Teorema 6) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ (ver demostración)

- Las progresiones geometricas no son otra cosa más que sucesión de potencias.

ejemplo: $a_n = 3^n$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = e^n$

Teorema 7) $\{r^n\}$ una sucesión geometrica

a) $|r| < 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$

b) $r = 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 1$

c) $|r| > 1$ ó $r = -1 \longrightarrow$ la sucesión diverge

D// a)

si $0 \leq r < 1 \rightarrow r^n$ (decrece y acotada), entonces $\exists$ "a":

$$\lim_{n\to\infty} r^n = a \xrightarrow[\text{teo 6}]{} a = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \cdot a$$

$$(r-1) \cdot a = 0$$

$$\boxed{r = 0} \rightarrow 0 \cdot a = \boxed{0}$$

Q.P.D

- $-1 < r < 0$

$\underbrace{0 < |r| < 1}$

por esto y $\longleftarrow$

por T.V.A

$\downarrow$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = 0}$ $|r| < 1$

b) $\varepsilon > 0$: $|1^n - 1| = 0 < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ la sucesion converge a 1

c) lo uso razonando por el absurdo y con lo probado en a).

Def. Una sucesión definida recursivamente es aque-lla que cumple las siguientes condiciones

- define un valor inicial
- define una formula recursiva para cualquier termino posterior.

AGUSTINA TORRES/

• decimos que una sucesión es monótona si → crece / → no crece / → decrece / → no decrece } q' pase alguna de las 4

no crezca no significa q' sea decreciente siempre

Teorema 4) $\{a_n\}$ sucesión convergente $\rightarrow$ $\{a_n\}$ es acotada

D// sup. sucesión converge $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \ n > N, \ |a_n - a| < \varepsilon$ $n \geq N$

en particular toma un $\varepsilon = 1$ ... $|a_n - a| < 1$ $\xrightarrow{\text{def. modulo}}$ $-1 < a_n - a < 1$

conveniencia

$a - 1 < a_n < a + 1$

osea q' sucede en N-termino termino (a_N en adelante)

los demás como son una cant.

$H_1 = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$

$H_2 = \min\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$

$\underbrace{\min\{a_1, \dots a_n\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_n\}}$

lo q' quería probar.

(mirarlo graficamente) con la grafica

Teorema 5)

(1) → Si $\{a_n\}$ es no decreciente y está acotada superiormente $\rightarrow$ $\{a_n\}$ converge

(2) → Si $\{a_n\}$ es no creciente y está acotada inferiormente $\rightarrow$ $\{a_n\}$ converge

D// (1) $\{a_n\}$ es no decrece $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ y como esta acotada superiormente

$\exists H \geq \{a_n\}$ → por axioma de completitud: $L = \sup\{a_n\}$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq L$

entonces voy a probar que $\{a_n\}$ converge a "L"

como quiero que de alguna forma aparezca un ε; es logico decir $\forall \varepsilon > 0$: $L - \varepsilon < L$ y $L + \varepsilon > L$, pero $L - \varepsilon$ no puede ser una cota, ya que L es la cota superior minima.

$\rightarrow L - \varepsilon \leq a_N$ $\quad a_N \in \{a_n\}$ $n \geq N$

$\underbrace{L - \varepsilon} \leq a_N < a_n \leq L < \underbrace{L + \varepsilon}$ resto L y aplico def modulo

$\underbrace{|a_n - L| < \varepsilon}$ $\quad \underbrace{\forall n > N}$

lo que quería mostrar

(2) analogo solo q' cambian las desigualdades.

30

2

UNIDAD 5: "SUCESIONES Y SERIES NUMERICOS"

• Una sucesión es una función cuyo dominio son los naturales.

$$\underbrace{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}}_{} \Rightarrow \{a_n\} \text{ o } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

(una sucesión puede ser expresadas como puntos en recta real)

(podríamos decir que es una secuencia de puntos)

• Dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al n° "a" si

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \; n > N . |a_n - a| < \varepsilon$ ↳ limite de la sucesión ↗ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Teorema 1)

"f" variable real tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión obtenida a partir de f, cuando la evaluo en "A" $(f(n) = a_n) \to \lim_{n\to\infty} a_n = a$

D// hip: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ ↳ aplico def. $\lim_{x\to\infty}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : x > M \to |f(x) - a| < \varepsilon$

si yo tomara un $\underset{\in \mathbb{N}}{N} \geq M$, y en particular a conveniencia $x = n > N \geq M$, vamos a tener que:

$$|f(n) - a| < \varepsilon = \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon \to \lim_{n\to\infty} a_n = a}_{\text{lo q' quería mostrar.}}$$

• Teorema 2) Teorema del Emparedado

si $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $\exists\, c \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \to \lim_{n\to\infty} c_n = L$

Teorema 3) Teorema del Valor Absoluto

Tenemos $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ej 8 y 9 (hechos en otra hoja).

UNIDAD 4 = "ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS".

↳ contine una o mas derivadas de funciones ~~desconocidas~~

$y = f(x)$

Vamos a trabajar los diferentes tipos de diferenciales según su ORDEN

y' es lo que quiero hallar a travez de estas ecuaciones

↓

orden de la derivada mayor q' interviene en la ecuación.

e.d. 1^er^ orden $F(x, y, y') = 0$

ó $y' = F(x, y)$

SOLUCIÓN → GENERAL → ctes cualquiera valor

SOLUCIÓN → PARTICULAR → a la cte = valor

$y = h(x)$

$y' = h'(x)$

SASTIFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

PROBLEMAS CON VALOR INICIAL

son aquellas ecuaciones las cuales además de darte $y' = f(x, y)$, especifica una condición inicial $y(x) = y_1$

garantizan una solución particular

es lo mismo

$y' = f(x, y)$ PVI. $f(x_0) = y^0$

Lo conozco.

ECUACION DIFERENCIAL SEPARABLE

$g(y)\, y' = f(x)$

las "x" de un lado y las "y" de otro.

↳ para resolver integro en ambos miembros dx

$y' = \frac{dy}{dx} \to y'\,dx = dy$

suponiendo que f y g son continuas entonces son integrables

REDUCIBLE A SEPARABLES

$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

por más q' yo intente separar y dejar una variable de un lado y la otra del otro lado

. se resuelve usando una sustitución:

$y/x = u$ ↓ derivo

$ux + u' = y'$) reemplazo en la ecuación original

integro. ↓ NO OLVIDAR VOLVER A $y/x = u$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL

$y' + p(x)y = r(x)$

$r(x) = 0$ (homogenea)

$y' = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)\, y$

$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$ ∫ integro

$\ln|y| = -\int p(x)\,dx$

$\ln|y| = -\int p(x)\,dx$

$y = e^{-\int p(x)\,dx}$

$y' + p(x)y = r(x)$ ①

$r(x) \neq 0$

$F(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

(multiplico por 1 y aplico regla cadena.

$\left(e^{\int p(x)\,dx}\, y\right)' = e^{\int p(x)\,dx}(y' + p(x)y) = e^{\int p(x)\,dx}\, r$

integro

$e^{\int p(x)\,dx}\, y = \int e^{\int p(x)\,dx} \cdot r\, dx + C$

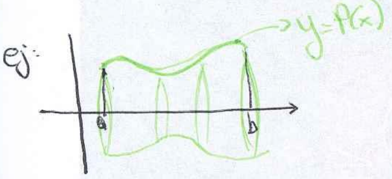
$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int e^{\int p(x)\,dx}\, r\, dx + C\right)$

ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN =

una superficie de revolución se genera cuando se hace girar una curva alrededor de un eje.

↳ esta superficie es la frontera lateral de un solido de revolución

ej:



Def: si f tiene derivada continua en $[a, b]$ entonces el area lateral de la superficie que se obtiene al girar la grafica de la funcion que está dentro de $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, al rededor del eje x será =

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Diferencia entre solido de revolucion y sup.

- volumen = calculo lo que está dentro de la funcion cuando la gira
- area = medida de la sup. exterior o la piel

INTEGRALES IMPROPIAS

IMPROPIAS CON EXTREMOS INFINITOS

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

siempre teniendo en cuenta que la función sea continua en $[\,,\,]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

CONVERGE, si el lim $\exists$ y da un valor.

