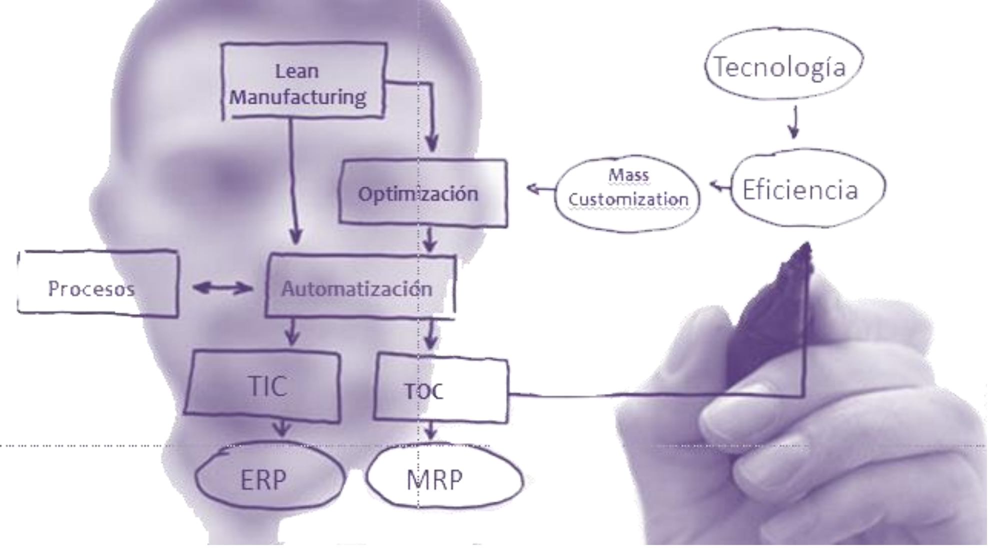


DEIOAC-UPV

3. Métodos de Programación Lineal (II)

CONTENIDOS

3.11 Adaptación a otras formas de modelo: Variables artificiales

- En general, en un modelo de programación lineal se pueden presentar restricciones de cualquier tipo
- Cuando las restricciones son del tipo '$\leq$', la variable de holgura que se suma para conseguir que la restricción sea de igualdad proporciona el coeficiente '**+1**' que es útil para la formación de la matriz unitaria que es la base en el algoritmo Simplex

3.11 Adaptación a otras formas de modelo: Variables artificiales

- Sin embargo, una restricción del tipo '$\geq$' requiere que se le reste una variable de exceso para conseguir igualdad en la misma, lo cual **no** proporciona el coeficiente '**+1**' para la base como solución inicial en el algoritmo Simplex
- Por otro lado, las restricciones del tipo '**=**' no requieren variables de holgura o de exceso, y por tanto tampoco se tiene el coeficiente **+1** para la base inicial del Simplex

3.11 Adaptación a otras formas de modelo: Variables artificiales

- Por tal motivo se necesita una **variable artificial** para el caso de que el modelo de programación lineal que se pretende resolver con el algoritmo Simplex incluya restricciones '$\geq$' o '**=**'
- Incluir sumando, una **variable artificial** '**aj**' por restricción. De este modo obtenemos una variable con coeficiente **+1** en la restricción y **0** en el resto para obtener la matriz unitaria en la solución básica inicial

3.11 Adaptación a otras formas de modelo: Variables artificiales

- **Las variables artificiales no tienen significado físico y sólo deben entenderse como artificios matemáticos para construir la base inicial**

- La primera solución básica (SB_0) del simplex en tal caso, debe incluir:

  - las variables artificiales de las restricciones = y ≥

  - las variables de holgura de las restricciones ≤

3.11.1 Método de las dos fases

- Es un método aplicable cuando en el modelo en forma estándar ha sido necesario definir variables artificiales

- Este método se aplica en **dos fases**, de las cuales,

  - en la **primera** se busca la **factibilidad** y

  - en la **segunda** la **optimalidad**

3.11.1 Método de las dos fases

- **1ª FASE**
  - En esta primera fase **siempre** se minimiza una F.O. que se constituye mediante la suma de las variables artificiales

$$\mathbf{Min} \quad \mathbf{Z} = \sum \mathbf{a}_i$$

  - **Z** irá disminuyendo en cada iteración del Simplex hasta conseguir el **valor igual a cero**, obteniendo el óptimo de la 1ª fase. Si esto no se logra, es porque no es posible sacar de la base alguna variable artificial. Tal caso debe interpretarse como *problema sin solución factible*

3.11.1 Método de las dos fases

- Si la primera fase acaba con Z distinto de cero, ya no es necesario continuar con la 2ª fase de este método

- **2ª FASE**
  - La primera tabla Simplex de la 2ª fase será igual a la última tabla obtenida en la 1ª fase del método recalculando $c^t_B B^{-1}$ y Z ya que en esta fase se utilizará la función objetivo del problema

3.11.1 Método de las dos fases

En conclusión:

- Para la aplicación del método de las dos fases deben aplicarse los criterios del simplex como se observa en la siguiente tabla:

PROBLEMA DE:	1ª FASE	2ª FASE
MAXIMIZAR	MINIMIZAR	MAXIMIZAR
MINIMIZAR	MINIMIZAR	MINIMIZAR

3.11.1 Método de las dos fases

- **Aplicación del método de las 2 Fases al problema ejemplo de planificación de la producción de componentes informáticos:**

Es necesario utilizar toda la capacidad del departamento 3

- **Entonces, el único cambio que sufre el modelo de programación lineal es que la tercera restricción**

$$3\,x1 + 2\,x2 \leq 18$$

- **se convierte en una restricción de igualdad:**

$$\boxed{3\,x1 + 2\,x2 = 18}$$

3.11.1 Método de las dos fases

- El modelo completo es el siguiente:

