UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dpto. de Cómputo Científico y Estadística
Cálculo Numérico CO-3211

LABORATORIO # 3

Condicionamiento. Eliminación Gaussiana.

1. Para un valor de n fijo, se define el polinomio

$$p(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} t^{j-1} \tag{1}$$

Como puede apreciarse los coeficientes del polinomio son todos iguales a 1. El siguiente problema tiene como objetivo reproducir estos coeficientes mediante el siguiente experimento numérico. Utilice los n valores de la forma $t = 1+i$, con $i = 1, 2, ..., n$. Si los coeficientes del polinomio fuesen desconocidos y se denotan por $x_1, x_2, ..x_n$, es decir, se considera que el polinomio es de la forma

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + ... + x_n t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} x_j \; t^{j-1} \tag{2}$$

entonces, para $1 \leq i \leq n$, se debera tener que

$$p(1+i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{j-1} \equiv \frac{1}{i}[(1+i)^n - 1] \tag{3}$$

Denotando por $a_{i,j} = (1+i)^{j-1}$ y $b_i = [(1+i)^n - 1]/i$ en (3), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq n) \tag{4}$$

La matriz $A = (a_{i,j}))$ que define al sistema lineal anterior se le conoce como *matriz de Vandermonde.*

a) Para $n = 25$, calcule el determinante de la matriz A . ¿Es A es invertible?.

b) En este caso, ¿cuál es la solución exacta del sistema $Ax = b$?.

c) Calcule AA^{-1} y compare con la identidad (calcule $\|AA^{-1} - I\|_\infty$).

d) Calcule $C = (A^{-1})^{-1}$, ¿Qué observa?.

e) Calcule $det(A)det(A^{-1})$. ¿Qué obtuvo?. ¿Era lo esperado?.

f) Calcule el número de condición de la matriz A usando norma infinito.

g) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ usando factorización LU sin pivoteo y sustitución hacia adelante y hacia atrás programado por Ud. en `Matlab`.

h) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ (en `Matlab` $x = A\backslash b$).

i) Genere un vector w de unos de tamaño 25. Determine $\|b - Aw\|_\infty$ y $\|x - w\|_\infty$ para las soluciones encontradas en los incisos g) y h). ¿Que puede concluir de los resultados anteriores?.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \times 10^{-2}\epsilon x_1 + 10^{-2}x_2 &= 2 \times 10^{-2} \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\epsilon = 10^{-k}$ y k es un parámetro que toma los valores $k = 1{,}01$, 1,02, 1,03 ,..., 12,99 y $13,00$.

a) Calcule la solución exacta (x_1, x_2) del sistema (5) en término de ϵ.

b) Escriba una función en `Matlab` donde se resuelva el sistema lineal para los valores de ϵ indicados anteriormente usando para ello la factorización LU sin pivoteo programado por ud.

c) Se define la función error como $error(k) = \|x^* - x\|_2$ donde x^* es la solución de (5) obtenida mediante fatorización LU sin pivoteo y x es la solución exacta calculada en a). Escriba un *script* en `Matlab` que grafique la función $error(k)$ usando definida previamente. Describa y analice lo que se observa en el gráfico