DIVERGE $\nexists$ lim.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx \to c \text{ es } \mathbb{R}$$

IMPPROPIA CON DESCONTINUIDAD INFINITA.

1) $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx$ ↓ discont. en b

2) $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\, dx$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ ↓ con q' une ya diverge ↓ LISTO.

ESPECIAL IMPROPIA.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ \text{diver} & p \leq 1 \end{cases}$$

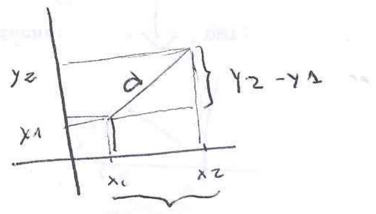
LONGITUD DE ~~curva~~ ARCO

Agustina Torres

- también podemos usar las integrales definidas para calcular la longitud de una curva plana

↳ TECNICA = aproximar un arco por segmentos rectos cuyas long:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\bullet)$$



- Si un trozo de curva tiene longitud de arco finita, decimos que es rectificable

- si f' es continua en $[a,b] \to f$ rectificable, $(a(f(a)))\ (b(f(b)))$

- decimos que es continuamente diferenciable en $[a,b]$ + su gráfica en el intervalo $[a,b]$ se llama curva suave

Sea $y = f(x)$ continuamente diferenciable en $[a,b]$ y L (long. en este intervalo)

① divido el intervalo en "n" partes

② calculo el ancho $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ y $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1})$

③ sumando para cada "n" termino y por $(\bullet)$

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad \lim_{n \to \infty}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \underbrace{|\Delta x_i|}_{\text{positivo por ser distan.}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i$$

Pero como $f'(x)\ \exists\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, por el teorema de valor medio

$$\exists c \in (x_{i-1}, x_i) :$$

VER ESTA PARTE →

$$\Delta y_i = (y_i - y_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \underline{f'(c_i) \cdot \Delta x_i}$$

como es continua para todo $[a,b]$

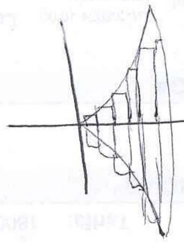
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x)}$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i) \quad \to \lim_{n \to \infty} \sum \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

VOLUMEN DE SOLIDO DE REVOLUCION

↳ otra forma de calcular integrales es para volumenes de solidos tridimensionales → SOLIDOS DE REVOLUCION



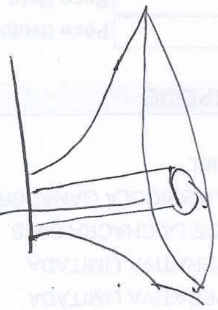
eje de revolución

eje por donde hago "girar" la región

. f es continua en [a,b] y R la región acotada por f, el eje x=a, x=b, el eje "x" → $V=\lim\limits_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \Delta x = \int_a^b (f(x))^2\, dx$

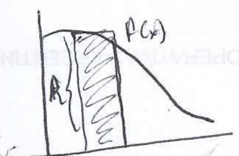
y si tomo el eje "y" $V=\int_c^d (f(y))^2\, dy$

solido dentro de otro.



$$\underbrace{\int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx}$$

a la grande le resto la función mas chiquita



me creo un rectangulo

ancho = Δx

altura = R → f(x)

si yo sumo "n" rectangulo de $\Delta x \cdot f(x_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi (f(x_i))^2 \Delta x = \int_a$$

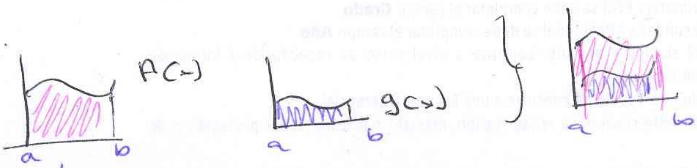
tomo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi (f(x_i))^2 \Delta x = \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

UNIDAD 3 - APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS.

Una de las típicas funciones que tiene el aplicar integrales definidas es CALCULAR EL ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE CURVAS.

hasta ahora veníamos viendo como calcular el área de una función bajo una curva en un intervalo.
Pero si ahora extendemos esa CONSTRUCCIÓN que tenemos con una función y su integral.



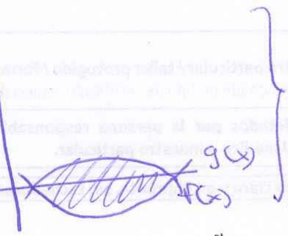
$f(x)$ $\quad$ $g(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b g(x)\,dx$

si a la $\int f(x) - \int g(x) = \int_a^b f - g \, dx$

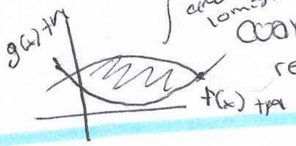
otro caso que se puede experimentar:

$g(x) < f(x)$



para calcular este área con un pequeño desplazamiento vertical.

el área es la misma cuando planteo la resta la cte y desaparece.



Teorema:

f y g continuas en $[a,b]$ y tengo que $g(x) \leq f(x)$ y entonces el área comprendida entre estas funciones y

$x = a$, $x = b$:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

el. A▯ = $\Delta x \cdot h$

como f y g continuas $\rightarrow f - g$ también

suma rectáng. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - g(x_i)\,\Delta x$ $\quad \lim_{n \to \infty}$

D// comenzamos dividiendo el $[a,b]$ en "n" intervalos, cada uno de Δx, el rectángulo va a ser $\Delta x \cdot h$ $\quad h = f(x_i) - g(x_i)$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

COROLARIO (REGLA DE BARROW)

Si f continua en $[a,b]$ y G antiderivada de f $(G'(x)=f(x))$

entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

D// sea $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ (por ser integrable)

por T.F.C $F'(x)=f(x)$, entonces si F es una primitiva de f y G también van a diferir por una cte.

$$G(x)=F(x)+C \qquad a<x<b$$

como G y F son continuas en $[a,b]$

$$② \; G(a)=\lim_{x\to a^+} G(x)=\lim_{x\to a^+} F(x)+C = F(a)+C$$

$$① \; G(b)=\lim_{x\to b^-} (G(x))=\lim_{x\to b^-} F(x)+C = F(b)+C$$

si yo voy a la hipótesis

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \xrightarrow{x=a} F(a)=\int_a^a f(t)\,dt \underset{\text{prop.}}{=} 0$$

entonces ahora resto ①-②

$$\underbrace{G(b)-G(a)=F(b)+\cancel{C}-F(a)^{0}-\cancel{C}=F(b)=\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{lo q' quería mostrar.}}$$

Ejemplo de la identidad

(lg' son sucesión = monotona, con n variable

Teorema 19) Teorema fundamental del cálculo

f acotada e integrable en $[a,b]$. Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces la función F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$
(en el caso que $a=c$ y $b=c$ se analiza por derecha o por izq.)

