Secuencias de Langford

Práctica 2 (2 sesiones)

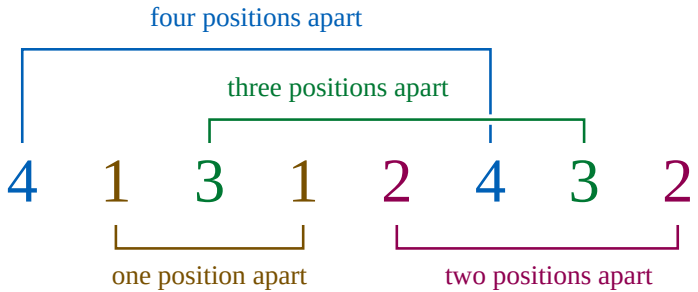
Prácticas de ALT

Algorítmica
ETSInf

Curso 2019-2020

Descripción del problema

Una secuencia o emparejamiento de Langford de longitud $2N$ es una ordenación de los números $1, 1, 2, 2, \ldots, N-1, N-1, N, N$ de manera que entre dos números i hay i números como en el siguiente ejemplo de wikipedia.



El objetivo de la práctica es realizar un programa que, utilizando la estrategia de **backtracking** (o búsqueda con retroceso), encuentre una o más secuencias de Langford para una talla N, y que lo haga de dos maneras diferentes:

1. Generando una ordenación de los números $1, 1, 2, 2, \ldots, N-1, N-1, N, N$.
2. Reduciendo este problema al **cubrimiento exacto** (**exact cover**) y usando un algoritmo (que se os proporciona ya implementado) que resuelve este problema.

Resolución directa mediante **backtracking**

Consiste en utilizar un vector (en forma de una lista Python) de longitud $2N$ que estará inicializada a 0s (valor que denota un hueco en el vector).

El algoritmo de backtracking intentará posicionar, una por una, las N parejas de números empezando por la más alta (la pareja N,N) hasta la más baja (la pareja 1,1).

Ramificar consiste en probar todas las posibles posiciones en que podemos situar cada pareja en el vector. Por ejemplo, si vamos a situar el valor 3 debemos tener en cuenta que si el primero ocupa la posición i en el vector (con $i \geq 0$), el segundo ocupará la posición $i+3+1$ ($i+3+1 \leq 2*N-1$). Además:

- no podemos poner los valores encima de otros (únicamente podremos situarlos donde previamente tengamos 0s), y
- cuando cambiemos de rama debemos *deshacer* adecuadamente los cambios efectuados poniendo a 0 las posiciones ocupadas previamente.

¡Ojo!

Se puede demostrar que solamente existen soluciones para aquellos valores N tal que el resto de dividir N entre 4 valga 0 o 3. Por tanto, en esos casos el programa dirá directamente que no hay solución sin intentar backtracking:

```
if N%4 not in (0, 3):
  yield "no hay solucion"
```

Resolución directa mediante **backtracking**

Un posible esqueleto del programa:

```
def langford_directo(N, allsolutions):
    N2   = 2*N
    seq  = [0]*N2

    def backtracking(num):
        if num <= 0:
            yield "-".join(map(str, seq))
        else:
            # COMPLETAR

    if N%4 not in (0, 3):
        yield "no hay solucion"
    else:
        count = 0
        for s in backtracking(N):
            count += 1
            yield "solution %04d -> %s" % (count, s)
            if not allsolutions:
                break
```

(continúa)

Resolución directa mediante **backtracking**

Un posible esqueleto del programa (continuación):

```
if __name__ == "__main__":
    if len(sys.argv) not in (2, 3, 4):
        print('\nUsage: %s N [TODAS] [EXACT_COVER] \n' % (sys.argv[0],))
        sys.exit()
    try:
        N = int(sys.argv[1])
    except ValueError:
        print('First argument must be an integer')
        sys.exit()
    allSolutions = False
    langford_function = langford_directo
    for param in sys.argv[2:]:
        if param == 'TODAS':
            allSolutions = True
        elif param == 'EXACT_COVER':
            langford_function = langford_exact_cover
    for sol in langford_function(N, allSolutions):
        print(sol)
```

