# Resumen de Teoría de Matrices

Rubén Alexis Sáez Morcillo  Ana Isabel Martínez Domínguez

1 de Octubre de 2004

## 1. Matrices. Generalidades.

**Definición 1.1.** *Se llama matriz de orden $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ a un conjunto de $(mn)$ escalares de $k$ ordenados en $m$ filas y $n$ columnas.*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

**Definición 1.2.** *Para matrices del mismo orden, $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, se define la matriz suma, $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$, de la siguiente forma:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n.$$

**Definición 1.3.** *Dada la matriz $A_{m\times n}$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces la matriz $C = \alpha A$ (producto de un escalar por una matriz) se obtiene como*

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n.$$

**Definición 1.4.** *Dadas dos matrices $B_{l\times m}$ y $A_{m\times n}$, se define la matriz producto $C_{l\times n} = B_{l\times m} A_{m\times n}$ como sigue*

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} b_{ir} a_{rj}, \quad \forall i = 1, \dots, l, \forall j = 1, \dots, n.$$

**Nota 1.1 (Propiedades de la suma y producto por un escalar de matrices).** *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

*a) La suma de matrices cumple que:*

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $\exists\ 0 \in \mathcal{M}_{m\times n} / A + 0 = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \exists (-A) \in \mathcal{M}_{m\times n} / A + (-A) = 0$.

*b) El producto de una matriz por un escalar verifica que:*

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
8. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} / 1 \cdot A = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

**Nota 1.2.** *Que se cumplan estas ocho operaciones implica que el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ de todas las matrices, dotado de las operaciones suma y producto por un escalar, es un espacio vectorial. Además, dicho espacio vectorial será de dimensión $mn$.*

**Nota 1.3 (Propiedades del producto de matrices).** *Sean $A, B, C$ y $D$ matrices de números reales cualesquiera, tales que $A \in \mathcal{M}_{m\times p}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$ y $C, D \in \mathcal{M}_{q\times n}$. El producto de matrices verifica que:*

1. *No es conmutativo.*
2. $(AB)C = A(BC)$.
3. $\exists\ I_m, I_p, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times p}/I_m A = A, AI_p = A$.
4. $A_{m\times p}0_{p\times s} = 0_{m\times s}, \quad 0_{s\times m}A_{m\times p} = 0_{s\times p}$.
5. $B(C + D) = BC + BD$.
6. $\mathrm{rg}(AB) \leq \text{mín}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.
7. *Si* $\mathrm{rg}(A) = r \leq \text{mín}\{m, p\} \Longrightarrow \exists\ C^1_{m\times r}, C^2_{r\times p}/A = C^1C^2$.

**Definición 1.5.** *Dada una matriz $A_{m\times n}$, se dice que es cuadrada si $m = n$.*

**Definición 1.6.** *Dada una matriz cuadrada $A_n$, se dice que es la matriz identidad si verifica que:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ 1 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

**Definición 1.7.** *Dada una matriz cuadrada $A_n$, se dice que la matriz cuadrada $B_n$ es la inversa de la matriz $A$ si verifica que $AB = BA = I_n$, y se denota $B = A^{-1}$.*

**Proposición 1.1.** *Dada $A_{n\times n}$ se verifica que existe $A^{-1}$ si, y sólo si, la matriz $A$ es de rango completo, esto es, $\mathrm{rg}(A) = n$.*

**Nota 1.4 (Propiedades de la inversa de una matriz).** *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n/\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n$. Se verifica que:*

1. $\exists\ A^{-1}$ *matriz inversa de $A$, y ésta es única.*
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Si $C \in \mathcal{M}_n, \mathrm{rg}(C) = n, AC = I_n \Longrightarrow CA = I_n$ y $C = A^{-1}$. Recíprocamente, si $CA = I_n \Longrightarrow AC = I_n$ y $C = A^{-1}$.*

**Definición 1.8.** *Dada una matriz cuadrada $A$ de orden $n$, se define la traza de $A$, que se denota por* $\mathrm{tr}(A)$*, como el valor de la suma de todos los elementos de la diagonal principal de $A$, es decir,*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Proposición 1.2.** *Se tiene que:*

*i)* *Sean $A_n, B_n \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces* $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ *y* $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{tr}(A)$.