D// sea $c \in [a,b]$ y un $\varepsilon > 0$ arbitrario, como por hipótesis se que f es continua en c:

$$\exists \delta > 0 \,/\, |x-c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

entonces vamos a probar:

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

vamos a analizar el caso en que $0 < h < \delta$

def. función integral

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot F(c+h) - F(c) - f(c) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)\,dx - f(c) \right| =$$

$$\underset{\text{prop integral}}{=} \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c)\,dx \right| \underset{\text{teorema}}{\leq} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \underbrace{|f(x) - f c|}_{\substack{\text{por hip} \\ < \varepsilon}}\,dx < \varepsilon$$

multiplico a $f(c)$

por hip continuidad

tomando por hip. $\left| \int_c^b f(x) \right| \leq K$ (integrable)

$\frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| < \varepsilon$

ahora considero $-\delta < h < 0$

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)\,dx - f(c) \leq \frac{1}{|h|} \int_c^{c+h} |f(x) - f(c)|\,dx$$

$< \varepsilon$

esto es exactamente lo mismo que probar

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f c$$

CORRECTA

Otra forma del Teorema fundamental del cálculo. (14)

"f" acotada es integrable en $[a,b]$. "f" es continua en $c \in [a,b]$.
entonces F es integrable en c y

$$F'(c) = f(c).$$

Queremos demostrar $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$, ahora defino $F(c+h) = \int_a^{c+h} f(x)\,dx$

$h>0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \underset{\substack{\text{prop.}\\ \text{integral}}}{=} \int_c^{c+h} f(x)\,dx$$

ahora aplico el teorema de valor medio para integrales.

f continua en $[a,b]$, $\exists d \in [a,b]$ $\int_a^b f(x) = f(d)(b-a)$

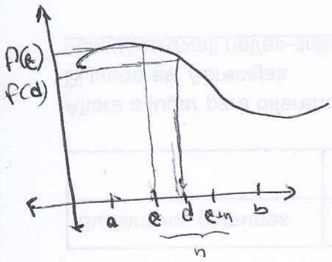
$$\underbrace{\int_c^{c+h} f(x)\,dx = f(d).(c+h-c) = f(d).h}$$

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(d) \;\underset{\substack{\text{aplico}\\ \lim h\to 0}}{=}\; \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}}_{F'(c)} = \lim_{h\to 0} f(d) \quad (1)$$

$$F'(c) = f(c)$$

(1)

GRAFICAMENTE



Cuando yo hago acercar en h lo suficien a cerca

$$c = d = c+h$$
$$f(c)$$

(ver a la profe dice que esta bien)

y si vale para $h>0$, $h<0$

esto pruebo para $h>0$

$$F(c+h) - F(c) = -\int_c^{c+h} f(x)\,dx$$

$$y \quad f(d).(-h)$$

Consulta

parecido

Teorema 13)

"f" acotada e integrable en $[a,b]$, $\rightarrow F$ será continua en $[a,b]$

D// sea $c \in [a,b]$, como f es acotada sobre $[a,b] \rightarrow \exists M>0 \,/\, |f(x)| \leq M$

① $-M \leq f(x) \leq M$

Opa $= \lim_{h \to 0} \underbrace{(f(c+h) - f(c))}_{\text{por eso voy a usar estas}} = 0$

• tomando un $h>0$: $c+h \in [a,b]$

evaluo la función en esos puntos y los resto. def FUNCIÓN INTEGRAL

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f t - \int_a^c f = \int_a^{c+h} f + \int_c^a f = \int_c^{c+h} f$$

invierto la integral — prop. integral

por ① y por teorema que si yo multiplico esa desigualdad por el ancho del intervalo $= (c+h-c) = h$

$$-M.h \leq \underbrace{\int_c^{c+h} f}_{} \leq M.h \rightarrow -Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq Mh$$

por teorema 17) a) $\rightarrow$ ②

$\cancel{c+h} \leq \cancel{f(c+h)} \leq \cancel{Mh}$

$\cancel{c+h \leq}$

• ahora tomamos $h<0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f = -\int_{c+h}^c f \qquad -M(c+h-c) \leq -\int_{c+h}^c f \leq M(c+h-c)$$

$c \leq c+h$

$$-Mh \leq -\int_{c+h}^c f \leq Mh \quad ② \cdot (-1)$$

De ② y ③ poder $|h|<\delta \rightarrow |F(c+h) - F(c)| < \varepsilon$

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M|h| < \varepsilon \quad \text{lo que quiero ⓪}$$

$$Mh \leq \int_{c+h}^c f \leq -Mh \quad ③$$

tomando $\varepsilon>0 \rightarrow M|h| \leq \varepsilon$, como encontrar

$|h| \leq \frac{\varepsilon}{M}$

$$\cancel{M|h|} \; Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq -Mh \leq -M|h|$$

$|F(c+h) - F(c)| < M \frac{\varepsilon}{M}$

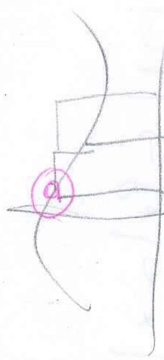
$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} F(c+h) = Fc \rightarrow$ continuida

⓪ $|h|<\delta$ hip. cont. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$|h| < \frac{\varepsilon}{M}$

como encontrar un $\delta \rightarrow \exists \varepsilon$



Teorema del valor medio para integrales:

"f" una función continua en $[a,b] \rightarrow \exists\, c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

D// por hip: f es continua en $[a,b] \xrightarrow[\text{teorema}]{}$ f es integrable

$$m \leq f(x) \leq M$$

aplico $\int$ d

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

~~divido~~ multiplico $\frac{1}{b-a}$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

por continuidad de f → puedo aplicar el teorema de valor intermedio → $\exists\, c \in [a,b] \,/\, f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$

multiplico por $(b-a)$

$$\underbrace{f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{lo que quería probar}}$$

Relación entre integral definida y área:

$f \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x) = \text{area}$; $f \leq 0 \rightarrow -\int_a^b f(x) = \text{Area}$; f cambia de signo $\int_a^b f(x) = A(+) - (A-)$

Relación entre derivada e integral

CALCULO DIFERENCIAL → TANGENTE

CALCULO INTEGRAL → AREA

8

Definición: "f" integrable en $[a,x]$, para cada $a \leq x \leq b$, decimos que Función integral $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

↳ esto resulta ser una antiderivada de f.

Teorema 10): Si "f" es acotada y continua en $[a,b]$ excepto en una cantidad finita de puntos $\rightarrow$ "f" es integrable en $[a,b]$

Teorema 9): Si "f" es continua en $[a,b] \rightarrow$ "f" es integrable en $[a,b]$.

Teorema 12): f y g funciones integrables sobre $[a,b]$

a) $f \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x) \geq 0$

b) $f \leq g \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ 7

d) $m \leq f \leq M \rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)+g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \leq ssp(f+g) - sip(f) - sip(g)}_{} \leq$$

$$ssp(f) + ssp(g) - sip(f) - sip(g) \leq \underbrace{\varepsilon/2 + \varepsilon/2}_{} = \varepsilon \qquad (3)$$

y por otro lado

$$\underbrace{\int_a^b f(x)+g(x) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq sip(f+g) - ssp(f) - ssp(g)}_{} \geq$$

$$sip(f) + sip(g) - ssp(f) - ssp(g) \geq \underbrace{-\varepsilon/2 - \varepsilon/2}_{-\varepsilon} \qquad (4)$$

por (3) y (4)

$$-\varepsilon \leq \int_a^b f(x)+g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \leq \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b f(x)+g(x)\,dx - \int_a^b f - \int_a^b g \right| < \varepsilon \quad \Big\}$$ haciendo tender $\varepsilon \to 0^+$ me queda la desigualdad que quería probar.

5

Teorema: "f" una función acotada e integrable en en intervalo $[a,b]$ y c es una cte $\rightarrow$ $\underbrace{cf(x) \text{ tambien es derivable}}$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

⑥

D// sup "f" $\nearrow$ acotada $\searrow$ integrable

$(f(x)$

• lo primero que quiero hacer es que $cf(x)$ está acotada.

$\underbrace{|f(x)| \leq M}_{hip} \longrightarrow$ $|cf(x)| \rightarrow |c|\,|f(x)| \leq M$

$\underbrace{|c|\,|f(x)| \leq |c|M}$

cf $\rightarrow$ está acotada

• ahora voy a ver que $cf(x)$ es integrable

tomo un $\varepsilon > 0$ $(c>0)$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon/c$

por "f" integrable $\rightarrow$ $ssp(f) - sip(f) < \varepsilon/c$

ahora miro por un rato $<^{\text{infimo}}_{\text{supremo}}$

$m_i = \sup\{f(x)\}$ y $M_i = \sup\{f(x)\}$

$m_i^* = \sup\{cf(x)\}$ $\quad M_i = \sup\{cf(x)\}$

prop. apendice:

$c m_i = m_i^*$ y $cM_i = m_i^*$

$$c\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=n}^{n} m_i^*(t_i - t_{i-1})$$

$$c\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=n}^{n} M_i^*(t_i - t_{i-1})$$

$ssp(cf) = c\,sip(f)$

$sip(cf) = c\,sip(f)$

$\underbrace{ssp(cf) - sip(cf)} = \underbrace{c\,ssp(f) - c\,sip(f) = c(ssp(f) - sip(f)) \leq \cancel{c}\,\frac{\varepsilon}{\cancel{c}}}$ ε

de ahi sale que cf $\rightarrow$ es integrable.