Cómo utilizar *yield* en **backtracking**

```
import sys

def nqueens(n):
    sol = [None]*n
    def show_solution(solution):
        output = ["    "+"".join(str((i+1) % 10) for i in  range(n))+"\n"]
        for i in range(n):
            output.append("%3d %s\n" % (i+1,"".join("X" if solution[j]==i else "." for j in range(n))))
        return "".join(output)
    def is_promising(longSol, queen):
        return all(queen != sol[i] and longSol-i != abs(queen-sol[i]) for i in range(longSol))
    def backtracking(longSol):
        if longSol == n:
            return show_solution(sol)
        else:
            for queen in range(n):
                if is_promising(longSol, queen):
                    sol[longSol] = queen
                    r = backtracking(longSol+1)
                    if r is not None:
                        return r
        return None # explicit
    return backtracking(0)

if __name__ == "__main__":
    if len(sys.argv) != 2:
        print('\nUsage: %s N\n' % (sys.argv[0],))
        sys.exit()
    N = int(sys.argv[1])
    print(nqueens(N))
```

Cómo utilizar *yield* en **backtracking**

```
import sys

def nqueens(n, allSolutions):
    sol = [None]*n
    def show_solution(solution):
        output = ["    "+"".join(str((i+1) % 10) for i in  range(n))+"\n"]
        for i in range(n):
            output.append("%3d %s\n" % (i+1,"".join("X" if solution[j]==i else "." for j in range(n))))
        return "".join(output)
    def is_promising(longSol, queen):
        return all(queen != sol[i] and longSol-i != abs(queen-sol[i]) for i in range(longSol))
    def backtracking(longSol):
        if longSol == n:
            results.append(show_solution(sol))
        if allSolutions or len(results) == 0:
            for queen in range(n):
                if is_promising(longSol, queen):
                    sol[longSol] = queen
                    backtracking(longSol+1)
        return None # explicit
    results = []
    backtracking(0)
    return results

if __name__ == "__main__":
    if len(sys.argv) not in (2,3):
        print('\nUsage: %s N [TODAS]\n' % (sys.argv[0],))
        sys.exit()
    N = int(sys.argv[1])
    allSolutions = len(sys.argv)==3 and sys.argv[2]=='TODAS'
    for sol in nqueens(N,allSolutions):
        print(sol)
```

Cómo utilizar *yield* en **backtracking**

```
import sys

def nqueens(n, allSolutions):
    sol = [None]*n
    def show_solution(solution):
        output = ["    "+"".join(str((i+1) % 10) for i in  range(n))+"\n"]
        for i in range(n):
            output.append("%3d %s\n" % (i+1,"".join("X" if solution[j]==i else "." for j in range(n))))
        return "".join(output)
    def is_promising(longSol, queen):
        return all(queen != sol[i] and longSol-i != abs(queen-sol[i]) for i in range(longSol))
    def backtracking(longSol):
        if longSol == n:
            yield show_solution(sol)
        else:
            for queen in range(n):
                if is_promising(longSol, queen):
                    sol[longSol] = queen
                    for s in backtracking(longSol+1):
                        yield s
    count = 0
    for s in backtracking(0):
        count += 1
        yield "Solution %d:\n\n%s" % (count,s)
        if not allSolutions:
            break

if __name__ == "__main__":
    if len(sys.argv) not in (2,3):
        print('\nUsage: %s N [TODAS]\n' % (sys.argv[0],))
        sys.exit()
    N = int(sys.argv[1])
    allSolutions = len(sys.argv)==3 and sys.argv[2]=='TODAS'
    for sol in nqueens(N,allSolutions):
        print(sol)
```

El problema del cubrimiento exacto

En el problema del cubrimiento exacto (exact cover) nos dan un conjunto X y luego un conjunto S de subconjuntos de X.

Ejemplo: X podría ser $\{A, B, C, D\}$ y $S = \{\{A\}, \{A, B, C\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}\}$

El objetivo es encontrar S', subconjunto de S (i.e. $S' \subseteq S$), tal que sus elementos formen una partición de X. Es decir, de manera que todos los elementos de X estén en uno y sólo en uno de los elementos de S'.

Ejemplo: Para el ejemplo anterior una posible solución sería $S' = \{\{A, C\}, \{B, D\}\}$

Existe una forma sencilla de resolver el problema del cubrimiento exacto mediante **backtracking** y una implementación del mismo, propuesta por Donald Knuth, se denomina el algoritmo X.

