UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dpto. de Cómputo Científico y Estadística
Cálculo Numérico CO-3211

LABORATORIO # 6

Autovalores - Método de la Potencia

1. Dadas las siguientes matrices

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -9 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -0 \\ -9 & -1 & 0 & 10 \\ -6 & 7 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -2 & -3 \\ -6 & -7 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & -8 \\ 9 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad C = A^T * A$$

   a) Dibuje los círculos de Gerschorin empleando un color distinto para cada elemento de la diagonal de la matriz.

   b) ¿Cuáles de las matrices anteriores verifican las hipótesis del Método de la Potencia?. Emplee las herramientas teóricas y computacionales que considere necesarias para justificar su respuesta.

   c) Utilizando el comando *eig*() de Matlab, halle los autovalores de cada matriz y dibujelos sobre el mismo lienzo del item a.

   d) Verifique que el radio espectral está dentro de la cota establecida en el item a.

   e) Calcule el mayor y el menor de los autovalores con el Método de la Potencia y el Método de la Potencia Inverso respectivamente.

   f) Verifique *numéricamente* que los resultados obtenidos satisfacen

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

   donde M es la matriz del sistema correspondiente y λ y $\vec{v}$ es el autovalor y el autovector asociado.

2. Utilizando solamente el Torema de los crculos de Gerschgorin, para las siguientes matrices: A $= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -9 & -3 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

   $C = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   Copie y peque los cdigos correspondientes:

   A = [-4 0 1 3; 0 -4 2 1; 1 2 -2 0; 3 1 0 -4]

   B = [5 -3 2 3; -1 2 2 1; -9 -3 -3 -2; 3 -4 -7 -1]

   C = [-4 -1 1 -3; -1 -4 2 1; 1 2 -2 0; 3 -1 2 -4]

   D = [1 0 -3 2; -4 -4 -2 0; -4 -3 2 -2; -1 -1 2 2]

   a) Reporte las cotas para los autovalores

   b) En un lienzo (figura) dibuje los crculos, un color distinto para cada elemento de la diagonal de la matriz. Agregue al lienzo ttulo y leyenda

   c) Reporte la cota asociada al radio espectral de la matriz, $\rho(A_k)$

   d) A ttulo ilustrativo, utilizando el comando eig, halle los autovalores y dibujelos sobre el mismo lienzo con asteriscos negros

   e) Verifique que el radio espectral esta dentro de la cota establecida en el punto $2c$

3. Dadas las matrices

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 55 & 45 & 40 & 40 & 45 \\ 45 & 55 & 45 & 40 & 40 \\ 40 & 45 & 55 & 45 & 40 \\ 40 & 40 & 45 & 55 & 45 \\ 45 & 40 & 40 & 45 & 55 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 5 & 1 & 5 & 25 & 125 \\ 25 & 5 & 1 & 5 & 25 \\ 125 & 25 & 5 & 1 & 5 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 100 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & -95 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 50 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & -95 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

a) Implemente y use el método QR para calcular todos los autovalores de las matrices A y B. Puede usar la funcin qr de para hacer la factorización de las matrices.

b) Calcule el radio espectral de las matrices a partir del cálculo realizado en el item anterior.

4. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -9 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -0 \\ -9 & -1 & 0 & 10 \\ -6 & 7 & -3 & -6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -2 & -3 \\ -6 & -7 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & -8 \\ 9 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 & -6 \\ -2 & 0 & -6 & -0 \\ -9 & -1 & 0 & 10 \\ -6 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 18 & -17 & 7 & -3 \\ 4 & 15 & 5 & 12 \\ 8 & 30 & 10 & 24 \\ 14 & -11 & -15 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E{=}A}^{\mathsf{T}} * AF = D^{\mathsf{T}} * D$$

Responda:

a) ¿A cuales de estas matrices se le puede aplicar el Mtodo de la Potencia para aproximar el autovalor mas grande en valor absoluto? ¿Cuales de ellas cumplen con las hiptesis del mtodo? ¿Cuales no? Justifique.

b) Implemente el Mtodo de la Potencia y utilicelo para hallar el mayor autovalor en mdulo a las matrices que cumplan con las hiptesis del mtodo. Reporte tanto el autovalor como el autovector asociado.

c) Verifique *numricamente* que realmente el autovalor/autovector encontrado cumplen con

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

¿Opina que los elementos aproximados son aceptables? ¿Bajo que criterio?

d) ¿Cmo se comparan estos valores con los obtenidos a travs del comando eig de ?

