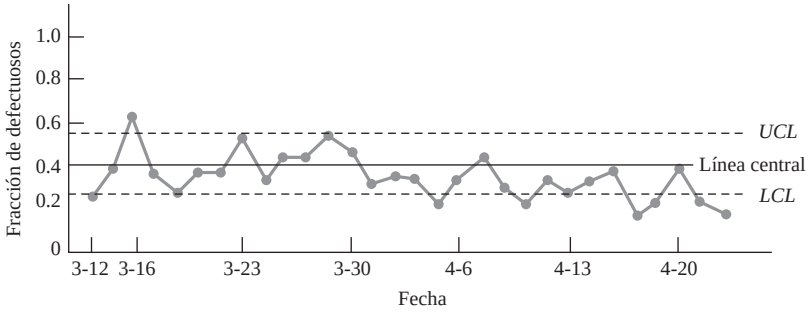


Figura 15.13
Gráfico p

producción todavía no se estabiliza y que el proceso es potencialmente capaz de mantener una producción muy por arriba del valor nominal del 60 por ciento.

Equivalente al gráfico p para la fracción de defectuosos es el gráfico de control para el número de defectos. En vez de graficar la fracción de defectuosos en una muestra de tamaño n, se grafica el número de defectuosos, y los valores del gráfico de control para este tipo de gráfico se obtienen al multiplicar los valores anteriores para la línea central y los límites de control para n. Por lo tanto, si p se estima mediante $\overline{p}$, los valores del gráfico de control para un **gráfico de número de defectuosos** son los siguientes:

Valores de gráfico de control para un gráfico de número de defectuosos

$$\begin{aligned} \textit{línea central} &= n\overline{p} \\ UCL &= n\overline{p} + 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})} \\ LCL &= n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})} \end{aligned}$$

Hay situaciones donde es necesario controlar el número de defectos en una unidad de producto, en vez de la fracción de defectuosos o el número de defectuosos. Por ejemplo, en la producción de alfombras, es importante controlar el número de defectos por cien yardas; en la producción de impresiones quizá se desee controlar el número de defectos por rollo. Dichas situaciones son similares a la descrita en la sección 4.7, que condujo a la distribución de Poisson. Por consiguiente, si c es el número de defectos por unidad fabricada, c se tomó como un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson.

Se sigue que la línea central para un gráfico del número de defectos es el parámetro λ de la distribución de Poisson correspondiente, y los límites de control tres sigma pueden basarse en el hecho de que la desviación estándar de esta distribución es $\sqrt{\lambda}$. Si se desconoce λ, esto es, si no se proporciona ningún estándar, su valor por lo general se estima a partir de al menos 20 valores de c observados de datos pasados. Si k es el número de unidades de producto disponibles para estimar λ, y si c_i es el número de defectos en la i-ésima unidad, entonces, λ se estima mediante

Número medio de defectos

$$\overline{c} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} c_i$$

y los valores del gráfico de control para el **gráfico *c***, o **gráfico de número de defectos**, son

Valores del gráfico de control para un gráfico del número de defectos

$$\begin{aligned} \textit{línea central} &= \overline{c} \\ UCL &= \overline{c} + 3\sqrt{\overline{c}} \\ LCL &= \overline{c} - 3\sqrt{\overline{c}} \end{aligned}$$

Para ilustrar este tipo de gráfico de control, suponga que se sabe, a partir de experiencias pasadas que, en promedio, el ensamblado de una aeronave hecho por cierta compañía tiene $\overline{c} = 4$ remaches faltantes. En la figura 15.14 se ilustra el gráfico de control correspondiente para el número de remaches faltantes, donde también se graficaron los resultados de inspecciones que revelaron 4, 6, 5, 1, 2, 3, 5, 7, 1, 2, 2, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 1, 8, 4, 5, 6, 3, 4 y 2 remaches faltantes en 25 ensamblados.

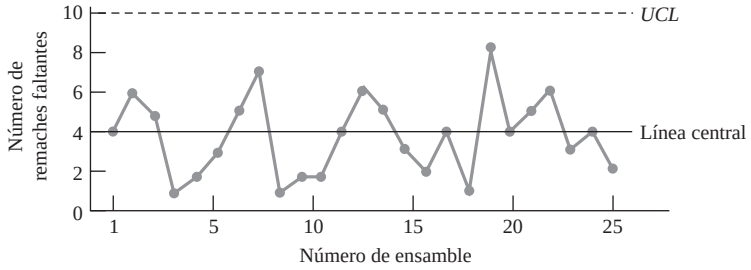


Figura 15.14
Gráfico *c*

Para cualquier gráfico $\overline{x}$, gráfico *p* o gráfico *c*, un punto afuera de los límites de control es suficiente para sugerir que una causa especial influyó en el proceso. Ahora es práctica común aumentar la sensibilidad del gráfico para detectar causas especiales al agregar otras pruebas para causas especiales. Dos de dichas pruebas adicionales merecen trato especial. Además de un punto afuera de los límites de control, un gráfico señalará una causa especial si

Pruebas adicionales para causas especiales

1. Hay 9 puntos en fila en el mismo lado de la línea central.
2. Hay 6 puntos en fila, todos crecientes o todos decrecientes.

Como se mencionó anteriormente, hay una racha de 11 puntos por abajo de la línea central en la figura 15.13.

Ejercicios

15.1 Un fabricante de plásticos extrude piezas troqueladas para usarse en la fabricación de gafas. Las especificaciones requieren que el grosor de tales piezas tengan $\mu = 0.150$ pulgadas y $\sigma = 0.002$ pulgadas.

a) Use las especificaciones para calcular una línea central y los límites de control tres sigma para un gráfico $\overline{x}$ con $n = 5$.

b) Use las especificaciones para calcular una línea central y límites de control tres sigma para un gráfico *R* con $n = 5$.

c) Grafique las siguientes medias y rangos, obtenidos en 20 muestras aleatorias sucesivas de tamaño 5, en gráficos basados en las constantes del gráfico de control obtenidas en los incisos *a*) y *b*), y discuta el proceso.

Muestra	$\overline{x}$	*R*	Muestra	$\overline{x}$	*R*
1	0.152	0.004	11	0.149	0.003
2	0.147	0.006	12	0.153	0.004
3	0.153	0.004	13	0.150	0.005
4	0.153	0.002	14	0.152	0.001
5	0.151	0.003	15	0.149	0.003
6	0.148	0.002	16	0.146	0.002
7	0.149	0.006	17	0.154	0.004
8	0.144	0.001	18	0.152	0.005
9	0.149	0.003	19	0.151	0.002
10	0.152	0.005	20	0.149	0.004

15.2 Calcule $\overline{\overline{x}}$ y $\overline{R}$ de los datos del inciso *c*) del ejercicio 15.1 y use dichos valores para construir las líneas centrales y los límites de control tres sigma para nuevos gráficos $\overline{x}$ y *R* para usarse en el control del grosor de las piezas de plástico extrudido.

15.3 Los siguientes datos proporcionan las medias y rangos de 25 muestras, y cada una consiste en 4 resultados de prueba de compresión sobre la forja de acero, en miles de libras por pulgada cuadrada:

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{x}$	45.4	48.1	46.2	45.7	41.9	49.4	52.6	54.5
R	2.7	3.1	5.0	1.6	2.2	5.7	6.5	3.6

Muestra	9	10	11	12	13	14	15	16
$\overline{x}$	45.1	47.6	42.8	41.4	43.7	49.2	51.1	42.8
R	2.5	1.0	3.9	5.6	2.7	3.1	1.5	2.2

Muestra	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\overline{x}$	51.1	52.4	47.9	48.6	53.3	49.7	48.2	51.6	52.3
R	1.4	4.3	2.2	2.7	3.0	1.1	2.1	1.6	2.4

a) Use dichos datos para encontrar la línea central y los límites de control para un gráfico $\overline{x}$.

b) Use tales datos para encontrar la línea central y los límites de control para un gráfico R.

c) Grafique los datos dados sobre gráficos $\overline{x}$ y R con base en las constantes de los gráficos de control de los incisos *a*) y *b*), e interprete los resultados.

d) Con las rachas arriba y abajo de la línea central (similares a las rachas arriba y abajo de la mediana, discutida en la página 457), pruebe, con un nivel de significancia de 0.05, si hay una tendencia en los valores $\overline{x}$.

e) ¿Sería razonable usar los límites de control encontrados en este ejercicio junto con mediciones de prueba de compresión posteriores a partir del mismo proceso? ¿Por qué?

15.4 Lecturas de corriente inversa (en nanoamperes) se hacen en la ubicación de un transistor sobre un circuito integrado. Una muestra de tamaño 10 se toma cada media hora. Dado que algunas de las unidades pueden estar "en corto" o estar "abiertas", no siempre es posible obtener 10 lecturas. La siguiente tabla presenta el número de lecturas hechas al final de cada intervalo de media hora durante un turno de 8 horas, y las corrientes inversas medias obtenidas:

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8
n	10	6	9	8	8	10	7	9
$\overline{x}$	12.5	11.1	10.2	11.6	21.9	12.3	9.7	15.6

Muestra	9	10	11	12	13	14	15	16
n	7	8	10	9	7	8	9	10
$\overline{x}$	16.7	9.8	11.6	17.2	10.1	9.5	13.1	14.2

a) Encuentre la línea central para un gráfico $\overline{x}$ al tomar la media ponderada de las 16 $\overline{x}$, ponderando cada valor con el tamaño de la muestra correspondiente.

b) Construya una tabla que muestre la línea central en el inciso a) y límites de control tres sigma correspondientes a $n = 6, 7, 8, 9$ y 10. Use = 4.0, un valor basado en los datos anteriores.

c) Grafique los datos sobre un gráfico de control, como el de la figura 15.15, e interprete los resultados.

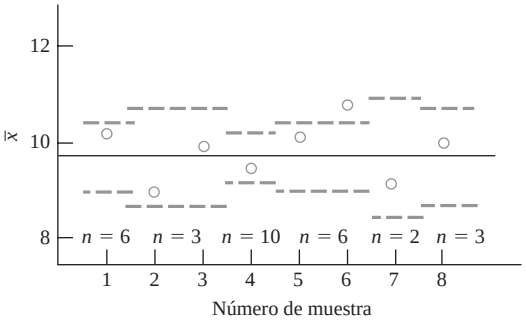


Figura 15.15
Ejercicio 15.4

15.5 Si, en vez de los rangos muestrales, se emplean las desviaciones estándar muestrales para estimar σ, los límites de control para el gráfico $\bar{x}$ resultante están dados por $\bar{\bar{x}} \pm A_1\bar{s}$, donde $\bar{s}$ es la media de las desviaciones estándar muestrales obtenidas de los datos dados y A_1 puede encontrarse en la tabla 9. Note que, junto con los problemas de control de calidad, la desviación estándar muestral se define usando el divisor n en vez de $n - 1$. El gráfico R correspondiente se sustituye con un gráfico σ que tiene la línea central $c_2\,\bar{s}$ y los límites de control inferior y superior $B_3\,\bar{s}$ y $B_4\,\bar{s}$, donde c_2, B_3 y B_4 se obtienen de la tabla 9.

a) Construya un gráfico $\bar{x}$ y un gráfico σ para 20 muestras de tamaño 3 que tengan $\bar{x}$ igual a 21.2, 19.4, 20.4, 20.4, 20.4, 19.0, 20.3, 21.1, 21.6, 22.1, 24.4, 23.9, 24.9, 24.1, 21.8, 19.5, 20.3, 22.5, 23.4, 23.3, y s igual a 2.0, 0.8, 1.1, 0.9, 1.0, 0.3, 1.3, 2.0, 0.8, 1.0, 1.5, 1.0, 1.5, 0.8, 1.3, 2.9, 4.3, 1.2, 0.3, 3.1.

b) ¿Sería razonable usar dichos límites de control para datos posteriores? ¿Por qué?

15.6 Con la finalidad de establecer gráficos de control para un proceso de perforación, se toman 30 muestras de cinco mediciones de los diámetros interiores y los resultados son $\bar{\bar{x}} = 1.317$ pulgadas y $\bar{s} = 0.002$ pulgadas. Con el método del ejercicio 15.5, construya un gráfico $\bar{x}$ para $n = 5$ y sobre él grafique las siguientes medias obtenidas en 25 muestras sucesivas: 1.328, 1.330, 1.321, 1.325, 1.332, 1.340, 1.327, 1.321, 1.324, 1.325, 1.329, 1.326, 1.330, 1.324, 1.328, 1.322, 1.326, 1.327, 1.329, 1.325, 1.324, 1.329, 1.330, 1.321 y 1.329. Discuta los resultados.

15.7 Suponga que, con las muestras del ejercicio 15.6, es deseable establecer control también sobre la variabilidad del proceso. Use el método del ejercicio 15.5 y los valores de $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{s}$ dados en el ejercicio 15.6, y calcule la línea central y los límites de control para un gráfico σ con $n = 5$.

15.8 Treinta y cinco muestras sucesivas de 100 moldes cada una, tomadas de una línea de producción, contenían, respectivamente, 3, 3, 5, 3, 5, 0, 3, 2, 3, 5, 6, 5, 9, 1, 2, 4, 5, 2, 0, 10, 3, 6, 3, 2, 5, 6, 3, 3, 2, 5, 1, 0, 7, 4 y 3 defectuosos. Si la fracción de defectuosos se debe mantener en 0.02, construya un gráfico p para tales datos y diga si este estándar podrá satisfacerse o no.

15.9 Los datos del ejercicio 15.8 pueden considerarse como evidencia de que se superará el estándar de 2% de defectuosos.

a) Utilice los datos del ejercicio 15.8 para construir nuevos límites de control para la fracción de defectuosos.

b) Con los límites de control que encontró en el inciso *a*), continúe el control del proceso graficando los siguientes datos acerca del número de defectuosos obtenido en 20 muestras posteriores de tamaño $n = 100$: 2, 4, 2, 4, 7, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 6, 4, 5, 8, 0, 5, 5, 4 y 2.

15.10 Las especificaciones para cierta válvula de producción en masa indican un procedimiento de prueba, de acuerdo con el cual cada válvula puede clasificarse como satisfactoria o insatisfactoria (defectuosa). Experiencias anteriores demuestran que el proceso puede realizarse de modo que $\bar{p} = 0.03$. Construya un gráfico de control tres sigma para el número de defectuosos obtenido en muestras de tamaño 100 y, sobre ella, grafique los siguientes números de defectuosos obtenidos en 30 muestras seleccionadas aleatoriamente de la producción de medio día: 3, 4, 2, 1, 5, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 4, 3, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 5, 7, 3 y 2.

15.11 El estándar para un proceso que produce placa de estaño en una tira continua tiene 5 defectos en forma de orificios o manchas visuales por 100 pies. Con base en el siguiente conjunto de 25 observaciones, dado el número de defectos por 100 pies, ¿puede concluirse que el proceso está en control con este estándar?

Número de inspección	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de defectos	3	2	2	4	4	4	6	4	1	7	5	5

Número de inspección	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Número de defectos	4	6	6	9	5	2	6	5	11	6	6	8	2

15.12 Un proceso para la fabricación de paneles de aglomerado de 4 por 8 pies se llevó a cabo en el pasado con un promedio de 2.7 imperfecciones por 100 paneles. Construya un gráfico para usar en la inspección de los paneles y discuta el control si 25 lotes sucesivos de 100 paneles contenían, respectivamente, 4, 1, 0, 3, 5, 3, 5, 4, 1, 4, 0, 1, 4, 2, 3, 7, 4, 2, 1, 3, 0, 2, 6, 1 y 3 imperfecciones.

15.7 Límites de tolerancia

Inherente en cada fase del control de calidad industrial está el problema de comparar alguna medición o característica de calidad de un producto terminado, contra especificaciones dadas. En ocasiones las especificaciones, o **límites de tolerancia**, los establece el cliente o el ingeniero de diseño, de tal modo que cualquier alejamiento considerable hará al producto inutilizable. Sin embargo, continúa el problema de producir la parte de modo que una proporción aceptablemente elevada de unidades caerán dentro de los límites de tolerancia especificados para la característica de calidad dada. Además, si un producto se fabrica sin especificaciones previas, o si se realizan modificaciones, es deseable saber dentro de qué límites el proceso puede mantener una característica de calidad en un porcentaje razonablemente elevado del tiempo. Por lo tanto, se habla de límites de tolerancia naturales; esto es, se deja que el proceso establezca sus propios límites, que, de acuerdo con la experiencia, pueden satisfacerse en la práctica real.

Si está disponible información confiable acerca de la distribución subyacente a la medición en cuestión, es asunto relativamente sencillo encontrar límites de tolerancia naturales. Por ejemplo, si mucha experiencia con un producto le permiten suponer que cierta dimensión se distribuye de manera normal con la media μ y la desviación estándar σ, es fácil construir límites entre los cuales se espera encontrar cualquier proporción P dada de la población. Para $P = 0.90$, se tienen los límites de tolerancia $\mu \pm 1.645\sigma$, y para $P = 0.95$ se tiene $\mu \pm 1.96\sigma$, como se verifica fácilmente en una tabla de áreas de curva normal.

En la mayoría de las situaciones prácticas, no se conocen los verdaderos valores de μ y σ, y los límites de tolerancia deben basarse en la media $\overline{X}$ y la desviación estándar S de una muestra aleatoria. Mientras que $\mu \pm 1.96\sigma$ son límites que incluyen 95% de una población normal, lo mismo no puede decirse para los límites $\overline{X} \pm 1.96\ S$. Dichos límites son variables aleatorias y pueden incluir o no una proporción dada de la población. No obstante, es posible determinar una constante K de modo que ***uno pueda afirmar con*** $(1 - \alpha)100\%$ ***de confianza que la proporción de la población contenida entre*** $\overline{x} - Ks$ y $\overline{x} + Ks$ ***es al menos P***. Tales valores de K para muestras aleatorias de poblaciones normales se ofrecen en la tabla 10 para $P = 0.90$, 0.95 y 0.99, con 95 o 99% niveles de confianza, y valores seleccionados de n desde 2 hasta 1,000.

Para ilustrar esta técnica, suponga que un fabricante toma una muestra de tamaño $n = 100$ de un lote muy grande de resortes de compresión producidos en masa y que obtiene $\overline{x} = 1.507$ y $s = 0.004$ pulgadas para las tres longitudes de los resortes. Al elegir el nivel de confianza del 99% y una proporción mínima de $P = 0.95$, obtiene los límites de tolerancia $1.507 \pm (2.355)(0.004)$; en otras palabras, el fabricante puede afirmar con 99% de confianza que, al menos, 95% de los resortes en todo el lote tienen longitudes libres de 1.497 a 1.517 pulgadas. Note que, en problemas como estos, deben especificarse la proporción mínima P, así como el grado de confianza $1 - \alpha$. Observe también que el límite de tolerancia inferior se redondea *hacia abajo* y el límite de tolerancia superior se redondea *hacia arriba*.

Para evitar confusión, se puntualiza también que existe una diferencia esencial entre límites de confianza y límites de tolerancia. Mientras que los límites de confianza se usan para estimar un parámetro de una población, los límites de tolerancia se usan para indicar entre qué límites uno puede encontrar cierta proporción de una población. Esta distinción

se enfatiza por el hecho de que, cuando n se vuelve grande, la longitud de un intervalo de confianza tiende a cero; mientras que los límites de tolerancia tenderán a los valores correspondientes para la población. Por ende, para n grande, K tiende a 1.96 en las columnas para $P = 0.95$ en la tabla 10.

La situación para los límites de tolerancia unilaterales es diferente. En el contexto de resistencia de materiales, las muestras más débiles son las que se rompen. En consecuencia, es importante que los ingenieros tengan una estimación precisa de la cola inferior de la población de resistencias. Recientemente, los ingenieros se dieron cuenta de que es más aconsejable establecer las especificaciones para la resistencia en términos de un percentil inferior η_β en vez de la media μ. Las muestras más débiles, no las de la resistencia promedio, son las que se rompen. La industria maderera y muchos grupos de materiales de la era espacial indican que un límite del 95% de confianza unilateral se calcule para el quinto percentil $\eta_{0.05}$. Esto es, se calcula un límite inferior $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a partir de las observaciones y, antes de tomar las observaciones,

$$P[\,L(X_1, X_2, \ldots, X_n) < \eta_{0.05}\,] = 0.95$$

Pero este límite de confianza unilateral es tan solo un **límite de tolerancia unilateral**, pues el evento el límite $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es menor que la población del punto 0.05* $\eta_{0.05}$ es el mismo que el evento *cuando al menos 95% de la población está arriba de* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$..

Para poblaciones normales

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x} - Ks$$

donde K puede obtenerse de la tabla 10*b*).

EJEMPLO **Cómo calcular un límite de tolerancia inferior para la resistencia de cartón**

La industria del cartón considera nuevos estándares para el cartón que se usa en cajas. Una prueba implica colocar peso sobre la caja hasta que colapsa. Las resistencias colapsadas, en libras por pulgada cuadrada, para 40 cajas son

210	234	216	232	262	183	227	197
248	218	256	218	244	259	263	185
218	196	235	223	212	237	275	240
217	263	240	247	253	269	231	254
248	261	268	262	247	292	238	215

Obtenga un límite de tolerancia del 95%, que será menor que la proporción de 0.95 de la población de resistencias colapsadas.

Solución Por computadora, se determina que $\bar{x} = 237.32$ y $s = 25.10$. A partir de la tabla 10*b*), $K = 2.126$, de modo que

$$L = \bar{x} - Ks = 273.32 - 2.126(25.10) = 183.96$$

que se redondea hacia abajo a 183.

Se está 95% seguro de que, al menos, una proporción de 0.95 de la población de resistencias colapsadas, para cajas de cartón, está arriba de 183 psi.

En el ejercicio 15.25 se le pide verificar que la medición de la fuerza fracasa para mostrar alejamientos de la normalidad. ■

Ejercicios

15.13 Para comprobar la resistencia del acero duro para su uso en eslabones, se midió el límite elástico de una muestra aleatoria de 25 piezas, lo cual produjo una media y una desviación estándar de 52,800 psi y 4,600 psi, respectivamente. Al establecer límites de tolerancia con $\alpha = 0.05$ y $P = 0.99$, exprese con palabras qué significan dichos límites de tolerancia.

15.14 En un estudio diseñado para determinar el número de vueltas requeridas para armar el detonador de un obús de artillería, 75 detonadores se giraron en una tornamesa, y promediaron 38.7 vueltas con una desviación estándar de 4.3 vueltas. Establezca los límites de tolerancia para los cuales uno pueda afirmar, con 99% de confianza, que cuando menos 95% de los detonadores se armarán dentro de dichos límites.

15.15 En una muestra aleatoria de 40 anillos de pistón elegidos de una línea de producción, el ancho de borde promedio fue de 0.1063 pulgadas, y la desviación estándar fue de 0.0004 pulgadas.

a) ¿Entre qué límites puede decirse, con 95% de confianza, que se encontrará al menos 90% de los anchos de borde de los anillos de pistón producidos por esta línea de producción?

b) Encuentre límites de confianza del 95% para el verdadero ancho del borde medio, y explique la diferencia entre dichos límites y los límites de tolerancia que se encuentran en el inciso *a*).

15.16 Los *límites de tolerancia no paramétricos* pueden basarse en los valores extremos en una muestra aleatoria de tamaño n de cualquier población continua. La siguiente ecuación relaciona las cantidades n, P y α, donde P es la proporción mínima de la población contenida entre las observaciones menor y mayor con confianza de $(1 - \alpha)100\%$:

$$n P^{n-1} - (n - 1) P^n = \alpha$$

Una solución aproximada para n está dada por

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1 + P}{1 - P} \cdot \frac{\chi^2_\alpha}{4}$$

donde χ^2_α es el valor de chi cuadrada con 4 grados de libertad que correspondan a una área α de cola derecha.

a) ¿Cuán grande debe ser la muestra para estar 95% seguros de que, al menos, 90% de la población se incluirá entre los valores extremos de una muestra?

b) Con 95% de confianza, ¿al menos qué proporción de la población puede esperarse que se incluya entre los valores extremos de una muestra de tamaño 100?

Sí y no

Sí

1. Asegúrese de que el proceso funciona de manera estable, antes de calcular una línea central y límites para un gráfico de control. No debería haber tendencias con el tiempo, o en posición o en cantidad de variación.
2. Continúe el mejoramiento de cualquier producto o servicio al descubrir formas para reducir la variación.

No

1. No olvide comprobar la dependencia entre valores adyacentes que se grafiquen sobre un gráfico de control. Cuando grafique medias, puede graficar los pares adyacentes $(\overline{x}_i, \overline{x}_{i-1})$. Incluso una correlación moderada entre puntos adyacentes deterioraría significativamente el desempeño de los gráficos de control.