*ii)* *Sean $A_{m\times n}$ y $B_{n\times m}$, entonces* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

**Nota 1.5.** *Cabe destacar que:*

*a)* *La aplicación* $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{K}$ *es lineal.*

*b)* *No es cierto, en general, que la traza del producto de matrices sea equivalente al producto de las trazas de dichas matrices (tomar $A = B = I_n$).*

*c)* *Si $A$ es una matriz invertible, no se que cumple que*

$$\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$$

*(tomar una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal sean no nulos).*

**Definición 1.9.** *Dada una matriz $A_{m\times n}$, se define la matriz traspuesta, $M_{n\times m} = A^t$, como:*

$$m_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots, m.$$

**Proposición 1.3.** *Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$ *y* $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
2. $(AC)^t = C^t A^t$.
3. $(A^t)^t = A$.
4. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$.
5. *Si* $A \in \mathcal{M}_n \Longrightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$ *y* $|A| = |A^t|$.
6. *Si* $A \in \mathcal{M}_n$ *y es invertible* $\Longrightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
7. *Si* $A^t A = 0_n \Longrightarrow A = 0_n$.
8. *Si* $\mathrm{tr}(A^t A) = 0 \Longrightarrow A = 0_n$.
9. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t A) = \mathrm{rg}(AA^t)$. *En particular, si $m > n$ y $\mathrm{rg}(A) = n$, la matriz $A^t A$ es no singular.*

**Definición 1.10.** *Sea $A_n$ una matriz cualquiera, se denomina determinante de la matriz $A$, a la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longrightarrow & \alpha \in \mathbb{R} \end{array},$$

*y se denota por $|A|$ o $\det(A)$.*

**Nota 1.6 (Propiedades de los determinantes).** *Dadas $A_n, B_n, C_n \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que*

*i)* *Si las matrices $A, B$ y $C$ difieren exclusivamente en los elementos de la columna $j_0$ siendo los elementos de esta columna para la matriz $C$ la suma de los respectivos elementos de la columna $j_0$ de las matrices $A$ y $B$, entonces $|A| + |B| = |C|$. El mismo resultado se cumple cuando las tres matrices difieren de igual forma en una fila.*

*ii)* *Si se multiplica sólo una fila (o columna) de $A$ por un escalar $\alpha$, el valor del determinante también queda multiplicado por $\alpha$.*

*iii)* $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.

*iv)* *Si* $A = 0_n \Longrightarrow |A| = 0$.

*v)* *Si $A$ es una matriz con una fila (o columna) cuyos elementos son todos nulos, entonces $|A| = 0$.*

*vi)* *La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) de una matriz $A$ por los adjuntos de una fila (o columna) paralela diferente es igual a cero.*

*vii)* *Si en una matriz $A$ a una de sus filas (o columnas) se le suma una combinación lineal de las filas (o columnas) paralelas, el determinante de la matriz resultante es también $|A|$.*

*viii)* *Se tiene que:*

   *a)* $|AB| = |A||B|$.
   *b)* $|A^k| = |A|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
   *c)* *Si $A$ es no singular, entonces* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

**Definición 1.11.** *Dadas dos matrices, $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, se dice que son equivalentes si existen matrices invertibles, $P_{m\times m}$ y $Q_{n\times n}$, tales que*

$$A = PBQ \quad (B = P^{-1}AQ^{-1}).$$

**Definición 1.12.** *Dadas dos matrices, $A_n$ y $B_n$, se dice que son semejantes si existe una matriz invertible $Q_n$ tal que*

$$A = QBQ^{-1} \quad (B = Q^{-1}AQ).$$

**Definición 1.13.** *Dada una matriz $A_n$, se dice que es triangular superior si $a_{ij} = 0, \forall i > j, i, j = 1, \ldots, n$.*

*Se dice que $A_n$ es triangular inferior si $a_{ij} = 0, \forall i < j, i, j = 1, \ldots, n$.*

*Se dice que $A_n$ es diagonal si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j, i, j, = 1, \ldots, n$.*

**Proposición 1.4.** *Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ matrices triangulares superiores (inferiores) y $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica:*