5. Un planeta sigue una orbita elíptica, la cual puede ser representada en coordenadas Cartesianas (x, y) mediante la ecuación:

$$ay^2 + bxy + cx + dy + e = x^2 \tag{1}$$

   a) Emplee el método de mínimos cuadrados para determinar los parámetros orbitales a, b, c, d y e, dadas las siguientes observaciones:

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

   b) Resuelva el problema empleando Ecuaciones Normales y la Factorización de Cholesky.

   c) Resuelva el problema empleando la Factorización QR. Puede emplear la función qr de .

   d) Compare los resultados obtenidos de los ítems anteriores.

   e) Reporte las ecuaciones elpticas obtenidas para cada uno de los ajustes anteriores

   f) Grafique: los datos proporcionados con asterscos negros, la orbita resultante por Ecuaciones Normales en rojo y la orbita resultante por la Factorizacin QR en color azul.

   g) Perturbe ligeramente los datos de entrada adicionando a cada una de las coordenadas de cada uno de los puntos un número aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo $[-0{,}005, 0{,}005]$ y resuelva nuevamente el problema de mínimos cuadrados para los datos perturbados. Reporte y Compare los nuevos valores de los coeficientes con los calculados previamente, reporte estos en una tabla. Al igual que el ítem anterior, grafique sobre el lienzo (ventana de grfica) existente las nuevas orbitas. De color magenta la orbita resultante por Ecuaciones Normales y de verde la orbita resultante por la Factorizacin QR. Adicionalmente agregue ttulo y leyenda de las cuatro orbitas al lienzo. ¿Que efecto produce esta diferencia de resultados en la gráfica de la orbita?. ¿Podría explicar este comportamiento?. Justifique.

6. Dada la tabla de datos:

x	y	z(x,y)
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

a) Realice una aproximación bilineal de la forma $z(x, y) = a + bx + cy$, planteé explícitamente el sistema de ecuaciones sobredeterminado para calcular a,b y c, y resuélvalo. ¿Qué valores obtuvo?

b) Repita el ejercicio anterior aproximando una función de la forma $z(x, y) = a + bx + cy + dxy$ y comente sobre sus resultados

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 48 & 2 & 16 & 30 \\ 46 & 10 & 14 & 28 & 32 \\ 8 & 12 & 26 & 40 & 44 \\ 20 & 24 & 38 & 42 & 6 \\ 22 & 36 & 50 & 4 & 18 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Implemente convenientemente (justifique su elección) un algoritmo que permita calcular el autovalor m"as cercano a 120 de la matriz A usando:

a) El funcional lineal de proyección sobre una coordenada escogida por Ud.

b) El funcional lineal dado por el cociente de Rayleigh $x^t Ax/x^t x$.

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Implemente convenientemente (justifique su elección) un algoritmo que permita calcular el autovalor más lejano a 10 de la matriz A.

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -261 & 209 & -49 \\ -530 & 422 & -98 \\ -800 & 631 & -144 \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Dibuje los círculos de Gershgorin asociados a A.

b) Implemente convenientemente (justifique su elección) un algoritmo que permita calcular el menor y mayor autovalor de la matriz A usando:

1) El funcional lineal de proyección sobre una coordenada escogida por Ud.

2) El funcional lineal dado por el cociente de Rayleigh x^tAx/x^tx.

10. Dado el conjunto de datos anexo en el archivo data.mat resuelva lo siguiente:

a) Elabore una funcin en que ajuste un conjunto de datos mediante un polinomio de grado n, basándose en la teoría de los mínimos cuadrados. La función recibirá un vector x con las abscisas de los puntos, un vector y con sus ordenadas, y el grado n del polinomio. En la salida dicha función devolverá el error de mnimos cuadrados y un vector con los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados de grado $[n,\ (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)]$. Además, en la función se debe graficar el polinomio de ajuste obtenido así como los puntos dados.

b) Elabore una función para la evaluación anidada de Horner del polinomio construido en el punto anterior.

c) Escoja convenientemente (justifique su elección) por lo menos 5 polinomios de aproximación y grafíquelos junto con la nube de puntos, usando los programas desarrollados en los puntos anteriores. ¿Qué observa?. ¿Qué conclusiones puede derivar del análisis cualitativo y cuantitativo de estos ajustes?

11. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Usando el Mtodo de la Potencia empleando un funcional lineal de proyeccin sobre una coordenada escogida por Usted, calcule los siguientes autovalores:

a) Mayor de los autovalores.

b) Menor de los autovalores.

c) Autovalor mas cercano a 19.

d) Autovalor mas lejano a 30.

e) Repita el ejercicio anterior usando el cociente de Rayleigh $x^t Ax/x^t x$.

Ayuda: si Ud. programa bien su laboratorio, solo hará dos funciones y un programa principal. De igual manera, una forma eficiente de resolver el sistema $x^{k+1} = Ax^k$ dado que x^{k+1} cambia en cada iteracin, es hacer una descomposición LU de la matriz A y aplicar sustitución hacia adelante y hacia atrás, hágalo.