Ejercicios de repaso

15.17 Las especificaciones requieren que el peso de los moldes tenga $\mu = 4.1$ onzas y $\sigma = 0.05$ onzas.

a) Use las especificaciones para calcular una línea central y límites de control tres sigma para un gráfico $\overline{x}$ con $n = 5$.

b) Utilice las especificaciones para calcular una línea central y límites de control tres sigma para un gráfico R con $n = 5$.

c) Grafique las siguientes medias y rangos, obtenidos en 20 muestras aleatorias sucesivas de tamaño 5, sobre gráficos basados sobre las constantes del gráfico de control obtenidas en los incisos *a*) y *b*), y discuta el proceso.

Muestra	$\overline{x}$	R	Muestra	$\overline{x}$	R
1	4.24	0.09	11	4.20	0.21
2	4.18	0.12	12	4.25	0.20
3	4.26	0.14	13	4.25	0.17
4	4.21	0.24	14	4.21	0.07
5	4.22	0.15	15	4.19	0.16
6	4.18	0.28	16	4.23	0.16
7	4.23	0.06	17	4.27	0.19
8	4.19	0.15	18	4.22	0.20
9	4.21	0.09	19	4.20	0.12
10	4.18	0.15	20	4.19	0.16

15.18 Calcule $\overline{\overline{x}}$ y $\overline{R}$ para los datos del inciso *c*) del ejercicio 15.17, y use dichos valores para construir las líneas centrales y los límites de control tres sigma para nuevos gráficos $\overline{x}$ y R, que se usarán en el control del peso de los moldes.

15.19 Veinticinco muestras sucesivas de 200 interruptores, cada uno tomado de una línea de producción, contenían, respectivamente, 6, 7, 13, 7, 0, 9, 4, 6, 0, 4, 5, 11, 6, 18, 1, 4, 9, 8, 2, 17, 9, 12, 10, 5 y 4 defectuosos. Si la fracción de defectuosos debe mantenerse en 0.02, construya un gráfico p para dichos datos e indique si este estándar se satisface o no.

15.20 Los datos del ejercicio 15.19 pueden considerarse como evidencia de que se superará el estándar de 2% de defectuosos.

a) Use los datos del ejercicio 15.19 para construir nuevos límites de control para la fracción de defectuosos.

b) Con los límites que encontró en el inciso *a*), continúe el control del proceso al graficar los siguientes datos en las siguientes 10 muestras de tamaño $n = 200$: 4, 7, 5, 3, 8, 3, 1, 4, 3, 9.

15.21 Un proceso para la fabricación de película se realizó en el pasado, con un promedio de 0.8 imperfecciones para 10 pies lineales.

a) Construya una gráfica a usar en la inspección de secciones de 10 pies.

b) Discuta el control, si 20 secciones sucesivas de 10 pies contenían, respectivamente, 1, 0, 0, 1, 3, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 4 y 1 imperfecciones.

15.22 Con respecto a los datos de resistencia de aleación de aluminio en la página 19, obtenga límites de tolerancia bilaterales del 95% sobre la proporción $P = 0.90$ de la población de resistencias.

15.23 Con respecto a los datos de tiempo entre respuestas de la página 19, obtenga límites de tolerancia del 95% sobre la proporción $P = 0.90$ de la población de tiempos entre respuestas. Tome logaritmos, use el enfoque de la teoría normal y, luego, transforme de vuelta a la escala original.

15.24 Con respecto a la discusión de la página 475, calcule la CUSUM usando 2.25 en vez de 2.00 como el valor central. Elabore también el gráfico CUSUM.

15.25 Con respecto al ejemplo de la página 483,

a) verifique el cálculo de el límite de tolerancia L;

b) si la confianza disminuye a 90%, calcule el nuevo límite de tolerancia (use $K = 2.010$);

c) compruebe los datos de resistencia del cartón para alejamientos de la normalidad, usando una gráfica de valores normales.

15.26 Explique, desde la perspectiva de los programas de mejoramiento de la calidad, por qué los gráficos $\overline{x}$, R y de fracción de defectuosos deberían usarse para escuchar el proceso y observar su variabilidad natural, en cualquier etapa, en vez de para el control del proceso a largo plazo.

15.27 Una dimensión de ancho crítico en un tablero de circuito integrado se midió en 100 tableros. Las mediciones ordenadas son:

2.500	2.502	2.502	2.502	2.503	2.503	2.503	2.504	2.504
2.504	2.504	2.504	2.504	2.504	2.504	2.504	2.504	2.504
2.504	2.504	2.504	2.504	2.504	2.505	2.505	2.505	2.505
2.505	2.505	2.505	2.505	2.505	2.505	2.505	2.505	2.505
2.505	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506
2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.506	2.507
2.507	2.507	2.507	2.507	2.507	2.507	2.507	2.507	2.507
2.507	2.508	2.508	2.508	2.508	2.508	2.508	2.508	2.508
2.508	2.508	2.508	2.508	2.508	2.508	2.509	2.509	2.509
2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509
2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.509	2.510	2.511
2.511								

Dados los límites de especificación $LSL = 2.496$ y $USL = 2.516$, evalúe la capacidad del proceso al determinar las estimaciones *a*) $\widehat{C}_p$ y *b*) $\widehat{C}_{pk}$.

15.28 Los siguientes son los números de libras por días embarcados por una compañía camionera.

222,415	140,670	396,868	240,678	101,786	166,217	177,900
349,900	131,100	465,800	417,700	305,600	264,500	224,400
360,400	211,600	378,200	285,400	166,100	230,900	593,300
214,200	147,800	119,510	159,200	353,200	408,300	275,100
254,100	423,500	324,800	304,500	298,600	202,200	

Se sugiere que los embarques se traten como un proceso. Puesto que dichos datos no tienen distribución simétrica, podría intentar una transformación. Para la elección de la cuarta raíz del peso, establezca los límites de especificación *LSL* y *USL* simétricamente en torno a aproximadamente 22.6 (libras)$^{1/4}$, de modo que el índice de capacidad estimado $\widehat{C}_{pk}$ sea 1.5.

Terminos clave

Aseguramiento de la calidad 463
Control estadístico 470
CUSUM de Crosier 475
Defecto 476
Defectuoso 476
Diagrama de causa y efecto 466
Estadístico CUSUM 475
Gráfico *c* 478
Gráfico CUSUM 475
Gráfico de control 470
Gráfico de control por atributos 470
Gráfico de control por medias 471
Gráfico de control por mediciones 470
Gráfico de fracción de defectuosos 476
Gráfico del número de defectuosos 478
Gráfico del número de defectos 478
Gráfico *p* 476
Gráfico *R* 471
Gráfico $\overline{x}$ 471
Gráfico σ 471
Índice de capacidad del proceso 470
Límite de tolerancia unilateral 483
Límites de tolerancia 482
Límites tres sigma 472
Línea central 470
Límites de control 471
Mejoramiento de la calidad 463
Variación asignable 470

CAPÍTULO 16

APLICACIÓN A LA CONFIABILIDAD Y A LAS PRUEBAS DEL CICLO DE VIDA

La labor de diseñar y supervisar la fabricación de un producto se ha vuelto cada vez más difícil por los rápidos avances en la sofisticación de los productos modernos, así como por la severidad de las condiciones ambientales bajo las cuales deben realizarse. Un ingeniero ya no puede estar satisfecho si la operación de un producto es técnicamente factible, o si se puede hacer funcionar en condiciones óptimas. Además de consideraciones como el costo y la facilidad de manufactura, ahora debe ponerse mayor atención al tamaño y al peso, la facilidad de mantenimiento y la confiabilidad. La magnitud del problema de sustentabilidad y confiabilidad se ilustra mediante encuestas que descubren el hecho de que un alto porcentaje del equipo electrónico de la era espacial es inoperante. Las encuestas militares han demostrado asimismo que los gastos de mantenimiento y reparación para equipo electrónico con frecuencia exceden el costo original de obtención o adquisición, incluso durante el primer año de operación.

En la sección 16.1 se define el concepto de confiabilidad. En la sección 16.2 se discuten y aplican distribuciones de probabilidad especial al cálculo de confiabilidades. En las secciones 16.3 y 16.4 se introduce algo de teoría y aplicaciones relacionadas con las pruebas de productos para ciclo de vida útil.

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

16.1 Confiabilidad 487

16.2 Distribución del tiempo de falla 489

16.3 El modelo exponencial en las pruebas del ciclo de vida 493

16.4 El modelo de Weibull en las pruebas del ciclo de vida 496

Ejercicios de repaso 501

Términos clave 502

16.1 Confiabilidad

El problema de asegurar y mantener la confiabilidad tiene muchas facetas, como el diseño de equipo original, el control de calidad durante la producción, la inspección de aceptación, los ensayos en campo, las pruebas del ciclo de vida y las modificaciones del diseño. Para complicar el asunto un poco más, la confiabilidad es competencia directa o indirecta de otras consideraciones ingenieriles, costos generales, complejidad, tamaño y peso, y sustentabilidad. A pesar de sus complicados aspectos de ingeniería, es posible ofrecer una definición matemática relativamente sencilla de la confiabilidad. Para motivar esta definición, es posible llamar la atención del lector al hecho de que un producto puede funcionar satisfactoriamente bajo un conjunto de condiciones, pero no bajo otras condiciones, y que el rendimiento satisfactorio para un propósito no garantiza el rendimiento adecuado para otro propósito. Por ejemplo, un microchip perfectamente satisfactorio para su uso en un radio doméstico quizá resulte completamente insatisfactorio para su uso en el sistema de guía a bordo de un misil. En concordancia, la **confiabilidad** de un producto se definirá como *la probabilidad de que funcionará dentro de los límites especificados por, al menos, cierto periodo de tiempo en condiciones ambientales determinadas.* Por lo tanto, la confiabilidad de un neumático de automóvil de equipo estándar está cerca de la unidad durante 10,000 millas de operación normal en un auto de pasajeros, pero prácticamente es de cero para su uso en las 500 millas de Indianápolis.

Puesto que la confiabilidad se define como una probabilidad, el tratamiento teórico de este tema se basa esencialmente en el material introducido en los capítulos anteriores de este libro. Por consiguiente, las reglas de probabilidad introducidas en el capítulo 3 pueden aplicarse directamente al cálculo de la confiabilidad de un sistema complejo, si se conocen las

confiabilidades de los componentes individuales. (Por lo general, las estimaciones de las confiabilidades de los componentes individuales se obtienen mediante pruebas estadísticas del ciclo de vida, como las que se estudian en las secciones 16.3 y 16.4.)

Muchos sistemas se consideran sistemas en serie o en paralelo, o una combinación de ambos. Un **sistema en serie** es aquel cuyos componentes están todos tan interrelacionados que el sistema completo fallará si alguno de sus componentes falla; un **sistema en paralelo** es aquel que fallará tan solo si todos sus componentes fallan.

Primero se estudiará un sistema de n componentes conectados en serie, y se supondrá que los componentes son independientes; a saber, que el rendimiento de cualquier parte no afecta la confiabilidad de las otras. En tales condiciones, la probabilidad de que el sistema funcionará está dada por la regla especial de multiplicación de probabilidades, y se tiene

Ley de productos de confiabilidades

$$R_S = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

donde R_i es la confiabilidad del i-ésimo componente y R_S es la confiabilidad del sistema en serie. Esta sencilla **ley de productos de confiabilidades**, aplicable a sistemas en serie de componentes independientes, demuestra claramente el efecto de la complejidad creciente en la confiabilidad.

EJEMPLO **Cálculo de la confiabilidad de un sistema en serie**

Un sistema consiste en 5 componentes independientes en serie, y cada uno tiene una confiabilidad de 0.970. ¿Cuál es la confiabilidad del sistema? ¿Qué ocurre con la confiabilidad del sistema, si su complejidad aumenta de modo que contiene 10 componentes similares?

Solución La confiabilidad del sistema de 5 componentes es

$$(0.970)^5 = 0.859$$

Aumentar la complejidad del sistema a 10 componentes reducirá la confiabilidad del sistema a

$$(0.970)^{10} = 0.737$$

Al observar de otra forma el efecto de aumentar la complejidad, se descubre que cada uno de los componentes en el sistema de 10 componentes requeriría una confiabilidad de 0.985, en vez de 0.970, para que el sistema de 10 componentes tenga una confiabilidad igual a la del sistema original de 5 componentes. ■

Una forma de aumentar la confiabilidad de un sistema consiste en sustituir ciertos componentes por varios componentes similares conectados en paralelo. Si un sistema consiste en n componentes independientes conectados en paralelo, fallará en su funcionamiento solo si fallan todos los n componentes. Por ende, si $F_i = 1 - R_i$ es la "no confiabilidad" del i-ésimo componente, se puede aplicar de nuevo la regla especial de la multiplicación de probabilidades para obtener

$$F_P = \prod_{i=1}^{n} F_i$$

donde F_P es la no confiabilidad del sistema en paralelo y $R_P = 1 - F_P$ es la confiabilidad del sistema en paralelo. Por ende, para sistemas en paralelo, se tiene una **ley de productos de no confiabilidades** similar a la ley de productos de confiabilidades para sistemas en serie.

Al escribir esta ley de otra forma, se obtiene

Ley de productos de no confiabilidades

$$R_P = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

para la confiabilidad de un sistema en paralelo.

EJEMPLO

Cálculo de la confiabilidad de un sistema complejo

Las dos fórmulas básicas para la confiabilidad de sistemas en serie y en paralelo se utilizan en combinación para calcular la confiabilidad de un sistema, cuyas partes estén tanto en serie como en paralelo. Para ilustrar tal cálculo, considere el diagrama del sistema de la figura 16.1, que consiste en ocho componentes que tienen las confiabilidades que se muestran en dicha figura. Encuentre la confiabilidad de tal sistema.

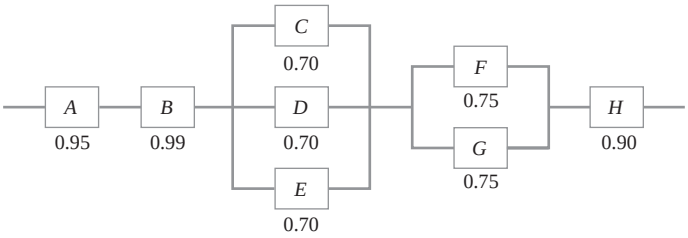


Figura 16.1
Confiabilidad del sistema

Solución

El ensamble en paralelo C, D, E puede sustituirse con un componente C' equivalente que tiene la confiabilidad $1 - (1 - 0.70)^3 = 0.973$, sin afectar la confiabilidad global del sistema. Asimismo, el ensamble en paralelo F, G, puede sustituirse con un solo componente F' que tiene la confiabilidad $1 - (1 - 0.75)^2 = 0.9375$. El sistema en serie resultante A, B, C', F', H, equivalente al sistema original, tiene la confiabilidad

$$(0.95)(0.99)(0.973)(0.9375)(0.90) = 0.772$$

■

16.2 Distribución del tiempo de falla

De acuerdo con la definición de confiabilidad dada en la sección anterior, la confiabilidad de un sistema o un componente con frecuencia dependerá de la duración de tiempo que haya estado en servicio. Por lo tanto, en los estudios de confiabilidad, la **distribución del tiempo de falla** es de importancia fundamental; esto es, la distribución del tiempo de falla de un componente bajo condiciones ambientales dadas. Una forma útil de caracterizar esta distribución es mediante su **razón de falla instantánea** asociada. Para desarrollar este concepto, primero sea $f(t)$ la densidad de probabilidad del tiempo de falla de un componente dado; esto es, la probabilidad de que el componente fallará entre los tiempos t y $t + \Delta t$ está dada por $f(t) \cdot \Delta t$. Entonces, la probabilidad de que el componente fallará en el intervalo de 0 a t está dada por

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

y la **función de confiabilidad**, que expresa la probabilidad de que sobreviva al tiempo t, está dada por

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Por consiguiente, la probabilidad de que el componente fallará en el intervalo de t a $t + \Delta t$ es $F(t + \Delta t) - F(t)$, y la probabilidad condicional de fallar en este intervalo, *dado que el componente sobrevivió al tiempo t*, se expresa mediante

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

Al dividir entre Δt, se encuentra que la razón promedio de falla en el intervalo de t a $t + \Delta t$, dado que el componente sobrevivió al tiempo t, es

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R(t)}$$

Al tomar el límite conforme $\Delta t \to 0$, se obtiene entonces la razón de falla instantánea, o simplemente la **razón de falla o razón de riesgo**

$$Z(t) = \frac{F'(t)}{R(t)}$$

donde $F'(t)$ es la derivada de $F(t)$ con respecto a t. Finalmente, al observar que $f(t) = F'(t)$ (véase la página 122), se obtiene la relación

Ecuación general para función de razón de falla

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

La **función de razón de falla** expresa la razón de falla en términos de la distribución del tiempo de falla.

En la figura 16.2 se ilustra una curva de razón de falla típica de muchos artículos fabricados. La curva se divide convenientemente en tres partes. La primera se caracteriza por una razón de falla decreciente y representa el periodo durante el cual se eliminan los artículos deficientemente fabricados. (En la industria electrónica es común someter los componentes a ensayos destructivos antes de su uso real, con la finalidad de eliminar cualquier falla temprana.) La segunda parte, que con frecuencia se caracteriza por una razón de falla constante, generalmente se considera como el periodo de vida útil durante el cual únicamente ocurren fallas por azar. La tercera parte se caracteriza por una razón de falla creciente, y es el periodo durante el cual los componentes fallan sobre todo debido a que están desgastados. Note que la misma curva de razón de falla general es típica de la mortalidad humana, donde la primera parte representa la mortalidad infantil, y la tercera parte corresponde a la mortalidad en la vejez.

Ahora se derivará una relación importante que expresa la densidad del tiempo de falla en términos de la función de la razón de falla. Al usar el hecho de que $R(t) = 1 - F(t)$ y,

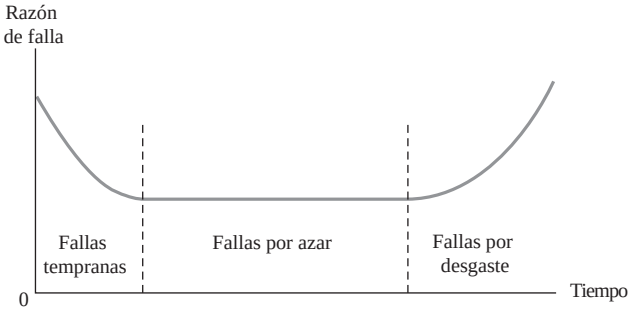


Figura 16.2
Curva de razón de falla típica

por lo tanto, que $F'(t) = -R'(t)$, se escribe

$$Z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d[\ln R(t)]}{dt}$$

Al resolver esta ecuación diferencial para $R(t)$,

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(x)\,dx}$$

y, al usar la relación $f(t) = Z(t) \cdot R(t)$, se obtiene finalmente

Ecuación general para distribución del tiempo de falla

$$f(t) = Z(t) \cdot e^{-\int_0^t Z(x)\,dx}$$

Como se ilustra en la figura 16.2, con frecuencia se supone que la razón de falla es constante durante el periodo de vida útil de un componente. Al denotar esta razón de falla constante con α, donde $\alpha > 0$, y al sustituir α por $Z(t)$ en la fórmula para $f(t)$, se obtiene

$$f(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t} \qquad t > 0$$

Por lo tanto, se tiene una **distribución exponencial de tiempo de falla** cuando puede suponerse que la razón de falla es constante. Por este motivo, a la suposición de razones de falla constantes en ocasiones también se conoce como *suposición exponencial*. El tiempo de falla también tiene una interpretación como tiempo de espera. Si un componente que falla se sustituye de inmediato con uno nuevo que tenga la misma razón de falla constante α y la ocurrencia de fallas sigue un proceso de Poisson, entonces los tiempos de espera tienen esta distribución exponencial de acuerdo con los resultados de la sección 5.7. Como se observa en la página 140, el tiempo de espera medio entre fallas sucesivas es $1/\alpha$, o bien, el recíproco de la razón de falla. Por lo tanto, la constante $1/\alpha$ con frecuencia se conoce como **tiempo medio entre fallas** y se abrevia MTBF.

Hay situaciones donde la suposición de una razón de falla constante no es realista y, en muchas de dichas situaciones, uno supone más bien que la función de razón de falla aumenta o disminuye suavemente con el tiempo. En otras palabras: se supone que no hay discontinuidades o puntos de retorno. Esta suposición sería consistente con las etapas inicial o final de la curva de razón de falla que se muestra en la figura 16.2.

Una función útil usada con frecuencia para aproximar tales curvas de razón de falla está dada por

$$Z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1} \qquad t > 0$$

donde α y β son constantes positivas. Advierta la generalidad de esta función: si $\beta < 1$, la razón de falla *disminuye* con el tiempo; si $\beta > 1$, *aumenta* con el tiempo; y si $\beta = 1$, la razón de falla es igual a α. Note que la suposición de una razón de falla constante, la suposición exponencial, se incluye por lo tanto como caso especial.

Si la expresión anterior se sustituye con $Z(t)$ en la fórmula anterior para $f(t)$, se obtiene

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1} e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad t > 0$$

donde α y β son constantes positivas. Esta densidad, o distribución, es la distribución de Weibull, que se introdujo en la sección 5.9, y se estudia su aplicación a problemas de pruebas del ciclo de vida en la sección 16.4.

Ejercicios

16.1 Una cadena de luces navideña tiene 8 bombillas conectadas en serie. ¿Cuál tendría que ser la confiabilidad de cada bombilla si hubiera una posibilidad del 95% de que la cadena funcione después de un año de almacenamiento?

16.2 Un sistema consiste en 5 componentes idénticos conectados en paralelo. ¿Cuál debe ser la confiabilidad de cada componente si la confiabilidad global del sistema tiene que ser de 0.96?

16.3 Un sistema consiste en 6 componentes conectados como en la figura 16.3. Encuentre la confiabilidad general del sistema, dado que las confiabilidades de A, B, C, D, E y F son, respectivamente, 0.95, 0.80, 0.90, 0.99, 0.90 y 0.85.

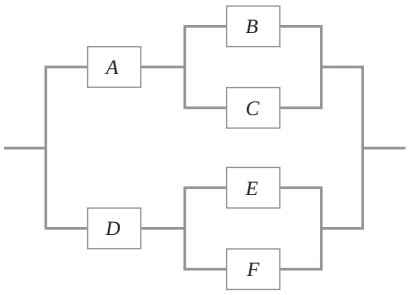


Figura 16.3 Sistema para el ejercicio 16.3

16.4 Suponga que el vuelo de una aeronave se considera como un sistema que tiene los tres componentes principales A (aeronave), B (piloto) y C (aeropuerto). Suponga asimismo que el componente B puede considerarse como un subsistema en paralelo que consiste en B_1 (capitán), B_2 (primer oficial) y B_3 (ingeniero de vuelo); y C es un subsistema en paralelo que consiste en C_1 (aeropuerto programado) y C_2 (aeropuerto alternativo). Con condiciones de vuelo dadas, las confiabilidades de los componentes A, B_1, B_2, B_3, C_1 y C_2 (definidas como las probabilidades de que pueden contribuir a la terminación exitosa del vuelo programado) son, respectivamente, 0.9999, 0.9995, 0.999, 0.20, 0.95 y 0.85.

a) ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?

b) ¿Cuál es el efecto sobre la confiabilidad del sistema de tener un ingeniero de vuelo que también es un piloto capacitado, de modo que la confiabilidad de B_3 aumenta de 0.20 a 0.99?

c) Si la tripulación del vuelo no tiene un primer oficial, ¿entonces cuál sería el efecto de aumentar la confiabilidad de B_3 de 0.20 a 0.99?

d) ¿Cuál es el efecto de agregar un segundo punto de aterrizaje alternativo, C_3, con confiabilidad de 0.80?