Maximizar $Z = 3\,x_1 + 5\,x_2$

s.a:

$x_1 \leq 4$	**(departamento 1)**
$2\,x_2 \leq 12$	**(departamento 2)**
$3\,x_1 + 2\,x_2 = 18$	**(departamento 3)**

✍ Dibu R Factible

3.11.1 Método de las dos fases

1. Pasar el modelo a forma estándar y definir las variables artificiales necesarias. El modelo resultante es el **MODELO AMPLIADO**:

Max $3\,x_1 + 5\,x_2$

s.a:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 + x_3 & & = 4 & \text{(departamento 1)} \\
2\,x_2 & + x_4 & = 12 & \text{(departamento 2)} \\
3\,x_1 + 2\,x_2 & + a_3 & = 18 & \text{(departamento 3)}
\end{array}
$$

✍ Anotar valores SB

3.11.1 Método de las dos fases

2. Aplicar el método simplex al modelo resultante:

- **1ª FASE:**

Min a_3

s.a:

$$x_1 + x_3 = 4 \quad \text{(departamento 1)}$$

$$2x_2 + x_4 = 12 \quad \text{(departamento 2)}$$

$$3x_1 + 2x_2 + a_3 = 18 \quad \text{(departamento 3)}$$

3.11.1 Método de las dos fases

1. Solución básica factible inicial (SB_0)

Tabla Simplex (SB_0)

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	4
x4	0	1	0	12
a3	0	0	1	18
$c^t_B\ B^{-1}$	0	0	1	**Z = 18**

¡Ojo! La F.O. es Min=a3 → $c^t_B = (0, 0, 1)$

3.11.1 Método de las dos fases

2. Prueba de optimalidad (SB_0)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x1,x2

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$z_{x1} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3; \qquad z_{x2} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$c_{x1} - z_{x1} = -3; \qquad c_{x2} - z_{x2} = -2$$

$\boxed{\textbf{JE} \rightarrow \textbf{X1}}$

Ojo! En este caso MIN

3.11.1 Método de las dos fases

3. Calcular y_{x1}

$$y_{x1} = B^{-1}\, a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\left\{ \frac{x_B}{y_{JE}} \right\}$

Tabla Simplex (SB_0)

	v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x1}	$\frac{x_B}{y_{x1}}$
IS $\rightarrow$ x3	x3	1	0	0	4	1	4
	x4	0	1	0	12	0	-
	a3	0	0	1	18	3	18/3
	$c^t_B\, B^{-1}$	0	0	1	**Z = 18**		

3.11.1 Método de las dos fases

5. Cambio de base

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tabla Simplex (SB_1)

v.básicas	B^{-1}			x_B
x1	1	0	0	4
x4	0	1	0	12
a3	-3	0	1	6
$c^t_B\, B^{-1}$	-3	0	1	**Z = 6**

3.11.1 Método de las dos fases

2. Prueba de optimalidad (SB_1)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x2,x3

$$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

$$z_{x2} = (-3,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = 2;\quad z_{x3} = (-3,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -3$$

$$c_{x2}\text{-}z_{x2} = -2; \qquad c_{x3}\text{-}z_{x3} = 3$$

$$\boxed{\textbf{JE} \rightarrow \textbf{X2}}$$

3.11.1 Método de las dos fases

3. Calcular y_{x2}

$$y_{x2} = B^{-1}\, a_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\left\{ \frac{x_B}{y_{JE}} \right\}$

Tabla Simplex (SB_1)

	v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x2}	$\frac{x_B}{y_{x2}}$
	x1	1	0	0	4	0	-
	x4	0	1	0	12	2	6
IS $\rightarrow$ a3	a3	-3	0	1	6	2	3
	$c^t_B\, B^{-1}$	-3	0	1	**Z = 6**		

3.11.1 Método de las dos fases

5. Cambio de base

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tabla Simplex (SB_2)

v.básicas	B^{-1}			x_B
x1	1	0	0	4
x4	3	1	-1	6
x2	-3/2	0	1/2	3
$c^t_B\, B^{-1}$	0	0	0	**Z = 0**

3.11.1 Método de las dos fases

2. Prueba de optimalidad (SB_2)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x3

$$z_j = c^t_B \, y_j = (c^t_B \, B^{-1}) \, a_j$$

$$z_{x3} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_{x3} - z_{x3} = 0$$

SOLUCIÓN ÓPTIMA FASE 1

- **2ª FASE:**

Función Objetivo: Max 3 x1+ 5 x2

Tabla Simplex (SB_2)

v.básicas	B^{-1}			x_B
x1	1	0	0	4
x4	3	1	-1	6
x2	-3/2	0	1/2	3
$c^t_B\ B^{-1}$	**-9/2**	**0**	**5/2**	**Z = 27**

3.11.1 Método de las dos fases

2. Prueba de optimalidad (SB_2)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x3 (la variable a3 YA NO EXISTE)

$$z_j = c^t_B \, y_j = (c^t_B \, B^{-1}) \, a_j$$

$$z_{x3} = (-9/2, 0, 5/2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -9/2$$

$$c_{x3}\text{-}z_{x3} = 9/2$$

$$\boxed{\mathbf{JE \rightarrow X3}}$$

3.11.1 Método de las dos fases

3. Calcular y_{x3}

$$y_{x3} = B^{-1} a_{x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

4. Seleccionar **IS** $\rightarrow \min \{ \frac{x_B}{y_{JE}} \}$

Tabla Simplex (SB_2)

	v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x3}	$\frac{x_B}{y_{x3}}$
	x1	1	0	0	4	1	4
IS → x4	x4	3	1	-1	6	3	2
	x2	-3/2	0	1/2	3	-3/2	-
	$c^t_B B^{-1}$	-9/2	0	5/2	**Z = 27**		