La idea básica de este algoritmo es elegir un elemento $x \in X$ y luego ramificar en **backtracking** eligiendo uno de los elementos $s \in S$ (recordemos que $s \subseteq X$) que contengan a x. Una vez elegido s, eliminamos de S aquellos elementos s' tales que $s \cap s' \neq \emptyset$. Si esta rama no prospera o si nos piden más de una solución, antes de probar con otro hermano de s' deberíamos deshacer los cambios realizados (ej: volver a incorporar los s' descartados).

El problema del cubrimiento exacto

El algoritmo X no se limita a recorrer los elementos de X en un orden predeterminado sino que, en cada momento, elige aquel valor $x \in X$ que aparece en menos subconjuntos $s \in S$, de manera que:

- si un elemento no aparece en ningún subconjunto nos daremos cuenta rápidamente que no hay solución (y haremos **backtracking**),
- cuando un elemento x aparece únicamente en un subconjunto $s \in S$, eligiremos ese conjunto s puesto que **forzosamente** ha de formar parte de la solución (en este contexto de la búsqueda).

La implementación del algoritmo X de Knuth hace uso de una técnica llamada Dancing Links donde S se representa mediante una lista doblemente enlazada. Esta técnica hace muy eficiente eliminar conjuntos de S y luego deshacer dicha operación cuando sea necesario.

El problema del cubrimiento exacto

En esta práctica vamos a utilizar una implementación del algoritmo X que ocupa menos de 30 líneas de Python y que se ha obtenido del [siguiente enlace (pinchar aquí)].

Ejemplo: Esta implementación asume que pasaremos el conjunto X mediante un **set** python, aunque el conjunto S (denominado Y en esta implementación) se proporciona como un diccionario donde la clave se utiliza para dar un nombre único a cada uno de los subconjuntos como en el siguiente ejemplo:

```
X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
Y = {
    'A': [1, 4, 7],
    'B': [1, 4],
    'C': [4, 5, 7],
    'D': [3, 5, 6],
    'E': [2, 3, 6, 7],
    'F': [2, 7]
    }
```

La única solución para este ejemplo sería `['B', 'D', 'F']`.

El problema del cubrimiento exacto

La implementación propuesta, en lugar de basarse en listas doblemente enlazadas representa X como un diccionario que asocia a cada elemento del conjunto una lista de los subconjuntos que lo contienen. Para el ejemplo anterior sería así:

```
X = {
    1: {'A', 'B'},
    2: {'E', 'F'},
    3: {'D', 'E'},
    4: {'A', 'B', 'C'},
    5: {'C', 'D'},
    6: {'D', 'E'},
    7: {'A', 'C', 'E', 'F'}
    }
```

Una forma de obtener esta estructura a partir del conjunto X original sería como sigue:

```
X = {j: set() for j in X}
for i in Y:
    for j in Y[i]:
        X[j].add(i)
```

Reduciendo el problema de la secuencia de Langford al cubrimiento exacto

Para reducir el problema de la secuencia de Langford de longitud N al **exact cover** necesitamos en principio, un conjunto X de longitud $2N$ correspondiente a las posiciones que podemos ocupar en la secuencia. Así, por ejemplo, si el vector se indexa entre 0 y $2 * N - 1$, podríamos utilizar las cadenas `'p0'`, `'p1'`, ... como elementos del conjunto X (para mayor eficiencia Python permite **internalizar** las cadenas con la función **intern** de la biblioteca **sys**).

Para cada posible número entre 1 y N necesitamos crear un subconjunto por cada posible posición en que podemos meter una pareja de estos valores.

Por ejemplo, para el valor 1 deberíamos considerar los siguientes subconjuntos de S: `{'p0','p2'}`, `{'p1','p3'}`, `{'p2','p4'}`, ...

¿Cuál es el fallo de este razonamiento?

El problema de esta aproximación es que nada impide obtener una solución que utilize más de una vez un mismo número y que queden números por utilizar. Así, por ejemplo, para N=4 en lugar de una secuencia como esta: `[4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2]` que se obtendría con el cubrimiento exacto `[{'p0','p5'}, {'p1','p3'}, {'p2','p6'}, {'p4','p7'}]`, también se podría obtener otro cubrimiento exacto de `'p0'`, `'p1'`, `'p2'`, `'p3'`, `'p4'`, `'p5'`, `'p6'`, `'p7'` utilizando `[{'p0','p2'}, {'p1','p3'}, {'p4','p6'}, {'p5','p7'}]` dando la secuencia: `[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]`.

