

## LABORATORIO # 2

### *Normas y condición de una matriz.*

1. Se tiene un sistema lineal  $Ax = b$  donde la matriz de coeficientes  $A = (a_{i,j})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , está definida como

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

y el vector de lado derecho  $b = (b_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , se obtiene multiplicando la matriz de coeficientes,  $A$ , por un vector de  $n$  componentes todas iguales a 1. La matriz  $A$  definida en (1) se conoce con el nombre de *matriz de Hilbert*.

- a) Para  $n = 25$ , calcule el determinante de la matriz  $A$ . ¿Es  $A$  invertible?
  - b) En ese caso, ¿cuál es la solución exacta del sistema  $Ax = b$ ?
  - c) Calcule  $AA^{-1}$  y compare con la identidad (calcule  $\|AA^{-1} - I\|_\infty$ ).
  - d) Calcule  $C = (A^{-1})^{-1}$ , ¿Qué observa?
  - e) Calcule  $\det(A)\det(A^{-1})$ . ¿Qué obtuvo?. ¿Era lo esperado?
  - f) Calcule el número de condición de la matriz  $A$  usando norma infinito.
  - g) Calcule la solución del sistema  $Ax = b$  (en Matlab  $x = A \backslash b$ ).
  - h) Genere un vector  $w$  de unos de tamaño 25. Determine  $\|b - Aw\|_\infty$  y  $\|x - w\|_\infty$  para la solución encontrada en el inciso anterior. ¿Que puede concluir del resultado obtenido?
2. Genere, como lo hizo anteriormente, una matriz de Hilbert  $H$  de tamaño  $5 \times 5$ , un vector  $w$  de unos de tamaño 5 y un vector asociado de lado derecho  $b$ . Suponga que se introduce una perturbacion infinitesimal  $\Delta H$  de la forma,  $H_{(i,j)} = 0$  para todo  $i, j$ , salvo  $H_{(5,1)} = 4,5e - 6$

a) Verifique que se satisface la condición vista en teoría,

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(H) \frac{\|\Delta H\|}{\|H\|} \quad (2)$$

donde  $\kappa(H)$  es el número de condición de la matriz  $H$ ,  $x$  es la solución exacta del sistema y  $x + \delta x$  es la solución numérica obtenida para el sistema perturbado,

$$(H + \Delta H)(x + \delta x) = b \quad (3)$$

b) ¿Que puede decir del valor  $\|\delta x\|$  en relación a la perturbación de la matriz  $H$ ? ¿Que tanto varia la solución del sistema de ecuaciones al perturbar la matriz  $H$  y por qué?. Escriba en detalle las conclusiones derivadas de este análisis.