16.5 En algunos problemas de confiabilidad uno está preocupado tan solo con las fallas iniciales, y un componente se trata como si (para todo propósito práctico) nunca fallara, una vez que sobrevivió cierto tiempo $t = \alpha$. En un problema como este, sería razonable usar la razón de falla

$$Z(t) = \begin{cases} \beta\left(1 - \dfrac{t}{\alpha}\right) & \text{para } 0 < t < \alpha \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

a) Encuentre expresiones para $f(t)$ y $F(t)$.

b) Demuestre que la probabilidad de una falla inicial está dada por

$$1 - e^{-\alpha\beta/2}$$

16.6 Como se indicó en el texto, con frecuencia uno distingue entre fallas iniciales, fallas aleatorias durante la vida útil del producto, y fallas por desgaste. Por ende, suponga que, para un producto dado, la probabilidad de una falla inicial (una falla antes del tiempo $t = \alpha$) es θ_1, la probabilidad de una falla por desgaste (una falla más allá del tiempo $t = \beta$) es θ_2, y la del intervalo $\alpha \le t \le \beta$, la densidad del tiempo de falla está dada por

$$f(t) = \frac{1 - \theta_1 - \theta_2}{\beta - \alpha}$$

a) Encuentre una expresión para $F(t)$ para el intervalo $\alpha \le t \le \beta$.

b) Demuestre que, para el intervalo $\alpha \le t \le \beta$, la razón de falla está dada por

$$Z(t) = \frac{1 - \theta_1 - \theta_2}{(\beta - \alpha)(1 - \theta_1) - (1 - \theta_1 - \theta_2)(t - \alpha)}$$

c) Suponga que se considera que la falla de un televisor digital tiene una falla inicial si ocurre durante las primeras 100 horas de uso, y una falla por desgaste si ocurre después de 15,000 horas. Si se supone que el modelo dado en este ejercicio se sostiene y que θ_1 y θ_2 son iguales a 0.05 y 0.75, respectivamente, bosqueje la gráfica de la función de razón de falla de $t = 100$ a $t = 15{,}000$ horas.

16.7 Un chip de circuito integrado tiene una razón de falla constante de 0.02 por mil horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que operará satisfactoriamente durante, al menos, 20,000 horas?

b) ¿Cuál es la confiabilidad de 5,000 horas de un componente que consiste en 4 de tales chips conectados en serie?

16.8 Después de someterse a un ensayo destructivo, el tiempo de vida de una celda solar se modela como una distribución exponencial con razón de falla $\alpha = 0.0005$ fallas por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la celda fallará dentro de los primeros 365 días de que está en operación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos de tales celdas, que operan de manera independiente, sobrevivirán ambas los primeros 365 días que están en operación?

16.9 Si un componente tiene la distribución del tiempo de falla de Weibull con los parámetros $\alpha = 0.005$ por hora y $\beta = 0.80$, encuentre la probabilidad de que operarán exitosamente durante al menos 5,000 horas.

16.3 El modelo exponencial en las pruebas del ciclo de vida

Un método efectivo y ampliamente usado para manejar problemas de confiabilidad es el de las **pruebas del ciclo de vida**. Con la finalidad de usar tales pruebas, de un lote se selecciona una muestra aleatoria de n componentes, puestos a prueba en las condiciones ambientales especificadas, y se observan los tiempos de falla de los componentes individuales. Si cada componente que falla se sustituye de inmediato por uno nuevo, la prueba del ciclo de vida resultante se conoce como **prueba de sustitución**; de otro modo, la prueba del ciclo de vida se llama **prueba sin sustitución**. Siempre que la vida media de los componentes sea tan grande que no resulte práctica o económicamente factible probar cada componente a la falla, la prueba del ciclo de vida puede **truncarse**, después de transcurrido un periodo de tiempo fijo. De manera alternativa, puede terminarse después de ocurridas las primeras r fallas ($r \leq n$).

Un método especial que se utiliza con frecuencia, cuando se requieren resultados tempranos en conexión con componentes de confiabilidad muy alta, son las **pruebas de vida acelerada**. En una prueba de vida acelerada, los componentes se ponen a prueba en condiciones ambientales mucho más severas que las encontradas normalmente en la práctica. Esto hace que los componentes fallen más rápidamente y ello reduciría drásticamente tanto el tiempo requerido para la prueba como el número de componentes que deben probarse. Las pruebas de vida acelerada sirven para comparar dos o más tipos de componentes con la finalidad de obtener una valoración rápida de cuál es la más confiable. En ocasiones, se realiza experimentación preliminar para determinar la relación entre la proporción de fallas que podrían esperarse en condiciones nominales y en varios niveles de condiciones ambientales aceleradas. Los métodos de las secciones 11.4 y 13.2 pueden aplicarse en esta conexión para determinar "curvas de reducción", que relacionan la confiabilidad del componente con la severidad de las condiciones ambientales en las que operan.

En el resto de esta sección se supondrá que el modelo exponencial sostiene, a saber, que la distribución del tiempo de falla de cada componente está dada por

$$f(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t} \qquad t > 0, \quad \text{donde } \alpha > 0$$

En lo que sigue, se supondrá que n componentes se ponen a prueba, que la prueba del ciclo de vida se descontinúa después de que un número fijo, r ($r \leq n$), de componentes falla, y que los tiempos de falla observados son $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$. Se procurará estimar y probar hipótesis acerca de la vida media del componente; a saber, $\mu = 1/\alpha$.

Se puede demostrar (véase la referencia a Lawless en la bibliografía) que estimaciones insesgadas de la vida media de los componentes están dadas por

Estimación de la vida media

$$\hat{\mu} = \frac{T_r}{r}$$

donde T_r es la vida acumulada de prueba hasta que ocurre la r-ésima falla y, por lo tanto,

Vida acumulada hasta *r* fallas (prueba sin remplazo)

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n - r)\, t_r$$

para pruebas sin remplazo y

Vida acumulada hasta *r* fallas (prueba con remplazo)

$$T_r = n\, t_r$$

si la prueba es *con remplazo*. Note que, si la prueba es sin remplazo y $r = n$, $\hat{\mu}$ es simplemente la media de los tiempos de falla observados.

Para realizar inferencias concernientes a la vida media μ del componente, se usa el hecho de que $2T_r/\mu$ es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con $2r$ grados de libertad. Con la expresión adecuada sustituida por T_r, esto es válido sin importar si la prueba se realiza con remplazo o sin él. Por lo tanto, en cualquier caso, un intervalo de confianza bilateral de $(1 - \alpha)100\%$ para μ está dado por

Intervalo de confianza para la vida media

$$\frac{2T_r}{\chi^2_{\alpha/2}} < \mu < \frac{2T_r}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

donde $\chi^2_{1-\alpha/2}$ y $\chi^2_{\alpha/2}$ cortan las colas izquierda y derecha del área $\alpha/2$ bajo la distribución chi cuadrada con $2r$ grados de libertad. (Véase el ejercicio 16.15.)

Las pruebas de la hipótesis nula de que $\mu = \mu_0$ también pueden basarse en la distribución muestral de $2T_r/\mu$, y usar la expresión adecuada para T_r dependiendo de si la prueba es con remplazo o sin él. Por lo tanto, si la hipótesis alternativa es $\mu > \mu_0$, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia α cuando $2T_r/\mu_0$ supera χ^2_α, o bien,

Región crítica para probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu > \mu_0$

$$T_r > \frac{1}{2}\mu_0 \chi^2_\alpha$$

donde χ^2_α, a determinarse para $2r$ grados de libertad, se define como en la página 189. En los ejercicios 16.10 y 16.13, se solicita al lector construir y realizar pruebas similares correspondientes a las hipótesis alternativas $\mu < \mu_0$ y $\mu \neq \mu_0$.

Un procedimiento alternativo para pruebas del ciclo de vida consiste en descontinuar la prueba, después de que transcurre una cantidad fija del tiempo de vida acumulado T y el número observado de fallas k se trata como el valor de una variable aleatoria. En el importante caso especial donde n elementos se prueban con remplazo durante una longitud de tiempo t^*, se tiene $T = n\, t^*$. Sin importar si la prueba es con remplazo o sin él, un intervalo de confianza *aproximado* de $(1 - \alpha)100\%$ para la vida media del componente está dado por

$$\frac{2T}{\chi^2_2} < \mu < \frac{2T}{\chi^2_1}$$

Aquí χ_2^2 corta una cola derecha del área $\alpha/2$ debajo de la distribución chi cuadrada con $2k + 2$ grados de libertad; en tanto que χ_1^2 corta una cola izquierda del área $\alpha/2$ debajo de la distribución chi cuadrada con $2k$ grados de libertad.

EJEMPLO **Obtener un intervalo de confianza para la vida media**

Suponga que 50 unidades se colocan en prueba del ciclo de vida (sin remplazo) y la prueba se trunca después de que $r = 10$ unidades hayan fallado. Se supondrá asimismo que los tiempos de las primeras 10 fallas son 65, 110, 380, 420, 505, 580, 650, 840, 910 y 950 horas. Estime la vida media del componente y su razón de falla, y calcule un intervalo de confianza del 90% para μ.

Solución Dado que $n = 50$, $r = 10$,

$$\begin{aligned} T_{10} &= (65 + 100 + \cdots + 950) + (50 - 10)\,950 \\ &= 43{,}410 \text{ horas} \end{aligned}$$

La vida media del componente se estima como

$$\hat{\mu} = \frac{43{,}410}{10} = 4{,}341 \text{ horas}$$

La razón de falla α se estima mediante $1/\hat{\mu} = 0.00023$ fallas por hora, o bien, 0.23 fallas por mil horas. Al usar $\chi^2_{0.05} = 31.410$ y $\chi^2_{0.95} = 10.851$ para $2(10) = 20$ grados de libertad, un intervalo de confianza del 90% para μ está dado por

$$\frac{2(43{,}410)}{31.410} < \mu < \frac{2(43{,}410)}{10.851}$$

o bien,

$$2{,}764 < \mu < 8{,}001$$

■

EJEMPLO **Pruebas de hipótesis concernientes a la vida media**

Con los datos del ejemplo anterior, prueba si la razón de falla son 0.40 fallas por mil horas, contra la alternativa de que la razón de falla es menor. Utilice el nivel de significancia de 0.05.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\mu = \dfrac{1{,}000}{0.40} = 2{,}500$ horas $= \mu_0$
   Hipótesis alternativa: $\mu > 2{,}500$ horas
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criterio:* rechazar la hipótesis nula si $T_r > \frac{1}{2}\mu_0\chi^2_{0.05}$, donde $\chi^2_{0.05} = 31.410$ es el valor de chi cuadrada para $2r = 20$ grados de libertad.
4. *Cálculos:* al sustituir $\chi^2_{0.05} = 31.410$ y $\mu_0 = 2{,}500$, se encuentra que el valor crítico para esta prueba es

$$\frac{1}{2}\mu_0\chi^2_{0.05} = \frac{1}{2}(2{,}500)(31.410) = 39{,}263$$

5. *Decisión:* dado que $T_{10} = 43{,}410$ supera el valor crítico, se debe rechazar la hipótesis nula, y concluir que la vida media excede las 2,500 horas o, de manera equivalente, que la razón de falla es menor que 0.40 fallas por mil horas. ■

Debido a la simplicidad de los procedimientos estadísticos, el modelo exponencial se considera frecuentemente. Antes de hacer inferencias, es imperativo que este modelo

se compruebe para saber si es adecuado. Se recomienda elaborar una **gráfica de tiempo total en la prueba**. Grafique el tiempo total a la prueba hasta la i-ésima falla, T_i, dividido entre el tiempo total a la prueba a través de la última falla observada (r-ésima), contra i/r. Si la población es exponencial, se esperaría ver una recta a lo largo de la línea de 45 grados. Cuando ocurre este patrón en línea recta, se concluye que no hay violaciones del modelo exponencial evidentes sobre el rango de tiempos de falla. Si la gráfica es una curva por arriba de la línea de 45 grados, la evidencia favorece un modelo de la razón de riesgo creciente.

En la página 495 se ilustra la gráfica de tiempo total en la prueba. Para $t_1 = 65$, se calcula el tiempo total en la prueba

$$T_1 = 65 + (50 - 1)65 = 3{,}250$$

A continuación, para $t_2 = 110$,

$$T_2 = 65 + 110 + (50 - 2)110 = 5{,}455$$

Para continuar, se obtienen todos los valores

3,250	5,455	18,415	20,295	24,205
27,580	30,660	38,830	41,770	43,410

de modo que el tiempo total en la prueba hasta la última falla, $r = 10$, es $T_r = 43{,}410$. La primera razón $T_1/T_{10} = 3.250/43.410 = 0.0749$ se grafica contra $1/10 = 0.10$. Las razones para las 10 fallas se grafican en la figura 16.4. Sobre el rango de tiempo de fallas observado, la gráfica no indica alejamientos notables del modelo exponencial supuesto.

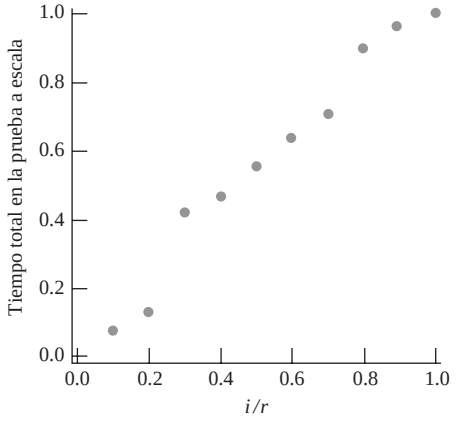


Figura 16.4
Gráfica de tiempo total en la prueba

16.4 El modelo de Weibull en las pruebas del ciclo de vida

Aunque las pruebas del ciclo de vida de componentes durante el periodo de vida útil por lo general se basan en el modelo exponencial, ya se apuntó que la razón de falla de un componente quizá no sea constante a lo largo de un periodo de investigación. En algunos casos, el periodo de falla inicial sería tan largo que el uso principal del componente se da durante este periodo. Sin embargo, el principal propósito de la mayoría de las pruebas del ciclo de vida es determinar el tiempo de falla por desgaste, en vez de la falla por azar de un componente crítico en un sistema complejo. En tales casos, el modelo exponencial por lo general no se aplica, y es necesario sustituir una suposición más general para la de una razón de falla constante.

Como se observó anteriormente, la distribución de Weibull puede describir de manera adecuada el tiempo de falla de componentes, cuando su razón de falla aumenta o disminuye con el tiempo. Tiene los parámetros α y β y su fórmula está dada por

Distribución de Weibull

$$f(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1} e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad t > 0, \quad \text{donde } \alpha > 0, \ \beta > 0$$

y se sigue (véase el ejercicio 16.20) que la función de confiabilidad asociada con la **distribución del tiempo de falla de Weibull** está dada por

Función de confiabilidad de Weibull

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

En la página 491 se demostró que la razón de falla que conduce a la distribución de Weibull está dada por

Función de razón de falla de Weibull

$$Z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$$

El rango de formas que toma una gráfica de la densidad de Weibull es muy amplio, y depende básicamente del valor del parámetro β. Como se ilustra en la figura 16.5, la curva de Weibull es asintótica a ambos ejes y está muy sesgada a la derecha para valores de β menores que 1; es idéntica a la de la densidad exponencial para $\beta = 1$, y tiene un poco forma de campana pero sesgada para valores de β mayores que 1.

La media de la distribución de Weibull que tiene los parámetros α y β se obtiene al evaluar la integral

$$\mu = \int_0^{\infty} t \cdot \alpha \beta t^{\beta - 1} e^{-\alpha t^{\beta}} \, dt$$

Al hacer el cambio de variable $u = \alpha t^{\beta}$,

$$\mu = \alpha^{-1/\beta} \int_0^{\infty} u^{1/\beta} e^{-u} \, du$$

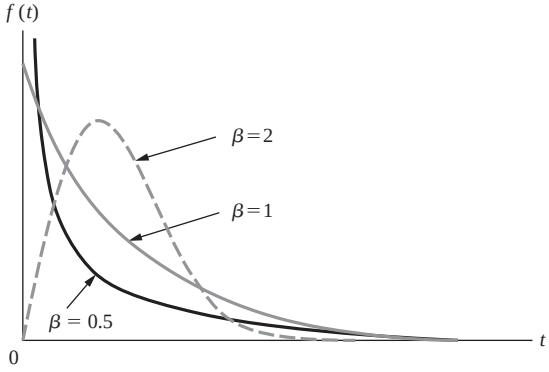


Figura 16.5
Funciones de densidad de Weibull ($\alpha = 1$)

Al reconocer la integral como $\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$, se encuentra que el tiempo medio de falla para el modelo de Weibull es

Tiempo medio de falla (modelo de Weibull)

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

En el ejercicio 16.21 se solicita al lector demostrar que la varianza de esta distribución está dada por

Varianza del modelo de Weibull

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

Las estimaciones de los parámetros α y β de la distribución de Weibull son un poco difíciles de obtener. El enfoque más ampliamente aceptado es el método de *máxima verosimilitud*, donde se maximiza la verosimilitud. Puesto que las derivadas parciales con respecto a α y β deben desaparecer en el máximo, el método selecciona la solución de estas dos ecuaciones como los estimadores de α y β. Si los tiempos de vida son **censurados** en la r-ésima falla (la prueba termina en la r-ésima falla), o no se censuran de modo que $r = n$, las ecuaciones son

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta}\ln t_i + (n-r)\,t_r^{\beta}\ln t_r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + (n-r)\,t_r^{\beta}} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + (n-r)\,t_r^{\beta}\right]}$$

La primera ecuación se resuelve para $\widehat{\beta}$ mediante técnicas numéricas. Entonces, la segunda produce la estimación de $\widehat{\alpha}$. Se trata de cálculos sencillos en computadora.

Si las vidas se truncan en el tiempo cuando T_0, los términos con un factor $n - r$ se modifican al sustituir cada t_r con T_0.

Un método gráfico ofrece una comprobación de lo adecuado del modelo de Weibull. Este método se basa en el hecho de que la función de confiabilidad de la distribución de Weibull puede transformarse en una función lineal de ln t mediante una transformación de doble logaritmo. Al tomar el logaritmo natural de $R(t)$, se obtiene

$$\ln R(t) = -\alpha t^{\beta} \qquad \text{o bien} \qquad \ln\frac{1}{R(t)} = \alpha t^{\beta}$$

Tomamos logaritmos nuevamente,

$$\ln\ln\frac{1}{R(t)} = \ln\alpha + \beta\cdot\ln t$$

y se observa que el lado derecho es lineal en ln t.

El procedimiento experimental usual es colocar n unidades en la prueba del ciclo de vida y observar sus tiempos de falla. Si la i-ésima falla ocurre en el tiempo t_i, se estima $F(t_i) = 1 - R(t_i)$ con el mismo método utilizado para la gráfica de valores normales (véase la página 164), a saber,

$$\widehat{F(t_i)} = \frac{i}{n+1}$$

Para construir una **gráfica de Weibull**, grafique ln t_i contra

$$\ln \ln \frac{1}{1 - \widehat{F(t_1)}}$$

Si los puntos no caen razonablemente cerca de una línea recta, se contradice la suposición de que la distribución del tiempo de falla subyacente es del tipo de Weibull.

Una muestra de 100 componentes se somete a la prueba del ciclo de vida durante 500 horas y los tiempos de falla de los 12 componentes que fallaron durante la prueba son los siguientes: 6, 21, 50, 84, 95, 130, 205, 260, 270, 370, 440 y 480 horas. Al hacer,

$$x_i = \ln \ln \frac{1}{1 - \widehat{F(t_i)}}$$
$$y_i = \ln t_i$$

se obtiene

$\widehat{F(t_i)}$	t_i	y_i	x_i
0.010	6	1.79	− 4.61
0.020	21	3.04	− 3.91
0.030	50	3.91	− 3.50
0.040	84	4.43	− 3.21
0.050	95	4.55	− 2.98
0.059	130	4.87	− 2.79
0.069	205	5.32	− 2.63
0.079	260	5.56	− 2.49
0.089	270	5.60	− 2.37
0.099	370	5.91	− 2.26
0.109	440	6.09	− 2.16
0.119	480	6.17	− 2.07

Los puntos (x_i, y_i) se grafican en la figura 16.6, y se observa que caen bastante cerca de una línea recta. Después de comprobar lo adecuado de la distribución de Weibull,

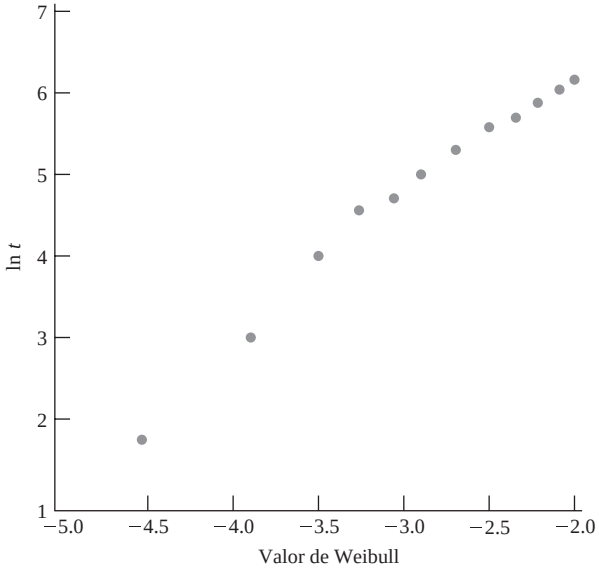


Figura 16.6
Gráfica de Weibull para tiempos de falla

se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud definidos en la página 498. Los cálculos por computadora dan como resultado $\widehat{\alpha} = 0.001505$ y $\widehat{\beta} = 0.7148$. Se sigue que el tiempo medio de falla se estima como

$$\widehat{\mu} = (0.001505)^{-1/0.7148}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{0.7148}\right)$$

que es igual a aproximadamente 11,000 horas. Además, los valores de la función de la razón de falla pueden obtenerse al sustituir para t en

$$\widehat{Z(t)} = (0.001505)(0.7148)\,t^{0.7148-1} = 0.00108\,t^{-0.2852}$$

Puesto que $\widehat{\beta} < 1$, la razón de falla disminuye con el tiempo. Después de 1 hora ($t = 1$), las unidades caen a la razón de 0.00108 unidad por hora y, después de 1,000 horas, la razón de falla disminuye a $0.00108\,(1000)^{-0.2852} = 0.00015$ unidades por hora.

Ejercicios

16.10 Suponga que 50 unidades se someten a prueba del ciclo de vida, cada unidad que falla se sustituye de inmediato y la prueba se descontinúa después de que fallan 8 unidades. Si la octava falla ocurrió a las 760 horas, y supone un modelo exponencial,

a) construya un intervalo de confianza del 95% para la vida media de tales unidades;

b) pruebe en el nivel de significancia de 0.05 si la vida media es menor que 10,000 horas.

16.11 En una prueba del ciclo de vida sin remplazo, 35 calentadores portátiles se ponen en operación continua, y las primeras 5 fallas ocurrieron después de 250, 380, 610, 980 y 1,250 horas.

a) Si se supone el modelo exponencial, construya un intervalo de confianza del 99% para la vida media de este tipo de calentador.

b) Para comprobar la afirmación del fabricante de que la vida media de dichos radiadores es mayor que 5,000 horas, pruebe la hipótesis nula $\mu = 5{,}000$ contra una alternativa adecuada, de modo que el peso de la prueba recaiga en el fabricante. Use $\alpha = 0.05$.

16.12 Con respecto a los datos del ejercicio 16.11, haga un tiempo total en la gráfica de prueba.

16.13 Para investigar el tiempo promedio de falla de cierta soldadura sometida a vibración continua, 7 piezas soldadas se sujetan a frecuencias y amplitudes de vibración específicas, y sus tiempos de falla fueron 211, 350, 384, 510, 539, 620 y 715 mil ciclos.

a) Si supone el modelo exponencial, construya un intervalo de confianza del 95% para la vida media (en miles de ciclos) de tal soldadura con las condiciones de vibración dadas.

b) Si supone el modelo exponencial, pruebe la hipótesis nula de que la vida media de la soldadura en las condiciones de vibración dadas es de 500,000 ciclos contra la alternativa bilateral $\mu \neq 500{,}000$. Use el nivel de significancia de 0.10.

16.14 En las pruebas del ciclo de vida en ocasiones uno está interesado en establecer límites de tolerancia para la vida de un componente (véase la sección 15.7); en particular, se puede estar interesado en un límite de tolerancia unilateral t^*, para el cual se afirma con una confianza de $(1 - \alpha)100\%$ que al menos $100 \cdot P$ por ciento de los componentes tienen una vida que supera t^*. Con el modelo exponencial, se puede demostrar que una buena aproximación está dada por

$$t^* = \frac{-2\,T_r\,(\ln P)}{\chi^2_\alpha}$$

donde T_r se define como en la página 494 y el valor de χ^2_α se obtiene de la tabla 5 con $2r$ grados de libertad.

a) Con los datos del ejercicio 16.11, establezca un límite de tolerancia inferior para el cual uno pueda afirmar con 95% de confianza que se supera por al menos 80% la vida de los calentadores.

b) Con los datos del ejercicio 16.13, establezca un límite de tolerancia inferior para el cual uno pueda afirmar con 99% de confianza que se supera por al menos 90% las vidas de las soldaduras dadas.