Reduciendo el problema de la secuencia de Langford al cubrimiento exacto

Para resolver el fallo anterior se propone incorporar en el conjunto X, además de elementos representando el hecho de ocupar cada una de las $2 * N$ posiciones del vector, otros N valores más que representen el hecho de usar cada uno de los N números a utilizar.

Debes crear una función que recibe el valor N y que genere **programáticamente** las estructuras de datos X e Y que espera el **exact cover**, tendría un aspecto como sigue:

```
def langford_data_structure(N):
    # n1,n2,... means that the value has been used
    # p1,p2,... means that the position has been used
    def value(i):
        return sys.intern('n%d' % (i,))
    def position(i):
        return sys.intern('p%d' % (i,))

    X = set([value(i) for i in range(1,N+1)]+
            [position(i) for i in range(2*N)])
    Y = {}
    for v in range(1,N+1):
        # COMPLETAR
    X = {j: set() for j in X}
    for i in Y:
        for j in Y[i]:
            X[j].add(i)

    return X,Y
```

Reduciendo el problema de la secuencia de Langford al cubrimiento exacto

Como puedes observar, el conjunto X contiene las cadenas `'n1'`, `'n2'`, ... hasta N, representando el hecho de usar esos N valores para llenar el vector, así como las cadenas `'p0'`, `'p1'`, ... hasta $2N-1$, cada una correspondiente a un índice o posición en el vector.

La parte que debes completar consiste en llenar el diccionario Y con pares *clave*:*valor* donde los valores son listas que contienen tripletas. Cada tripleta corresponde al hecho de meter una pareja de números de manera correcta en el vector. Por ejemplo, la tripleta `['n1', 'p2', 'p4']` es correcta, ya que si pones un 1 en la posición 2 el otro 1 debe ir en la 4 (a distancia 1 separados por la posición 3). Esta tripleta la crearíamos usando las funciones **value** y **position** así:

```
... = [ value(n), position(p), position(p+(n+1)) ]
```

Por otra parte, las claves o nombres de estas entradas las utilizará la implementación del **exact cover** para devolvernos la solución. Vamos a utilizar estas claves, posteriormente, para extraer la secuencia de valores en el vector. Para ello usaremos el siguiente convenio: Si el valor era `['n1', 'p2', 'p4']`, la clave correspondiente será la cadena `'n1p2'`. El código siguiente muestra el código utilizado para extraer los valores de n y de p a partir de esa clave:

```
n, p = map(int, item[1:].split('p'))
```

Reduciendo el problema de la secuencia de Langford al cubrimiento exacto

Para terminar, necesitamos una manera de convertir la solución devuelta por el **exact cover** en formato de secuencia:

```
def langford_exact_cover(N, allsolutions):
    if N%4 not in (0,3):
        yield "no hay solucion"
    else:
        X, Y = langford_data_structure(N)
        sol = [None]*2*N
        count = 0
        for coversol in solve(X,Y):
            for item in coversol:
                n, p= map(int, item[1:].split('p'))
                sol[p]=n
                sol[p+n+1]=n
            count += 1
            yield "solution %04d -> %s" % (count, "-".join(map(str, sol)))
            if not allsolutions:
                break
```

¿Qué entregar?

Un programa que reciban como parámetro (por la línea de comandos):

- el número N,
- si el usuario incluye la cadena *EXACT_COVER*, el programa utilizará la versión basada en cubrimiento exacto,
- si el usuario incluye el parámetro *TODAS* el programa mostrará todas las soluciones (en otro caso, parará tras encontrar una primera solución).

Ejemplos

```
> python langford.py 6
no hay solucion
> python langford.py 4
solution 0001 -> 4-1-3-1-2-4-3-2
> python langford.py 4 EXACT_COVER TODAS
solution 0001 -> 4-1-3-1-2-4-3-2
solution 0002 -> 2-3-4-2-1-3-1-4
> python langford.py 7 TODAS
solution 0001 -> 7-3-6-2-5-3-2-4-7-6-5-1-4-1
solution 0002 -> 7-2-6-3-2-4-5-3-7-6-4-1-5-1
...
solution 0051 -> 1-5-1-4-6-7-3-5-4-2-3-6-2-7
solution 0052 -> 1-4-1-5-6-7-4-2-3-5-2-6-3-7
```