1) *$A + B$ y $\alpha A$ son triangulares superiores (inferiores).*

2) *$AB$ es triangular superior (inferior).*

3) *Si $A$ tiene inversa, $A^{-1}$ es triangular superior (inferior).*

4) *El rango de $A$ es siempre mayor o igual al número de elementos de la diagonal principal de $A$ no nulos.*

5) $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

**Nota 1.7.** *Se debe tener en cuenta que:*

a) *En general, el resultado que se indica en la cuarta propiedad no se verifica con igualdad.*

b) *De la cuarta propiedad se puede extraer la siguiente proposición:"A es regular o invertible $\Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$".*

c) *Al verificarse la primera propiedad, el conjunto de las matrices triangulares superiores (inferiores, diagonales) forman un subespacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.*

**Proposición 1.5.** *Toda matriz cuadrada se puede descomponer como producto de una matriz triangular superior por una matriz triangular inferior.*

**Definición 1.14.** *Dada una matriz $A_n$, se dice que es simétrica si $A = A^t$. Por contra, se dirá que es antisimétrica si $A = -A^t$.*

**Proposición 1.6.** *Sean las matrices $A_n$ y $B_n$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $A$ y $B$ son simétricas, se verifica que:*

1) *$A + B$ y $\alpha A$ son simétricas.*

2) *$A$ es simétrica si, y sólo si, $A = A^t$.*

3) *Cuando $AB = BA \Longrightarrow AB$ es simétrica. Sin embargo, esto no es cierto si $A$ y $B$ no conmutan en el producto.*

4) *Si $A$ es invertible, entonces $A^{-1}$ es simétrica.*

5) *Dada una matriz cualquiera $C_{m\times n} \Longrightarrow CC^t$ y $C^tC$ son simétricas.*

*Si $A$ y $B$ son antisimétricas, se cumple que:*

6) *$A + B$ y $\alpha A$ son antisimétricas.*

7) *$A$ es antisimétrica si, y sólo si, $A = -A^t$.*

8) *Cuando $AB = BA \Longrightarrow AB$ es antisimétrica. Sin embargo, esto no es cierto si $A$ y $B$ no conmutan en el producto.*

9) *Si $A$ es invertible, entonces $A^{-1}$ es antisimétrica.*

10) *$|A| = (-1)^n|A|$ y, en particular, para $n$ impar, $|A| = 0$.*

**Nota 1.8.** *Al cumplirse las propiedades primera y sexta, se tiene que las matrices simétricas o antisimétricas del mismo orden forman un subespacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

**Proposición 1.7.** *Toda matriz se puede expresar como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.*

**Proposición 1.8.** *Si $A_n$ es una matriz antisimétrica, entonces $x^tAx = 0, \forall x \in \mathbb{K}^n$.*

**Definición 1.15.** *Dada una matriz $A_n$, se dice que es hermítica si $m_{ij} = \bar{m}_{ji}, i, j = 1, \ldots, n$, donde $\bar{m}_{ij}$ es el conjugado del número complejo $m_{ij}$.*

**Proposición 1.9.** *Sean $A_n$ y $B_n$ matrices hermíticas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1) *$A + B$ y $\alpha A$ son hermíticas.*
2) *Si $AB = BA$, la matriz $AB$ es hermítica. Sin embargo, si $A$ y $B$ no son conmutativas en el producto, en general $AB$ no es hermítica.*
3) *$A^t$ es hermítica.*
4) *La matriz conjugada de $A$, esto es $\bar{A}$, es hermítica.*
5) *Si $A$ es invertible, su matriz inversa, $A^{-1}$, es hermítica.*
6) *El determinante de $A$ es un número real.*

**Nota 1.9.** *Cabe destacar que*

a) *Por cumplirse la primera propiedad, el conjunto de matrices hermíticas forman un subespacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.*
b) *Los elementos de la diagonal principal han de ser números reales, ya que deben cumplir la definición ($a = \bar{a} \Longrightarrow a \in \mathbb{R}$).*

**Definición 1.16.** *Dada una matriz $A_{m\times n}$, se dice que es no negativa si $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$. Se denota por $A_{m\times n} \geq 0_{m\times n}$.*