16.15 Considerando que $2T_r/\mu$ es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución chi cuadrada con $2r$ grados de libertad, derive el intervalo de confianza para μ dado en la página 494.

16.16 Cien dispositivos se ponen en prueba del ciclo de vida y los tiempos de falla (en horas) de los primeros 10 que fallan son

7.0 14.1 18.9 31.6 52.8 80.0 164.5 355.4 451.0 795.1

Si se supone una distribución del tiempo de falla de Weibull, estime los parámetros α y β así como la razón de falla a 1,000 horas. ¿Cómo se compara este valor de la razón de falla con el valor que obtendría si supone el modelo exponencial?

16.17 Una muestra de 200 interruptores se coloca en prueba del ciclo de vida que consiste en ciclos repetidos de encendido-apagado. La prueba termina después de la tercera falla. Los primeros tres tiempos de falla fueron 2,076, 3,667 y 9,102. Encuentre un límite de confianza *inferior* del 95% para la vida media, en número de ciclos, de los interruptores. Use el modelo exponencial.

16.18 Una muestra de 60 válvulas de diafragma, utilizadas en el sistema de control de un proceso químico, se coloca en prueba del ciclo de vida sin remplazo. Las primeras 9 fallas se observaron después de

3.6 6.9 9.5 15.7 27.3 41.2 81.7 178.3 227.1

horas. Con el modelo de Weibull, estime la vida media de esta válvula. ¿Cómo se compara este valor con la vida media que se obtendría con la suposición exponencial?

16.19 Con las estimaciones de los parámetros del modelo de Weibull obtenidos en el ejercicio 16.18, estime la probabilidad de que este tipo de válvula de diafragma se desempeñará satisfactoriamente durante al menos 150 horas.

16.20 Demuestre que la función de confiabilidad asociada con la distribución del tiempo de falla de Weibull está dada por

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

16.21 Derive la fórmula para la varianza de la distribución de Weibull dada en la página 498.

Sí y no

Sí

1. Tome en cuenta que los análisis de confiabilidad basados en el modelo exponencial suelen ser bastante confusos cuando los componentes tienen una razón de falla creciente.
2. Cuando ajuste un modelo exponencial a los datos, también se recomienda ajustar una distribución de Weibull para saber si su parámetro de forma está cercano a uno.

No

1. No acepte de manera rutinaria un análisis de confiabilidad de un sistema, si el análisis se basa en la independencia de componentes. Choques externos al sistema con frecuencia harían que fallen muchos componentes.
2. No acepte de manera rutinaria un análisis de confiabilidad de un sistema, si el análisis se basa en la suposición de que los componentes tienen distribuciones exponenciales. Puede ser muy optimista, pues la mayoría de los componentes reales finalmente envejecen y, por lo tanto, a final de cuentas tienen razones de riesgo crecientes.

Ejercicios de repaso

16.22 Un sistema consiste en 7 componentes idénticos conectados en paralelo. ¿Cuál debe ser la confiabilidad de cada componente, si la confiabilidad general del sistema tiene que ser de 0.90?

16.23 Cierto componente tiene una distribución de vida exponencial con una razón de falla de $\alpha = 0.0045$ fallas por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el componente fallará durante las primeras 250 horas que está en operación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos de tales componentes sobrevivirán ambos a las primeras 100 horas de operación?

16.24 Quince ensambles se someten a una prueba del ciclo de vida acelerada sin remplazo, y la prueba se trunca después de 4 fallas. Si las primeras 4 fallas ocurrieron a las 16.5, 19.2, 20.8 y 37.3 horas, y supone un modelo exponencial,

a) encuentre un intervalo de confianza del 90% para la razón de falla de dichos ensambles en esas condiciones aceleradas;

b) pruebe la hipótesis nula de que la razón de falla es de 0.004 fallas por hora, contra la alternativa de que es menor que 0.004, y use el nivel de significancia de 0.01.

16.25 Una muestra de 300 capacitores de alta confiabilidad se someten a una prueba del ciclo de vida hasta que ocurren las primeras 4 fallas y luego se termina la prueba. Las primeras 4 fallas fueron de 3,582, 8,482, 8,921 y 16,303 horas. Encuentre un intervalo de confianza *in-*

ferior del 95% para la vida media de los capacitores, si se supone un modelo exponencial.

16.26 Para investigar el desempeño de un circuito lógico para una pequeña calculadora electrónica, un laboratorio pone 75 de los circuitos en prueba de vida sin remplazo en condiciones ambientales especificadas, y las primeras 10 fallas se observan después de 28, 46, 50, 63, 81, 101, 116, 137, 159 y 175 horas. Con el modelo de Weibull, estime la vida media de tal circuito. ¿Cómo se compara este valor con la vida media que se obtendría con la suposición exponencial?

16.27 Con las estimaciones de los parámetros del modelo de Weibull obtenidos en el ejercicio 16.26, estime la probabilidad de que este tipo de circuito se desempeñará satisfactoriamente durante al menos 100 horas.

16.28 Con respecto al ejercicio 16.26, elabore

a) una gráfica de tiempo total en la prueba

b) una gráfica de Weibull

16.29 (*Modelos de resistencia a la tensión para confiabilidad*) Un modelo alternativo que se utiliza en la confiabilidad trata la tensión ambiental como una variable aleatoria X, con densidad de probabilidad $f(x)$, y la resistencia del componente para soportar esta tensión como una variable aleatoria independiente Y que tiene densidad de probabilidad $g(y)$. Entonces, la confiabilidad se define como

$$R = P[Y > X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x)\, g(y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, g(y)\, dy$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X. Evalúe esta confiabilidad cuando

a) X tiene una distribución exponencial con $\alpha = 0.01$ y Y tiene una distribución exponencial con razón de falla 0.005;

b) X tiene una distribución exponencial con $\alpha = 0.005$ y Y tiene una distribución exponencial con razón de falla de 0.005;

c) $\ln X$ tiene una distribución normal con $\mu = 60$ y $\sigma = 5$ y $\ln Y$ tiene una distribución normal con $\mu = 80$ y $\sigma = 5$.

Términos clave

Censura 498
Confiabilidad 487
Distribución del tiempo de falla 489
Distribución del tiempo de falla de Weibull 497
Distribución exponencial de tiempo de falla 491
Función de confiabilidad 489
Función de razón de falla 490
Gráfica de tiempo total en la prueba 496
Gráfica de Weibull 499
Ley de productos de confiabilidades 488
Ley de productos de no confiabilidades 489
Prueba de sustitución 493
Prueba de vida acelerada 493
Prueba truncada 493
Pruebas del ciclo de vida 493
Pruebas sin sustitución 493
Razón de falla 490
Razón de falla instantánea 489
Razón de riesgo 490
Sistema en paralelo 488
Sistema en serie 488
Tiempo medio entre fallas (MTBF) 491

APÉNDICE A

BIBLIOGRAFÍA

1. Estadística teórica

Miller, I. y M. Miller, *Freund's Mathematical Statistics*, 7a. ed., Prentice Hall, Inc., 2003.

Hogg, R. V., A. T. Craig y J. McKean, *Introduction to Mathematical Statistics*, 6a. ed., MacMillan Publishing Company, 2004.

2. Diseño experimental y análisis de varianza

Box, G. E., W. G. Hunter y J. S. Hunter, *Statistics for Experimenters: Design, Innovation, and Discovery,* 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., 2005.

Cochran, W. G. y G. M. Cox, *Experimental Designs*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., manuscrito, 1992.

3. Mejoramiento y aseguramiento de la calidad

Deming, W. E., *Out of the Crisis*. Massachusetts Institute of Technology, manuscrito, 2000.

Besterfield, D., *Quality Control*, 8a. ed., Prentice Hall, 2008.

Ishikawa, K., *Guide to Quality Control*. Tokyo Springer, 1996.

Taguchi, G., S. Chowdhury y Y. Wu, *Taguchi's Quality Engineering Handbook*, John Wiley & Sons, Inc., 2004.

4. Temas especiales

Box, G. E. P. y N. R. Draper, *Response Surfaces*, Mix-tures, and Ridge Analysis. John Wiley & Sons, Inc., 2007.

Crosier, R., A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme, *Technometrics*, **28**, 187-194, 1986.

Johnson, R. A. y G. K. Bhattacharyya, *Statistics: Principles and Methods,* 6a. ed., John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Johnson, R. y R. Li, Multivariate StatisticalProcess Control Schemes for Controlling a Mean, capítulo 18, 323-345. *Springer Hand book of Engineering Statistics*, Ed. H. Pham, Springer, 2006.

Johnson, R. A. y D. W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6a. ed., Prentice Hall, Inc., 2007.

Kalbfleisch, J. D. y R. L. Prentice, *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

Lawless, J. F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

Miller, R. G. Jr., Survival Analysis, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., 2002.

5. Software

MINITAB Inc., State College, PA.

R, se puede descargar en **http://cran.r-project.org**

SAS Institute Inc., Gary, NC.

APÉNDICE B

TABLAS ESTADÍSTICAS

1. Función de distribución binomial 505

2. Función de distribución de Poisson 510

3. Función de distribución normal estándar 514

4. Valores de t_α 516

5. Valores de χ^2_α 517

6. ***a***) Valores de $F_{0.05}$ 518

6. ***b***) Valores de $F_{0.01}$ 519

7. Dígitos aleatorios 520

8. ***a***) Valores de r_p para $\alpha = 0.05$ 523

8. ***b***) Valores de r_p para $\alpha = 0.01$ 524

9. Constantes de gráficos de control 525

10. ***a***) Factores para límites de tolerancia bilaterales 526

10. ***b***) Factores para límites de tolerancia unilaterales 527

Tabla I Función de distribución binomial

$$B(x:n,p) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p																		
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.9927	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000	0.4252	0.3520	0.2818	0.2160	0.1563	0.1040	0.0607	0.0280	0.0073
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	2	0.9978	0.9841	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0158	0.0022
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0.4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0344
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
8	0	0.6634	0.4305	0.2775	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.0000
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366

Tabla I *(continúa de la página 504)*

		p																		
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4023
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596

(continúa en la siguiente página)

Tabla I *(continúa de la página 505)*

		p																		
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0245
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9977	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0022	0.0001
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367

Tabla I *(continúa de la página 506)*

n	x	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0.0005	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000

(continúa en la siguiente página)

Tabla I *(continúa de la página 507)*

		p																		
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415

Tabla 2 Función de distribución de Poisson

$$F(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.02	0.980	1.000								
0.04	0.961	0.999	1.000							
0.06	0.942	0.998	1.000							
0.08	0.923	0.997	1.000							
0.10	0.905	0.995	1.000							
0.15	0.861	0.990	0.999	1.000						
0.20	0.819	0.982	0.999	1.000						
0.25	0.779	0.974	0.998	1.000						
0.30	0.741	0.963	0.996	1.000						
0.35	0.705	0.951	0.994	1.000						
0.40	0.670	0.938	0.992	0.999	1.000					
0.45	0.638	0.925	0.989	0.999	1.000					
0.50	0.607	0.910	0.986	0.998	1.000					
0.55	0.577	0.894	0.982	0.998	1.000					
0.60	0.549	0.878	0.977	0.997	1.000					
0.65	0.522	0.861	0.972	0.996	0.999	1.000				
0.70	0.497	0.844	0.966	0.994	0.999	1.000				
0.75	0.472	0.827	0.959	0.993	0.999	1.000				
0.80	0.449	0.809	0.953	0.991	0.999	1.000				
0.85	0.427	0.791	0.945	0.989	0.998	1.000				
0.90	0.407	0.772	0.937	0.987	0.998	1.000				
0.95	0.387	0.754	0.929	0.984	0.997	1.000				
1.0	0.368	0.736	0.920	0.981	0.996	0.999	1.000			
1.1	0.333	0.699	0.900	0.974	0.995	0.999	1.000			
1.2	0.301	0.663	0.879	0.966	0.992	0.998	1.000			
1.3	0.273	0.627	0.857	0.957	0.989	0.998	1.000			
1.4	0.247	0.592	0.833	0.946	0.986	0.997	0.999	1.000		
1.5	0.223	0.558	0.809	0.934	0.981	0.996	0.999	1.000		
1.6	0.202	0.525	0.783	0.921	0.976	0.994	0.999	1.000		
1.7	0.183	0.493	0.757	0.907	0.970	0.992	0.998	1.000		
1.8	0.165	0.463	0.731	0.891	0.964	0.990	0.997	0.999	1.000	
1.9	0.150	0.434	0.704	0.875	0.956	0.987	0.997	0.999	1.000	
2.0	0.135	0.406	0.677	0.857	0.947	0.983	0.995	0.999	1.000	
2.2	0.111	0.355	0.623	0.819	0.928	0.975	0.993	0.998	1.000	
2.4	0.091	0.308	0.570	0.779	0.904	0.964	0.988	0.997	0.999	1.000
2.6	0.074	0.267	0.518	0.736	0.877	0.951	0.983	0.995	0.999	1.000

(continúa en la siguiente página)

Tabla 2 *(continúa de la página 509)*

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.8	0.061	0.231	0.469	0.692	0.848	0.935	0.976	0.992	0.998	0.999
3.0	0.050	0.199	0.423	0.647	0.815	0.916	0.966	0.988	0.996	0.999
3.2	0.041	0.171	0.380	0.603	0.781	0.895	0.955	0.983	0.994	0.998
3.4	0.033	0.147	0.340	0.558	0.744	0.871	0.942	0.977	0.992	0.997
3.6	0.027	0.126	0.303	0.515	0.706	0.844	0.927	0.969	0.988	0.996
3.8	0.022	0.107	0.269	0.473	0.668	0.816	0.909	0.960	0.984	0.994
4.0	0.018	0.092	0.238	0.433	0.629	0.785	0.889	0.949	0.979	0.992
4.2	0.015	0.078	0.210	0.395	0.590	0.753	0.867	0.936	0.972	0.989
4.4	0.012	0.066	0.185	0.359	0.551	0.720	0.844	0.921	0.964	0.985
4.6	0.010	0.056	0.163	0.326	0.513	0.686	0.818	0.905	0.955	0.980
4.8	0.008	0.048	0.143	0.294	0.476	0.651	0.791	0.887	0.944	0.975
5.0	0.007	0.040	0.125	0.265	0.440	0.616	0.762	0.867	0.932	0.968
5.2	0.006	0.034	0.109	0.238	0.406	0.581	0.732	0.845	0.918	0.960
5.4	0.005	0.029	0.095	0.213	0.373	0.546	0.702	0.822	0.903	0.951
5.6	0.004	0.024	0.082	0.191	0.342	0.512	0.670	0.797	0.886	0.941
5.8	0.003	0.021	0.072	0.170	0.313	0.478	0.638	0.771	0.867	0.929
6.0	0.002	0.017	0.062	0.151	0.285	0.446	0.606	0.744	0.847	0.916
6.2	0.002	0.015	0.054	0.134	0.259	0.414	0.574	0.716	0.826	0.902
6.4	0.002	0.012	0.046	0.119	0.235	0.384	0.542	0.687	0.803	0.886
6.6	0.001	0.010	0.040	0.105	0.213	0.355	0.511	0.658	0.780	0.869
6.8	0.001	0.009	0.034	0.093	0.192	0.327	0.480	0.628	0.755	0.850
7.0	0.001	0.007	0.030	0.082	0.173	0.301	0.450	0.599	0.729	0.830
7.2	0.001	0.006	0.025	0.072	0.156	0.276	0.420	0.569	0.703	0.810
7.4	0.001	0.005	0.022	0.063	0.140	0.253	0.392	0.539	0.676	0.788
7.6	0.001	0.004	0.019	0.055	0.125	0.231	0.365	0.510	0.648	0.765
7.8	0.000	0.004	0.016	0.048	0.112	0.210	0.338	0.481	0.620	0.741
8.0	0.000	0.003	0.014	0.042	0.100	0.191	0.313	0.453	0.593	0.717
8.5	0.000	0.002	0.009	0.030	0.074	0.150	0.256	0.386	0.523	0.653
9.0	0.000	0.001	0.006	0.021	0.055	0.116	0.207	0.324	0.456	0.587
9.5	0.000	0.001	0.004	0.015	0.040	0.089	0.165	0.269	0.392	0.522
10.0	0.000	0.000	0.003	0.010	0.029	0.067	0.130	0.220	0.333	0.458
10.5	0.000	0.000	0.002	0.007	0.021	0.050	0.102	0.179	0.279	0.397
11.0	0.000	0.000	0.001	0.005	0.015	0.038	0.079	0.143	0.232	0.341
11.5	0.000	0.000	0.001	0.003	0.011	0.028	0.060	0.114	0.191	0.289
12.0	0.000	0.000	0.001	0.002	0.008	0.020	0.046	0.090	0.155	0.242
12.5	0.000	0.000	0.000	0.002	0.005	0.015	0.035	0.070	0.125	0.201

(continúa en la siguiente página)

Tabla 2 *(continúa de la página 510)*

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.011	0.026	0.054	0.100	0.166
13.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.019	0.041	0.079	0.135
14.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.006	0.014	0.032	0.062	0.109
14.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.010	0.024	0.048	0.088
15.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.018	0.037	0.070

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2.8	1.000									
3.0	1.000									
3.2	1.000									
3.4	0.999	1.000								
3.6	0.999	1.000								
3.8	0.998	0.999	1.000							
4.0	0.997	0.999	1.000							
4.2	0.996	0.999	1.000							
4.4	0.994	0.998	0.999	1.000						
4.6	0.992	0.997	0.999	1.000						
4.8	0.990	0.996	0.999	1.000						
5.0	0.986	0.995	0.998	0.999	1.000					
5.2	0.982	0.993	0.997	0.999	1.000					
5.4	0.977	0.990	0.996	0.999	1.000					
5.6	0.972	0.988	0.995	0.998	0.999	1.000				
5.8	0.965	0.984	0.993	0.997	0.999	1.000				
6.0	0.957	0.980	0.991	0.996	0.999	0.999	1.000			
6.2	0.949	0.975	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000			
6.4	0.939	0.969	0.986	0.994	0.997	0.999	1.000			
6.6	0.927	0.963	0.982	0.992	0.997	0.999	0.999	1.000		
6.8	0.915	0.955	0.978	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000		
7.0	0.901	0.947	0.973	0.987	0.994	0.998	0.999	1.000		
7.2	0.887	0.937	0.967	0.984	0.993	0.997	0.999	1.000	1.000	
7.4	0.871	0.926	0.961	0.980	0.991	0.996	0.998	0.999	1.000	
7.6	0.854	0.915	0.954	0.976	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000	
7.8	0.835	0.902	0.945	0.971	0.986	0.993	0.997	0.999	1.000	
8.0	0.816	0.888	0.936	0.966	0.983	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000
8.5	0.763	0.849	0.909	0.949	0.973	0.986	0.993	0.997	0.999	0.999
9.0	0.706	0.803	0.876	0.926	0.959	0.978	0.989	0.995	0.998	0.999
9.5	0.645	0.752	0.836	0.898	0.940	0.967	0.982	0.991	0.996	0.998
10.0	0.583	0.697	0.792	0.864	0.917	0.951	0.973	0.986	0.993	0.997

(continúa en la siguiente pagina)

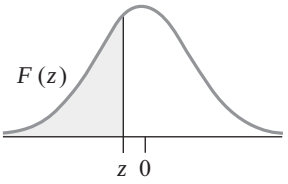
Tabla 2 *(continúa en la siguiente página 511)*

λ \ x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10.5	0.521	0.639	0.742	0.825	0.888	0.932	0.960	0.978	0.988	0.994
11.0	0.460	0.579	0.689	0.781	0.854	0.907	0.944	0.968	0.982	0.991
11.5	0.402	0.520	0.633	0.733	0.815	0.878	0.924	0.954	0.974	0.986
12.0	0.347	0.462	0.576	0.682	0.772	0.844	0.899	0.937	0.963	0.979
12.5	0.297	0.406	0.519	0.628	0.725	0.806	0.869	0.916	0.948	0.969
13.0	0.252	0.353	0.463	0.573	0.675	0.764	0.835	0.890	0.930	0.957
13.5	0.211	0.304	0.409	0.518	0.623	0.718	0.798	0.861	0.908	0.942
14.0	0.176	0.260	0.358	0.464	0.570	0.669	0.756	0.827	0.883	0.923
14.5	0.145	0.220	0.311	0.413	0.518	0.619	0.711	0.790	0.853	0.901
15.0	0.118	0.185	0.268	0.363	0.466	0.568	0.664	0.749	0.819	0.875

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
8.5	1.000									
9.0	1.000									
9.5	0.999	1.000								
10.0	0.998	0.999	1.000							
10.5	0.997	0.999	0.999	1.000						
11.0	0.995	0.998	0.999	1.000						
11.5	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000					
12.0	0.988	0.994	0.997	0.999	0.999	1.000				
12.5	0.983	0.991	0.995	0.998	0.999	0.999	1.000			
13.0	0.975	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000			
13.5	0.965	0.980	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000		
14.0	0.952	0.971	0.983	0.991	0.995	0.997	0.999	0.999	1.000	
14.5	0.936	0.960	0.976	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000
15.0	0.917	0.947	0.967	0.981	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000

Tabla 3 Función de distribución normal estándar

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$$

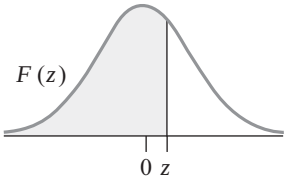


z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−5.0	0.0000003									
−4.0	0.00003									
−3.5	0.0002									
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0006	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

(continúa en la siguiente página)

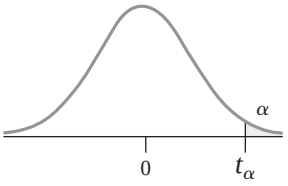
Tabla 3 *(continúa de la página 513)*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5973	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									

Tabla 4 Valores de t_α



ν	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.00833$	$\alpha = 0.00625$	$\alpha = 0.005$	ν
1	3.078	6.314	12.706	31.821	38.204	50.923	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	7.650	8.860	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.392	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.315	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	3.810	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.288	3.521	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.335	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.206	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	2.934	3.111	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.038	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	2.891	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	2.780	2.934	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	2.896	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.864	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.837	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.813	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.793	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.775	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.759	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.744	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.602	2.732	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.720	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.710	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.700	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.692	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.684	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.553	2.676	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.547	2.669	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.663	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.394	2.498	2.576	inf.

