Trimestre Enero-Marzo 2015
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Cálculo Numérico para Ingeniería - CO3211
Laboratorio # 2

Eliminación Gaussiana.

Instrucciones Sobre los Laboratorios:

- Debe entregar por escrito al finalizar la hora de laboratorio, los resultados numéricos de los distintos problemas planteados, las respuestas a las interrogantes y sus conclusiones.
- Debe entregar el código fuente utilizado como un único archivo comprimido al casillero del aula virtual del profesor de laboratorio al finalizar la clase.
- No se reciben entregas extemporáneas sin su debida justificación.
- Estos trabajos son individuales salvo cuando el profesor de laboratorio indique lo contrario. Cualquier similitud extrema o falta de probidad demostrada en la realización de esta evaluación (código y resultados), será penalizada con la anuladación de la actividad y la sanción administrativa correspondiente.

Pre-Laboratorio

Usando la ayuda de Matlab (comando `help`) consulte sobre los siguientes temas:

- Librerias: `matfun`
- Comandos para matrices: `size, length, norm, eig, det` y `cond`,

Laboratorio

1. Escriba en una función de Matlab el algoritmo de eliminación gaussiana sin pivoteo y con pivoteo parcial. La función debe recibir tres argumentos: la matriz, el vector de lado derecho y un valor lógico indicando si se aplica pivoteo o no.

   a) Considere los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) $\mathbf{A}_1\vec{x} = \vec{b}_1$ y $\mathbf{A}_2\vec{x} = \vec{b}_2$, donde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 10^{-8} & -1 & 10^{10} \\ 10 & 10^{-8} - 10^{7} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \mathbf{A}_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 10^{-9} & 10^{-6} & 10^{-9} \\ 10^{-16} & -10^{-16} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \mathbf{A}_2 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Verifique teóricamente que estos SEL tienen solución única y calcúlelas.

c) Calcule distintas aproximaciones a las soluciones de los SEL usando el algoritmo de reducción gaussiana con/sin pivoteo y calcule los errores relativos asociados usando la norma-∞. Argumentando con lo visto en teoría, explique a qué se deben estos resultados. Para estos SEL, era necesario usar pivoteo si se usa aritmética exacta? Cómo influye en la precisión el uso del pivoteo con el uso de aritmética inexacta?

d) Calcule en Matlab el determinante, el número de condición (norma-∞) y el autovalor máximo y mínimo en valor absoluto de cada una de las matrices dadas arriba. Indique cuáles de estos parámetros son confiables para establecer si se puede econtrar aproximación aceptable a la solución de los SEL con los algoritmos estudiados.

e) Verifique en cada caso que los errores relativos cumplen la relación:

$$\frac{\|\vec{x}-\bar{\vec{x}}\|}{\|\vec{x}\|} \leq cond(\mathbf{A})\frac{\left\|\vec{b}-\mathbf{A}\bar{\vec{x}}\right\|}{\left\|\vec{b}\right\|}$$

usando la norma-∞.

2. Se tiene un sistema lineal $\mathbf{A}x = b$ donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, n$, está definida como

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

y el vector de lado derecho $\vec{b} = (\vec{b}_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene multiplicando la matriz de coeficientes, $\mathbf{A}$, por un vector de n componentes todas iguales a 1. La matriz A definida en (1) se conoce con el nombre de *matriz de Hilbert*.

a) Para $n = 2, 3, \ldots$ genere la matriz de Hilbert de orden n y también genere el vector de lado derecho $\vec{b} = \mathbf{A}\vec{x}$. Calcule la solución aproximada $\vec{x}^*$ del sistema $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ usando el método de eliminación Gaussiana sin pivoteo programado por Ud. y la función "\\"de Matlab ($\vec{x} = \mathbf{A}\backslash\vec{b}$).

b) Calcule la norma infinita del vector residual $\vec{r} = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{x}^*$ y del error $\Delta\vec{x} = \vec{x}^* - \vec{x}$, donde $\vec{x}$ es la solución exacta del sistema.

c) ¿Cuán grande se puede tomar n antes que el error sea del 100 %, es decir, que no haya cifras significativas en la solución.

d) Use la función `cond` de Matlab para calcular el número de condición de la matriz $\mathbf{A}$ para cada valor de n y grafique.

e) Escriba sus conclusiones y justificaciones.