*Se dice que $A_{m\times n}$ es semipositiva si $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$ y $A_{m\times n} \neq 0_{m\times n}$. Lo denotaremos por $A_{m\times n} > 0_{m\times n}$.*

*Se dice que $A_{m\times n}$ es positiva si $a_{ij} > 0, \forall i, j$. Se denota como $A_{m\times n} >> 0_{m\times n}$.*

**Nota 1.10.** *La suma de matrices no negativas sigue siendo una matriz no negativa del mismo tipo. Sin embargo, esta propiedad no se verifica con el producto de matrices.*

**Proposición 1.10.** *Si $A_n$ y $B_n$ son positivas y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:*

1) *$A + B$ y $\alpha A$ son positivas.*
2) *$AB$ es una matriz positiva.*
3) *$\forall k \in \mathbb{N}, A^k$ es positiva.*
4) *$A^t$ es una matriz positiva.*

**Nota 1.11.** *Los coeficientes de las matrices no negativas siempre pertenecen al cuerpo de los números reales, ya que en los complejos no está definido un orden total.*

**Definición 1.17.** *Dada una matriz $A_n$, se dice que es ortogonal si $AA^t = A^tA = I_n$.*

**Proposición 1.11.** *Sean $A_n$ y $B_n$ matrices ortogonales, entonces*

1) *$AB$ y $BA$ son matrices ortogonales, pero en general, no lo son $A + B$ y $\alpha A, \alpha \in \mathbb{R}$.*
2) *El valor de $|A|$ es igual a $-1$ ó $1$.*
3) *El rango de $A$ es $n$.*
4) *$A$ es invertible, su inversa, $A^{-1}$, es ortogonal y $A^{-1} = A^t$.*

*5) Si $C$ es una matriz cuadrada tal que $CC^t = I_n$ entonces, $C^tC = I_n$ y, recíprocamente, si $C^tC = I_n$ se tiene también que $CC^t = I_n$. Por tanto, basta que $C$ cumpla una de las dos condiciones para que sea ortogonal.*

*6) Si $C_n$ es antisimétrica entonces, $A = (I_n - C)(I_n + C)^{-1}$ es una matriz ortogonal.*

*7) Si $h^th = 1$ entonces, $A = I_n - 2hh^t$ es una matriz ortogonal. Las matrices así definidas se les denomina matrices Householder.*

**Definición 1.18.** *Dada una matriz $A_n$, se dice que es*

- *idempotente si $A^2 = A$.*
- *unipotente si $A^2 = I_n$.*
- *nilpotente si $A^2 = 0_n$.*

**Proposición 1.12.** *Sean $A_n$ y $B_n$*

*a) Si $A$ y $B$ son idempotentes, se verifica que*

1. *$AB$ es idempotente siempre que $AB = BA$.*
2. *Dada cualquier $C_n$, si $C^tC = C$, la matriz $C$ es simétrica e idempotente.*
3. *El valor de $|A|$ es 0 ó 1. Si $|A| = 1$ se tiene que $A = I_n$.*
4. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A)$.
5. *Si $A$ es simétrica con $\mathrm{rg}(A) = r$, entonces existe $C_{n\times r}$ con $\mathrm{rg}(C) = r$ tal que $A = CC^t$ y $C^tC = I_r$.*
6. *$I_n - A$ es una matriz idempotente y $\mathrm{rg}(I_n - A) = n - \mathrm{rg}(A)$. Sin embargo, $A - I_n$ no es idempotente.*
7. *Si $C_{n\times k}$ con $k < n$ y $\mathrm{rg}(C) = k$, entonces la matriz $A = C(C^tC)^{-1}C^t$ es simétrica e idempotente, al igual que $\tilde{A} = I_n - A$.*

*b) Sea $A_n$ una matriz unipotente, entonces se verifica que*

8. *$|A| = 1$ ó $|A| = -1$.*
9. *$\mathrm{rg}(A) = n$ y, por tanto, existe $A^{-1}$ y, además, $A^{-1} = A$.*

*c) Sea $A_n$ una matriz nilpotente, entonces se verifica que*

10. *$|A| = 0$ y, por tanto, nunca existe $A^{-1}$ y $\mathrm{rg}(A) < n$.*
11. *La matriz $I_n - A$ es invertible y su inversa es $(I_n - A)^{-1} = I_n + A$.*