Tabla 5 Valores de χ^2_α

ν	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30
40	20.707	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766	40
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490	50
60	35.534	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952	60
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215	70
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321	80
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299	90
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.169	100

Tabla 6*a*) Valores de $F_{0.05}$

ν_2 = Grados de libertad para denominador	ν_1 = Grados de libertad para numerador																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.38	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabla 6*b*) Valores de $F_{0.01}$

ν_2 = Grados de libertad para denominador	ν_1 = Grados de libertad para numerador																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,240	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.57	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.77	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabla 7 Dígitos aleatorios

Fila 1	1306	1189	5731	3968	5606	5084	8947	3897	1636	7810
2	0422	2431	0649	8085	5053	4722	6598	5044	9040	5121
3	6597	2022	6168	5060	8656	6733	6364	7649	1871	4328
4	7965	6541	5645	6243	7658	6903	9911	5740	7824	8520
5	7695	6937	0406	8894	0441	8135	9797	7285	5905	9539
6	5160	7851	8464	6789	3938	4197	6511	0407	9239	2232
7	2961	0551	0539	8288	7478	7365	5581	5771	5442	8761
8	1428	4183	4312	5445	4854	9157	9158	4218	1464	3634
9	3666	5642	4539	1561	7849	7520	2547	0756	1206	2033
10	6543	6799	7454	9052	6689	1946	2574	9386	0304	7945
11	9975	6080	7423	3175	9377	6951	6519	8287	8994	5532
12	4866	0956	7545	7723	8085	4948	2228	9583	4415	7065
13	8239	7068	6694	5168	3117	1568	0237	6160	9585	1133
14	8722	9191	3386	3443	0434	4586	4150	1224	6204	0937
15	1330	9120	8785	8382	2929	7089	3109	6742	2468	7025
16	2296	2952	4764	9070	6356	9192	4012	0618	2219	1109
17	3582	7052	3132	4519	9250	2486	0830	8472	2160	7046
18	5872	9207	7222	6494	8973	3545	6967	8490	5264	9821
19	1134	6324	6201	3792	5651	0538	4676	2064	0584	7996
20	1403	4497	7390	8503	8239	4326	8022	2914	4368	4529
21	3393	7025	3381	3553	2128	1021	8353	6413	5161	8583
22	1137	7896	3602	0060	7850	7626	0854	6565	4260	6220
23	7437	5198	8772	6727	8527	6851	2709	5992	7383	1071
24	8414	8820	3917	7238	9821	6073	6658	1280	9643	7761
25	8398	5224	2749	7311	5740	9771	7826	9533	3800	4553
26	0995	8935	2939	3092	2496	0359	0318	4697	7181	4035
27	6657	0755	9685	4017	6581	7292	5643	5064	1142	1297
28	8875	8369	7868	0190	9278	1709	4253	9346	4335	3769
29	8399	6702	0586	6428	7985	2979	4513	1970	1989	3105
30	6703	1024	2064	0393	6815	8502	1375	4171	6970	1201
31	4730	1653	9032	9855	0957	7366	0325	5178	7959	5371
32	8400	6834	3187	8688	1079	1480	6776	9888	7585	9998
33	3647	8002	6726	0877	4552	3238	7542	7804	3933	9475
34	6789	5197	8037	2354	9262	5497	0005	3986	1767	7981
35	2630	2721	2810	2185	6323	5679	4931	8336	6662	3566
36	1374	8625	1644	3342	1587	0762	6057	8011	2666	3759
37	1519	7625	9110	4409	0239	7059	3415	5537	2250	7292
38	9678	2877	7979	4935	0449	8119	6969	5383	1717	6719
39	0882	6781	3538	4090	3092	2365	6001	3446	9985	6007
40	0006	4205	2389	4365	1981	8158	7784	6256	3842	5603

(continúa en la siguiente página)

Tabla 7 *(continúa en la siguiente página 519)*

Fila 41	4611	9861	7916	9305	2074	9462	0254	4827	9198	3974
42	1093	3784	4190	6332	1175	8599	9735	8584	6581	7194
43	3374	3545	6865	8819	3342	1676	2264	6014	5012	2458
44	3650	9676	1436	4374	4716	5548	8276	6235	6742	2154
45	7292	5749	7977	7602	9205	3599	3880	9537	4423	2330
46	2353	8319	2850	4026	3027	1708	3518	7034	7132	6903
47	1094	2009	8919	5676	7283	4982	9642	9235	8167	3366
48	0568	4002	0587	7165	1094	2006	7471	0940	4366	9554
49	5606	4070	5233	4339	6543	6695	5799	5821	3953	9458
50	8285	7537	1181	2300	5294	6892	1627	3372	1952	3028
51	2444	9039	4803	8658	1590	2420	2547	2470	8179	4617
52	5748	7767	2800	6289	2814	8281	1549	9519	3341	1192
53	7761	8583	0852	5619	6864	8506	9643	7763	9611	1289
54	6838	9280	2654	0812	3988	2146	5095	0150	8043	9079
55	6440	2631	3033	9167	4998	7036	0133	7428	9702	1376
56	8829	0094	2887	3802	5497	0318	5168	6377	9216	2802
57	9845	4796	2951	4449	1999	2691	5328	7674	7004	6212
58	5072	9000	3887	5739	7920	6074	4715	3681	2721	2701
59	9035	0553	1272	2600	3828	8197	8852	9092	8027	6144
60	5562	1080	2222	0336	1411	0303	7424	3713	9278	1818
61	2757	2650	8727	3953	9579	2442	8041	9869	2887	3933
62	6397	1848	1476	0787	4990	4666	1208	2769	3922	1158
63	9208	7641	3775	4279	1282	1840	5999	1806	7809	5885
64	2418	9289	6120	8141	3908	5577	3590	2317	8975	4593
65	7300	9006	5659	8258	3662	0332	5369	3640	0563	7939
66	6780	2535	8916	3245	2256	4350	6064	2438	2002	1272
67	2914	7309	4045	7513	3195	4166	0878	5184	6680	2655
68	0868	8657	8118	6340	9452	7460	3291	5778	1167	0312
69	7994	6579	6461	2292	9554	8309	5036	0974	9517	8293
70	8587	0764	6687	9150	1642	2050	4934	0027	1376	5040
71	8016	8345	2257	5084	8004	7949	3205	3972	7640	3478
72	5581	5775	7517	9076	4699	8313	8401	7147	9416	7184
73	2015	3364	6688	2631	2152	2220	1637	8333	4838	5699
74	7327	8987	5741	0102	1173	7350	7080	7420	1847	0741
75	3589	1991	1764	8355	9684	9423	7101	1063	4151	4875
76	2188	6454	7319	1215	0473	6589	2355	9579	7004	6209
77	2924	0472	9878	7966	2491	5662	6535	2789	2564	1249
78	1961	1669	2219	1113	9175	0260	4046	8142	4432	2664
79	2393	9637	0410	7536	0972	5153	0708	1935	1143	1704
80	7585	4424	2648	6728	2233	3518	7267	1732	1926	3833

(continúa en la siguiente página)

Tabla 7 *(continúa de la página 520)*

Fila 81	0197	4021	9027	7327	9212	7017	8060	6216	1942	6817
82	9719	5336	5532	8537	2980	8252	4971	0110	6209	1556
83	8866	4785	6007	8006	9043	4109	5570	9249	9905	2152
84	5744	3957	8786	9023	1472	7275	1014	1104	0832	7680
85	7149	5721	1389	6581	7196	7072	6360	3084	7009	0239
86	7710	8479	9345	7773	9086	1202	8845	3163	7937	6163
87	5246	5651	0432	8644	6341	9661	2361	8377	8673	6098
88	3576	0013	7381	0124	8559	9813	9080	6984	0926	2169
89	3026	1464	2671	4691	0353	5289	8754	2442	7799	8983
90	6591	4365	8717	2365	5686	8377	8675	9798	7745	6360
91	0402	3257	0480	5038	1998	2935	1306	1190	2406	2596
92	7105	7654	4745	4482	8471	1424	2031	7803	4367	6816
93	7181	4140	1046	0885	1264	7755	1653	8924	5822	4401
94	3655	3282	2176	8134	3291	7262	8229	2866	7065	4806
95	5121	6717	3117	1901	5184	6467	8954	3884	0279	8635
96	3618	3098	9208	7429	1578	1917	7927	2696	3704	0833
97	0166	3638	4947	1414	4799	9189	2459	5056	5982	6154
98	6187	9653	3658	4730	1652	8096	8288	9368	5531	7788
99	1234	1448	0276	7290	1667	2823	3755	5642	4854	8844
100	8949	8731	4875	5724	2962	1182	2930	7539	4526	7252
101	4357	4146	8353	9952	8004	7945	1530	5207	4730	1967
102	5339	7325	6862	7584	8634	3485	2278	5832	0612	8118
103	6583	8433	0717	0606	9284	2719	1888	2889	0285	2765
104	6564	3526	2171	3809	3428	5523	9078	0648	7768	3326
105	4811	1933	3763	6265	8931	0649	8085	6177	4450	2139
106	6931	7236	1230	0441	4013	1352	6563	1499	7332	3068
107	8755	3390	6120	7825	9005	7012	1643	9934	4044	7022
108	6742	2260	3443	0190	9278	1816	7697	7933	0067	2906
109	6655	3930	9014	6032	7574	1685	5258	3100	5358	1929
110	8514	4806	4124	9286	0449	5051	4772	4651	0038	1580
111	8135	5004	7299	8981	4689	1950	2271	2201	8344	3852
112	4414	6855	0127	5489	5157	6386	7492	3736	7164	0498
113	3727	7959	5056	5983	8021	0204	7616	4325	7454	5039
114	5434	7342	0314	7525	0067	2800	6292	4706	3454	6881
115	7195	8828	9869	2785	3186	8375	7417	7232	0401	2483
116	2705	8245	6251	9611	1077	0641	0195	7024	6202	3899
117	1547	8981	4972	1280	4286	5678	0338	8096	8284	7010
118	3424	1435	1354	7631	7260	7361	0151	8903	9056	8684
119	8969	7551	3695	4915	7921	2913	3840	9031	9747	9735
120	5225	8720	8898	2478	3342	9200	8836	7269	2992	6284

*Tomado de Donald B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Reading, Mass.: Addison Wesley, 1962.

Tabla 8*a*) Valores de r_p para $\alpha = 0.05$*

g.l. \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97								
2	6.09	6.09							
3	4.50	4.52	4.52						
4	3.93	4.01	4.03	4.03					
5	3.64	3.75	3.80	3.81	3.81				
6	3.46	3.59	3.65	3.68	3.69	3.70			
7	3.34	3.48	3.55	3.59	3.61	3.62	3.63		
8	3.26	3.40	3.48	3.52	3.55	3.57	3.57	3.58	
9	3.20	3.34	3.42	3.47	3.50	3.52	3.54	3.54	3.55
10	3.15	3.29	3.38	3.43	3.47	3.49	3.51	3.52	3.52
11	3.11	3.26	3.34	3.40	3.44	3.46	3.48	3.49	3.50
12	3.08	3.23	3.31	3.37	3.41	3.44	3.46	3.47	3.48
13	3.06	3.20	3.29	3.35	3.39	3.42	3.46	3.46	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.39	3.41	3.43	3.45
16	3.00	3.14	3.23	3.30	3.34	3.38	3.40	3.42	3.44
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.37	3.39	3.41	3.43
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.36	3.38	3.40	3.42
19	2.96	3.11	3.20	3.26	3.31	3.35	3.38	3.40	3.41
20	2.95	3.10	3.19	3.25	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41
24	2.92	3.07	3.16	3.23	3.28	3.31	3.35	3.37	3.39
30	2.89	3.03	3.13	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35
60	2.83	2.98	3.07	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33
120	2.80	2.95	3.04	3.12	3.17	3.22	3.25	3.29	3.31
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.27	3.29

*Esta tabla se reproduce de H. L. Carter, "Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test". Contiene algunos valores corregidos para sustituir los dados por D. B. Duncan en "Multiple Range and Multiple *F* Tests", *Biometrics*, vol. 11 (1955). La tabla anterior se reproduce con la autorización del autor y el editor de *Biometrics*.

Tabla 8*b*) Valores de r_p para $\alpha = 0.01$*

g.l. \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.02								
2	14.04	14.04							
3	8.26	8.32	8.32						
4	8.26	8.32	6.74	6.76					
5	5.70	5.90	5.99	6.04	6.08				
6	5.24	5.44	5.55	5.62	5.66	5.68			
7	4.95	5.15	5.26	5.33	5.38	5.42	5.44		
8	4.74	4.94	5.06	5.13	5.19	5.23	5.26	5.28	
9	4.60	4.79	4.91	4.99	5.04	5.09	5.12	5.14	5.16
10	4.48	4.67	4.79	4.88	4.93	4.98	5.01	5.04	5.06
11	4.39	4.58	4.70	4.78	4.84	4.89	4.92	4.95	4.97
12	4.32	4.50	4.62	4.71	4.77	4.81	4.85	4.88	4.91
13	4.26	4.44	4.56	4.64	4.71	4.75	4.79	4.82	4.85
14	4.21	4.39	4.51	4.59	4.66	4.70	4.74	4.77	4.80
15	4.17	4.34	4.46	4.55	4.61	4.66	4.70	4.73	4.76
16	4.13	4.31	4.43	4.51	4.57	4.62	4.66	4.70	4.72
17	4.10	4.27	4.39	4.47	4.54	4.59	4.63	4.66	4.69
18	4.07	4.25	4.36	4.45	4.51	4.56	4.60	4.64	4.66
19	4.05	4.22	4.33	4.42	4.48	4.53	4.57	4.61	4.64
20	4.02	4.20	4.31	4.40	4.46	4.51	4.55	4.59	4.62
24	3.96	4.13	4.24	4.32	4.39	4.44	4.48	4.52	4.55
30	3.89	4.06	4.17	4.25	4.31	4.36	4.41	4.45	4.48
40	3.82	3.99	4.10	4.18	4.24	4.29	4.33	4.38	4.41
60	3.76	3.92	4.03	4.11	4.18	4.23	4.37	4.31	4.34
120	3.70	3.86	3.97	4.04	4.11	4.16	4.20	4.24	4.27
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.13	4.17	4.21

*Esta tabla se reproduce de H. L. Carter, "Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test". Contiene algunos valores corregidos para sustituir los dados por D. B. Duncan en "Multiple Range and Multiple *F* Tests", *Biometrics*, vol. 11 (1955). La tabla anterior se reproduce con la autorización del autor y el editor de *Biometrics*.

Tabla 9 Constantes de gráfico de control*

Número de observaciones en muestra, *n*	Gráfico para promedios: Factores para límites de control			Gráfico para desviaciones estándar: Factores para línea central	Factores para límites de control			Gráfico para rangos: Factores para línea central	Factores para límites de control				
	A	A_1	A_2	c_2	B_1	B_2	B_3	B_4	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	3.760	1.880	0.5642	0	1.843	0	3.267	1.128	0	3.686	0	3.267
3	1.732	2.394	1.023	0.7236	0	1.858	0	2.568	1.693	0	4.358	0	2.575
4	1.500	1.880	0.729	0.7979	0	1.808	0	2.266	2.059	0	4.698	0	2.282
5	1.342	1.596	0.577	0.8407	0	1.756	0	2.089	2.326	0	4.918	0	2.115
6	1.225	1.410	0.483	0.8686	0.026	1.711	0.030	1.970	2.534	0	5.078	0	2.004
7	1.134	1.277	0.419	0.8882	0.105	1.672	0.118	1.882	2.704	0.205	5.203	0.076	1.924
8	1.061	1.175	0.373	0.9027	0.167	1.638	0.185	0.815	2.847	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	1.094	0.337	0.9139	0.219	1.609	0.239	1.761	2.970	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	1.028	0.308	0.9227	0.262	1.584	0.284	1.716	3.078	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.973	0.285	0.9300	0.299	1.561	0.321	1.679	3.173	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.925	0.266	0.9359	0.331	1.541	0.354	1.646	3.258	0.924	5.592	0.284	1.716
13	0.832	0.884	0.249	0.9410	0.359	1.523	0.382	1.618	3.336	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.848	0.235	0.9453	0.384	1.507	0.406	1.594	3.407	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.816	0.223	0.9490	0.406	1.492	0.428	1.572	3.472	1.207	5.737	0.348	1.652

*Reimpresa con autorización del ASTM Manual on Presentation of Data and Control Charts, copyright ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, West Conshohocken, PA 19428.

Tabla 10a) Factores para límites de tolerancia bilaterales*

	$1-\alpha = 0.95$			$1-\alpha = 0.99$		
n \ p	0.90	0.95	0.99	0.90	0.95	0.99
2	32.019	37.674	48.430	1650.193	188.491	242.300
3	8.380	9.916	12.861	18.930	22.401	29.055
4	5.369	6.370	8.299	9.398	11.150	14.527
5	4.275	5.079	6.634	6.612	7.855	10.260
6	3.712	4.414	5.775	5.337	6.345	8.301
7	3.369	4.007	5.248	4.613	5.488	7.187
8	3.136	3.732	4.891	4.147	4.936	6.468
9	2.967	3.532	4.631	3.822	4.550	5.996
10	2.839	3.379	4.433	3.582	4.265	5.594
11	2.737	3.259	4.277	3.397	4.045	5.308
12	2.655	3.162	4.150	3.250	3.870	5.079
13	2.587	3.081	4.044	3.130	3.727	4.893
14	2.529	3.012	3.955	3.029	3.608	4.737
15	2.480	2.954	3.878	2.945	3.507	4.605
16	2.437	2.903	3.812	2.872	3.421	4.492
17	2.400	2.858	3.754	2.808	3.345	4.393
18	2.366	2.819	3.702	2.753	3.279	4.307
19	2.337	2.784	3.656	2.703	3.221	4.230
20	2.310	2.752	3.615	2.659	3.168	4.161
25	2.208	2.631	3.457	2.494	2.972	3.904
30	2.140	2.549	3.350	2.385	2.841	3.733
35	2.090	2.490	3.272	2.306	2.748	3.611
40	2.052	2.445	3.213	2.247	2.677	3.518
45	2.021	2.408	3.165	2.200	2.621	3.444
50	1.996	2.379	3.126	2.162	2.576	3.385
55	1.976	2.354	3.094	2.130	2.538	3.335
60	1.958	2.333	3.066	2.103	2.506	3.293
65	1.943	2.315	3.042	2.080	2.478	3.257
70	1.929	2.299	3.021	2.060	2.454	3.225
75	1.917	2.285	3.002	2.042	2.433	3.197
80	1.907	2.272	2.986	2.026	2.414	3.173
85	1.897	2.261	2.971	2.012	2.397	3.150
90	1.889	2.251	2.958	1.999	2.382	3.130
95	1.881	2.241	2.945	1.987	2.368	3.112
100	1.874	2.233	2.934	1.977	2.355	3.096
150	1.825	2.175	2.859	1.905	2.270	2.983
200	1.798	2.143	2.816	1.865	2.222	2.921
250	1.780	2.121	2.788	1.839	2.191	2.880
300	1.767	2.106	2.767	1.820	2.169	2.850
400	1.749	2.084	2.739	1.794	2.138	2.809
500	1.737	2.070	2.721	1.777	2.117	2.783
600	1.729	2.060	2.707	1.764	2.102	2.763
700	1.722	2.052	2.697	1.755	2.091	2.748
800	1.717	2.046	2.688	1.747	2.082	2.736
900	1.712	2.040	2.682	1.741	2.075	2.726
1,000	1.709	2.036	2.676	1.736	2.068	2.718
∞	1.645	1.960	2.576	1.645	1.960	2.576

*Adaptada de *Techniques of Statistical Analysis* por Columbia University Statistical Research Group, copyright 1947, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

Tabla 10*b*) Factores para límites de tolerancia unilaterales*

	$1-\alpha = 0.95$			$1-\alpha = 0.99$		
n \ p	0.90	0.95	0.99	0.90	0.95	0.99
2	20.581	26.260	37.094	103.029	131.426	185.617
3	6.156	7.656	10.553	13.995	17.370	23.896
4	4.162	5.144	7.042	7.380	9.083	12.387
5	3.407	4.203	5.741	5.362	6.578	8.939
6	3.006	3.708	5.062	4.411	5.406	7.335
7	2.756	3.400	4.642	3.859	4.728	6.412
8	2.582	3.187	4.354	3.497	4.285	5.812
9	2.454	3.031	4.143	3.241	3.972	5.389
10	2.355	2.911	3.981	3.048	3.738	5.074
11	2.275	2.815	3.852	2.898	3.556	4.829
12	2.210	2.736	3.747	2.777	3.410	4.633
13	2.155	2.671	3.659	2.677	3.290	4.472
14	2.109	2.615	3.585	2.593	3.189	4.337
15	2.068	2.566	3.520	2.522	3.102	4.222
16	2.033	2.524	3.464	2.460	3.028	4.123
17	2.002	2.486	3.414	2.405	2.963	4.037
18	1.974	2.453	3.370	2.357	2.905	3.960
19	1.949	2.423	3.331	2.314	2.854	3.892
20	1.926	2.396	3.295	2.276	2.808	3.832
25	1.838	2.292	3.158	2.129	2.633	3.601
30	1.777	2.220	3.064	2.030	2.516	3.447
35	1.732	2.167	2.995	1.957	2.430	3.334
40	1.697	2.126	2.941	1.902	2.364	3.249
45	1.669	2.092	2.898	1.857	2.312	3.180
50	1.646	2.065	2.863	1.821	2.269	3.125
55	1.626	2.042	2.833	1.790	2.233	3.078
60	1.609	2.022	2.807	1.764	2.202	3.038
65	1.594	2.005	2.785	1.741	2.176	3.004
70	1.581	1.990	2.765	1.722	2.153	2.974
75	1.570	1.976	2.748	1.704	2.132	2.947
80	1.559	1.965	2.733	1.688	2.114	2.924
85	1.550	1.954	2.719	1.674	2.097	2.902
90	1.542	1.944	2.706	1.661	2.082	2.883
95	1.534	1.935	2.695	1.650	2.069	2.866
100	1.527	1.927	2.684	1.639	2.056	2.850
150	1.478	1.870	2.611	1.566	1.971	2.741
200	1.450	1.837	2.570	1.524	1.923	2.679
250	1.431	1.815	2.542	1.496	1.891	2.638
300	1.417	1.800	2.522	1.476	1.868	2.608
∞	1.282	1.645	2.326	1.282	1.645	2.326

USO DEL SOFTWARE *R*

Introducción a R

R es el nombre de un poderoso software ampliamente usado, gratuito y disponible en la Web. Si usted lo desea, puede usarlo en su computadora. El programa y la ayuda se encuentran en *http://www.r-project.org*. Los manuales pueden encontrarse en *http://www.cran.r-project.org/doc/manuals*. Inicialmente, le serán de utilidad *R-intro.pdf* y *R-data.pdf*.

R es un programa activado por comandos, a diferencia del activado por menú. Usted escribe un comando y R responde. R tiene muchas funciones integradas que operan sobre objetos llamados genéricamente **x**, **y** o un nombre más descriptivo. Dichos objetos son cadenas de números o vectores, donde se recuerda el orden en que se ingresan los números. Aprender algunas funciones mejorará su aprendizaje de la estadística introductoria. Al escribir el nombre de una función y presionar *Enter,* se desplegará el nombre de la función. A todas las funciones sigue ( ), y usted debe incluir una lista de argumentos entre los paréntesis. La lista puede estar vacía. Para salir, debe escribir *q*(), no sólo *q*, y presionar *Enter*.

Ingreso de datos

Cuando el conjunto de datos sea pequeño, la forma más sencilla de ingresar los datos es usar la función **c** que *concatena* números. Por ejemplo, para crear un objeto llamado **xmpg** para los datos mpg del ejemplo de la sección 2.7, después del prompt > ingrese el nombre de objeto seguido por **=c(** y, luego, los datos. Si no termina en una línea, R cambia el prompt a un + hasta que termine de ingresar los datos y escribe **)**.

```
> xmpg = c(19.7, 21.5, 22.5, 22.2, 22.6, 21.9, 20.5, 19.3, 19.9, 21.7,
+ 22.8, 23.2, 21.4, 20.8, 19.4, 22.0, 23.0, 21.1, 20.9, 21.3)
```

También puede descargar datos del sitio Web asociado con este libro. Quizá primero desee crear en su disco duro una carpeta que contendrá los archivos de datos. Los archivos más sencillos de leer en R son los archivos con formato ASCII, o archivos de texto plano, que terminan con .dat o *.txt*. En su propia computadora, necesita seleccionar el menú File y asegurarse de que su directorio de trabajo contenga los archivos de datos.

Para los datos del ejercicio 2.34, los comandos

```
> xcosts = read.table("2-34.txt", header = T)
> attach(xcosts)
```

colocarán los datos en el objeto **xcosts** y le permitirán referirse a los datos mediante el nombre de variable(s) en la línea de encabezado del archivo de datos. En todos los archivos para este texto, las columnas representan variables (con frecuencia solo una) y las filas representan observaciones. Puede usar la función de estructura **str()** para determinar el nombre de cada variable y su estructura.

```
> str(xcosts)
'data.frame': 29 obs. of 1 variable:
 $ cost: num 1.41 1.7 1.03 0.99 1.68 1.09 1.68 1.94 1.53 2.25 . . .
'
```

Aquí, cost es el nombre de la variable y hay 29 observaciones.

De manera alternativa, si los archivos de datos no están en el mismo directorio, la función **file.choose** abrirá un cuadro de diálogo que le ayudará a moverse en sus carpetas para encontrar el archivo de datos adecuado para leer en R.

```
> x = read.table(file.choose(), header = T)
```

La función de estructura **str()** sirve para determinar el nombre de cada variable y su estructura.

Operaciones aritméticas

Puede usar R como una calculadora donde el asterisco (*) es el símbolo para multiplicación, y ˆ es el símbolo para exponenciación. Además, los dos puntos (**:**) son una función, y **2:8** crea un arreglo de números de 2 a 8, incluyendo estos valores. Por ejemplo,

```
> 11*3-8/2+sqrt(25)
[1]  34
```

donde la respuesta sigue al prompt [1].

```
> 3*(2:6)
[1]  6  9  12  15  18
```

También pueden aplicarse operaciones aritméticas a objetos como **x** y **y** los cuales en sí mismos son cadenas de números. Por ejemplo, cuando **x** = c(1, 9, 4, 0) y **y** = c(−2, 5,− 3, 7), se obtienen los siguientes resultados.

