UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dpto. de Cómputo Científico y Estadística
Cálculo Numérico CO-3211

LABORATORIO # 2

Normas y condición de una matriz.

1. Para un valor de n fijo, se define el polinomio

$$p(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} t^{j-1} \tag{1}$$

como puede apreciarse los coeficientes del polinomio son todos iguales a 1. El siguiente problema tiene como objetivo reproducir estos coeficientes mediante el siguiente experimento numérico. Utilice los n valores de la forma $t = 1 + i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Si los coeficientes del polinomio fuesen desconocidos y se denotan por $x_1, x_2, ..x_n$, es decir, se considera que el polinomio es de la forma

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + ... + x_n t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} x_j \; t^{j-1} \tag{2}$$

entonces, para $1 \leq i \leq n$, se debera tener que

$$p(1+i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{j-1} \equiv \frac{1}{i}[(1+i)^n - 1] \tag{3}$$

denotando por $a_{i,j} = (1+i)^{j-1}$ y $b_i = [(1+i)^n - 1]/i$ en (3), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, x_j = b_i \;\; (1 \leq i \leq n) \tag{4}$$

la matriz $A = (a_{i,j}))$ que define al sistema lineal anterior se le conoce como *matriz de Vandermonde.*

a) Para $n = 25$, calcule el determinante de la matriz A. ¿Es A invertible?.

b) En ese caso, ¿cuál es la solución exacta del sistema $Ax = b$?.

c) Calcule AA^{-1} y compare con la identidad (calcule $\|AA^{-1} - I\|_\infty$).

d) Calcule $C = (A^{-1})^{-1}$, ¿Qué observa?.

e) Calcule $det(A)det(A^{-1})$. ¿Qué obtuvo?. ¿Era lo esperado?.

f) Calcule el número de condición de la matriz A usando norma infinito.

g) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ usando el método de eliminación Gaussiana sin pivoteo programado por Ud. en .

h) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ (en $x = A\backslash b$).

i) Genere un vector w de unos de tamaño 25. Determine $\|b - Aw\|_\infty$ y $\|x - w\|_\infty$ para la solución encontrada en el inciso anterior. ¿Que puede concluir del resultado obtenido?.

2. Cosidere el siguiente sistema lineal

$$\epsilon x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 = -1$$

donde $\epsilon = 10^{-k}$ y k es un parámetros que toma los siguientes valores: $k = 5{,}01,\ 5{,}02,\ 5{,}03,\ \ldots,\ 14{,}99,\ 15$.

Obtenga la solución analitica del sistema en términos de ϵ y luego

- Escriba un script en MatLab en el cual se resuelva el sistema para cada uno de los valores de ϵ, usando el método de eliminación Gaussiana Sin pivoteo programado por Ud.

- Se define la función error como $error(k) = \|x^* - x\|_2$ donde x^* es la solución obtenida mediante eliminación Gaussiana sin pivoteo y x es la solución exacta hallada en el primer item. Escriba un script en Matlab que grafique la función x vs. $error(k)$ definida previamente. Describa y analice lo que se observa en el gráfico.