3.11.1 Método de las dos fases

5. Cambio de base

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tabla Simplex (SB_3)

v.básicas	B^{-1}			x_B
x1	0	-1/3	1/3	2
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
$c^t_B\, B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

3.11.1 Método de las dos fases

2. Prueba de optimalidad (SB_3)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x4

$$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

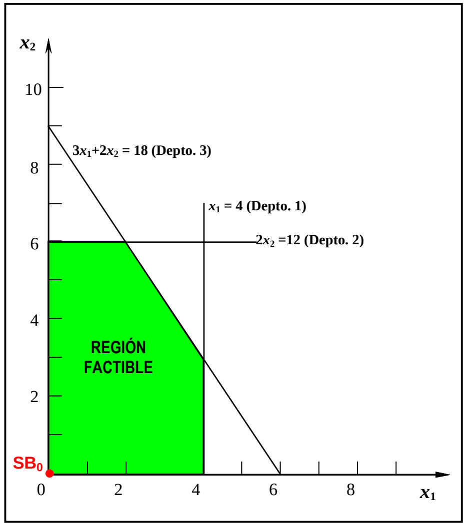
$$z_{x4} = (0,\ 3/2,\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$$c_{x4} - z_{x4} = -3/2$$

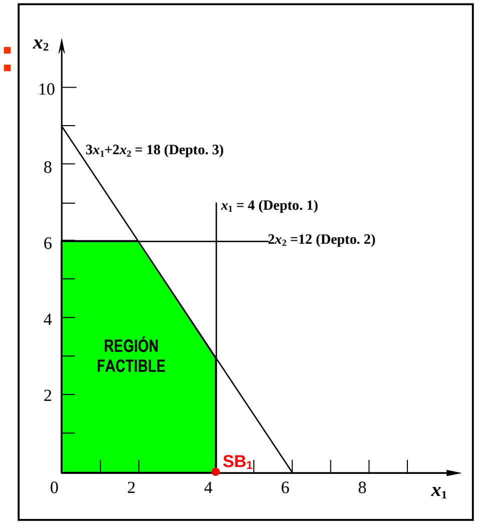
SOLUCIÓN ÓPTIMA

Efecto gráfico de las variables artificiales

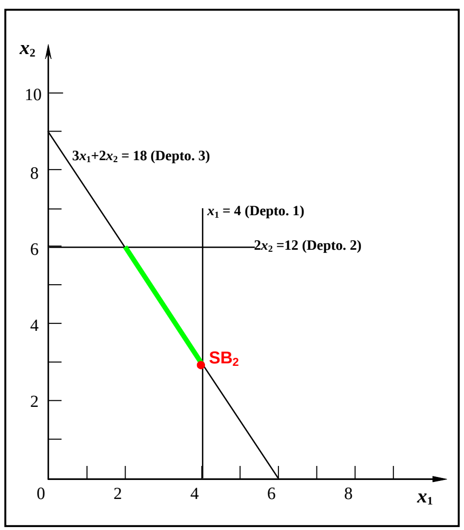
SB0:



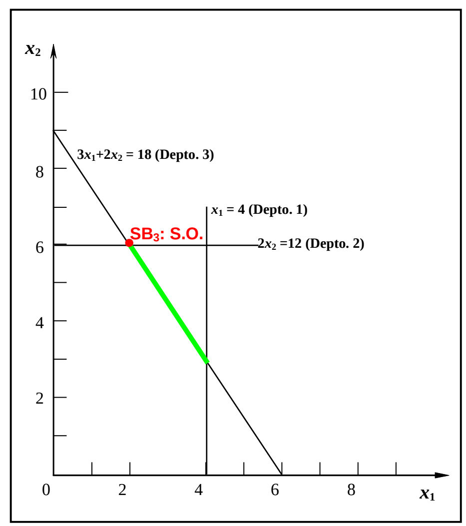
SB1:



SB2:



SB3:



SOLUCIÓN
ÓPTIMA

3.11.1 Método de las 2 Fases (ej. Propuesto)

EJERCICIO PROPUESTO:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el método de las 2 fases:

MIN $z = 2\,x1 + 3\,x2$

s.a:

$2\,x1 + x2 \geq 4$

$x1 - x2 \geq -1$

$x1, x2 \geq 0$

3.11.1 Método de las 2 Fases (ej. Propuesto)

EJERCICIO PROPUESTO:

Dado el siguiente programa lineal:

Min 3 X1 + 2 X2

s.a:

[R_1] 2 X1 + X2 ≤ 10
[R_2] -3 X1 + 2 X2 = 6
[R_3] X1 + X2 ≥ 6
X1, X2 ≥ 0

a) Identificar gráficamente las restricciones y la región factible. Dibujar la función objetivo y la solución óptima.

b) Obtener la solución óptima aplicando el método Simplex de las 2 fases. Identificar sobre la solución gráfica la secuencia de soluciones básicas obtenida.

c) A la vista de la secuencia de soluciones obtenidas, ¿cuál es el efecto -sobre la región factible y sobre la factibilidad de cada solución- de haber añadido las variables artificiales al modelo matemático?

3.11.1 Método de las 2 Fases (ej. Propuesto)

EJERCICIO PROPUESTO continuación:

d) A partir de la tabla de la solución óptima obtenida en el apartado b, responder a las siguientes preguntas:

¿Cuáles son los cuellos de botella del sistema?