Función aritmética	Resultado
x + y	suma las entradas correspondientes en **x** y **y** −1, 14, 1, 7
x^2	eleva al cuadrado cada entrada en **x** 1, 81, 16, 0
sqrt(x)	obtiene la raíz cuadrada de cada entrada en **x** 1, 3, 2, 0

A continuación se describirán algunas funciones útiles para análisis estadístico.

Estadística descriptiva

Se ilustran las funciones para obtener estadísticos de resumen, usando los datos **xmpg** ingresados anteriormente.

Función	Resultado
mean(xmpg)	valor de la media muestral $\overline{x}$
var(xmpg)	calcula la varianza muestral s^2
sd(xmpg)	calcula la desviación estándar muestral s
median(xmpg)	valor de la mediana muestral
summary(xmpg)	mín Q_1 mediana Q_3 máx

Para resumir los datos del ejercicio 12.34, se sustituiría **xmpg** con el nombre **cost** del encabezado.

Distribuciones de probabilidad

La función para cada distribución de probabilidad puede tener uno de cuatro prefijos:

Prefijo	Significado
p	distribución de probabilidad acumulativa
q	cuantil de distribución
r	observaciones generadas aleatoriamente a partir de la distribución
d	probabilidad asignada a un valor posible, caso discreto; altura de la función de densidad, caso continuo

Las siguientes funciones pueden usarse en vez de las tablas de distribución:

Función	Resultado
dbinom(3,14,0.15)	$P[X = 3]$ binomial $n = 14$ y $p = 0.15$
pbinom(3,14,0.15)	$P[X \leq 3]$ binomial $n = 14$ y $p = 0.15$
ppois(3,2.1)	$P[X \leq 3]$ Poisson $\lambda = 2.1$

Cálculos de probabilidad normal

Función	Resultado
pnorm(1.63)	$P[Z \leq 1.63]$ con Z normal estándar
pnorm(9.23, 5.2, 1.7)	$P[X \leq 9.23]$ con X normal con media 5.2 y desviación estándar 1.7
qnorm(0.75, 5.2, 1.7)	$x_{0.75}$ donde $P[X \leq x_{0.75}] = 0.75$ cuando X es normal, con mediana 5.2 y desviación estándar 1.7
rnorm(5, 5.2, 1.7)	muestra x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de una distribución normal con media 5.2 y desviación estándar 1.7
qqnorm(xmpg,main='MPG')	gráfica de valores normales para datos mpg

Distribuciones de muestreo

Función	Resultado
pt (2.17, 8)	$P[t \leq 2.17]$ para t de Student con 8 g.l.
qt (0.96, 8)	$t_{0.04}$ para t de Student con 8 g.l.
pchisq (30.52, 27)	$P[\chi^2 \leq 30.52]$ para chi cuadrada con 27 g.l.
qchisq (0.99, 27)	$\chi^2_{0.01}$ para chi cuadrada con 27 g.l.
pf (3.68, 2, 19)	$P[F \leq 3.68]$ para F con (2, 19) g.l.
qf (0.90, 2, 19)	$F_{0.10}$ para F con (2, 19) g.l.

Intervalos de confianza y pruebas de medias

Los cálculos de muestra individual se ilustran con los datos en **x**. Los otros casos también usan datos en el objeto **y**. Pueden sustituirse por los nombres de variable en el encabezado.

Función	Resultado
t.test(x)	Prueba bilateral de una muestra de $H_0: \mu = 0$. Además, de confianza de 95%, predeterminado.
t.test(x,mu=20,alt="greater",conf.level =0.90)	Prueba de una muestra de $H_0: \mu = 20$ contra $H_1: \mu > 20$. Además, intervalo de confianza de 90%.
t.test(x,y,mu=15,alt="less",var.equal=T)	Prueba *t* de dos muestras de $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 15$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 15$, varianza conjunta. Además, intervalo de confianza de 95% para $\mu_1 - \mu_2$.
t.test(x,y,paired=T)	Prueba *t* pareadas de diferencia en media 0 contra alternativa bilateral. Además, intervalo de confianza de 95% para diferencia en media.

Inferencia acerca de proporciones

Se ilustra con los datos en el ejemplo de desmoronamiento del material de la sección 10.3.

```
> crumbled=c(41,27,22)
> intact=c(79,53,78)
```

Función	Resultado
prop.test(42,100,conf.level=0.90)	Intervalo de confianza de 90% para proporción cuando hay 42 éxitos en 100 ensayos. La prueba predeterminada es una prueba bilateral de $H_0: p = 0.5$ y usa corrección de continuidad.
chisq.test(data.frame(crumbled,intact))	Realiza la prueba χ^2.

Regresión

Los comandos de regresión se ilustran con los datos del ejercicio 11.78, donde y es daño, x_1 es peso(wt) y x_2 es distancia.

```
> xy = read.table ("11-78.txt", header = T)
> attach(xy)
```

Función	Resultado
summary(lm(damage ~ wt))	Regresa $y =$ daño en peso.
plot(lm(damage ~ wt))	También crea gráficos residuales.
summary(lm(damage ~ wt + distance))	Regresión múltiple de $y =$ daño sobre $x_1 =$ peso y $x_2 =$ distancia.

Análisis unilateral de varianza (*ANOVA*)

Los comandos se ilustran con los datos del ejercicio 12.9, a partir de un diseño completamente aleatorio. Después de leer los datos que tienen dos columnas con encabezados times y arrange

```
> y12.9= read.table(”12-9.txt”,header=T)
> attach(y12.9)
```

el comando

```
> anova(lm(times ~ arrange)
```

produce la tabla de ANOVA.

El análisis de varianza para el diseño factorial 3×2 para tiempo de elaboración de la página 394 puede analizarse con los siguientes pasos. Primero debe descargar la biblioteca *car*.

```
> library(car)
> cokdat = read.table(”C13coking.dat”,header=T,
      colClasses = c(”factor”, ”factor”, ”factor”, ”numeric”))
> print(cokdat)
> model = lm(Y   A + B + A:B + Rep, data = cokdat)
> Anova(model)
```

Para el análisis del diseño 2^3 de la página 419, se ilustra la creación del conjunto de datos y también el diseño.

```
> y = c(4.5,3.8,3.1,7.2,5.4,4.5,4.2,7.3,4.1,3.4,4.3,6.8,5.0,4.9,5.4,6.9)
> rate = rep(c(-1,1),8)
> additive = rep(c(-1,-1,1,1),4)
> nozzle = rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> cubeData = data.frame(rate, additive, nozzle, Rep, Y )
> print(cubeData)
> cubeModel = lm( Y   rate * additive * nozzle, data = cubeData)
> summary(cubeModel)
> Anova(cubeModel)
```

Hay muchas otras funciones que se aplican al material cubierto en este libro; no obstante, se remite al lector interesado a los sitios Web mencionados al comienzo de este apéndice. También puede escribir **help(stem)** donde *stem* se sustituye con muchas otras funciones.

RESPUESTAS A EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

CAPÍTULO 1

1.1 La *población* estadística podrían ser los valores de la calidad del aire para todos los vuelos con base en Estados Unidos durante el periodo de estudio. La *muestra* es las mediciones de los 158 vuelos.

1.3 *a*) Laptop; *c*) colección de todos los pesos de laptop.

1.5 unidad: disco duro; variable: distancia; población: distancias para dispositivos fabricados en una hora; muestra: distancias para los 40 dispositivos.

1.7 *a*) $\bar{x} = 214.67$; *b*) debajo de LCL.

CAPÍTULO 2

2.1 *a*) 150.0 170.0, 190.0, 210.0, 230.0, 250.0; *b*) 20.

2.9 *a*) 11.5, 20.5, 29.5, 38.5, 47.5, 56.5, 65.5; *b*) 9.

2.11 Las frecuencias acumuladas "menor que o igual a" son 0, 5, 16, 25, 43, 49, 50.

2.13 Las frecuencias acumuladas "menor que" son 0, 10, 20, 29, 40, 52, 62, 68, 72, 76, 77, 79, 80.

2.15 Las frecuencias acumuladas "menor que" son 0, 4, 17, 35, 60, 80, 94 y 100.

2.17 Las frecuencias acumuladas "o más" son 60, 45, 33, 22, 15, 7, 2 y 0.

2.19 No, porque se tiende a comparar áreas; el saco grande debería modificarse, de modo que su área se aproximadamente del doble que la del saco pequeño.

2.23

2	67 88 95
3	17 55 70 83 91
4	05 19 34 62
5	08 40
6	12

2.25

2	1 2
2	6 8
3	2 3 4 4
3	5 5 5 5 6 6 7 8 9
4	0 0 1 1 2 3 3 4
4	5 5 5 5 6 7 7 8 8 9
5	0 0 0 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4
5	5 5 5 6 6 6 7 7 8 9 9
6	0 0 0 1 1 1 2 2 2 3 4
6	5 5 5 7 7 8 8 8 9
7	0 0 2 3 3 4 4 4
7	5 6 6 7 8 9
8	0 2 2 4
8	5 8

2.27 *b*) Valor atípico alto. **2.29** *b*) Media.

2.31 *a*) $\bar{x} = -3$; *b*) $s = 2.94$; *c*) orificio muy pequeño en promedio.

2.33 *a*) $\bar{x} = 30.14$; *b*) No, existe un tendencia.

2.35 No, las ganancias totales solo son $525,000.

2.37 *a*) $\bar{x} = 0.3990$; *b*) $s = 0.1817$.

2.39 *a*) 8; *b*) 9.

2.41 $\bar{x} = 30.91$, $Q_1 = 30.4$, $Q_2 = 30.85$, $Q_3 = 31.2$.

2.45 *a*) $\bar{x} = 0.1673$; *b*) $s = 0.0832$; *c*) No hay gran diferencia.

2.47 $\bar{x} = 87.40$, $s = 161.47$.

2.49 $v = 27.76\%$. **2.53** *a*) 90; *b*) 5.00.

2.55 *a*) $Q_1 = 279.55$, $Q_3 = 327.22$ y el rango intercuartílico es 47.67; *b*) $Q_1 = 3.00$, $Q_3 = 6.80$.

2.57 *a*) 73.0; *b*) 42.08%.

2.59 *a*) $Q_1 = 1712$, $Q_2 = 1863$, $Q_3 = 2061$; *c*) $Q_1 = 69.5$, $Q_2 = 70.55$, $Q_3 = 71.80$.

2.61 *a*) Las frecuencias de clase son 1, 8, 19, 17, 9, 3 y 1.

2.63 *a*) $\bar{x} = 5.4835$ y $s = 0.1904$; *b*) la mediana es 5.46, $Q_1 = 5.34$ y $Q_3 = 5.63$; *c*) no hay tendencia evidente.

2.65 *a*) mediana = 0.40, máximo = 0.57, mínimo = 0.32 y el rango = 0.25; *b*) mediana = 0.51, máximo = 0.63, mínimo = 0.47 y el rango = 0.16.

2.67 *a*) $Q_1 = 18.0$, $Q_2 = 27.0$, $Q_3 = 30.0$; *b*) mínimo = 12, máximo = 48, rango = 36 y el rango intercuartílico = 12.0.

2.69 *a*) $Q_1 = 19$, $Q_2 = 28$, $Q_3 = 55$; *b*) mínimo = 12, máximo = 63, rango = 51 y el rango intercuartílico = 36.

2.73 *a*) $\bar{x} = 0.2441$; *b*) $s = 0.0036$; *c*) $v = 1.5\%$; *d*) el dispositivo más grande tiene $v = 17.9\%$ de modo que es relativamente más variable.

2.75 a) $Q_1 = 497.2$, $Q_2 = 602.0$, $Q_3 = 743.3$; *b*) 895.8.

2.77 No. **2.79** *b*) Mediana = 1 mayor que $\bar{x} = 10/11$.

CAPÍTULO 3

3.1 *b*) $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$,

$T = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$, $U = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

3.3 *a*) $R \cup U = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$es el evento de que, al menos, tantos ríos están contaminados como los lagos;

b) $R \cap T = \{(0, 0)\}$es el evento de que ninguno de los lagos o los ríos está contaminado;

c) $\overline{T} = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ es el evento de que, al menos, uno de los ríos está contaminado.

3.5 *a*) $A \cup B = \{2, 3, 4\}$ es el evento que trabajar en el auto es fácil, promedio o difícil; *b*) $A \cap B = \{3\}$es el evento de que tra-

bajar en el auto es promedio; *c*) $A \cup \overline{B} = \{1, 3, 4, 5\}$ es el evento de que trabajar en el auto no es fácil; *d*) $\overline{C} = \{1, 2, 3\}$ es el evento de que trabajar en el auto es muy fácil, fácil o promedio.

3.7 *b*) *B* es el evento de que están presentes 3 asistentes graduados, *C* es el evento de que están presentes tantos profesores como asistentes graduados, *D* es el evento que están presentes en conjunto 3 profesores o asistentes graduados. *c*) $C \cup D = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, es el evento de que cuando mucho están presentes 2 asistentes graduados; *d*) *B* y *D* son mutuamente excluyentes.

3.9 La región 1 representa el evento de que la veta contiene cobre y uranio; la región 2 representa el evento de que la veta contiene cobre pero no uranio; la región 3 representa el evento de que la veta contiene uranio pero no cobre; la región 4 representa el evento de que la veta no contiene ni uranio ni cobre.

3.11 *a*) La región 5 representa el evento de que los devanados son inadecuados, pero el tamaño del eje no es muy grande y las conexiones eléctricas son satisfactorias; *b*) las regiones 4 y 6 en conjunto representan el evento de que las conexiones eléctricas son insatisfactorias, pero los devanados son adecuados; *c*) las regiones 7 y 8 en conjunto representan el evento de que los devanados son adecuados y las conexiones eléctricas son satisfactorias; *d*) las regiones 1, 2, 3 y 5 en conjunto representan el evento de que los devanados son inadecuados.

3.17 72. **3.19** *a*) 90; *b*) 75.

3.21 720. **3.23** 105.

3.25 *a*) 55; *b*) 165. **3.27** 280.

3.29 *a*) 1/6; *b*) 1/18; *c*) 2/9; *d*) 1/18; *e*) 1/18; *f*) 1/9.

3.31 0.368. **3.33** 45.

3.35 *a*) Sí; *b*) no, la suma supera 1; *c*) no, $P(C)$ es negativo; *d*) no, la suma es menor que 1; *e*) sí.

3.37 *b*) 27/112, 45/112 y 5/14; *c*) 25/56, 5/16 y 27/112.

3.41 *a*) 0.71; *b*) 0.69; *c*) 0.26; *d*) 0.29.

3.43 *a*) 0.43; *b*) 0.67; *c*) 0.24; *d*) 0.59.

3.45 *a*) 15/32; *b*) 13/32; *c*) 5/32; *d*) 23/32; *e*) 8/32; *f*) 9/32.

3.47 *a*) 0.29; *b*) 0.18.

3.51 *a*) 4 a 3; *b*) 19 a 1 en contra; *c*) 4 a 1.

3.53 *a*) 0.60; *b*) $0.75 \leq p < 0.80$.

3.55 $P(I \mid D) = 2/3$; $P(I \mid \overline{D}) = 4/97$.

3.57 *a*) 62/85; *b*) 74/84; *c*) 29/51.

3.59 *a*) 0.2133 diferente, *b*) 0.36 diferente; *c*) 0.2258 diferente.

3.65 *a*) 33/59; *b*) 7/118; *c*) 1/243.

3.67 Sí.

3.69 *a*) 1/256; *b*) 1/648; *c*) 45/118.

3.71 0.734. **3.73** 0.068.

3.75 *a*) 0.60; *b*) 0.20; *c*) 0.70.

3.77 *a*) 0.686; *b*) 0.171; *c*) 0.0286.

3.79 *a*) 0.28; *b*) 0.04. **3.81** *a*) 0.09 = 27/300.

3.83 *a*) $\overline{A} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$ es el evento de que el vendedor no visitará a los 4 clientes;

b) $A \cup B = \{(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$ es el evento de que el vendedor visitará a los 4 clientes o más el primer día que en el segundo día;

c) $A \cap C = \{(1, 3), (0, 4)\}$ es el evento de que visitará a los 4 clientes pero cuando mucho uno en el primer día;

d) $\overline{A} \cap B = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$ es el evento de que visitará cuando mucho a 3 de los clientes y más en el primer día que en el segundo día.

3.87 21

3.89 *a*) 0.55; *b*) 0.20; *c*) 0.15; *d*) 0.80; *e*) no.

3.91 Hay una contradicción en su afirmación, pues total > 200.

3.95 *a*) 20/58; *b*) 8/58; *c*) 12/58; *d*) 27/58.

3.97 Es más probable la acción a propósito.

3.99 a) 0.74; *b*) 0.6923.

CAPÍTULO 4

4.1 1/12, 2/12, 3/12, 2/12 y 1/12.

4.3 *a*) Sí; *b*) no, suma menor que 1; *c*) no, $f(4)$ es negativa.

4.5 $k = 16/31$.

4.9 *a*) Éxito: hogar con televisor sintonizado en el discurso. Es probable que se sostenga.

4.11 *a*) Ensayos no independientes.

4.13 *a*) 0.3169; *b*) 0.1442; *c*) 0.0861; *d*) 0.0746; *e*) 0.4862; *f*) 0.7052.

4.15 27/128.

4.17 *a*) 0.2969; *b*) 0.0152; *c*) 0.2061.

4.19 *a*) 0.1501; *b*) 0.7338; *c*) 0.0982.

4.21 *a*) 0.9571; *b*) 0.7892; *c*) 0.5614; *d*) 0.3518.

4.23 *a*) 0.5, 0.5; *b*) 0, 0.5, 1.0.

4.25 *a*) 0.4032; *b*) 0.4536; *c*) 0.1432.

4.27 *a*) 0.15; *b*) 0.0625.

4.29 *a*) 0.4170; *b*) 0.1468.

4.33 $\sigma^2 = 1.0$. **4.35** $\sigma^2 = 1.8$.

4.37 a) $\mu = 2.8$ y $\sigma^2 = 0.84$.

4.39 *a*) $\sigma^2 = 1.25$.

4.41 a) $\mu = 338$ y $\sigma = 13$; *b*) $\mu = 120$ y $\sigma = 10$;

4.45 La probabilidad es mayor que o igual a 8/9.

4.51 0.0498, 0.1494, 0.2240, 0.2240, 0.1680, 0.1008, 0.0504, 0.0216, 0.0081, 0.0027.

4.53 *a*) 0.242; *b*) 0.087; c) 0.937.

4.55 *a*) 0.182; *b*) 0.857; *c*) 0.648.

4.57 0.007.

4.59 *a*) 0.981; *b*) 0.577; *c*) 0.978.

4.61 0.3010. **4.63** 0.0478.

4.65 *a*) 0.0388; *b*) 0.0015. **4.67** *a*) 0.216; *b*) 0.108.

4.73 0.117. **4.75** *b*) 0.195.

4.77 00-13, 14-41, 42-68, 69-86, 87-95, 96-99.

4.79 *a*) 0.04; b) 0.

4.81 *a*) 2.12; *b*) 0.9856; *c*) 0.9928

4.83 *a*) Sí; *b*) Sí; *c*) No, suma supera 1.

4.85 *a*) 0.1468; *b*) 0.1468. **4.87** *a*) 0.55; *b*) 0.40; *c*) 0.05.

4.89 *a*) 0.72; *b*) 0.72. **4.91** 0.2707.

4.93 Probabilidad de al menos 0.96.

4.95 0.5488.

4.97 *a*) 0000-2465, 2466-5917, 5918-8334, 8335-9462, 9463-9857, 9858-9968, 9969-9994, 9995-9999.

CAPÍTULO 5

5.3 *a*) 0.488; *b*) 0.056. **5.5** *a*) 0.02; *b*) 0.84.

5.7 *a*) 0.8889; *b*) 0.0225. **5.9** *a*) 0.707; *b*) 0.1339.

5.11 0.0916. **5.13** $\mu = 0.75$ y $\sigma^2 = 0.0375$.

5.15 $\mu = 2$ y σ^2 no existe. **5.17** 4.5 años.

5.19 *a*) 0.9599; *b*) 0.1056; *c*) 0.0197; *d*) 0.9656.

5.21 *a*) 2.37; *b*) 1.23; *c*) −0.37; *d*) −2.02; *e*) 1.81.

5.25 $\sigma = 10.93 = 9.2/0.842$. **5.27** *a*) 0.7580; *b*) 0.6578.

5.29 *a*) 0.9568; *b*) 0.7475; *c*) 0.7201.

5.31 83.15%. **5.33** $\mu = 2.984$.

5.35 *a*) 0.020; *b*) 0.003. **5.37** 0.1841.

5.39 0.0808.

5.45 $F(x) = 0$ para $x \le 0$, $F(x) = x$ para $0 < x < 1$ y $F(x) = 1$ para $x \ge 1$.

5.47 50%. **5.49** 0.2646.

5.51 *a*) 0.0807; *b*) 0.0960. **5.53** 0.496.

5.55 *a*) 0.049; *b*) 0.843.

5.57 No hay máximo relativo cuando $0 < \alpha < 1$; máximo relativo en $x = 0$ cuando $\alpha = 1$.

5.59 *a*) 18.1%; *b*) 36.8%. **5.61** $e^{-\alpha t}$.

5.65 *a*) $\mu = 0.2$; *b*) 0.3164. **5.67** 0.6321.

5.69 0.2057.

5.71 *a*) $\dfrac{\binom{2}{x_1}\binom{1}{x_2}\binom{2}{2-x_1-x_2}}{\binom{5}{2}}$ para $x_1 = 0, 1, 2$, $x_2 = 0$, 1 y $0 \le x_1 + x_2 \le 2$; *b*) 0.7; *c*) $f_1(0) = 0.3$, $f_1(1) = 0.6$, $f_1(2) = 0.1$; *d*) $f_1(0|0) = 1/6$, $f_1(1|0) = 4/6$, $f_1(2|0) = 1/6$.

5.73 *a*) 1/4; *b*) 1/24.

5.75 $F(x_1, x_2) = 0$ para $x_1 \le 0$ o bien, $x_2 \le 0$,
$= \frac{1}{4}x_1^2x_2^2$ para $0 < x_1 < 2$ y $0 < x_2 < 1$,
$= x_2^2$ para $0 < x_2 < 1$ y $x_1 \ge 2$,
$= \frac{1}{4}x_1^2$ para $0 < x_1 < 2$ y $x_1 > 2$, y $F(x_1, x_2) = 1$ para $x_1 \ge 2$ y $x_2 \ge 1$;
$F_1(x_1) = 0$ para $x_1 \le 0$, $F1(x_1) = \frac{1}{4}x_1^2$ para $0 < x_1 < 2$, y
$F_1(x_1) = 1$ para $x_1 \ge 2$;
$F_2(x_2) = 0$ para $x_2 \le 0$, $F_2(x_2) = x_2^2$ para $0 < x_2 < 1$, y
$F_2(x_2) = 1$ para $x_2 \ge 1$; son independientes.

5.77 $F(x, y) = 0$ para $x \le 0$ o bien, $y \le 0$,
$= \frac{3}{5}x^2y + \frac{2}{5}xy^3$ para $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$,
$= \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$ para $0 < x < 1$, y $y \ge 1$,
$= \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}y^3$ para $\underline{x} \ge 1$, y $0 < y < 1$, y $F(x, y) = 1$ para $x \ge 1$ y $y \ge 1$.

5.79 *a*) $f_1(x \mid y) = (x + y^2) / (5 + y^2)$ para $0 < x < 1$ y $f_1(x \mid y) = 0$ de otra forma; *b*) $f_1(x \mid \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(4x + 1)$ para $0 < x < 1$ y $f_1(x \mid y) = 0$ de otra forma; *c*) 11/18.

5.81 *a*) 1/3; *b*) $5/(6e) = 0.3066$.

5.83 *a*) 0.3264; *b*) 0.4712.

5.85 2.

5.87 $\mu = LW$ y $\sigma^2 = \frac{1}{12}(a^2W^2 + b^2L^2 + \frac{1}{12}a^2b^2)$.

5.89 *a*) 0; *b*) 10. **5.91** *a*) −6; *b*) 23.

5.93 *a*) 200; *b*) 60.

5.95 *a*) $0.25\,(1 + 2e^t + e^{2t}$; *b*) $E(X) = 1$ y $E(X^2) = 1.5$.

5.97 *a*) $(1 - t/2)^{-1}$; *b*) $E(X) = 0.5$ y $E(X^2) = 0.5$.

5.99 *b*) media = 6 y varianza = 97.

5.109 *a*) 0.1465; *b*) 0.3125.

5.111 *a*) 1; *b*) 0.25.

5.113 *a*) 0.4938; *b*) 0.1018; *c*) 0.2789; *d*) 0.9093.