• una vez que se que es integrable

$c\,sip(f) \leq c\int_a^b f(x)\,dx \leq c(ssp(f))$ y $ssp^{(cf)} \leq \int_a^b cf \leq ssp(cf)$

$c\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b cf(x)\,dx$ (si continuo modificando desigualdades voy a llegar a lo solicitado).

una vez obtenida esas desigualdades.

voy a considerar a $R = P \cup Q$. quedandome (1) de la siguiente manera.

$$S_{SR}(f) - S_{IR}(f) < \varepsilon/2 \quad y \quad S_{SR}(g) - S_{IR}(g) < \varepsilon/2$$

$1 < 3$

$-1 > -3$

· ahora con (2) me formo mis sumas.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{M}_i (t_i - t_{i-1})}_{S_{SR}\{f+g\}} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})}_{S_{SR}(f)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i' (t_i - t_{i-1})}_{+ S_{SR}(g)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{m}_i (t_i - t_{i-1}) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})}_{S_{IR}(f)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i' (t_i - t_{i-1})}_{+ S_{IR}(g)}$$

$$S_{IR}(f+g) \geq S_{IR}(f) + S_{IR}(g)$$

$$-S_{IR}(f+g) \leq -S_{IR}(f) - S_{IR}(g)$$

sumo las desigualdades

$$S_{SR}^{(f+g)} - S_{IR}(f+g) \leq \underbrace{S_{SR}(f) + S_{SR}(g) - S_{IR}(f) - S_{IR}(g)}$$

$$\underbrace{S_{SR}(f+g) - S_{IR}(f+g) \leq \left(S_{SR}(f) - S_{IR}(f)\right) + \left(S_{SR}(g) - S_{SR}(g)\right)} < \underbrace{\varepsilon/2 + \varepsilon/2}$$

$$\underbrace{S_{SP}(f+g) - S_{IR}(f+g) < \varepsilon}_{\text{lo que quería llegar}}$$

---

ahora que se que es $f+g$ ~~[illegible]~~ integrable:

$$S_{IP}(f) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S_{SP}(f) \qquad S_{IP}(g) \leq \int_a^b g(x) \leq S_{SP}(g)$$

$$S_{IP}(f+g) \leq \int_a^b (f+g)(x)\, dx \leq S_{SP}(f+g) \quad (4)$$

$$\int_a^b f+g - \int_a^b f - \int_a^b g \leq$$

Teorema: "f" es integrable en $[a,b]$ entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in [a,b]$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S \right| < \varepsilon$$

D// sabemos que como "f" es integrable $\longrightarrow ssp - sip < \varepsilon$

$$sip \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq ssp \quad (1)$$

pero también se a S':

$$sip \leq S \leq ssp \quad \text{multiplico por } (-1)$$

$$-ssp \leq -S \leq -sip \quad (2)$$

ahora sumo (1) y (2)

$$\underbrace{sip + (-ssp)}_{<\varepsilon} \leq \int_a^b f(x)\,dx + (-S) \leq \underbrace{ssp + (-sip)}_{\varepsilon}$$

$$-\varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx - S \leq \varepsilon \quad \text{propiedad de modulo}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S \right| < \varepsilon$$

Teorema: "f" y "g" son integrables en $[a,b] \longrightarrow f+g$ también será integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\,dx$

primero voy a probar que $(f+g)$ es integrable

D// $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \ \exists P, Q \in [a,b]$: tomando a conveniencia un $\varepsilon/2$

$$ss\acute{p}(f) - sip(f) < \varepsilon/2 \quad y \quad ssQ(g) - siQ(g) < \varepsilon/2 \quad (1)$$

ahora por un ratito voy a mirar inf y sup.

$mi = \inf\{f(x)\}$ $\quad Mi = \sup\{f(x)\}$

$mi^* = \inf\{g(x)\}$ $\quad Mi^* = \sup\{g(x)\}$

$\hat{mi} = \inf\{f+g(x)\}$ $\quad \hat{Mi} = \sup\{f+g(x)\}$

por propiedad Apendice

$\hat{Mi} \leq Mi + Mi^*$

$\hat{mi} \geq mi + mi^*$ (2)

(3)

$\Leftarrow$) ahora supongo, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in [a,b]$: Qpq = f es integrable

$SS_R - SI_R < \varepsilon$ $\qquad \sup\{SI_P\} = \inf\{SS_Q\}$

• para cualquier partición R sabemos que Q y $P \in [a,b]$

CONSULTAR SI ESTA BIEN

$\cdot\ SI_R \leq \sup\{SI_P\} \longrightarrow SI_R \leq \int_a^b f(x) \leq SS_R \rightarrow$ por def $SI_R \leq \sup\{SI_P\}$

y $\cdot\ SS_R \geq \inf\{SS_Q\}$ $\qquad \inf\{SS_Q\} \leq SS_R$

estoy buscando armar/llegar a mi hip

$a < b$

$c < d$

. $SI_R \leq \sup\{SI_P\} \xrightarrow[\text{multi } (-1)]{} -SI_R \leq -\sup\{SI_P\}$

. $SS_R \geq \inf\{SS_Q\} \rightsquigarrow \underbrace{\inf\{SS_Q\} \leq SS_R}$

$SI_R < \sup\{SI_P\}$

. resto las desigualdades $\qquad \underbrace{-\sup\{SI_P\} \leq -SI_R}$

$\cancel{SS_R} + (-SI_R) \leq \cancel{\inf\{SS_Q\}} + (-\sup\{\cancel{SI_P}\}) \longrightarrow$ las sumo

$0 \leq \underbrace{\inf\{SS_Q\} - \sup\{SS_Q\}} \leq SS_R - SI_R \underbrace{< \varepsilon}_{\text{hip}}$

$0 \leq \inf\{SS_Q\} - \sup\{SS_Q\} < \varepsilon$ $\qquad$ tomo limite

$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{SS_Q\} - \sup\{SS_Q\} < \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon = 0$

$\lim_{\varepsilon \to 0} a < 0 \qquad \underbrace{\inf\{SS_Q\} = \sup\{SI_P\}}_{\text{lo que quería mostrar}}$

$a < 0 \rightarrow$

∴ demostrada la ida y vuelta

el teorema del Criterio de la integrabilidad vale.

CRITERIO DE LA INTEGRABILIDAD

Dada una función "f" (la cual está acotada): $[a,b] \to \mathbb{R}$, vamos a decir que "f" es una función integrable $\leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R$ (partición $[a,b]$): $SS_R(f) - si_R(f) < \varepsilon$

α ... $\forall \varepsilon > 0$ $\alpha + \varepsilon < x$

$\to$) hip: f es integrable y que está acotada entonces podríamos decir ($\int_a^b f(x)\,dx$) $\to$ sería nuestras cotas.

tomo $\varepsilon > 0$: P y Q sean particiones de $[a,b]$ $\to \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\underbrace{\int_a^b f(x) + \varepsilon/2 > SS_Q(f)}_{\inf} \text{ y } \underbrace{\int_a^b f(x)dx - \varepsilon/2 < si_P(f)}_{\sup}$$

$\to$ Proposición
$\alpha - \varepsilon < x$
$\beta + \varepsilon > x$

como por hip. está acotada en un intervalo. entonces va a existir un supremo y un ínfimo

Sean P y Q particiones cualquiera

- def. supremo $\to \sup\{sip / p$ es partición $[a,b]\}$
- def. ínfimo $\to \inf\{SSQ / Q$ es partición de $[a,b]\}$ (2)

Propiedad del apéndice
$\forall \varepsilon > 0 / \exists x \in A$:
- $\alpha - \varepsilon < x$
- $\beta + \varepsilon > x$ (1)

- entonces yo dije al principio que va a estar acotada por $\int_a^b f(x)\,dx$ a esto lo voy a usar como inf. y sup.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < sip}_{\text{por def. supremo}} \text{ y } \underbrace{\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > SSQ}_{\text{def. ínfimo}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists sip \in P$ / $\forall \varepsilon > 0 \ \exists ssq \in Q$

b puedo ver mejor gráficamente.

ahora lo que hago es tomar la unión entre P y Q $\to P \cup Q = R$

$Q \subset R$ — $SSQ \geq SSR$
$P \subset R \to sip \leq SIR$

por prop vistos antes $sip \leq ssq$

$\int_a^b f(x) - \varepsilon/2 < sip < ssq < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon/2$ no hace falta

$sip < SSR$ $\quad SSQ > SSR$

despejo $\int_a^b f(x) + \frac{\varepsilon}{2} > SSR \ge SIR > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$

prop. $a < b$, $c < d$ $\} a + c < b + d$

1

$SSR < \int_a^b f(x) + \varepsilon/2$

- $SSR - \int_a^b f(x) < \varepsilon/2$

CONSULTAR no modifica si es positivo?

