Examen de Computabilidad y Complejidad

(CMC)

21 de junio de 2006

(I) CUESTIONES: (Justifique formalmente las respuestas)

1. ¿Es el lenguaje $\{a^n b^m a^n b^k \ / \ (n>0) \vee (m = k)\}$ incontextual?

   Puede verse que la sentencia $(n>0) \vee (m = k)$ es equivalente a $(n>0) \vee ((n=0) \wedge (m=k))$, en consecuencia el lenguaje $L = \{a^n b^m a^n b^k \ / \ (n>0) \vee (m = k)\}$ puede descomponerse como $L = L_1 \cup L_2$, donde

   $L_1 = \{a^n b^m a^n b^k \ / \ n > 0, \ m,k \geq 0\}$, y

   $L_2 = \{a^n b^m a^n b^k \ / \ (n=0) \wedge (m = k)\} = \{b^{2m} \ / \ m \geq 0\}$.

   Así podemos directamente, a partir de los ejercicios vistos en clase, asociarles, respectivamente, las siguientes gramáticas incontextuales

   G_1: $S \rightarrow aAaB \qquad A \rightarrow aAa \mid B \qquad B \rightarrow bB \mid \lambda$

   G_2: $S \rightarrow bbS \mid \lambda$

   de modo que: $L(G_1) = L_1$ y $L(G_2) = L_2$.

   Por tanto, por las propiedades de cierre de los lenguajes incontextuales, el lenguaje dado es incontextual.

   (1.0 punto)

2. Sea $L = \{x\#y \ / \ x,y \in \{0,1\}^* \wedge$ *la longitud del segmento más largo de ceros en* x *es igual a la longitud del segmento más largo de unos en* y$\}$. ¿Es L incontextual?

   Supóngase que el lenguaje es incontextual. Sea n la constante del Lema de Iteración. Considérese la palabra $z = 0^n\#1^n01^n$. Claramente z es una palabra del lenguaje y $|z| \geq n$. Demostraremos que el lenguaje no es incontextual estableciendo que no existe ninguna factorización admisible de $z = uvwxy$ en las condiciones del Lema de Iteración. Las posible factorizaciones potencialmente admisibles son las siguientes:

   I. $vwx \in 0^+$, en estos casos tomando la iteración $i = 0$ obtenemos una palabra de la forma: 1) $0^m\#1^n01^n$, donde $m < n$, o 2) $0^n\#1^{2n}$. En cualquier caso la palabra obtenida no pertenece al lenguaje.

   II. $vx \in 1^+$, en estos casos tomando una iteración $i > 1$ obtenemos una palabra de la forma: 1) $0^n\#1^m01^n$, o $0^n\#1^n01^m$, donde $n < m$, o 2) $0^n\#1^m01^k$ con $n < m$ y $n < k$. En cualquier caso la palabra obtenida no pertenece al lenguaje.

   III. $vwx \in 0^+\#1^+$, con $v \in 0^+$ y $1 \in 1^+$, en estos casos tomando la iteración $i = 0$ obtenemos una palabra de la forma $0^m\#1^k01^n$, con $m < n$, con lo que no puede pertenecer al lenguaje.

   IV. $vwx \in 0^*\#1^*$, de modo que # sea un símbolo de vx, en estos casos tomando la iteración 0 obtenemos una palabra de la forma $0^m1^k01^n$, que claramente no pertenece al lenguaje.

V. $vwx \in 1^*01^*$, de modo que 0 sea un símbolo de vx, en estos casos tomando la iteración i = 0 se obtiene una palabra de la forma $0^n\#1^m$ con n < m, con lo que la palabra no pertenece al lenguaje.

Por tanto no hay ninguna factorización admisible y puesto que se incumple el Lema de Iteración el lenguaje no es incontextual.

(1.0 punto)

3. Sea Σ un alfabeto y $R \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje recursivo dado. Para $L, L' \subseteq \Sigma^*$ se define

$$L\square L' = \{x \in L \mid \exists y \in L': \text{prefijos}(x) \cap \text{sufijos}(y) \cap R \neq \varnothing\}.$$

Si L y L’ son lenguajes recursivamente enumerables ¿lo es también L□L’?

Veremos que en las condiciones dadas el lenguaje L□L’ es recursivamente enumerable. Puesto que R es un lenguaje recursivo existe una máquina de Turing que se detiene para cada entrada y que reconoce a R, sea M_R un máquina en estas condiciones. Puesto que L es un lenguaje recursivamente enumerable existe una máquina de Turing M_L que lo reconoce. Puesto que L’ es un lenguaje recursivamente enumerable existe un generador de Turing $G_{L'}$ que lo genera. En lo que sigue vamos a definir una máquina de Turing M que reconozca a L□L’.

