

Ejercicios

1. Decida cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Si una proposición es verdadera, demuéstrela, y si es falsa dé un contraejemplo:

- a) Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|x\|_2 \geq \|x\|_1$
- b) El número de condición de una matriz aumenta con el orden de la matriz.
- c) El número de condición de una matriz cambia al multiplicar ésta por un escalar.
- d) Sabiendo que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, se puede asegurar que los números de condición en norma infinito de A y de A^T son iguales.
- e) El producto de 2 matrices simétricas, es una matriz simétrica.
- f) La inversa de una matriz simétrica, es una matriz simétrica.
- g) El producto de 2 matrices triangular inferior con 1 en la diagonal, tiene la misma estructura.
- h) La inversa de una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal, es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal.
- i) Si A y B son matrices diagonal dominante estricta entonces $A+B$ es diagonal dominante estricta.
- j) Toda matriz diagonal dominante estricta es definida positiva.
- k) Si A y B son matrices diagonal dominante estricta con elementos positivos en la diagonal principal, entonces $A+B$ es diagonal dominante estricta.
- l) La matriz $A = \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$ es definida positiva para todos los valores reales y positivos de s .
- m) Si A es definida positiva y B es no singular, entonces la matriz BAB^T es definida positiva.
- n) Para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, se tiene que $A + A^T$ es simétrica y definida positiva.
- ñ) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene más de una descomposición LU .
- o) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $P = A(A^t A)^{-1} A^t$ existe; entonces se cumple para P que,
 - 1) $P^T = P$
 - 2) $P^2 = P$
 - 3) $(I - 2P)^2 = I$

2. En un computador se realizan los siguientes cálculos: $a = (10^{20} - 10^{20}) - 1$ y $b = 10^{20} - (10^{20} + 1)$. Diga qué valores se obtienen. Justifique su respuesta.

3. ¿Con cuántas cifras significativas se puede decir que p^* aproxima a 3000 si se sabe que $2999 < p^* < 3001$? Razone su respuesta.

4. Considere las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular los productos PA , AP , DA y AD . ¿Qué efecto produce premultiplicar y postmultiplicar una matriz A por una matriz de permutación? ¿Y por una matriz diagonal?

5. Obtenga α de modo que la matriz siguiente sea definida positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Dado el sistema lineal

$$P = \begin{cases} 0,1x + y & = b_1 \\ 0,1x + 1,5y & = b_2 \end{cases}$$

- Calcule el número de condición en norma infinito.
- Sustituya x por x/α y calcule el número de condición de la nueva matriz. ¿Qué relación tiene con la original? ¿Cuál α minimiza el número de condición?

7. Dado el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon > 0$, pequeño pero no nulo para el computador, ¿qué resultado numérico se obtiene en el computador si se aplica el método de Gauss sin pivoteo?, ¿dicho resultado es la solución correcta del sistema lineal? Razone su respuesta

8. Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que aproximan a 3000 con exactamente 3 cifras significativas, ni más ni menos. Razone su respuesta.

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

encontrar una descomposición de A de la forma LU usando matrices elementales E_i y de permutación P_i , siendo U una matriz triangular superior y L una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal.

10. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} d & a \\ a & d \end{pmatrix}$, donde $0 < a < d$.

- Encuentre el factor L de Cholesky.
- Consiga el vector x tal que $Ax = b$ cuando $b = (3, 2)^t$, $d = 9$ y $a = 6$.

11. Puede el algoritmo de Cholesky aplicarse a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4,25 & 2,75 \\ 1 & 2,27 & 3,5 \end{pmatrix}.$$

Justifique su respuesta. Si la respuesta es afirmativa, calcular L .

12. Al resolver $Ax = b$ con una perturbación en el vector $b = (10, 0, 0)^t$ de 10^{-6} en norma 1, se obtuvo un error relativo en la solución de 10^{-3} . Halle una cota para el número de condición en norma 1 de A .

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, elementos $a_{i,1} = \alpha_i$, $i = 2, \dots, n$ y ceros en el resto de las posiciones. Por ejemplo, si $n = 4$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule el número de condición en la norma infinito de A , $\kappa_\infty(A)$ para cualquier n .
- Sean $b^t = (1, 1, \dots, 1)$ y $\hat{b}^t = (1, 00005, 1, \dots, 1)$. Suponga que $Ax = b$ y $A\hat{x} = \hat{b}$. Use $\kappa_\infty(A)$ para obtener una cota del error relativo en \hat{x} , como aproximación de x , cuando $\max |\alpha_i| = 0,01$ y cuando $\max |\alpha_i| = 100$.
- ¿Cuántos decimales exactos podemos esperar en \hat{x} , como aproximación de x , en cada uno de los dos casos anteriores?