5.115 *a*) 1.28; *b*) 3.09.

5.117 *a*) 0.9997; *b*) .0011.

5.121 $n = 25$

5.123 *a*) $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$ para $x > 0$ y media = 5. $f(y) = 0.2\,e^{-0.2y}$ para $y > 0$ y media = 5; *b*) 10.

5.125 *a*) −8; *b*) 127.

5.127 *a*) 0.0644; *b*) 0.8613.

CAPÍTULO 6

6.3 *b*) Es menos probable que respondan los graduados con ingresos bajos.

6.5 *a*) 21; *b*) 276.

6.7 *a*) $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 26/3$.

6.9 Las muestras son 1 y 1, 1 y 2, 1 y 3, 1 y 4, 2 y 1, 2 y 2 y 3, 2 y 4, 3 y 1, 3 y 2, 3 y 3, 3 y 4, 4 y 1, 4 y 2, 4 y 3, 4 y 4; las probabilidades de que $\bar{x}$ sea iguales a 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, o bien, 4 son 1/16, 1/8, 3/16, 1/4, 3/16, 1/8 y 1/16.

6.11 *a*) Se divide entre 2; *b*) se divide entre 3/2; *c*) se multiplica por 3; *d*) se multiplica por 4.

6.15 aproximadamente 0.141.

6.17 aproximadamente 0.111.

6.21 $t = 1.15$; dado que $t_{0.10} = 1.476$ para 5 grados de libertad, los datos fallan para rechazar la afirmación.

6.23 0.050. **6.25** 0.02.

6.27 0.2873. **6.31** t con 4 grados de libertad.

6.35 $\prod_{i=1}^{5}(1 - 2t)^{2i} = (1 - 2t)^{-30}$.

6.37 *b*) media = −8 y varianza = 89.

6.39 *b*) media = −27 y varianza = 57.

6.41 *b*) Binomial negativa $r = \sum_{i=0}^{n} r_i$ y probabilidad de éxito p.

6.43 $f(y) = (18\pi)^{-1/2}y^{-2/3}e^{-y^{2/3}}/2$ para $-\infty < y < \infty$.

6.45 $f(y) = ey\,e^{-e^y}$ para $-\infty < y < \infty$.

6.47 $f(y) = e^{-y}$ para $y > 0$.

6.49 $f(y) = \dfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}\dfrac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{2\alpha}}$ para $y > 0$.

6.51 *b*) No, los estudiantes de los estados con muchos participantes, por lo general los estados más grandes, tienen menos posibilidad.

6.53 *a*) 0.0476; *b*) 0.0065.

6.55 *a*) no mayor que 0.16; *b*) 0.0062.

6.57 0.9876. 6.59 0.01.

6.61 Las razones de los errores estándar son *a*) 0.707; *b*) 0.816; *c*) 2.0.

6.63 *b*) Autobuses y camiones tardan más tiempo en pasar por un punto fijo.

CAPÍTULO 7

7.1 $E = 2.045(819.35)/\sqrt{30} = 305.9$.

7.3 $E = 1.96(1.250)/\sqrt{52} = 0.3398$.

7.5 $E = 2.326(3.057)/\sqrt{45} = 1.0600$.

7.7 $E = 1.96(14, 054)/\sqrt{50} = 3{,}895.57$.

7.9 84.7%. **7.11** $n = 208$.

7.13 $0.816 < \mu < 1.854$. **7.15** $107.59 < \mu < 120.41$.

7.17 $1{,}791.7 < \mu < 2{,}025.8$. **7.19** $30.35 < \mu < 31.47$.

7.21 *a*) $3.28 < \mu < 3.72$; *b*) no se puede decir μ desconocida; *c*) aproximadamente 90%.

7.23 *a*) $6.44 < \mu < 7.96$; *c*) normal.

7.25 *a*) $E = 22.14$; *b*) $E = 4.46$. **7.31** *a*) 0.8; *b*) 0.64.

7.33 *a*) $\hat{\lambda} = 1.5$; *b*) 0.0498.

7.35 *a*) $\hat{\mu} = 114$ y $\sigma = 7.860$; *b*) 0.0689.

7.37 *a*) $\hat{\beta} = \overline{X}$; *b*) $e^{-1/\overline{x}}$.

7.39 *a*) $H_0{:}\mu = 2$ y H_1: $\mu < 2$; *b*) tipo II; *c*) tipo I.

7.41 *a*) $H_0{:}\mu = 56$ y H_1: $\mu = 56$; *b*) tipo II; *c*) tipo I.

7.43 *a*) inseguro; *b*) 0.01 pero preferiría incluso menor.

7.45 tipo I; tipo II. **7.47** *a*) 0.1056; *b*) 0.1056.

7.49 Rechazar cuando $\overline{x} < 95.58$.

7.51 *a*) $\mu \neq 1{,}250$; *b*) $\mu < 1{,}250$; *c*) $\mu > 1{,}250$.

7.53 *a*) $T = -1.35$; no se puede rechazar H_0; tipo II.

7.55 *a*) $Z = -2.05$; rechazar H_0; *b*) tipo I.

7.57 *a*) $T = 2.52$; rechazar H_0; tipo I.

7.59 $Z = 1.76$; rechazar H_0. **7.61** $T = 3.652$; rechazar H_0.

7.63 $T = 5.66$; rechazar H_0.

7.65 *a*) $Z = 2.02$; rechazar H_0; *b*) $T = 3.82$; rechazar H_0.

7.67 *a*) Rechazar H_0; *b*) no rechazar H_0; *c*) igual.

7.69 *a*) No rechazar H_0; *b*) rechazar H_0; *c*) igual.

7.71 *a*) $\gamma(77) = 0.523$; *b*) 0.491.

7.77 $70.224 < \mu < 71.169$. **7.79** $24.92 < \mu < 27.88$.

7.81 $0.992 < \mu < 1.048$. **7.83** $n = 11$.

7.85 *a*) nueva divisora es $z = 2.210$; *b*) 0.9999, 0.9984, 0.9864, 0.9296, 0.7689, 0.50, 0.2311, 0.0704, 0.0136, 0.0016, 0.0001.

7.87 *a*) $1.530 < \mu < 1.770$

CAPITULO 8

8.1 $z = -2.15$; rechazar H_0.

8.3 $z = 4.69$; rechazar H_0.

8.5 *a*) $z = -2.28$; rechazar H_0. *b*) 0.05.

8.7 *b*) 7.333.

8.9 $t = 0.96$; no se puede rechazar H_0.

8.11 $t = 1.03$; no se puede rechazar H_0.

8.13 *a*) $t' = -1.30$ con 13 grados de libertad; no se puede rechazar H_0; *b*) $t' = -0.145$ con 8 grados de libertad; no se puede rechazar H_0.

8.15 $t = 1.58$ con 4 grados de libertad; no se puede rechazar H_0.

8.17 *a*) $0.117 < \delta < 1.283$; *b*) $t = 2.35$; rechazar H_0.

8.19 $0.100 < \delta < 1.300$.

8.21 $t = 4.06$ con 15 grados de libertad; rechazar H_0.

8.23 *a*) Seleccione 3 elevadores mediante extracción aleatoria; *b*) lance la moneda para cada uno de los 6 elevadores. Si es cara, el elevador obtiene el primer tablero de circuito modificado. Después de algún tiempo, se sustituye por el tablero original. Si es cruz, el elevador obtiene el segundo tablero de circuito modificado.

8.25 Seleccione al azar 25 autos e instale el dispositivo modificado de contaminación de aire. Los otros 25 automóviles usan el dispositivo actual.

8.27 $-0.181 < \delta < -0.036$.

8.29 $t = 2.082$ con 8 grados de libertad; no rechazar H_0.

8.31 n debería ser 25.

8.33 *a*) Seleccione al azar 10 autos para usar las bujías modificadas. Los otros 10 automóviles usan las bujías regulares; *b*) seleccione 7 especímenes extrayendo al azar para probar en el horno antiguo.

CAPÍTULO 9

9.1 *a*) $s = 8.34$; *b*) 8.75.

9.3 *a*) 1.787; *b*) 2.144.

9.5 $0.0067 < \sigma < 0.4831$.

9.7 $\chi^2 = 5.832$; no se puede rechazar H_0.

9.9 $\chi^2 = 122.5$; rechazar H_0.

9.11 $\chi^2 = 10.89$; no se puede rechazar H_0.

9.13 $F = 1.496$; no se puede rechazar H_0.

9.15 $F = 2.42$; no se puede rechazar H_0.

9.17 $3.42 < \sigma < 16.39$.

9.19 $\chi^2 = 72.22$; rechazar H_0.

9.21 $F = 1.81$; no se puede rechazar H_0.

CAPÍTULO 10

10.1 $0.352 < p < 0.488$. **10.3** $0.514 < p < 0.642$.

10.5 $0.090 < p < 0.244$. **10.7** 90.9%.

10.9 $n = 267$. **10.11** $n = 1{,}354$.

10.13 $0.563 < p < 0.943$. **10.17** $0.12 < p < 0.14$.

10.19 $z = 2.19$; rechazar H_0.

10.21 $z = -1.83$; no se puede rechazar H_0.

10.23 $z = 1.489$; no se puede rechazar H_0.

10.25 $z = -1.886$; rechazar H_0. **10.27** $\chi^2 = 2.37$; rechazar H_0.

10.29 $\chi^2 = 9.39$; rechazar H_0.

10.33 $-0.005 < p^1 - p^2 < -0.145$.

10.35 $0.170 < p^1 - p^2 < 0.374$.

10.39 $\chi^2 = 15.168$; rechazar H_0.

10.41 $\chi^2 = 54.328$; rechazar H_0.

10.43 $\chi^2 = 0.657$; no se puede rechazar H_0.

10.45 $\chi 2 = 7.91$; no se puede rechazar H_0.

10.49 $z = -0.50$; no se puede rechazar H_0.

10.51 $z = -0.99$; no se puede rechazar H_0.

10.53 $z = 2.00$; no se puede rechazar H_0 en $\alpha = 0.01$.

10.55 $z = 0.807$; no se puede rechazar H_0.

10.57 $z = -1.746$; rechazar H_0.

10.59 *a*) $\chi^2 = 8.190$; rechazar H_0;
b) $0.256 < p_1 < 0.611$; $0.108 < p_2 < 0.425$; $0.461 < p_2 < 0.806$.

10.61 $\chi^2 = 10.481$; no se puede rechazar H_0.

10.63 $\chi^2 = 47.862$; rechazar H_0.

CAPÍTULO 11

11.1 *b*) Se usa extrapolación más allá de valores x.

11.3 *b*) $\hat{y} = 39.05 + 0.764x$; $\hat{y} = 65.8$.

11.5 *a*) $11.87 < \beta < 17.11$; *b*) 39.97 a 63.71.

11.7 $t = -1.212$; no se puede rechazar H_0.

11.9 *a*) $\hat{y} = 0.0 + 2.0x$; *b*) $\hat{y} = 7.0$.

11.11 $t = 2.236$; no se puede rechazar H_0.

11.13 7.23 a 12.39. **11.15** *a*) $\Sigma xy/\Sigma x^2$; *b*) 14.75.

11.17 $2.72 < \alpha < 33.08$.

11.19 *a*) $\hat{y} = 3.39 + 0.679x$; $\hat{y} = 6.11$; *b*) $\hat{y} = 2.95 + 0.242x$; $\hat{y} = 5.61$.

11.23 a) $\hat{y} = 87.9 + 2.46x$; *b*) $t = 9.68$; rechazar H_0: $\beta = 0$;
c) (325.65, 342.98); *d*) tendencia contra orden.

11.25 *b*) $\log_{10} \hat{y} = 4.842 + 0.0604x$ o bien, $y = 69{,}502.4(1.149)^x$; *c*) 1,122,018.

11.27 44.86.

11.29 $\hat{y} = \exp[\exp(0.000041x + 1.21)]$.

11.31 $\hat{\alpha} = 0.240$.

11.33 *a*) $t = -2.28$; no se puede rechazar $\beta_1 = 0$; *b*) $F = 38.59$; rechazar $\beta_2 = 0$.

11.37 $\hat{y} = 64.1$.

11.39 $\hat{y} = 2.266 + 0.225x_1 + 0.0623x_2$; $y = 8.37$.

11.43 *a*) ligero aumento en varianza; *b*) patrón con forma en U.

11.45 Una seria violación, tendencia temporal.

11.47 No; tamaño de la población.

11.49 $z = 4.89$; rechazar H_0: $\rho = 0$.

11.51 $z = 5.15$; rechazar H_0: $\rho = 0$.

11.53 $0.717 < \rho < 0.976$. **11.55** $r = 0.810$.

11.57 $Z = -1.120$; no se puede rechazar H_0: $\rho = -0.4$.

11.61 *a*) 2,812.4; *b*) 233.9; *c*) 0.958.

11.63 $r = 0.738$.

11.65 *a*) $\hat{y} = -10 + 20x$; *b*) 80; *c*) el modelo quizá no se sostenga afuera del rango experimental.

11.67 $t = 3.35$, rechazar H_0: $\beta = 5$.

11.69 *a*) $\hat{y} = 20.4 - 1.80x$; *b*) $t = -7.79$; rechazar H_0: $\beta = 0$;
c) (−4.12, 12.52); *d*) fuera de rango.

11.71 $r^2 = 0.953$.

11.73 0.619 ± 0.427 o bien, $192 < \alpha < 1.046$.

11.75 $\hat{\gamma} = 1.499$. **11.77** $\hat{\tau} = 0.9284$.

11.79 *a*) 3.99 a 8.01 horas; *b*) 1.07 a 10.93 horas.

11.81 La primera relación lineal es el doble de fuerte.

11.83 *a*) $0.446 < \rho < 0.923$; *b*) $-0.797 < \rho < -0.346$;
c) $-0.173 < \rho < 0.476$.

11.85 *a*) $y = -0.0206 + 0.462x$; *b*) $0.43 < \beta < 0.50$;
c) $t = -0.32$, no se puede rechazar H_0; *d*) La varianza parece aumentar un poco con x.

CAPÍTULO 12

12.5 $F = 0.68$, que no es significativo en el nivel 0.01

12.7 *a*) $SS(Tr) = 204$, con 3 grados de libertad; $SSE = 34$, con 11 grados de libertad; $SST = 238$, con 14 grados de libertad. *b*) $F = 22.0$, significativo en el nivel 0.05.

12.9 $F = 11.3$, significativo en el nivel 0.01.

12.11 $F = 15.7$, significativo en el nivel 0.05.

12.17 *a*) Para marcas, $F = 1.047$. *b*) $t = -1.023$.

12.19 *a*) $b = 4$, $SS(Tr) = 56$. *b*) Para tratamientos, $F = 5.25$, significativo en el nivel 0.05.

12.21 Para técnicos, $F = 0.64$, que no es significativo en el nivel 0.01; para días, $F = 0.77$, que no es significativo en el nivel 0.01.

12.23 *b*) $SS(Tr) = 70$ con 3 grados de libertad; $SS(Bl) = 136$, con 4 grados de libertad; $SSE = 66$, con 12 grados de libertad; $SST = 272$, con 19 grados de libertad. *c*) Para tratamientos, $F = 4.24$, significativo en el nivel 0.05.

12.25 $F = 1.95$, que no es significativo en el nivel 0.05.

12.27 Para máquinas, $F = 0.064$, que no es significativo en el nivel 0.05; para trabajadores, $F = 1.346$, que no es significativo en el nivel 0.05; para repeticiones, $F = 6.217$, significativo en el nivel 0.05.

12.31

Tr 1	*Tr* 4	*Tr* 3	*Tr* 2
8	9	10	13

12.33 Conjunto 1 − conjunto 2: -14 ± 8.7; conjunto 1 – conjunto 2: -4 ± 8.7; conjunto 2 − conjunto 3: 10 ± 8.7.

12.35 *a*)

Hilo	Hilo 5	Hilo 3	Hilo 4	Hilo 2
20.675	20.9	23.525	23.7	25.65

b) $\alpha = 0.05, 0.05/(5 \cdot 4) = .0025$, $\mu_2 - \mu_1$: 4.975 ± 2.238 con los mismos ± 2.238 aplicándose a todos los pares de medias.

12.37 $F = 8.97$, significativo en el nivel 0.05, $\delta = 0.50$.

12.39 Para diseños de pista, $F = 6.44$, significativo en el nivel 0.01. La estimación del efecto de uso sobre la resistencia a la rotura es 0.39.

12.43 $F = 2.80$, que no es significativo en el nivel 0.05.

12.45 *b*) $SS(Tr) = 56$, con 2 grados de libertad, $SS(Bl) = 138$, con 3 grados de libertad; $SSE = 32$, con 6 grados de libertad; $SST = 226$, con 11 grados de libertad. *c*) Para tratamientos, $F = 5.25$, significativo en el nivel 0.05; para bloques, $F = 8.63$, significativo en el nivel 0.05.

12.47 *a*) Para sitios, $F = 101.75$, significativo en el nivel 0.05. *b*) Para agencias, $F = 4.84$ significativo en el nivel 0.05.

12.49 *a*) Para métodos de reconstrucción, $F = 1.80$, que no es significativo en el nivel 0.05. *b*) Existe una diferencia significativa cuando las respuestas se ajustan para la edad covariada.

12.51 *a*) Para tratamientos de superficie, $F = 10.65$, significativo en el nivel 0.05. *b*) Ambos tratamientos de prueba son significativos. Pero el coeficiente de volumen de tráfico es significativo y el valor P es aproximadamente la mitad del valor para el análisis de varianza.

CAPÍTULO 13

13.1 Los efectos significativos son temperatura ($F = 11.4$, $\alpha = 0.01$), concentración ($F = 47.7$, $\alpha = 0.01$) y su interacción ($F = 3.8$, $\alpha = 0.05$). Condiciones óptimas para reflectividad son concentración de sulfonas a 10 gramos por litro y temperatura de baño a 75 °F. El intervalo de confianza de 95% para reflectividad es de 37.32 a 46.02.

13.3 Para detergentes, $F = 0.05$, que no es significativo en el nivel 0.05; para motores, $F = 6.89$, significativo en el nivel 0.05; para interacción, $F = 0.81$, que no es significativo en el nivel 0.05.

13.5 Para flujo de fusión, $F = 8.65$, significativo en el nivel 0.01; para contenido de filtro, $F = 34.82$, significativo en el nivel 0.001; para interacción, $F = 3.99$, significativo en el nivel 0.05; para repeticiones, $F = 0.74$, que no es significativo en el nivel 0.05. Una tabla bidireccional de medias ofrece el resumen.

13.7 Los efectos significativos en el nivel 0.01 son preparación de espécimen (factor C, $F = 12.67$) y temperatura de giro (factor D, $F = 86.51$). Ningún otro efecto es significativo en el nivel 0.05. los valores F para ubicaciones de lingote (factor A) y posiciones de loza (factor B) son 0.56 y 0.0008, respectivamente. Para interacciones bifactoriales *AB, AC, AD, BC, BD* y *CD*, los correspondientes valores F son 0.90, 1.12, 1.20, 1.04, 0.09 y 0.98, respectivamente. Los valores F para las interacciones trifactoriales *ABC, ABD, ACD* y *BCD* son 0.28, 0.53, 1.76 y 0.27, respectivamente. El valor F para la interacción *ABCD* es 0.68.

13.11 *a*) $SST = 110.4375$, $SS(Tr) = 103.9375$, $SS(\text{Rep}) = 1.5625$, $SSE = 4.9375$; *b*) $[A] = -1$, $[B] = -13$, $[C] = -25$, $[AB] = 3$, $[AC] = 3$, $[BC] = -29$, $[ABC] = 3$; *c*) $SSA = 0.0625$, $SSB = 10.5625$, $SSC = 39.0625$, $SS(AB) = 0.5625$, $SS(AC) = 0.5625$, $SS(BC) = 52.5625$, $SS(ABC) = 0.5625$; *e*) B, C y BC son significativas en el nivel 0.01 con valores F correspondientes de 15.0, 55.4 y 74.5.

13.13 El efecto de replicación es significativo en el nivel 0.01 con un valor F de 9.1. El efecto principal B y la interacción trifactorial *ABC* son significativos en el nivel 0.05, con correspondientes valores F de 8.1 y 5.5, respectivamente. Ningún otro efecto es significativo en el nivel 0.05.

13.21 *a*) $SSE = SST - SS(Tr) = 138 - 118 = 20$, con 4 grados de libertad. $MSE = 5$.

13.23 Los intervalos de confianza de 95% para los efectos A, B y la interacción AB son 7 ± 9.8, 3 ± 9.8 y -1 ± 9.8; respectivamente. Todos los intervalos de confianza cubren cero.

13.27 Los intervalos de confianza de 95% para viscosidad de aceite, temperatura y la interacción viscosidad de aceite × aditivo son $1.2 \pm .39$, $-.9 \pm .39$, $.4 \pm .39$, respectivamente. Los intervalos de confianza de 95% para todos los demás efectos cubren cero. Conclusión: 1. cambiar el nivel de temperatura de bajo a alto disminuye el desgaste del motor; 2. es necesaria una tabla de medias viscosidad de aceite × aditivo para resumir.

13.29 Para la tasa, $F = 20.17$, significativo en el nivel 0.01; para aditivo, $F = 24.00$, significativo en el nivel 0.01; para boquilla, $F = 10.67$, significativo en el nivel 0.05, y para la interacción tasa × aditivo, $F = 48.17$, significativo en el nivel 0.01.

13.31 $\hat{y} = 52.5417 + 0.0798\,x_1 + 0.6521\,x_2 - 0.0147\,x_1^2 - 0.0037\,x_2^2 + 0.0073\,x_1\,x_2$.

13.33 Sí; en la esquina inferior derecha.

13.35 *a*) Bloque 1: *a*, *b*, *c*, *abc*, *d*, *abd*, *acd*, *bcd*;

Bloque 2: 1, *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*, *abcd*;

b) Bloque 1: 1, *bc*, *abd*, *acd*;

Bloque 2: *a*, *abc*, *bd*, *cd*;

Bloque 3: *b*, *c*, *ad*, *abcd*;

Bloque 4: *ab*, *ac*, *d*, *bcd*.

13.37 Los efectos principales B y C son significativos en el nivel 0.01, con valores F de 12.0 y 27.9; la interacción AD es significativa en el nivel 0.05, con un valor F de 8.1; use la combinación de medicamentos A, B y C.

13.41 1, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *a f*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *d f*, *ef*, *cdef*, *bdef*, *bcef*, *bcd f*, *bcde*, *adef*, *acef*, *acd f*, *acde*, *abef*, *abd f*, *abde*, *abcf*, *abce*, *abcd* y *abcdef* . Cada efecto recibe alias con su interacción generalizada con *ABCDEF*.

13.43 *a*) 1, *a f*, *bf*, *ab*, *cf*, *ac*, *bc*, *abcf*, *d f*, *ad*, *bd*, *abd f*, *cd*, *acd f*, *bcd f*, *abcd*, *ef*, *ae*, *be*, *abef*, *ce*, *acef*, *bcef*, *abce*, *de*, *adef*, *bdef*, *abde*, *cdef*, *acde*, *bcde*, *abcdef* .

13.47 La media replicación requerida incluye combinaciones de tratamiento 1, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd* y *abcd*. El MSE es 32.896, con 4 grados de libertad. Ningún efecto es significativo en el nivel 0.05. Los valores F son 1.26 para $A = BCD$, 1.32 para $B = ACD$, 3.02 para $C = ABD$, 5.32 para $D = ABC$, 0.04 para $AB = CD$, 0.06 para $AC = BD$ y 0.46 para $BC = AD$.

13.49 *a*) Para tratamientos, $F = 97.3$, significativo en el nivel 0.01; *c*) los efectos significativos en el nivel 0.01 son ablandadores ($F = 486.4$), tiempos de cocción ($F = 51.4$), temperatu-

ra de cocción ($F = 28.5$) y la interacción ablandador × tiempo ($F = 6.0$).

13.51 La interacción *AB* es significativa en el nivel 0.01, con un valor *F* de 19.0. Ningún otro efecto es significativo en el nivel 0.05.

13.53 Cambiar la temperatura o el pH o ambos de bajo a alto aumenta la producción de manera sustancial. Los intervalos de confianza de 95% para los factores *A*, *B* y la interacción *AB* son 5.6 a 11.4, 0.6 a 6.4 y −4.4 a 1.4, respectivamente.