M está constituida y opera como sigue. Cuando se le aplica una entrada *x* a M ésta le aplica *x* a M_L, si M_L reconoce a *x* se arranca el generador $G_{L'}$ de modo que inicie la generación de cada palabra cada vez que se le aplique una señal de entrada. Cada vez que $G_{L'}$ genera una palabra *y* se le aplica, junto con *x,* a un módulo PS que obtendrá uno por uno todos los prefijos (de *x*) y sufijos (de *y*) comunes, mientras sea posible, cada vez que se le aplique una señal. (Para llevar a cabo esta tarea se puede disponer de dos cintas, una para *x* y otra para *y*, cada una con dos sectores para mantener una marca que especifique el prefijo y sufijo considerado cada vez; esta marca se va desplazando a mediada que se realiza le cálculo.) De este modo el módulo PS obtiene el primer prefijo-sufijo común (λ) y se le aplica a M_R si ésta acepta la palabra *x* es aceptada por M, en otro caso se envía a PS la señal para genere el siguiente prefijo-sufijo común y se vuelve a proceder, cuando ya no haya más prefijo-sufijos comunes se envía la señal a $G_{L'}$ para que continúe con el proceso de generación.

De este modo el lenguaje que acepta la máquina M es L□L’.

(1.5 puntos)

4. Dados un alfabeto Σ, $L \subseteq \Sigma^*$ y $x \in \Sigma^*$, se define la operación $x^{-1}L = \{ y \in \Sigma^* / xy \in L \}$.

a) Si L es un lenguaje recursivo ¿lo es también $x^{-1}L$ para cada $x \in \Sigma^*$?

Sí. Si L es un lenguaje recursivo existe una máquina de Turing M que lo reconoce y que se detiene para cada entrada. Seguidamente definiremos una máquina de Turing M’ que se detendrá para cada entrada y que reconocerá a $x^{-1}L$. La máquina M’ está constituida y opera como sigue. Cuando se le aplica una palabra *y* se la concatena a *x* obtiendo la palabra *xy* que seguidamente se le aplica a M comportándose a partir de aquí como ésta. Así se tiene que L(M') = x^{-1}L.

b) Si x^{-1}L es un lenguaje recursivo ¿lo es también L para cada $x \in \Sigma^*$?

No necesariamente. Sea el alfabeto $\Sigma = \{0,1,\$\}$, y sea $L \subseteq \{0,1\}^*$ cualquiera de los lenguajes vistos en clase que es recursivamente enumerable y no es recursivo. Puede verse que $\$^{-1}L = \varnothing$. Así $\$^{-1}L$ es recursivo sin serlo L.

(1.5 puntos)

(II) PROBLEMAS

5. Desarrolle un módulo *Mathematica* que reciba como entrada una gramática incontextual y uno de sus símbolos auxiliares y retorne el subconjunto de símbolos auxiliares que pueden alcanzarse a partir del dado mediante derivaciones en la gramática, de al menos un paso, en las que únicamente se utilicen producciones cuyos consecuentes comiencen con un símbolo terminal.

```
P5[G_, A_] := Module[{auxAlcanzados, símbolos, alcanzados,
                                auxiliares, consecuentes, prod},
 auxAlcanzados = {};
 símbolos = {A};
 While[símbolos ≠ {},
   alcanzados = {};
   For[i = 1, i ≤ Length[símbolos], i++,
     prod = Cases[G[[3]], {símbolos[[i]],_}];
     If[prod ≠ {},
       consecuentes = prod[[1,2]];
       For[j = 1, j ≤ Length[consecuentes], j++,
         If[consecuentes[[j]] ≠ {},
           If[MemberQ[G[[2]],consecuentes[[j,1]]],
             auxiliares =
                 Intersection[consecuentes[[j]],G[[1]]];
             alcanzados = Union[alcanzados,auxiliares];
             ]
           ]
         ]
       ]
     ];
   símbolos = Complement[alcanzados,auxAlcanzados];
   auxAlcanzados = Union[auxAlcanzados,alcanzados];
   símbolos = Complement[símbolos,{A}];
   ];
 Return[auxAlcanzados]
 ]
```

(2.0 puntos)

6. Dadas las gramáticas

   G1 : $S \rightarrow aSSA \mid SaA \mid ba$

   $A \rightarrow aAb \mid AA \mid Sa$

G2 : $S \rightarrow aSa \mid SA \mid AA \mid b$
$A \rightarrow AA \mid bA \mid B$
$B \rightarrow \lambda$

y la sustitución $f(a) = L(G1) \cup L(G1)^r$ y $f(b) = (L(G2) - \{\lambda\})^+$, obténgase una gramática incontextual para el lenguaje $L(G1)f(L(G2))$.

