Práctico 9

Autovalores y Autovectores

Ejercicio 1. *Determinar los valores y vectores propios de los siguientes operadores lineales*

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por:* $f(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2, 3x_1 - 4x_2)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida por:*$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$

Ejercicio 2. *Obtener los autovalores (reales) y los autovectores (en caso de existir), de las siguientes matrices, con entradas en* $\mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Indicar si las matrices anteriores son diagonalizables.

Ejercicio 3. *Hallar todos los valores y vectores propios y una base de cada espacio propio del operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$$

Ejercicio 4. *Demostrar que si* $\lambda \neq 0$ *es un valor propio de la matriz no singular* A, *entonces* λ^{-1} *es un valor propio de* A^{-1}.

Ejercicio 5. *Demostrar que si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es triangular superior, entonces los autovalores de* A *son los elementos de su diagonal principal.*
Demostrar que se cumple un resultado análogo para el caso en que la matriz A *sea triangular inferior o bien diagonal.*

Ejercicio 6. *Mostrar que las matrices* A *y* A^T *tienen los mismos autovalores. Dar ejemplos donde* A *y* A^T *tengan diferentes autovectores.*

Ejercicio 7. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la matriz A

b) Hallar la matriz diagonal semejante a A.

c) Calcular A^{10}

Ejercicio 8. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y $G : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformaciones lineales. El operador G es involutivo, es decir, $G^2 = G \circ G = Id_{\mathbb{V}}$ y se define $H = G \circ T \circ G$. Si $v \in \mathbb{V}$ es autovector del operador T asociado al autovalor λ demostrar que, $G(v)$ es autovector del operador H asociado al autovalor λ.*