**Definición 1.19.** *Una matriz $A_n \geq 0$ se dice que es estocástica si la suma de los elementos de cada fila es igual a la unidad, es decir,*

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Se dice que es doblemente estocástica si $A$ y $A^t$ son estocásticas.*

**Proposición 1.13.** *Si $A_n$ y $B_n$ son estocásticas (doblemente estocásticas) se verifica*

1. *$AB$ es estocástica (doblemente estocástica).*
2. *$\forall k \in \mathbb{N}, A^k$ es estocástica (doblemente estocástica).*
3. *Cuando $A$ es doblemente estocástica, $A^t$ también lo es.*

**Definición 1.20.** *Una matriz $A_n \geq 0$ se dice que es primitiva si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k >> 0$.*

**Nota 1.12.** *Es obvio que si la matriz es positiva, también será primitiva.*

**Definición 1.21.** *Una matriz cuadrada, $A_n$, con coeficientes reales, se dice que tiene diagonal dominante si*

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \forall j.$$

## 2. Autovalores y autovectores.

**Definición 2.1.** *Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice que es un autovalor de la matriz $A_{n\times n}$, si existe un vector $v, v \neq 0$, tal que*

$$Av = \lambda v.$$

*Al vector $v$ se le denomina autovector o vector propio.*

**Nota 2.1.** *Cabe destacar que*

*a)* *El autovector $v$ asociado a un autovalor $\lambda$ no es único, ya que si $Av = \lambda v$, entonces, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se verifica que $A(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$ y, por tanto, $\alpha v$ es también un vector propio de $A$ asociado a $\lambda$.*

*b)* *Si $\lambda$ es una autovalor de $A$, el conjunto $E(\lambda) = \{v/Av = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial no trivial, $E(\lambda) \neq \{0\}$.*

*c)* *Un autovector está asociado a un único valor propio.*

**Proposición 2.1.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es autovalor de $A$.*

*ii)* *El sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = 0$ es compatible indeterminado.*

*iii)* $|A - \lambda I_n| = 0$.

**Definición 2.2.** *Dada una matriz $A$ cuadrada de orden $n$, se denomina polinomio característico de $A$ al polinomio de orden $n$*

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I_n|.$$

*Siendo $P_n(\lambda) = 0$ la ecuación característica de la matriz $A$.*

**Nota 2.2.** *Cabe tener en cuenta que*

*a)* *Es claro que los autovalores de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ son las raíces de su ecuación característica $P_n(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$.*

*b)* *Si el polinomio característico $P_n(\lambda)$ de la matriz $A$ se puede expresar en la forma $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^r Q_{n-r}(\lambda)$, siendo $Q_{n-r}(\lambda)$ un polinomio de orden $n-r, (r < n)$ tal que $Q_{n-r}(\lambda_i) \neq 0$. Entonces, se dice que $\lambda_i$ es un autovalor de $A$ con multiplicidad algebraica $m_i = r$.*

*c)* *Dada una matriz $A$, si $\lambda^*$ es uno de sus autovalores, todos los vectores no nulos solución del sistema homogéneo de $n$ ecuaciones compatible indeterminado $(A - \lambda^* I_n)x = 0$ serán autovectores asociados a $\lambda^*$.*

*d)* *Si $P_n(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ es el polinomio característico de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$, entonces, para cualquier $B \in \mathcal{M}_n$ no singular, se verifica que las matrices $C = BAB^{-1}$ y $D = B^{-1}AB$ tienen el mismo polinomio característico que $A$.*

**Teorema 2.1 (de Cayley–Hamilton).** *Toda matriz cuadrada $A_n$ es raíz de su polinomio característico.*

**Proposición 2.2.** *Si $A$ es una matriz de orden $n$, se tiene que*

$$|A - \lambda I_n| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\mathrm{tr}(A) + (-\lambda)^{n-2}\mathrm{tr}_2(A) + (-\lambda)^{n-3}\mathrm{tr}_3(A) + \ldots + |A|,$$