f(a): $S_a \rightarrow S_1 \mid S_2$
$S_1 \rightarrow aS_1S_1A_1 \mid S_1aA_1 \mid ba$
$A_1 \rightarrow aA_1b \mid A_1A_1 \mid S_1a$
$S_2 \rightarrow A_2S_2S_2a \mid A_2aS_2 \mid ab$
$A_2 \rightarrow bA_2a \mid A_2A_2 \mid a\, S_2$

Símbolos anulables de G2 : {S, A, B}

Eliminación de las producciones λ de G2 y obtención, por tanto, de una gramática para $L(G2) - \{\lambda\}$.

$S \rightarrow aSa \mid aa \mid SA \mid S \mid A \mid AA \mid b$
$A \rightarrow AA \mid A \mid bA \mid b \mid B$

Realizando algunas simplificaciones inmediatas se obtiene

$S \rightarrow aSa \mid aa \mid SA \mid A \mid AA \mid b$
$A \rightarrow AA \mid bA \mid b$

f(b): $S_b \rightarrow S_3S_b \mid S_3$
$S_3 \rightarrow aS_3a \mid aa \mid S_3A_3 \mid A_3 \mid A_3A_3 \mid b$
$A_3 \rightarrow A_3A_3 \mid bA_3 \mid b$

L(G1)f(L(G2)):
$S \rightarrow S_4S_5$
$S_4 \rightarrow aS_4S_4A_4 \mid S_4aA_4 \mid ba$
$A_4 \rightarrow aA_4b \mid A_4A_4 \mid S_4a$
$S_5 \rightarrow S_aS_5S_a \mid S_5A_5 \mid A_5A_5 \mid S_b$
$A_5 \rightarrow A_5A_5 \mid S_bA_5 \mid B_5$
$B_5 \rightarrow \lambda$

(1.5 puntos)

7. Dada la gramática G obtenga una gramática G' simplificada y en Forma Normal de Chomsky con $L(G') = L(G) - \{\lambda\}$.

G: $S \rightarrow ABC \mid BaBD \mid ED$
$B \rightarrow bBC \mid a$
$D \rightarrow DbA \mid CbD \mid ab$
$A \rightarrow bA \mid BaC \mid aba$
$C \rightarrow aCaa \mid AC \mid DC$
$E \rightarrow Eaa \mid \lambda$

Símbolos auxiliares generativos: {S,A,B,D,E}.
$S \rightarrow BaBD \mid ED$
$A \rightarrow bA \mid aba$
$B \rightarrow a$
$D \rightarrow DbA \mid ab$

$E \rightarrow Eaa \mid \lambda$
Símbolos alcanzables: Todos

Símbolos anulables: {E}
Eliminación de las producciones λ
$S \rightarrow BaBD \mid ED \mid D$
$A \rightarrow bA \mid aba$
$B \rightarrow a$
$D \rightarrow Dba \mid ab$
$E \rightarrow Eaa \mid aa$

Eliminación de las producciones unitarias
$S \rightarrow BaBD \mid ED \mid DbA \mid ab$
$A \rightarrow bA \mid aba$
$B \rightarrow a$
$D \rightarrow DbA \mid ab$
$E \rightarrow Eaa \mid aa$

Todos los símbolos son útiles.

Forma Normal de Chomsky: Primer Paso
$S \rightarrow BX_aBD \mid ED \mid DX_aA \mid X_aX_b$
$A \rightarrow X_bA \mid X_aX_bX_a$
$B \rightarrow a$
$D \rightarrow DX_bA \mid X_aX_b$
$E \rightarrow EX_aX_a \mid X_aX_a$
$X_a \rightarrow a$
$X_b \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky: Segundo Paso
$S \rightarrow BZ_1 \mid ED \mid DZ_3 \mid X_aX_b$
$A \rightarrow X_bA \mid X_aZ_4$
$B \rightarrow a$
$D \rightarrow DZ_3 \mid X_aX_b$
$E \rightarrow EZ_5 \mid X_aX_a$
$Z_1 \rightarrow X_aZ_2$
$Z_2 \rightarrow BD$
$Z_3 \rightarrow X_bA$
$Z_4 \rightarrow X_aX_b$
$Z_5 \rightarrow X_aX_a$
$X_a \rightarrow a$
$X_b \rightarrow b$

(1.5 puntos)