¿Cuál sería la solución óptima y el valor de la función objetivo si el bi de la Restricción 1 se reduce en 2 unidades?

¿Cuál sería la solución óptima y el valor de la función objetivo si el bi de la Restricción 3 se reduce en 2 unidades?

3.12 Reducción del esfuerzo computacional: Técnica de las cotas

- El esfuerzo computacional del algoritmo Simplex Revisado está estrechamente relacionado con la dimensión **mxm** (**nºrestricciones** x **nº restricciones**) de la matriz $\mathbf{B}^{-1}$

- En muchos problemas el valor de las variables decisión está acotado

3.12 Reducción del esfuerzo computacional: Técnica de las cotas

- *Ejemplos*:
  - La producción del artículo A debe ser al menos de 1000 unidades. La solución óptima tiene que satisfacer esta demanda:

    $\mathbf{x \geq 1000 \;\rightarrow\; x_j \geq L_j}$ (**L**ower Bound)

  - La cantidad de gramos de una materia prima en una mezcla optimizada debe ser inferior a 40:

    $\mathbf{x \leq 40 \;\rightarrow\; x_j \leq U_j}$ (**U**pper Bound)

3.12 Reducción del esfuerzo computacional: Técnica de las cotas

- El número de terminales de un determinado tipo a instalar en un sistema informático se debe situar entre 30 y 50:

  $$30 \leq x \leq 50 \quad \rightarrow \quad L_j \leq x_j \leq U_j$$

La idea es considerar estas restricciones de una forma especial, de manera que la eficiencia del algoritmo Simplex aumenta → No afecta a $\mathbf{B}^{-1}$

3.12.1 Técnica de la cota inferior

- $x_j \geq L_j$
  - **l_j = Variable exceso sobre la cota inferior de x_j**
    - Exceso sobre la demanda mínima
    - Exceso sobre la producción mínima…
  - $\boxed{x_j = L_j + l_j \ ;}$ $\quad l_j \geq 0$
  - En el modelo matemático original se asume desde un principio la demanda mínima, la producción mínima, ...

3.12.1 Técnica de la cota inferior

- **Si sabemos desde un principio que en la solución óptima se debe satisfacer la cota inferior de una variable → Hagamos que se satisfaga de partida**

- En todo el modelo original, **sustituir x_j** por **$(L_j + l_j)$**, esto implica:
  - En el modelo trabajaremos con l_j
  - La Función Objetivo (Z) tendrá un valor inicial $\neq 0$
  - El b_i de las restricciones se modificará en $a_{ij} L_j$
  - En las restricciones, l_j tendrá los mismos coeficientes y signos que x_j

✍ Anotar en la pizarra las 4 implicaciones

3.12.1 Técnica de la cota inferior

- **EJEMPLO:**
  - El departamento de producción ha probado con éxito un nuevo prototipo de placa base 1 que reduciría sensiblemente su coste de producción. Sin embargo, las nuevas placas 1 requerirían un control de calidad más exhaustivo que debería realizarse en el departamento 2. Para testear cada lote en este departamento, se requiere 1 hora de la capacidad disponible. El resto de datos del modelo permanecen inalterados. La mejora de calidad supondría duplicar el beneficio por lote de las placas base tipo 1
  - Adicionalmente, el departamento comercial ha estimado que para mantener los márgenes comerciales es necesario alcanzar una producción semanal mínima de al menos 2 lotes de cada tipo de placa

✍ Sobre modelo inicial, actualizar enunciado problema

3.12.1 Técnica de la cota inferior

Max $6 x_1 + 5 x_2$

s.a:

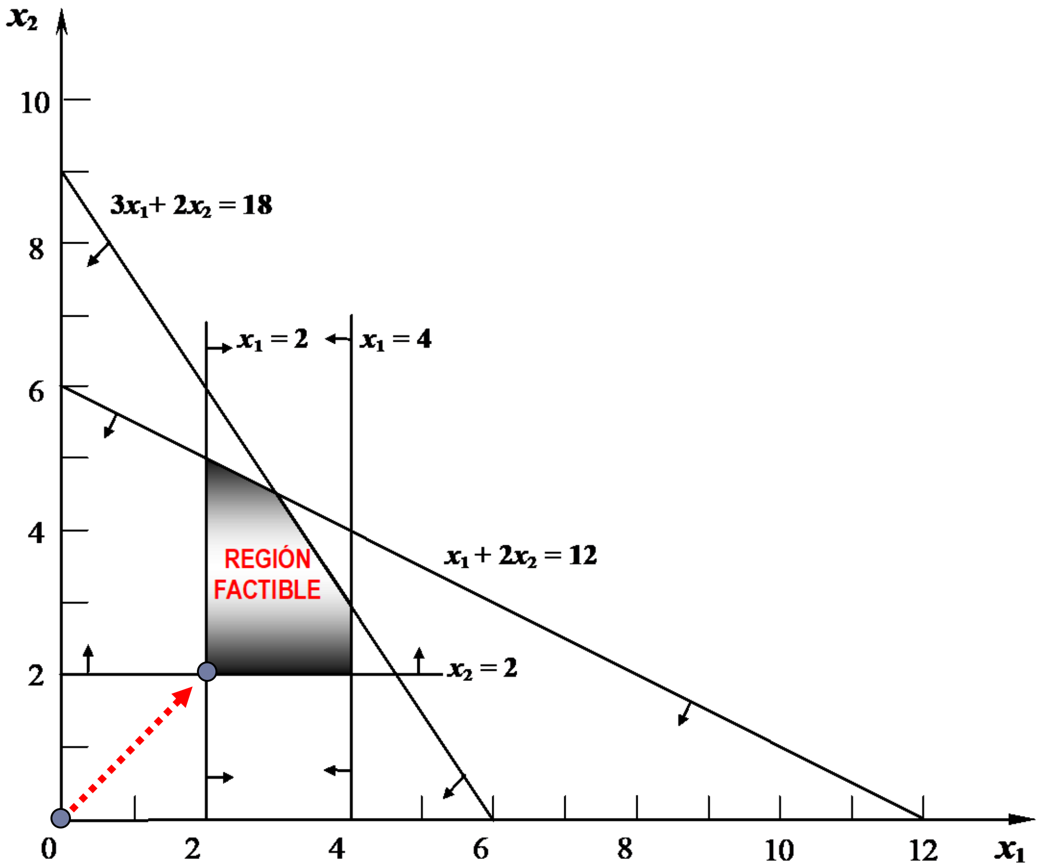
$x_1 \leq 4$ **(Depto. 1)**

$x_1 + 2 x_2 \leq 12$ **(Depto. 2)**

$3 x_1 + 2 x_2 \leq 18$ **(Depto. 3)**

$x_1 \geq 2$ **(Prod. mín. placa 1)**

$x_2 \geq 2$ **(Prod. Mín. placa 2)**



✍ Copiar modelo y hacer sustituciones

3.12.1 Técnica de la cota inferior

- En el modelo, las dos variables decisión están acotadas inferiormente:
  - $x_1 = 2 + l_1$; $l_1 \geq 0$; l_1: Exceso sobre 2 (L_1)
  - $x_2 = 2 + l_2$; $l_2 \geq 0$; l_2: Exceso sobre 2 (L_2)

- **Aplicamos la <u>técnica de la cota inferior</u> (transformación del modelo):**

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & 22 + 6\,l_1 + 5\,l_2 & \\
\text{s.a:} & l_1 \leq 2 & \text{(Depto 1)} \\
 & l_1 + 2\,l_2 \leq 6 & \text{(Depto 2)} \\
 & 3\,l_1 + 2\,l_2 \leq 8 & \text{(Depto 3)} \\
 & l_1, l_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

➢ Este problema se resuelve aplicando Simplex hasta encontrar la Solución Optima. A partir de la S.O. se deshace el cambio de variables.

✍ Sustitucion en mod.original

3.12.1 Técnica de la cota inferior (ej. Propuesto)

Ejercicio Propuesto:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el método de las 2 fases y la técnica de la cota inferior:

$$\text{MIN } 24\,x1 + 20\,x2$$

$$\text{s.a:} \quad \frac{1}{2}\,x1 + x2 \geq 12$$

$$\frac{3}{2}\,x1 + x2 \geq 24$$

$$x1 \geq 8$$

$$x2 \geq 3$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

- $x_j \leq U_j$
  - u_j **= Variable defecto con respecto a la cota superior de** x_j
    - Defecto con respecto a la producción máxima
    - Defecto con respecto a la demanda máxima…
  - $\boxed{x_j = U_j - u_j \;;}$ $\underline{0 \leq u_j \leq U_j}$

➤ Para tener en cuenta la cota superior, **NO** es suficiente sustituir la variable acotada por su variable complementaria!

Se necesitan modificaciones a las reglas de método Simplex

✍

3.12.2 Técnica de la cota superior

- **Principio básico de la técnica de la cota superior:**
  - Cuando x_j alcanza su cota superior, u_j vale cero y por tanto será variable no básica
  - Cuando u_j alcanza su cota superior, x_j vale cero y por tanto será variable no básica

En cada iteración del algoritmo Simplex se usará x_j o u_j en el modelo según el principio que acabamos de enunciar

3.12.2 Técnica de la cota superior

- Si x_j alcanza su cota superior:
  - En el modelo trabajaremos con u_j: $x_j = U_j - u_j$
  - La Función Objetivo (Z) modificará su valor
  - El b_i de las restricciones se *modificará* en $a_{ij}\ U_j$
  - En las restricciones, u_j tendrá los mismos coeficientes que x_j, pero con signo contrario

3.12.2 Técnica de la cota superior

- Si u_j alcanza su cota superior:
  - En el modelo trabajaremos con x_j: $u_j = U_j - x_j$
  - La Función Objetivo (Z) modificará su valor
  - El b_i de las restricciones se *modificará* en a_{ij} U_j
  - En las restricciones, x_j tendrá los mismos coeficientes que u_j, pero con signo contrario

✍

3.12.2 Técnica de la cota superior

$$\text{Max } 22 + 6\,l_1 + 5\,l_2$$

s.a:

$\boxed{l_1 \leq 2}$ (Departamento 1)

$l_1 + 2\,l_2 \leq 6$ (Departamento 2)

$3\,l_1 + 2\,l_2 \leq 8$ (Departamento 3)

$l_1, l_2 \geq 0$

3.12.2 Técnica de la cota superior

- Equivalencia entre variables según la técnica de la cota superior:

$\boxed{l_1 = 2 - u_1}$; $\quad 0 \le l_1 \le 2; \quad 0 \le u_1 \le 2$

$$\text{Max } 22 + 6\, l_1 + 5\, l_2$$

s.a:

$l_1 + 2\, l_2 \le 6$ (Departamento 2)

$3\, l_1 + 2\, l_2 \le 8$ (Departamento 3)

$l_1,\, l_2 \ge 0$

3.12.2 Técnica de la cota superior

- En **toda iteración** del algoritmo del Simplex con la aplicación de la técnica de la cota superior, una vez que se ha determinado la variable X_{JE} hay que calcular tres parámetros:

1. $\boxed{\beta = Min\{\frac{x_i}{\alpha_{i,JE}}\} \rightarrow}$ Número de unidades de la variable que entra en la base (JE) de manera que una variable básica se hace cero
2. **U_{JE}** $\equiv$ Cota superior de la variable que entra en la base (si está acotada superiormente)
3. Si existe alguna variable básica X_{Bi} con cota superior **y además** $\alpha_{i,JE}$ asociado < 0 :
   - $\delta_i \equiv$ Número de unidades de la variable que entra en la base que hacen que la variable básica X_{Bi} alcance su cota: $(x_{Bi}^o - U_i) / \alpha^-_{i,JE}$
   - $\delta = \min \{\delta_i\}$

✍

3.12.2 Técnica de la cota superior

- El número de unidades de la variable X_{JE} que entran en la base se calculan como:

$$\boxed{\theta_{JE} = \min(\beta, U_j, \delta)}$$

- La nueva solución se calcula de forma diferente según θ_{JE} sea igual a β, U_j o δ

<u>Nota:</u> U_j y δ puede que no existan en una iteración

3.12.2 Técnica de la cota superior

- Modelo en forma estándar:

$$\text{Max } 22 + 6\, l_1 + 5\, l_2$$

s.a:

$$l_1 + 2\, l_2 + x_3 \qquad = 6 \qquad \text{(Departamento 2)}$$

$$3\, l_1 + 2\, l_2 \qquad + x_4 = 8 \qquad \text{(Departamento 3)}$$

$$l_1,\, l_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Además,

Tenemos que considerar la cota superior sobre l_1:

$$l_1 = 2 - u_1; \qquad 0 \leq l_1 \leq 2; \qquad 0 \leq u_1 \leq 2$$

✍ Modelo 2

3.12.2 Técnica de la cota superior

- A lo largo de la aplicación del Algoritmo Simplex, utilizaremos los modelos:

  - **Modelo 1** (ORIGINAL):

    $$\begin{aligned} &\text{Max } 22 + 6\,l1 + 5l2 \\ &l1 + 2l2 \leq 6 \\ &3\,l1 + 2l2 \leq 8 \\ &l1,\ l2 \geq 0 \end{aligned}$$

  - **Modelo 2** : **l1 = 2 – u1**:

    $$\begin{aligned} &\text{Max } 22 + 6\,(2-u1) + 5l2 \\ &(2-u1) + 2l2 \leq 6 \\ &3\,(2-u1) + 2l2 \leq 8 \\ &u1,\ l2 \geq 0 \end{aligned}$$

    $$\boxed{\begin{aligned} &\textbf{Max } 22 + 12 - 6u1 + 5l2 \\ &-u1 + 2l2 \leq 4 \\ &-3u1 + 2l2 \leq 2 \\ &u1,\ l2 \geq 0 \end{aligned}}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

El algoritmo empieza a aplicarse a partir del modelo original.

1. Solución básica factible inicial (**SB_0**)

Variables básicas: $x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c^t_B\, B^{-1} = (0, 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{= (0, 0)}$$

$$\mathbf{Z = 22 + c^t_B}\, X_B = 22 + \mathbf{(0, 0)} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \mathbf{= 22}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

Tabla Simplex (**SB_0**)

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	0	6
x4	0	1	8
$c^t_B\ B^{-1}$	0	0	**Z = 22**

3.12.2 Técnica de la cota superior

2. Prueba de optimalidad (**SB_0**)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ 11,12

$$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

$$z_{11} = (0,\ 0)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0; \qquad z_{12} = (0,\ 0)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$c_{11}\text{-}z_{11} = 6\text{-}0\text{=}6; \qquad c_{12}\text{-}z_{12} = 5\text{-}0\text{=}5$$

$$\boxed{\mathbf{JE \rightarrow 11}}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

3. Calcular y_{11}

$$y_{11} = B^{-1} a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tabla SB_0

v.básicas	B^{-1}		x_B	y_{l1}	$\frac{x_B}{y_{l1}}$
x3	1	0	6	1	6
x4	0	1	8	3	8/3
$c^t_B B^{-1}$	0	0	Z = 22		

✍ Una vez elegida XJE, calcular parámetros cota superior

3.12.2 Técnica de la cota superior

Cálculo parámetros β, U_j, δ:

$\beta = 8/3 = 2.67$

$U_{11} = 2$

No existe δ

$$\theta_{11} = \min(2.67, 2, -) = 2 \rightarrow \boxed{\theta_{11} = U_j}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

$$\boxed{\theta_{JE} = U_j}$$

- **La variable JE (l1) alcanza la cota y pasamos a trabajar con el modelo en el que l1=2- u1 (con variable u1 como VNB)**
- **Las Variables Básicas (VB) no cambian, por tanto B^{-1} es la misma**
- **Cambia el valor de las VB y Z**

3.12.2 Técnica de la cota superior

- Modelo 2 : **l1 = 2 – u1**:

Max 22 + 6 (2-u1) + 5l2	**Max 22 + 12 - 6u1 + 5l2**
(2-u1) + 2l2 $\le$ 6	**-u1 + 2l2 $\le$ 4**
3 (2-u1) + 2l2 $\le$ 8	**-3u1 + 2l2 $\le$ 2**
u1, l2 $\ge$ 0	**u1, l2 $\ge$ 0**

$$\mathbf{X_B = B^{-1}\,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 22 + 12 + c^t_B\, X_B = 22 + 12 + (0,\ 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 34$$

Tabla **SB_1** (Variables: u_1, l_2, x_3, x_4)