$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon/2 < SIR$

- $\int_a^b f(x)\,dx - SIR < \varepsilon/2$

$\to$ ahora sumo ambas desigualdades

$SSR - \cancel{\int_a^b f(x)dx} + \cancel{\int_a^b f(x)dx} - SIR < \underbrace{\varepsilon/2 + \varepsilon/2}_{=\varepsilon}$

$\underline{SSR - SIR < \varepsilon}$

lo que quería mostrar.

Definición de Integral Definida:

• siendo $a < b$, llamamos partición del intervalo $[a,b]$ a una colección de puntos finitos:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Siempre hay un punto más que cant. de intervalos.

Partición regular

$\frac{b-a}{n} = \underbrace{\Delta x}_{\text{ancho del intervalo}}$

NORMA DE UNA PARTICIÓN

→ partición regular

→ $\|P\| = \Delta x \to \frac{b-a}{n}$

→ irregular = maximo ancho entre los q' haya subintervalos.

Decimos que la partición Q es mas fina que P:

$$P \subseteq Q$$

osea que Q se forma al agregarle puntos a P.

RECORDAR QUE LA INTEGRAL ES EL LIMITE DE LA SUMATORIA

SUMA SUPERIOR

$M_i = \sup\{f(x) / x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ → puede suceder q' sea negativo

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x}_{Ssp}$ — Δx: ancho de cada subintervalo.

$Ssp = U(f,P)$

SUMA INFERIOR:

$m_i = \inf\{f(x) / x \in [t_{i-1}; t_i]\}$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x}_{Sip}$ — Δx: ancho de cada subintervalo.

$Sip = L(f,P)$

si la "f" resulta positiva la Σ, termina siendo la suma de area de rectang.

• $Sip \leq Ssp$ (se demuestra $\inf \leq \sup$)

• P y Q particiones → $P \subset Q$

$Sip \leq SiQ \wedge Ssp \geq SsQ$

• P y Q particiones (considera $P \cup Q$)

$Sip \leq SsQ$

• $\sup\{Sip\} \leq SsQ$

$\sup\{Sip\} \leq \inf\{SsQ\}$

• f es integrable en $[a,b]$ si:

$\sup\{Sip\} = \inf\{SsQ\}$

↓

• $\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{SsQ\} = \sup\{Sip\}$

• $Sip \leq \int_a^b f \leq Ssp$

ejemplo de una función no integrable (infinitas discont.)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \to \text{más grande} \\ 0 & x \in \mathbb{I} \to \text{más chico} \end{cases}$$

CASO 1) factores lineales
por cada factor de la forma $(x - x_0)^m$, la descomposición en fracciones simples debe tener la sig suma de m fraccione

$$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-x_0)^m}$$

CASO 2) Factores cuadráticos
por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición será así:

$$\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Caso 3) factores lineales y cuadráticos
es la combinación del caso 1 y 2. (ver ejemplos en el teorico).

Apéndice: supremos e infimos.

propiedades

$\alpha = \sup A$:
- $\alpha > x \quad \forall x \in A$
- $\left.\begin{array}{l} 1.\ \alpha > x \\ 2.\ \alpha_1 > \alpha \end{array}\right\}$ prop.

$\beta = \inf A$
- $\beta < x \quad \forall x \in A$
- $\left.\begin{array}{l} \beta < x \\ \beta_1 < \beta \end{array}\right\}$ prop.

AXIOMA COMPLETITUD.
- si A está acotado superiormente entonces seguro $\exists\, \alpha = \sup A$
- si A está acotado inferiormente entonces seguro $\exists\, \beta = \inf A$

- $M_i = \{\sup f(x)\}$
- $M_i^* = \sup \{g(x)\}$
- $\hat{M_i} = \sup \{f+g\}$

- $m_i = \inf \{f(x)\}$
- $m_i^* = \inf \{g(x)\}$
- $\hat{m_i} = \inf \{f+g(x)\}$

PROP.
- $\hat{M_i} \leq M_i + M_i^*$
- $\hat{m_i} \geq m_i + m_i^*$

UNIDAD 2: "INTEGRALES DEFINIDAS"

Definición: El área de la región S que esta por debajo de la grafica (f continua y positiva), voy a decir que el area es el limite de la suma de cada area del rectangulo.

$$A = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x \right]}_{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

a lo q' proximamente lo voy a llamar suma de Rieman

metodo de integración por partes

f y g } funciones derivables

D// T.3
$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$(f(x).g(x))' - f(x).g'(x) = f'(x).g(x)$$

$$\int f'(x).g(x) = \int (f(x).g(x))' - \int f(x).g'(x)$$

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x).g'(x)dx$$

Formula para trabajar la integración por parte.

Teorema 3) "f" y "g" son dos funciones derivables, entonces:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

integración de funciones inversas:

si tengo $y = f^{-1}(x) \longrightarrow f(y) = x$ y $f'(y) = \frac{dx}{dy}$, obtenemos que:

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y\, f'(y)\,dy$$

(aplico integración por partes)

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y f'(y)\,dy = y.f(y) - \int f(y)\,dy = f^{-1}(x)(x) - \int f(y)\,dy$$

metodo de integración por fracciones simples.

funciones las cuales son cocientes entre funciones polinomicas

por ejemplo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ } si $gr(P(x)) > gr(Q(x))$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int T(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

osea realizamos la division entre los polinomios.

o factorizamos el denominador (preferentemente en raices) $(x-1)^{2}(x+1)$

$(x-x_0)^m$ ó $(ax^2+bx+c)^n$

1) $f(x)=x^a \ (a\neq -1) \longrightarrow \int f(x)\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

2) $f(x)=e^x \longrightarrow \int f(x)\,dx = e^x + C$

3) $f(x)=\operatorname{sen} x \longrightarrow \int f(x)\,dx = -\cos + C$

4) $f(x)=\cos x \longrightarrow \int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x + C$

5) $f(x)=\frac{1}{x} \longrightarrow \int f(x)\,dx = \ln|x| + C$

6) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow \int f(x)\,dx = \operatorname{tag} x + C$

7) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \longrightarrow \int f(x)\,dx = -\operatorname{cotag} x + C$

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \int f(x)\,dx = \operatorname{arcosen} x + C$

9) $f(x)=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \int f(x)\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

METODOS DE INTEGRACIÓN

• Metodo de sustitución

sirve especialmente para las funciones compuestas.

proposición 1)

F es primitiva de f, entonces $F\circ g$ es una primitiva de $(f\circ g)g'$.

D//por regla cadena

$$(F\circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) = \underbrace{(f\circ g)\, g'(x)}$$, lo que quería demostrar.

$$\Rightarrow \int f(g(x))g'(x)\,dx = (F\circ g)(x) + C \quad \text{ó} \quad \int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Teorema 2) Si $u=g(x)$ es una función derivable cuya imagen es un intervalo I, y f es continua en I, entonces.