14. Sea D la matriz tridiagonal siguiente

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

D se puede factorizar como $D = LU$, donde L y U tienen la forma siguiente

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ c_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{n-1} & 1 & \\ & & & c_n & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & & & \\ & d_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} & 1 \\ & & & & d_n \end{pmatrix}.$$

- Determinar las fórmulas para calcular d_i con $1 \leq i \leq n$ y c_i con $2 \leq i \leq n$.
- Escribir el algoritmo para la factorización de $D = LU$ usando las fórmulas determinadas en (a).
- Calcular el número de operaciones (multiplicaciones/divisiones y sumas/restas) para determinar L y U .
- Determinar L y U para la siguiente matriz usando el algoritmo en (b)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

15. El siguiente pseudocódigo halla la descomposición LU general de una matriz dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular inferior y $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior. Calcule la cantidad total de operaciones de punto flotante (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) efectuadas en dicho pseudocódigo. Use las fórmulas $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ y $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

```

Leer  $A = (a_{ij})$ ,  $n$ 
Para  $k = 1$  hasta  $n$ 
    Especificar un valor no nulo para  $l_{kk}$  o para  $u_{kk}$ 
    y calcular el otro a partir de
        
$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

    Para  $j = k+1$  hasta  $n$ 
        
$$u_{kj} = \left( a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} \right) / l_{kk}$$

    Fin para
    Para  $i = k+1$  hasta  $n$ 
        
$$l_{ik} = \left( a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} \right) / u_{kk}$$

    Fin para
Fin para

```

16. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hessenberg superior, diga qué hace el siguiente pseudocódigo y calcule la cantidad total de operaciones de punto flotante (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) que éste efectúa. Use las fórmulas $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ y $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ si es necesario.

```

Leer  $A = (a_{ij}), n$ 
Para  $k = 1$  hasta  $n-1$ 
     $\alpha = a_{k+1,k} / a_{kk}$ 
    Para  $j = k$  hasta  $n$ 
         $a_{k+1,j} = a_{k+1,j} - \alpha * a_{kj}$ 
    Fin para
Fin para

```

17. Si se tiene una descomposición LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular inferior y $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior, proponga un pseudocódigo para resolver el sistema lineal $x^t A = b^t$.
18. Sean la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector columna $b \in \mathbb{R}^n$ del sistema $Ax = b$, diga que hace el siguiente pseudocódigo y calcule la cantidad total de operaciones (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) que éste efectúa (note que A es tridiagonal).

```

Leer  $n, a = (a_i), 2 \leq i \leq n, c = (c_i), 1 \leq i \leq n-1, d = (d_i)$  y  $b = (b_i), 1 \leq i \leq n$ 
Para  $i = 2$  hasta  $n$ 
     $d_i = d_i - (a_{i-1} / d_{i-1}) c_{i-1}$ 
     $b_i = b_i - (a_{i-1} / d_{i-1}) b_{i-1}$ 
Fin para
 $x_n = b_n / d_n$ 
Para  $i = n-1$  hasta  $1$ 
     $x_i = (b_i - c_i x_{i+1}) / d_i$ 
Fin para
salida  $x$ 

```

19. Se requiere resolver el sistema

$$Dx = b \quad (1)$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & B \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

con A una matriz $n \times n$, B una matriz $m \times m$, R una matriz $m \times n$, c y u vectores de \mathbb{R}^n y d y v vectores de \mathbb{R}^m .

Se puede considerar el sistema (1) antes descrito en la siguiente forma

$$Au = c \quad \text{y} \quad Ru + Bv = d. \quad (2)$$

- a) Escriba un pseudocódigo que resuelva el sistema lineal de la forma (2) utilizando dos veces al método de Gauss.
- b) Se conoce que el número de multiplicaciones y divisiones del método de Gauss para la resolución de un sistema lineal de orden $n \times n$ es $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$.
Utilizando el criterio del número de multiplicaciones y divisiones compare la resolución del sistema lineal, bajo la forma (1), aplicando el método de Gauss directamente y la resolución del sistema lineal en la forma (2) aplicando el procedimiento que usted elaboró en (a).

20. Proponga un pseudocódigo para hallar la inversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ usando descomposición LU y sustitución hacia atrás y hacia adelante.
21. Escriba un algoritmo (en detalle) para reducir una matriz H , cuya estructura es Hessenberg superior, a una matriz triangular superior, basándose en el método de Gauss. Se supone que la matriz H está almacenada en dos vectores hd y ht , donde hd contiene los elementos de la primera subdiagonal de H , mientras que ht contiene el triángulo superior de H (incluyendo su diagonal principal), almacenado por filas y partiendo de cada elemento de la diagonal principal.

22. Resuelva $Ax = b$ utilizando factorización LU de Crout, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$$

23. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{pmatrix}.$$

- a) Utilizando la solución aproximada $\tilde{x} = (0,341, -0,087)^t$, compare la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) del vector residual y la del vector de error. ¿Cuál es su conclusión? (Utilice redondeo a 6 cifras significativas)
- b) Halle el número de condición asociado a la norma infinito de A .
- c) Haga un paso de refinamiento iterativo para mejorar la solución \tilde{x} . (Utilice redondeo a 6 cifras significativas) Justifique claramente su respuesta.