Indicar siempre

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	0	4
x4	0	1	2
$c^t_B\, B^{-1}$	0	0	**Z = 34**

3.12.2 Técnica de la cota superior

2. Prueba de optimalidad (SB_1)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ **u1**,**l2**

$$z_{u1} = (0, 0)\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}} = 0; \qquad z_{l2} = (0, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_{u1}-z_{u1} = -6 - 0 = -6; \qquad c_{l2}-z_{l2} = 5 - 0 = 5$$

$$\boxed{\text{JE} \rightarrow \text{l2}}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

3. Calcular y_{12}

$$y_{12} = B^{-1} a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v.básicas	B^{-1}		x_B	y_{l2}	$\frac{x_B}{y_{l2}}$
x3	1	0	4	2	2
x4	0	1	2	2	1
$c^t_B B^{-1}$	0	0	**Z = 34**		

3.12.2 Técnica de la cota superior

Cálculo parámetros β, U_j, δ:

$\beta = 1$

No existe U_{12}

No existe δ

$$\theta_{12} = \min(1, -, -) = 1 \rightarrow \boxed{\theta_{12} = \beta}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

$$\boxed{\theta_{JE} = \beta}$$

- **Seguimos trabajando con el mismo modelo (no hay cambio de variables)**
- **Cambio de base normal, entra en la base X_{JE} y sale de la base X_{IS}**

3.12.2 Técnica de la cota superior

4. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\{\frac{x_B}{y_{JE}}\}$

$$\boxed{\textbf{IS} \rightarrow \textbf{x4}}$$

5. Cambio de base: Variables: u1, l2, x3, x4

$$\mathbf{c^t_B\ B^{-1} = (0,\ 5)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{= (0,\ 5/2)}$$

$$\mathbf{X_B = B^{-1}\ b =} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z = 22 + 12 + c^t_B\ X_B = 34 + (0,\ 5)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{= 39}$$

Tabla **SB$_2$**

(Variables: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{l}_2$, x_3, x_4)

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	-1	2
l2	0	1/2	1
$c^t_B\ B^{-1}$	0	5/2	**Z = 39**

3.12.2 Técnica de la cota superior

2. Prueba de optimalidad (**SB_2**)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ **u1**,**x4**

$$z_{u1} = (0,\ 5/2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -15/2; \qquad z_{x4} = (0,\ 5/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5/2$$

$$c_{u1} - z_{u1} = -6 + 15/2 = 3/2; \qquad c_{x4} - z_{x4} = 0 - 5/2 = -5/2$$

$$\boxed{\mathbf{JE} \rightarrow \mathbf{u1}}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

3. Calcular y_{u1}

$$y_{u1} = B^{-1} a_{u1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Tabla SB_2

(Variables: u1, l2, x3, x4)

v.básicas	B^{-1}		x_B	y_{u1}	$\frac{x_B}{y_{u1}}$
x3	1	-1	2	2	1
l2	0	1/2	1	-3/2	-
$c^t_B\ B^{-1}$	0	5/2	**Z = 39**		

Cálculo parámetros β, U_j, δ:

$\beta = 1$

$U_{u1} = 2$

No existe δ

$$\theta_{u1} = \min(1, 2, -) = 1 \rightarrow \boxed{\theta_{u1} = \beta}$$

CAMBIO DE BASE *'NORMAL'*

3.12.2 Técnica de la cota superior

4. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\{\frac{x_B}{y_{JE}}\}$

$$\boxed{\textbf{IS} \rightarrow \textbf{x3}}$$

5. Cambio de base: Variables: **u**1, **l**2, x3, x4

$$\mathbf{c^t_B\ B^{-1} = (-6,\ 5)} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \mathbf{= (3/4,\ 7/4)}$$

$$\mathbf{X_B = B^{-1}\ b =} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z = 22 + 12 + c^t_B\ X_B = 22 + 12 + (-6,\ 5)} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} \mathbf{= 40.5}$$

3.12.2 Técnica de la cota superior

Tabla **SB$_3$**

(Variables: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{l}_2$, x_3, x_4)

v.básicas	B^{-1}		x_B
u1	1/2	-1/2	1
l2	3/4	-1/4	5/2
$c^t_B\ B^{-1}$	3/4	7/4	**Z = 40.5**

2. Prueba de optimalidad (**SB_3**)

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ **`x3`,`x4`**

$$z_{x3} = (3/4,\ 7/4)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3/4; \qquad z_{x4} = (3/4,\ 7/4)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 7/4$$

$$c_{x3}\text{-}z_{x3} = 0\text{-}3/4 = \text{-}3/4; \quad c_{x4}\text{-}z_{x4} = 0\text{-}7/4 = \text{-}7/4$$

SOLUCIÓN ÓPTIMA

3.12.2 Técnica de la cota superior

- El valor de las variables en la solución óptima se obtendrá deshaciendo los cambios de variables realizados para aplicar las cotas. Entonces:

  l1 = 2 - **u**1 → **l**1 = 2-1 = 1

  x1 = 2 + **l**1 → **x1** = 2+1 = **3**

  x2 = 2 + **l**2 → **x2** = 2+5/2 = **9/2**

- El valor óptimo de la función objetivo es **Z = 40.5**

✍

3.12.2 Técnica de la cota superior

$$\boxed{\theta_{JE} = \delta}$$

La variable xi (VB) alcanza la cota con θ_{JE} unidades

- **Trabajamos con el modelo en el que la variable auxiliar de xi será VNB (CAMBIO DE MODELO)**
- **La variable JE sustituye a xi en la base de la nueva solución**
- **Cambio de base normal (con PIVOTE < 0)**