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Estrategia para trabajar con sustitución

- realizar una sustitución $\rightarrow u=g(x)$
- derivar u
- hallar du/dx
- escribir la integral en base a la variable u
- trabajar/resolver la integral (lo q' se pueda)
- Finalmente "resuelta" la integral.
- remplazamos a "u" por el valor q' le asignamos originalmente.

integración de funciones racionales con senos y cosenos. ¿¿entra??

$$\cdot\, z = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \frac{2z}{z^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{z^2+1}$$

$$dx = \frac{2}{z^2+1}\,dz.$$

DAD 1: Integrales indefinidas

Primitiva / Integral:

llamamos a una función F primitiva de la función f, si para todo x en el dominio de f:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{osea} \quad \left(\int f(x)\right)' = f(x)$$

Teorema: Si F es una integral de f en un intervalo I, entonces G es una integral también de f en el intervalo I si y solo si es de la forma:

$$\boxed{G(x) = F(x) + C} \quad \forall x \in I,\ C = cte.$$

Toda primitiva difiere de otra primitiva → difiere por una constante.

D// hip general: $F'(x) = f(x)$

$\rightarrow$) hip $G'(x) = f(x)$

$$\underbrace{(G(x) - F(x))'}_{?} = G'(x) - F'(x) \quad \text{por hip}$$
$$= f(x) - f(x)$$
$$= 0 \quad \forall x \in I$$

entonces

$G(x) - F(x) = C$ → por derivar $C' = 0$

$G(x) = F(x) + C$

$\leftarrow$) $G'(x) = (F(x) + C)'$

$G'(x) = F'(x) + C'$

$G'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Antiderivada}} + 0 \quad \forall x \in I$

$\therefore$ queda demostrado el teorema

Notación integrales

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

→ normalmente usamos esta.

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ } ecuación diferencial

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrando}}\, \overbrace{dx}^{\text{variable de integración}} = F(x) + \underbrace{C}_{\text{constante de integración}}$$

Reglas basicas de integración:

1) $\int k\, dx = kx + C$

2) $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

3) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

b) D// supongo por el absurdo

↳ diverge en x_1, suponiendo q $\exists x_0$ con $|x_1|<|x_0|$ donde la serie converge. Por lo demostrado en a)

la serie converge absolutamente en x_1 → ABSURDO

contradice la hip.

QDT

Teorema 4) (sale de aplicar Teorema del cociente)

en una serie de potencia pueden ocurrir exactamente una de estas cosas.

a) la serie solo converge cuando $x=a$ $(R=0)$

b) la serie converge absolutamente $\forall x$ $(R=\infty)$ opcto

c) Dado el radio de convergencia, la serie converge absolutamente si $|x-a|<R$ y diverge si $|x-a|>R$

Intervalo de convergencia = Dominio

↳ a) el intervalo es solo un punto

b) el intervalo es $(-\infty, +\infty)$

c) converge $(a-R, R+a)$ y diverge $(-\infty, a-R) \cup (a+R, +\infty)$

CONCLUSION SERIE DE POTENCIA:

para encontrar el intervalo de convergencia:

1) usar C. Cociente para determinar el radio

2) R es finito y positivo (analizo convergencia / divergencia) en los puntos extremos del Intervalo.

VER EJEMPLO
Y ENTENDERLOS.

Dominio - para q' valores de "x" la serie converge.

Teorema 3) Dada $\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

a) si la serie converge para $x_0 \neq 0 \rightarrow$ converge absolutamente $\forall x : (|x| < |x_0|)$ hip grel

b) si la serie diverge para un $x_1 \rightarrow$ diverge $\forall x : |x| > |x_1|$

(analizamos con modulo pq' el signo de cada termino pueda variar según "x")

D// a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge $\xrightarrow[C.T.G]{} \lim_{k\to\infty} c_k x^k = 0$, aplicando def

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists, N_\varepsilon \in \mathbb{N} : k \geq N : |c_k x^k - 0| < \varepsilon$ } tomando en particular y a conveniencia $\varepsilon = 1$

$$|c_k x^k| < 1$$

$$|c_k| < \frac{1}{|x^k|} \quad (1) \quad \Big\} \text{ despejo } \forall k \geq N$$

fijando un $\underbrace{x \in (-|x_0|, |x_0|)}_{|x| < |x_0|}$ } en la serie $|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots$ en un momento $|c_N| < \frac{x^n}{|x_N|^n}$ =

truncas

$$\underbrace{|c_N||x|^N}_{< \frac{|x|^N}{|x_N|^N}} + \underbrace{|c_{N+1}||x|^{N+1}}_{< \frac{|x|^{N+1}}{|x_{N+1}|^{N+1}}} \quad (2) \Big\} \text{ contiene la forma de comparación}$$

hay una cantidad finita de terminos antes de $|c_N x^N|$ y su suma es finita.

A partir de $|c_N x^N|$, por (1) la suma resulta ser menor que.

$$(2) < \left|\frac{x}{x_0}\right|^N + \left|\frac{x}{x_0}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{x_0}\right|^{N+2} + \ldots = \sum_{n=N}^{\infty} r^n \quad r = \left|\frac{x_0}{x_0}\right| < 1 \quad r < 1 \text{ converg}$$

último resulta ser convergente dado que $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, luego por comparación, $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ converge } convergencia absoluta.

Teorema 1) Teorema de Taylor

Si una función es derivable hasta el orden $n+1$ en un intervalo I, que contiene a $x=a$, entonces para cada $x \in I$, $\exists\, \xi \in [x, a]$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{na}(x)$$

$$R_{na}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1!}(x-a)^{n+1}$$

Teorema 2) Desigualdad de Taylor

Si $|f^{n+1}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$ entonces → en un intervalo alrededor al centro. "a"

$$|R_{na}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{para } |x-a| \leq d$$

SERIES DE POTENCIAS. → sirve para escribir una función como una serie.

↳ transformar una función con variable en una suma infinita.

↳ serie de potencias alrededor de 0 se ve así:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + \dots}$$ } infinita

"x" es la variable

"c_n" cte = llamados coef. de las series

Observación: $x^0 = 1$, también en caso q' $x=0$: $0^0 = 1$

↳ de forma más general:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots,}_{\text{serie de la potencia centrada en "a"}}$$

•una serie de potencia puede converger para algunos valores de "x" y diverger para otros valores.

Debemos tener en cuenta q' este tipo de series no siempre es una serie numérica

↳ "x" puede tomar valores, pero puede suceder q' los coef. los desconozca.

UNIDAD 6: POLINOMIO DE TAYLOR Y SERIES DE POTENCIA

Dado $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

decimos que el polinomio está centrado en a, si lo podemos escribir así

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$$

una función "f" puede aproximarse para valores cercanos a cero, por la recta tangente a ella en un punto (cero)

$$P_{1(0)}(x) = f(0) + f'(0)x$$

grado / donde está centrado

• Dada una función "f" que tiene "n" derivadas sucesivas en el centro llamaremos polinomio de Taylor de f, de orden "n" alrededor de 0:

$$P_{n0} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

ver ejemplo

• Dada una función "f" que tiene "n" derivadas en a, llamaremos polinomio de Taylor de f de orden "n" alrededor de $x=a \rightarrow (x-a=0)$

$$P_{na}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \cancel{\dots} + \dots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

ver ejemplos! $\rightarrow e^x$

• La aproximación suele ser mejor en valores de "x" próximos a "a"

. La aproximación suele ser mejor mientras más grande sea el grado del polinomio.

- ya q' estoy trabajando con aproximación, hay margen de error:

$$f(x) - P_{na}(x) = R_{na}(x)$$

$\boxed{\text{VER TEORICO}}$

$$\text{Error} = |R_{na}(x)|$$

Teorema 20.) Si una $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es converg

D//

por propiedad de modulo $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq |a_n|$) sumo $|a_n|$

$$a_n + |a_n| \leq |a_n| + |a_n|$$

$$a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

por def. modulo

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} a_n > 0 & 2a_n \\ a_n < 0 & 0 \end{cases} \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2a_n$$

por hip. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (por ser absolutamente convergente) (1)

pero si a (1) lo multiplico por 2: $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge

por criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|}_{\text{yo se q' converge}}$$

por comparación

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ también converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|}_{\text{conv.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\text{convergo.}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ converge

lo q' queria mostrar

en el caso que $l=1$

doy ejemplo

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → por ser p-serie $p=1$ → diverge.