13.55 El factor B es enormemente significativo, 13.3 ± 0.598. *A* y *AC* también son distintos de cero.

13.57 Los efectos significativos en el nivel 0.05 son *A* y *B*, con valores *F* 45.63 y 7.74, respectivamente.

13.59 El número más grande de bloques en los que uno puede realizar un experimento 2^6 factorial sin confundir algún efecto principal es 32. Por ejemplo, podría confundir sobre *AB*, *BC*, *CD*, *DE* y *EF*.

13.61 *a*) Bloque 1: *bc*, *abd*, *acd*, *abe*, *ace*, *de*, *bcde*;

Bloque 2: *ab*, *ac*, *d*, *bcd*, *e*, *bce*, *abde*, *acde*;

Bloque 3: *b*, *c*, *ad*, *abcd*, *ae*, *abce*, *bde*, *cde*;

Bloque 4: *a*, *abc*, *bd*, *cd*, *be*, *ce*, *ade*, *abcde*.

b) El *SSE* intrabloque es igual a 401.875; *A* y *E* son significativos en el nivel 0.01, con valores *F* de 12.7 y 17.3; *B*, *C*, *AD* y *ACD* son significativos en el nivel 0.05, con valores *F* de 5.6, 6.0, 6.3 y 4.7.

13.63 Para el factor A, $F = 72.97$, enormemente significativo. Los otros dos efectos principales también son significativos.

CAPÍTULO 14

14.1 $P(10 \text{ o más}) = 0.2272$; no se puede rechazar H_0.

14.3 $z = -4.02$ (al usar corrección de continuidad); rechazar H_0.

14.5 $z = 2.92$; la diferencia es significativa.

14.7 $z = 1.62$; no se puede rechazar H_0.

14.9 $H = 26.0$; las poblaciones no son idénticas.

14.11 $z = -0.244$; no se puede rechazar H_0.

14.13 $z = -4.00$; rechazar H_0.

14.15 La diferencia máxima es de aproximadamente 0.26; no se puede rechazar H_0.

14.17 $z = -1.814$; rechazar H_0.

14.19 $H = 0.904$; no se puede rechazar H_0.

14.21 $z = -1.797$; rechazar H_0.

14.23 $W_1 = 25$ de modo que $U_1 = 19$; rechazar H_0.

14.25 $z = -2.24$; rechazar H_0.

CAPÍTULO 15

15.1 *a*) Línea central = 0.150, *UCL* = 0.153, *LCL* = 0.147; *b*) Línea central = 0.005, *UCL* = 0.010, *LCL* = 0; *c*) *x*: octavo, decimosexto y decimoséptimo valores muestrales fuera de los límites; *R*: todos los valores muestrales dentro de los límites.

15.3 *a*) Línea central = 48.1, *UCL* = 50.3, *LCL* = 46.0; *b*) Línea central = 2.95, *UCL* = 6.7, *LCL* = 0; *c*) media de proceso fuera de control, variablidad del proceso en control; *d*) $z = -2.07$, hay una tendencia; *e*) no, el proceso no está en control.

15.5 *a*) *x*: Línea central = 21.7, *UCL* = 25.2, *LCL* = 18.2; σ: línea central = 1.05, *UCL* = 3.74, *LCL* = 0; *b*) sí, el proceso está en control. Para el gráfico σ, decimoséptimo punto arriba del límite.

15.7 Línea central = 0.0017, *UCL* = 0.0042, *LCL* = 0.

15.9 *a*) Línea central = 0.037, *UCL* = 0.094, *LCL* = 0.

15.11 Sí, línea central para gráfico *c* es 4.9,*UCL* = 11.6 y *LCL* = 0.

15.13 Es posible afirmar con 95% de confianza que el 99% de las piezas tendrán límite elástico entre 36,897 y 68,703 psi.

15.15 *a*) 0.1063 ± 0.0008; *b*) 0.1063 ± 0.0001.

15.17 *a*) Línea central = 4.1, *UCL* = 4.19, *LCL* = 4.01; *b*) línea central = 0.16, *UCL* = 0.25, *LCL* = 0; *c*) *x*: muchos valores muestrales están fuera de los límites; *R*: sexto valor muestral fuera de los límites.

15.19 Línea central = 0.02, *UCL* = 0,050, *LCL* = 0. El estándar no se satisface.

15.21 *a*) *UCL* = 3.48, *LCL* = 0; *b*) todas las secciones de 10 pies están bajo control, excepto la decimonovena sección, que está fuera de los límites.

15.23 Es posible afirmar con 95% de confianza que 90% de los tiempos entre peticiones estará dentro de 890 y 54,203 microsegundos.

15.25 *b*) $L = 186.87$; *c*) los datos de resistencia del cartón parecen haberse tomado de una distribución normal.

15.27 *a*) 1.515; *b*) 1.45.

CAPÍTULO 16

16.1 $R = 0.9936$.

16.3 $R = 0.9983$.

16.5 *a*)

$$f(t) = \begin{cases} \beta(1 - t/\alpha)\exp[-\beta(t - t^2/(2\alpha))] & \text{para } 0 < t < \alpha \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-\beta(t - t^2/(2\alpha))] & \text{para } 0 < t < \alpha \\ 1 - \exp[-\alpha\beta/2] & \text{para } t > \alpha \end{cases}$$

16.7 *a*) 0.6703; *b*) 0.6703.

16.9 0.0106.

16.11 *a*) $3{,}253.1 < \mu < 38{,}005.6$; *b*) $T_r = 40{,}970 < 45{,}767.5$; no se puede rechazar H_0.

16.13 *a*) $254.9 < \mu < 1{,}182.8$; *b*) $T_r = 3{,}329$ y $1{,}642.7 < Tr < 5{,}92.3$; no se puede rechazar H_0.

16.17 287,156.8.

16.19 0.8758.

16.23 *a*) 0.6753; *b*) 0.4066.

16.25 627,197.5.

16.27 0.9520.

16.29 *a*) 0.6667; *b*) 0.50; *c*) 0.9977.

ÍNDICE ANALÍTICO

A
Aleatoriedad, 264, 355
Alias, 438
Alternativa
  bilateral, 225
  unilateral, 225
Análisis
  de correlación, 335
  de covarianza, 382
  de regresión
    estimadores de mínimos cuadrados, 304
    inferencia concerniente a las β, 311, 328
    método de mínimos cuadrados, 303
      residuales, 304
    suma de cuadrados residual y, 310
    verificación de lo adecuado del modelo, 229
  de superficie de respuesta, 326
  de varianza
    diseño completamente al azar, 357
    diseño de bloques al azar, 371
    experimento factorial bidireccional, 391
    experimento multifactorial, 399
    intrabloque, 436
  exploratorio de datos, 22
Aseguramiento de la calidad, 463
Asimetría, 93
Axiomas de probabilidad, 58, 60

B
Bloques, 356, 423

C
Censurados, tiempos de vida, 498
Clase(s), 14
  convención de puntos extremo, 15
  frecuencia de, 15
  fronteras de, 16
  intervalo de, 16
  límites de, 14
  marca de, 16
Clasificación
  bidireccional, 371
  unidireccional, 357
Coeficiente
  binomial, 87
  de correlación múltiple, 345
  de variación, 28
Combinación, 52
Comparaciones múltiples, 378
  método de Bonferroni, 378
  prueba de rango múltiple, 378
Complemento, 47
Concepto clásico de la probabilidad, 55
Confiabilidad(es), 3, 487
  ley de productos de, 488
Confianza, 208
  grado de, 210
  intervalo de, 210
Confusión(es), 355, 424, 433
Conjunto(s), 46
  función de, 57
  vacío, 46
Consistencia de probabilidades, 66
Contraste, definición de, 438
Control estadístico, 470
Convención de puntos extremos, 15
Corrección de continuidad, 131
Correlación
  coeficiente de
  de rango de Spearman, 453
    muestral, 335
    poblacional, 340
  múltiple, 345
Covarianza, 152
Cuadrado medio
  dentro de muestras, 361
  entre muestras, 361
Cuartil, 29
Curtosis, 99
Curva característica de operación (co), 238
Cusum
  bilateral de Crosier, 475
  gráfico de, 475

D
Datos brutos, 34
Defecto, 476
Defectuoso(s), 476
Definición de contraste, 438
Densidad
  condicional, 150
  conjunta, 147
  de probabilidad
    condicional, 150
    conjunta, 147
    normal, 125
  marginal, 149
  marginal conjunta, 149
  normal, 125
Desviación estándar
  de densidad de probabilidad, 124
  de distribución de probabilidad, 97
  muestral, 28
Diagrama, *Véase también* Gráfico
  de árbol, 49
  de caja, 31
    modificado, 31
  de causa y efecto, 465
  de dispersión, 302
  de Pareto, 12, 464
  de puntos, 13
  de Venn, 47
Diferencias pareadas, 259
Diseño
  completamente al azar, 357
  de bloque(s)
    al azar, 371
    incompleto, 433
  experimental, 246, 354
Distribución
  acumulada
    conjunta, 148
    empírica, 24
    muestra de, 17
  beta, 141
  binomial, 86
    aproximación de Poisson, 105
    aproximación normal, 133
    negativa, 109
  categórica, 14
  con sesgo, 89
    negativo, 89
    positivo, 89
  condicional, 146
  chi (*ji*) cuadrada, 189
  de frecuencia, 14
  de Poisson, 104
  de probabilidad, 83
    condicional, 146
    conjunta, 112, 145, 147
    marginal, 146
  de tiempo de falla, 489
    de Weibull, 497
    exponencial, 491
  de Weibull, 142, 497
  exponencial, 140, 491
  F, 190
    relación con *t*, 193
    representación de, 193
  gamma, 138
  geométrica, 109
  hipergeométrica, 89
  logarítmica normal, 136
  muestral, 180
    método de función generadora de momento, 195
    relación de distribución *F* con t^2, 193
    representación de variable aleatoria chi cuadrada, 192
    representación de variable aleatoria *F*, 193
    representación de variable aleatoria *t*, 192
    teórica, 180
  multinominal, 111
  normal, 125
    bivariada, 340

circular, 157
estándar, 126
numérica, 14
porcentual, 17
sesgada, 89
simétrica, 88
t, 187
de Student, 187, 200
relación con *F*, 193
representación de, 192
tiempo de falla, 489
uniforme, 135, 179
discreta, 179
Duplicación (réplica), 377
cuarta, 437
factorial, 437

E

Ecuación modelo, 361
para experimento
para experimento bifactorial, 392
trifactorial, 400
factorial 2^3, 410
Ecuaciones normales, 308, 324
Efecto(s), 361, 400
principales, 400
total, 411
Enfoque clásico de la estadística, 2
Ensayos
de Bernoulli, 85
repetidos, 85
Enunciado de propósito, 6
Error(es)
de interbloque, 436
estándar
de la estimación (estimado), 310, 204
de la media, 183
máximo de estimación, 207, 281
probable de la media, 186
suma de cuadrados del, 304
tipo I y tipo II, 227
Espacio muestral, 45
continuo, 46
discreto, 46
finito, 46
Esperanza, 151
función de variable aleatoria, 151
función de varias variables aleatorias, 152
Estadística, 2
descriptiva, 2
enfoque clásico de la, 2
Estadístico, 178
definición de, 178
distribución muestral, 180, 185
Z de dos muestras, 247
Estimación
del intervalo, 209
puntual, 204
de media, 205
de proporción, 278
Estimador(es)
conjunto, 252
de varianza, 252
de máxima verosimilitud, 217
de Bernoulli, 217
normal, 220
para la varianza, 219
Poisson, 218
de mínimos cuadrados, 304
insesgado, 205
Estocásticamente mayor, 449
Etiqueta del tallo, 21
Evento(s), 46
independientes, 68
mutuamente excluyentes, 47
Experimento, 45
2^n factorial, 409
bifactorial, 391
factorial, 392
completo, 392
2^n, 409
multifactorial, 399

F

Factores, 391
Forma
exponencial, 322
logarítmica, 322
Fórmula de convolución, 200
Frecuencia
de celda esperada, 286
de celda observada, 286
Función(es)
aditiva de conjuntos, 57
de confiabilidad, 489
de densidad de probabilidad, 121
de distribución acumulativa, 84, 122
conjunta, 148
de verosimilitud, 217
gamma, 139
generadora de momentos, 157
para sumas de variables aleatorias, 162
y momentos, 158
potencia, 323
recíproca, 323

G

Grado(s)
de confianza, 210
de libertad, 188
distribución chi cuadrada, 189
distribución *F*, 190
distribución *t*, 188
tablas de contingencia, 293
Gráfico(a)
c, 476
de barras, 12, 84
de control, 470
para atributos, 470
para fracción de defectuosos, 476
para medias, 471
para mediciones, 470
para número de defectuosos, 478
suma acumulativa (cusum), 475
de fracción de defectuosos, 476
de dispersión, 302
de pastel, 23
de puntuaciones normales, 163
de tiempo, 33
total en prueba, 495
de Weibull, 499
del número de defectuosos, 478
diagrama causa y efecto, 465
diagrama de caja, 31
diagrama de dispersión, 302
diagrama de Pareto, 12
diagrama de puntos, 13
histograma, 17, 19
media-normal, 415
p, 476
R, 471
residuales
gráfico de puntuaciones normales, 319, 331
contra valor predicho, 319, 332
contra orden temporal, 33, 319
$\bar{x}$, 471
X barra, 4

H

Hipótesis
alternativa, 225
bilateral, 225
compuesta, 227
lineamiento para selección de, 227
nula, 224
simple, 227
unilateral, 224-225
compuesta, 227
nula, 224
prueba de. *Véase* Prueba de hipótesis
simple, 227
Histograma, 17
de densidad, 19
de probabilidad, 83
convención de puntos extremos, 15

I

Independencia, 146, 149
Índice de capacidad de proceso, 470
Inferencia estadística, 2
Interacción, 392

generalizada, 434
suma de cuadrados, 394
Interpretación de frecuencia, 57
Intersección (de eventos), 47
Intervalo de confianza
interpretación de, 211
para $\mu_1 - \mu_2$, 247, 254
para desviaciones estándar, 270
para diferencia de medias, 260
para medias, 209, 210, 211
para $p_1 - p_2$, 290
para pendiente, 311
para proporciones, 279, 280
para varianzas, 270
para S_2^2 / σ_2^2, 274

L
Ley
de los grandes números, 102, 182
de producto de confiabilidades, 488
de producto de no confiabilidades, 488
Límite(s)
de confianza, 210
de control, 470
de predicción, 314
de tolerancia, 482, 483
unilateral, 483
tres sigma, 472
Línea
central, 470
de regresión, pendiente de, 311

M
Máxima verosimilitud, 217
Media
aritmética, 24
de densidad de probabilidad, 123
de distribución de probabilidad, 94
duplicación, 437
estandarizada, 183
muestral, 25
estandarizada, 183
ponderada, 38
Mediana, 25
Mejoramiento de la calidad, 3, 463
Método(s)
de Bonferroni, 378
de función
de distribución, 197
generadora de momento, 195
de mínimos cuadrados, 303
de Monte Carlo, 113
de transformación, 197, 198
de Yates, 413
Momentos
con respecto a la media, 99, 123
con respecto al origen, 98, 123
Muestra(s), 7, 175
aleatoria, 176
coeficiente de correlación, 335
cuartil, 29
desviación estándar, 28
grandes
con respecto a μ, 232
con respecto a p, 284
intervalos de confianza para μ, 210
intervalos de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, 247
intervalos de confianza para p, 280
intervalos de confianza para $p_1 - p_2$, 290
pruebas con respecto a $p_1 - p_2$, 288
pruebas con respeto a $\mu_1 - \mu_2$, 249
mediana y, 25
pequeñas
inferencias con respecto a μ, 211, 233
inferencias con respecto a σ^2, 270, 271
inferencias con respecto a μ_D, 211, 259
inferencias con respecto a $\mu_1 - \mu_2$, 253, 254, 256
inferencias con respecto a σ_2^2/σ_1^2, 273, 274
relación de pruebas e intervalos de confianza, 235
robustez, 275, 360
percentiles, 29
proporción, 278
rango intercuartílico, 31
rango, 31, 269
varianza, 27
Muestreo con remplazo, 89
Muestreo sin remplazo, 89
Multiplicación de opciones, 50

N
Nivel
de un factor, 391
de significancia, 225
Notación
de sombrero, 205
factorial, 51
Número total de rachas, 456
Números aleatorios, 8, 113

O
Ojiva, 20
Orden estándar, 410

P
Parámetro, 87, 178
Pareado, 264
Pendiente (de línea de regresión), 311
Percentil(es)
de distribución t, 188
de distribución chi cuadrada, 189
de distribución normal estándar, 128
100 p-ésimo, muestral, 29
Permutación, 51
Población, 6, 175
coeficiente de correlación, 340
desviación estándar, 124
estadística, 6
finita, 175
factor de corrección, 181
infinita, 175
media, 123
proporción, 278
varianza, 124
Predicción, límites de, 314
Presentación de tallo y hojas, 21
de doble tallo, 24
de cinco tallos, 24
Probabilidad
acumulada, 87
axiomas de, 58, 60
concepto clásico de la, 55
condicional, 68
de cola, 230
distribución de, 83
interpretación de frecuencia, 57
subjetiva, 57
Proceso aleatorio, 107
Proporción muestral, 278
Prueba(s)
bilateral, 226
chi cuadrada
bondad de ajuste, 396
frecuencia de celda esperada, 286
frecuencia de celda observada, 285
homogeneidad, 286
independencia, 293
de Anderson-Darling, 459
de bondad del ajuste, 295
Anderson-Darling, 459
chi cuadrada, 396
Kolmogorov-Smirnov, 458
de dos colas, 226
de hipótesis
de independencia, 293
de varias proporciones, 286
para $\mu = \mu_0$, 231, 232
para $\mu_1 = \mu_2$, 249, 252, 253
para $p = p_0$, 284
para $p_1 = p_2$, 286, 289
para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 273
para $\sigma^2 = \sigma^2{}_0$, 271
de Kolmogorov-Smirnov, 458
de Mann-Whitney, 449
de rango múltiple (Duncan), 378
de signos, 447
de Smith-Satterthwaite, 256
de sustitución, 493

de una cola, 226
de vida acelerado, 493
de Wilcoxon, 449
del ciclo de vida, 493
H, 452
de Kruskal-Wallis, 452
no paramétricas, 447
Anderson-Darling, 459
correlación de rango de Spearman, 453
Kolmogorov-Smirnov, 458
prueba de signos, 447
prueba *H*, 452
rachas de prueba, 456
Wilcoxon, 449
sin sustitución, 493
de diferencias pareadas, 260
de dos muestras, 253
de una muestra, 232
pareada, 260
truncada, 493
U, 449
unilateral, 226
Z. *Véase también* Prueba normal de muestra grande
Puntuación *z*, 128

R
Racha(s), 455
arriba y abajo de la mediana, 457
número total de, 456
Rango, 31, 269
intercuartílico, 31
menos significativo, 378
muestral, 269
Razón
de falla
instantánea, 489, 490
función de, 490
de riesgo, 490
Regiones críticas
para probar $\mu = \mu_0$, 229, 232, 233, 249, 253, 275
para probar $\mu_1 = \mu_2$, 249, 253
para probar $p = p_0$, 284
para probar $p_1 = p_2$, 289
para probar varias proporciones, 286
para probar $\sigma^2 = \sigma_0^2$, 271
para probar $\sigma_2^2 = \sigma_1^2$, 273
Regla(s)
de complemento, 63
de eliminación, 73
de probabilidad total, 73
de producto especial, 69
especial de suma, 62
general de multiplicación, 68
general de suma, 62
impar-par, 434
Regresión, 343
curva de, 301
exponencial, 321
lineal, 302
múltiple, 326
polinominal, 323
Relaciones lineales
coeficiente de correlación y, 335
explicación de proporción de variabilidad *y*, 339
Representación de variables aleatorias, 192
chi cuadrada, 192
F, 193
t, 192
Residuo, 304
Respuesta, 285
Resultado (de un experimento), 45
Robustez, 275, 360

S
Signos, tabla de, 411
Simulación, 113, 167
Sistema
en serie, 488
paralelo, 488
Suma(s)
de cuadrados
de los bloques, 372
de regresión, 338
de tratamiento ajustado, 383
del error, 304, 360
del tratamiento, 360
entre muestras, 360
interacción, 394
residual, 304, 310
total, 359
de productos, 382
de rango, 449
Superficie de respuesta, 430

T
Tabla(s)
de análisis de covarianza, 383
de análisis de varianza
unidireccional, 362
diseño de bloques aleatorios, 373
de contingencia, 292
de signos, 411
$r \times c$, 292
Tallo, 21
y hojas. *Véase* Presentación de tallo y hojas
Tamaño de muestra
para estimar *p*, 281
para estimar μ, 208
Teorema
de Bayes, 74
de Chebyshev, 100
de Gauss-Markov, 309
del límite central, 184
Teoría
clásica de la prueba de hipótesis, 226
de Neyman-Pearson, 226
Término de corrección (análisis de varianza), 363
Tiempo
de espera, 140
medio entre fallas (MTBF), 491
Transformación
de observaciones a la normalidad, 165
integral de probabilidad, 197
Tratamiento, 245, 260

U
Unidad, 6
Unión (de eventos), 47

V
Valor(es)
atípico, 14
críticos, 230
normales, 163
p, 230, 231
Variable(s)
aleatoria
continua, 83
discreta, 83
estandarizada, 128
concomitante, 382
continua, 83
de confusión, 339
discreta, 83
estandarizada, 128
Variación
absoluta, 28
asignable, 470
coeficiente de, 28
relativa, 28
Varianza
cálculo de, 34
cálculo de población de, 99
de densidad de probabilidad, 124
de distribución de probabilidad, 97
muestral, 27

Z
Z de Fisher, 340

Resumen de las fórmulas para inferencias en torno a la media (μ), o bien, una diferencia de dos medias ($\mu_1 - \mu_2$)

Intervalo de confianza = Estimador puntual $\pm$ (valor tabulado) (Desv. est. estimada o real)

$$\textbf{Estadístico de prueba} = \frac{\text{Estimador puntual} - \text{valor de parámetro en } H_0 \text{ (hipótesis nula)}}{\text{Desv. est. (estimada o real) del estimador puntual}}$$

	Muestra individual		Muestras independientes			Diferencias pareadas
Población(es)	General	Normal con σ desconocida	Normal $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$	Normal $\sigma_1 \neq \sigma_2$	General	Normal para la diferencia $D_i = X_i - Y_i$
Inferencia sobre	Media μ	Media μ	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	μ_D
Muestra(s)	$X_1, \ldots, X_n$	$X_1, \ldots, X_n$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$X_1, \ldots, X_{n_1}$ $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$	$D_1 = X_1 - Y_1$ $\vdots$ $D_n = X_n - Y_n$
Tamaño de muestra n	Grande $n \geq 30$	$n \geq 2$	$n_1 \geq 2$ $n_2 \geq 2$	$n_1 \geq 2$ $n_2 \geq 2$	$n_1 \geq 30$ $n_2 \geq 30$	$n \geq 2$
Estimador puntual	$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{X} - \overline{Y}$	$\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$
Varianza del estimador puntual	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$\frac{\sigma_D^2}{n}$
Desv. est. estimada	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\frac{S_D}{\sqrt{n}}$
Distribución	Normal	t con g.l. $= n - 1$	t con g.l. $= n_1 + n_2 - 2$	t con g.l. estimado†	Normal	t con g.l. $= n - 1$
Estadístico de prueba	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\frac{\overline{D} - \mu_{D,0}}{S_D/\sqrt{n}}$ S_D = Desv. est. muestral de las D_i

†g.l. $= [(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2 / [(n_1 - 1)^{-1}(s_1^2/n_1)^2 + (n_2 - 1)^{-1}(s_2^2/n_2)^2]$

La presente obra se dirige a estudiantes de ingeniería y ciencias que toman cursos introductorios de probabilidad y estadística, una materia que será fundamental en el ejercicio de su profesión. La presentación de los temas es sistemática y ágil, pues los múltiples ejemplos que se incluyen proceden de casos reales.

En esta octava edición se conservan las fortalezas de las ediciones anteriores, al agregar más conjuntos de datos y ejemplos de aplicación de la estadística en investigaciones científicas. Los nuevos conjuntos de datos surgieron de las actividades de consultoría del autor, o bien, en discusiones con científicos e ingenieros sobre sus problemas estadísticos. Los ejemplos, tomados de diversas compañías, ilustran los métodos indispensables y el razonamiento requerido para hacer generalizaciones a partir de los datos recabados en experimentos. Todo ello ayudará al lector a comprender los conceptos y problemas estadísticos fundamentales que encontrará en el campo profesional.

ISBN: 978-607-32-0799-7

9 786073 207997 90000

PEARSON

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net