*siendo $\mathrm{tr}_i(A), i = 2, 3, \ldots, n-1$, la suma de todos los menores de orden $i$ que contienen en su diagonal principal $i$ elementos de la diagonal principal de $A$.*

**Nota 2.3.** *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las raíces de $P_A(\lambda)$ entonces,*

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) + (-\lambda)^{n-2}\mathrm{tr}_2(A) + \ldots + (\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

*Además, los coeficientes de $(-\lambda)^{n-k}, k = 2, 3, \ldots, n-1$, es la suma de los $k$ productos distintos de las raíces.*

**Proposición 2.3.** *Sean $A \in \mathcal{M}_n$ y $B \in \mathcal{M}_m$ dos matrices cuyos autovalores son los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots, \mu_m$, respectivamente. Estos autovalores pueden ser reales o complejos, iguales o distintos. Se verifica que:*

*i)* *Los autovalores de $A^t$ coinciden con los de la matriz $A$.*

*ii)* *El número de autovalores nulos de una matriz $A$ de rango $r < n$ es mayor o igual que $n - r$.*

*iii)* $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

*iv)* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

*v)* *Los autovalores de la matriz $\alpha A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), con $\alpha \neq 0$ son $\alpha\lambda_i, i = 1, \ldots, n$.*

*vi)* *Si $A$ es no singular, entonces los autovalores de $A^{-1}$ son $\frac{1}{\lambda_i}, i = 1, \ldots, n$.*

*vii)* *Para cualquier número natural $k$ no nulo, los autovalores de $A^k$ son $\lambda_i^k, i = 1, \ldots, n$.*

*viii)* *Si $A$ es una matriz de orden $n$ con elementos pertenecientes a $\mathbb{R}$ tal que sus autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, son reales, entonces para todo $p$, número natural impar, los autovalores de $A^{1/p}$ son $\lambda_i^{1/p}, i = 1, \ldots, n$. Si $p$ es par esta propiedad se verifica siempre que $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$.*

*ix)* *Si $\lambda_i \neq -1, i = 1, \ldots, n$, entonces $I_n + A$ es invertible, siendo $1 + \lambda_i, i = 1, \ldots, n$, sus autovalores y $\frac{1}{1+\lambda_i}, i = 1, \ldots, n$, los de su inversa.*

**Nota 2.4.** *Dadas dos matrices $A$ y $B$ de orden $n$, la suma de un autovalor de $A$ con uno de $B$ en general no es un autovalor de $A + B$, a pesar de verificarse iv) y que $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.*

*Del mismo modo, aunque $|AB| = |A||B|$ y se cumple la propiedad iii), no se verifica que si $\lambda$ y $\mu$ son autovalores de $A$ y $B$, respectivamente, entonces $\lambda\mu$ lo sea de $AB$.*

**Proposición 2.4.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n, a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $i, j = 1, \ldots, n$, una matriz de orden $n$ cuyos autovalores son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, con multiplicidades algebraicas $m_1, \ldots, m_r$, respectivamente, siendo $\sum_{i=1}^r m_i = n$. Se verifica que*

*i)* *Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.*

*ii)* *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y la matriz $A$ tiene como autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ y su conjugado $\bar{\lambda}$ entonces, el autovector $v$ asociado a $\lambda$ es el conjugado del autovector $w$ asociado a $\bar{\lambda}$.*

**Proposición 2.5.** *Dada una matriz $A$ de orden $n$ triangular superior (respectivamente inferior o diagonal), se verifica que los autovalores de $A$ son los elementos de su diagonal principal, es decir, $a_{ii}, i = 1, \ldots, n$.*

**Proposición 2.6.** *Dada una matriz simétrica cuyos elementos son números reales y $u, v$ son autovectores de $A$ asociados con autovalores $\lambda, \mu, (\lambda \neq \mu)$ entonces, $u, v$ son ortogonales ($u^t v = 0$).*

**Proposición 2.7.** *Dada una matriz simétrica $A$, cuyos elementos son números reales, se verifica que sus autovalores son números reales.*

**Proposición 2.8.** *Dada una matriz $A$ cuadrada de orden $n$ se verifica que*

*a)* *Si $A$ es idempotente, entonces*

1. *Sus autovalores son iguales a 0 ó a 1.*
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.