↳ aplico

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n'}{(n+1)'}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ = p-serie de $p>1$ → converge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} = \frac{2}{2} = 1$$

$l < 1$ tomo $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ $\quad r = l + \varepsilon < 1 \quad > 0$

$\left| \begin{array}{l} r = l+\varepsilon \\ a_n > 0 \end{array} \right.$

$a_{n+1} < r \cdot a_n$

tomando

$n = N \qquad a_{N+1} \leq r a_N \quad \longrightarrow \quad r a_{N+1} \leq r^2 a_N$

$n = N+1 \qquad a_{N+2} \leq r a_{N+1}$

por transitividad y en terminos generales.

$\underline{a_{N+k} \leq r^k a_N}$

pero yo se que:

$\sum_{n=1}^{\infty} r^k$ con $|r| < 1 \rightarrow$ converge $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^k a_N$ converge

y por criterio de comparacion

$\underbrace{a_{N+k}}_{b_n} \leq \underbrace{r^k a_N}_{a_n}$ $\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ también} \right)$

yo se

$\sum_{n=N}^{\infty} r^k a_N$ converge $\longrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

pero

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ $\qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\sum_{n=1}^{N-1} a_n$: suma finita siempre converge

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$: demostramos q' converge

• $l = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = $ p-serie $\xrightarrow{p=1}$ diverge, ¿Cuánto da $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n'}{(n+1)'} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ analogo lim. $\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2}$ $\lim \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)'}{(2n+2)'} = \frac{2}{2} = 1$

cuando en ambos casos con el lim ... a 1, pero una diverge y la otra converge.

CRITERIO DEL COCIENTE ¿$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

$a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ → nueva sucesión

· $l < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

· $l = 1 \rightarrow$ queda inconcluso.

· $l > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

D// primero por definición de límite de una sucesión

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \underbrace{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon}_{\text{lo q' más voy a usa}}$

· $l > 1 \rightarrow r = l - \varepsilon > 1$
· $l < 1 \rightarrow r = l + \varepsilon < 1$
> 0 (1) def. modulo $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$

$l > 1 \qquad l < 1$

· $l > 1$

tomo $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ por (1) y $a_n > 0$

$r \cdot a_n < a_{n+1}$

tomando $n = N \rightarrow a_{N+1} > r a_N \rightarrow r a_{N+1} > r^2 a_N$

$n = N+1 \rightarrow a_{N+2} > r a_{N+1}$

transitividad y en terminos generales

$a_{N+k} > r^k a_N$

· tomando el $\lim_{k\to\infty}$:

$\lim_{k\to\infty} a_{N+k} > \lim_{k\to\infty} r^k a_N$

$a_N \lim_{k\to\infty} r^k$ diverge por ser una sucesión geometrica con $r > 1$

entonces por C.T.G ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge)

Voy a poder decir $\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_N$ diverge, automaticamente también $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverge

pero sabemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ → diverge $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge en el caso $l=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

∞/∞

p-serie $p=1$ → diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \lim \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} = 1$$

p-serie $p>1$ → converge

ambas son 1 pero una converge y la otra diverg.

$r^k a_{N+k} > a_{N+k}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

- pero yo se por serie geometrica que

$\sum_{n=1}^{\infty} r^k$ con $r<1 \longrightarrow$ converge, ~~pero sabemos~~ $\to$ puedo decir que $\sum_{k=0}^{\infty} a_N r^k$ converge

y por criterio de comparación

si $\underbrace{r^k a_{N+k}}_{b_n} > \underbrace{a_{N+k}}_{a_n}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} a_N r^k$ converge $\to \sum_{n=N} a_n$ converge también

pero yo estoy analizando $\sum a_n$.

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} a_n}_{\text{una suma finita siempre converge}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}_{\text{demostre que converge}} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, para } l<1$$

$l>1$

$l-\varepsilon \cdot a_n < a_{n+1}$

tomando

$l-\varepsilon = r > 1$ $\qquad r \cdot a_n < a_{n+1}$

y mayor que cero $\to$ tomando $n=N$ $\quad a_{N+1} > r a_N \xrightarrow{\text{multi por } r} r a_{N+1} > r^2 a_N$

$n=N+1 \quad a_{N+2} > r a_{N+1} \qquad a_{N+2} > r a_{N+1}$

de forma general y por transitividad

$a_{N+k} > r^k a_N$

tomando $\lim_{k\to\infty}$

$$\lim_{k\to\infty} a_{N+k} > \underbrace{\lim_{k\to\infty} r^k}_{\text{por ser sucesión geometrica con } r>1 \text{ diverge}}$$

por C.T.G si $\lim_{k\to\infty} r^k a_n$ diverge $\to \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverge

mirando

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

si yo a algo infinito le sumo algo finito entonces sigue divergiendo: $\sum_{n=1} a_n$ diverge

Sucesión = $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tambien puede considerarse como una secuencia de puntos

Agustina Torres
47.252.903

Serie = es una sumatoria infinita de los terminos de una sucesión.

Para analizar la convergencia de las series hay diferentes CRITERIOS y uno de ellos es lo que voy a presentar normalmente.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ¿converge? ¿diverge?

CRITERIO DEL COCIENTE

Dada $a_n > 0$. $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$: $\to$ nueva sucesión

$l < 1 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$l = 1 \to$ el criterio no me dice nada

$l > 1 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

D// primeramente aplicamos def. limite de una sucesión

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \; n > N \; ; \; \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$

$\to$ desarrollando el modulo

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

despejando ya q' $a_n > 0$

$\to$ a conveniencia para los distintos casos

$$l - \varepsilon . a_n < a_{n+1} < l + \varepsilon . a_n$$

$l - \varepsilon = r_1$ (1)

$l + \varepsilon = r_2$

empiezo la demostración...

$l < 1$ de (1) voy a tomar $r_2 < 1 \to$ ya que $l < 1$, tomando un eso $l - \varepsilon < 1 \to$ $r < 1$, entonces

$$a_{n+1} < r_2 . a_n$$

tomando

$n = N$ $\quad r_2 a_N > a_{N+1} \xrightarrow[\text{por "r"}]{\text{multiplico}} r_2^2 a_N > r a_{N+1}$

$n = N+1$ $\quad r_2 a_{N+1} > a_{N+2}$

por transitividad y cadena general obtengo
↳

$\underbrace{a_N \lim_{k\to\infty} r^k}_{\text{diverge por ser una sucesión geométrica con } r \geq 1} \leq \lim_{k\to\infty} a_{N+k}$ (2)

~~converge~~

$\to$ por criterio termino general

$\downarrow$

COROLARIO

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$\downarrow$

$a_N \sum_{k=0}^{\infty} r^k$ diverge $\to$ por criterio de comparación

dado $\underbrace{a_N r^k}_{a_n} \leq \underbrace{a_{N+k}}_{b_n}$

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\to \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

usando comparación

$\sum_{k=N}^{\infty} a_{N+k}$ diverge

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}_{\text{diverge}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

D2) $l < 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ } por (1) y $a_n > 0$

$r < 1$

$a_{n+1} < r \cdot a_n$

tomando

$n = N$ $\quad a_{N+1} < r \cdot a_N \xrightarrow{(r)} r a_{N+1} < r^2 a_N$

$n = N+1$ $\quad a_{N+2} < r a_{N+1}$

$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N$

en forma general:

$a_{N+k} < r^k a_N$ (3)

$\downarrow$

usando comparación

aplico $\lim_{k\to\infty}$

$\lim_{k\to\infty} a_{N+k} \leq \lim_{k\to\infty} r^k a_N$

no hace falta.

voy a decir

$\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_N$ converge por ser serie geométrica de $r < 1$ $\implies r^k a_N$ converge

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ converge $\to \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

y por (*)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} a_n}_{\text{siempre converge}} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

CRITERIO DEL COCIENTE.

Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (quiero saber su convergencia). $a_n > 0 \ \forall n$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ NUEVA SUCESIÓN

$l < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$l > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$l = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ es inconcluso

D//

en general por definición de limite de la nueva sucesión:

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon}_{\text{trabajo con esto}}$$

apicando def. modulo

$$\forall n > N \quad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

$l > 1$ $\quad$ $l < 1$

y voy a llamar a conveniencia (1)

$l < 1 \Rightarrow r_1 = l + \varepsilon$ $\quad \underbrace{\ }_{<1}$

$l > 1 \rightarrow r = l - \varepsilon$ $\quad \underbrace{\ }_{>1}$

y podemos ver además (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

lo voy a tener en cuenta más adelante.

→ D// 1) $l > 1$

tomo $\quad L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad$ por (1) y despejo → como $a_n > 0$ no cambia nada.

$\forall n > N \quad r \cdot a_n < a_{n+1}$

- si yo en particular tomamos $n = N$ $\quad r a_N < a_{N+1} \xrightarrow{\text{multiplo por } r} r^2 a_N < r a_{N+1}$

$n = N+1 \quad r a_{N+1} < a_{N+2}$

por transitividad:

$$\underbrace{r^2 a_N < r a_{N+1} < a_{N+2}}_{\text{como expresión general.}}$$

$\forall k \in N \quad r^k a_N < a_{N+k}$

aplico $\lim_{k\to\infty}$ a la desigualdad

$$\lim_{k\to\infty} r^k a_N \leq \lim_{k\to\infty} a_{N+k}$$

ahora les tomo $\lim_{k\to\infty}$: $\lim_{k\to\infty} a_{N+k} \geq \lim_{k\to\infty} a_N r^k = \infty$ ∴ diverge.

por C.T.②

entonces $\sum_{n=N}^{\infty}$ an diverge, $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \text{an también diverge.}}$ } repasar bien como escribir.

b) $l < 1$

me quedo con ② $l + e = r < 1$

multiplico por "r"

$r \cdot a_n > a_{n+1}$

$n = N \Rightarrow r a_N > a_{N+1}$

$r^2 a_N > a_{N+1}$ con cadena de desigualdad

$r^2 a_N > a_{N+2}$ } en general $a_N r^k > a_{N+k}$

$n = N+1 \Rightarrow r a_{N+1} > a_{N+2}$

por criterio de comparación a_{N+k} también converge } $\lim_{k\to\infty} a_N r^k$ = $\underbrace{|r| < 1}_{hip}$ converge.

∴ $\sum_{n=N}^{\infty}$ an converge → $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \text{an también}}$

ejemplo de una sumatoria q no es útil usar cociente.

$\left(\frac{1}{x^2}\right)$ → ya q lim = 1
↳ pero por ser p-serie converge.

CRITERIO DE LA RAIZ: $\{a_n\}$ positiva → $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a_n)} = \alpha$

Teorema 17)

- $\alpha < 1$ → converge
- $\alpha > 1$ → diverge
- $\alpha = 1$ → no dice nada

(lo aplicamos en el caso que la $\{a_n\}$ contenga algo elevado a la "n" por ejemplo.)

CRITERIO DE COMPARACIÓN

Teorema 15) sea $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ~~converge~~ diverge

D// a) suponemos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = L$

definimos una suma parcial talque $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\{S_n\}$ → no decreciente $(a_n \geq 0)$
→ acotada superiormente por L

pq estos viendo la suma parcial

entonces por teorema de sucesión monotona $\rightarrow \{S_n\}$ converge por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) es el contrarecíproco de a) | no le qued otra q irse al infinito.

CRITERIO DEL COCIENTE

Teorema 16) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ → mi nueva sucesión.

a) $l < 1 \rightarrow \sum$ converge

b) $l > 1 \rightarrow \sum$ diverge

c) $l = 1 \rightarrow$ teorema no dice nada. → doy un ejemplo $\} \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$

D// por la def. de limite de una sucesión

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ n > N \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$, despejando: $\underbrace{l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}}_{1} < \varepsilon + l$ 2

· sop $l > 1$

· a conveniencia llamo $r = l - \varepsilon$

me qedo con 1

$r \cdot a_n < a_{n+1}$

caso en el que $n = N \quad a_{N+1} > a_N r$

$n = N+1 \quad a_{N+2} > a_{N+1} r$

→ a la primera la multiplico por "r"

$a_{N+1} r > a_N r^2$

pero en general

$a_{N+k} > a_N r^k$

observación =

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, una somatoria que empiece de otro "n" más grande también va a converger

P-series = una $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p>0$ y si el $p=1$ → serie armonica

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots}$

Teorema 13) Dada una p-serie, diremos que

$p>1 \rightarrow$ convergo $\frac{1}{p-1}$

$p \leq 1 \rightarrow$ diverge

D/ usando el criterio de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^b \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} -$$

$$\frac{1^{1-p}}{1-p} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$ lo q' quería mostrar. $p>1$

$p \leq 1$

$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}$ por lo visto en la U.3 → diverge.

$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} = \ln(b) - \ln(1) = \infty$, diverge.

$\frac{2}{n^p} = 2 \cdot \frac{1}{n^p}$

Teorema 14) no veremos la demostración

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge según el criterio de la integral y Error $= S - S_n$

entonces $\int_{a+1}^{\infty} f(x)dx \leq$ Error $\leq \int_a^{\infty} f(x)dx$

ver algún ejemplo

Teorema 9) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ } ambas convergen y c es un n° real cualquiera.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

D// a)
si yo tengo que $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ converge, tomando $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ también va a converger y llamamos $T_k = \sum_{n=1}^{k} c\,a_n$

$$\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c\cdot a_n = \lim_{k\to\infty} S_k\cdot c = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)c \rightarrow \text{lo q' quería mostrar.}$$

$$c \lim_{k\to\infty} S_k$$

D// b) → HACER DE EJERCICIO

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES

• **Criterio del Termino General:**

Teorema 10) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

D// $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge → la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ converge tamb. a un punto S.

además sabemos que $S_k = S_{k-1} + a_k \rightarrow a_k = S_k - S_{k-1}$

ahora tomo el

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} S_k - S_{k-1} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} S_k - S_k}_{T.6} = 0$$

Corolario 11 (lo q' más usamos) = si $\{a_n\}$ no tiende a cero ($\lim \neq 0$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

5

CRITERIO DE LA INTEGRAL 12) si f, positiva, continua, decreciente para $x \geq 1$ y ($a_n = f(n)$) $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ → osea q' me da un n°

SERIES NUMÉRICAS

Dada $\{a_n\} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ SERIE y el $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ se llaman terminos de la serie

llamamos suma parcial a una parte finita de la serie dada.

$$\underline{S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

si $\{S_n\}$ converge $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge al mismo número, y si $\{S_n\}$ diverge entonces la suma también lo hará.

SERIE GEOMETRICA = $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ $\Big\}$ serie geometrica de razón "r"

Teorema 8) Dada $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \to$

a) $|r|<1 \to \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ (converge)

b) $|r| \geq 1 \to$ la sumatoria diverge.

D// . tomo una suma parcial de "n" terminos de la suma

veamos el caso de que

b) $|r| \geq 1$: $\underline{S_n = a + ar + \dots + ar^n}$

en el caso q' r sea 1

$S_n = n \cdot a$

y cuando aplico lim se va a infinito

en el caso q' sea $r > 1$ por Teorema de sucesión esa diverge

$\overline{|r| \geq 1 \text{ diverge.}}$

a) considero $r \neq 1$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

y $rS_n = ra_1 + ra_2 + \dots + ra_{n+1}$

las resto:

$S_n - rS_n = a_1 - ar^{n+1}$) saco factor común a S_n

$S_n(1-r) = a_1 - ar^{n+1}$) paso dividiendo

$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$) tomo limite a la sucesión

$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$ (con $ar^{n+1} \to 0$)

usa def potencia

$r<1 \to 0$

$r>1 \to \infty$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}}$$

si la sucesión converge entonces la serie también.

QDT