Ejercicio Propuesto:

Resolver el siguiente programa lineal aplicando el algoritmo Simplex con variables acotadas:

Max 24 X1 + 20 X2

s.a:

[R1] $\frac{1}{2} X_1 + X_2 \leq 12$

[R2] $\frac{3}{2} X_1 + X_2 \leq 24$

[R3] $0 \leq X_1 \leq 15$

[R4] $0 \leq X_2 \leq 7/2$

Solución Óptima: $X_1 = 41/3$; $X_2 = 7/2$; $Z^* = 398$

Ejercicio Propuesto:

Resolver el siguiente programa lineal aplicando el algoritmo Simplex con variables acotadas:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 4\,x1 + 5\,x2 \\
&\text{s.a:} \quad 2\,x1 + 3\,x2 \leq 9; \\
&\qquad\quad 2\,x1 + x2 \leq 9; \\
&\qquad\quad 1 \leq x1 \leq 4; \\
&\qquad\quad 0 \leq x2 \leq 1;
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN: x1 = 4; x2 = 1/3; F.O.= 53/3

$$\text{Max } 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a:} \quad 2x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$2x_1 + x_2 \le 9$$

$$\boxed{1 \le x_1} \le 4$$

$$0 \le x_2 \le 1$$

T.C.I.:

$$x_1 = (1 + \ell_1)$$

$$\text{Max } 4 + 4\ell_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a:} \quad 2\ell_1 + 3x_2 \le 7$$

$$2\ell_1 + x_2 \le 7$$

$$0 \le \boxed{\ell_1 \le 3}$$

$$0 \le \boxed{x_2 \le 1}$$

Modelo 1:

$$\text{Max } 4 + 4\ell 1 + 5x2$$

s.a: $2\ell 1 + 3x2 \leq 7$

$2\ell 1 + x2 \leq 7$

$0 \leq \ell 1 \leq 3$

$0 \leq x2 \leq 1$

$\ell 1 = (3 - u_{\ell 1})$

$u_{\ell 1} \leq 3$

Modelo 2:

$$\text{Max } 4 + 12 - 4u_{\ell 1} + 5x2$$

s.a: $-2u_{\ell 1} + 3x2 \leq 1$

$-2u_{\ell 1} + x2 \leq 1$

$0 \leq u_{\ell 1} \leq 3$

$0 \leq x2 \leq 1$

$x2 = (1 - u_{x2})$

$u_{x2} \leq 1$

$x2 = (1 - u_{x2})$

$u_{x2} \leq 1$

Modelo 3:

$$\text{Max } 4 + 5 + 4\ell 1 - 5u_{x2}$$

s.a: $2\ell 1 - 3u_{x2} \leq 4$

$2\ell 1 - u_{x2} \leq 6$

$0 \leq \ell 1 \leq 3$

$0 \leq u_{x2} \leq 1$

$\ell 1 = (3 - u_{\ell 1})$

$u_{\ell 1} \leq 3$

Modelo 4:

$$\text{Max } 21 - 4u_{\ell 1} - 5u_{x2}$$

s.a: $-2u_{\ell 1} - 3u_{x2} \leq -2$

$-2u_{\ell 1} - u_{x2} \leq 0$

$0 \leq u_{\ell 1} \leq 3$

$0 \leq u_{x2} \leq 1$

Técnica de las cotas en Lingo©

1 ¿Cómo especificar cotas sobre las variables en LINGO?

```
Max=4*x1 + 5*x2;
2*x1 + 3*x2 < 9;
2*x1 + x2 < 9;
@bnd(1,x1,4);
@bnd(0,x2,1);
```

Definición de cotas en Lingo: @bnd(LB, var, UB);

2 ¿Cómo interpretar el informe de solución en caso de var. Acotadas?

```
Objective value:                    17.66667

        Variable           Value        Reduced Cost
              X1        4.000000          -0.6666667
              X2       0.3333333            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
               1        17.66667            1.000000
               2        0.000000            1.666667
               3       0.6666667            0.000000
```

Coste de oportunidad de la restricción PERO cambiado de signo

Ejercicios Propuestos (Simplex v.acotadas):

a) Max $3x1 + x2$

s.a: $x1 + x2 \geq 4$

$x1 + 2x2 \leq 10$

$2x1 + x2 = 6$

$0 \leq x1 \leq 1$

$x2 \geq 2$

SOLUCIÓN: X1 = 1, X2 = 4, F.O.= 7

b) Min $4x1 + 4x2 + x3$

s.a: $2x1 + x2 \geq 12$

$2x1 + x2 + 4x3 \geq 14$

$1 \leq x1 \leq 5$

$1 \leq x2 \leq 3$

$1 \leq x3 \leq 8$

Nota: En caso de empate escoger la primera variable

SOLUCIÓN: X1 = 5, X2 = 2, X3=1; F.O.= 29

Ejercicios Propuestos (Simplex v.acotadas):

c) Max $3x1 + 2x2$

s.a: $x1 + 3\,x2 \leq 16$

$2x1 + x2 \leq 12$

$1 \leq x1 \leq 3$

$0 \leq x2 \leq 5$

SOLUCIÓN: X1 = 3, X2 = 13/3, F.O.= 53/3

d) Max $4\,x1 + 5\,x2$

s.a: $2\,x1 + 3\,x2 \leq 9$;

$2\,x1 + x2 \leq 9$;

$1 \leq x1 \leq 4$;

$0 \leq x2 \leq 1$

SOLUCIÓN: x1 = 4; x2 = 0.33; F.O.= 17.66

Ejercicios Propuestos (Simplex v.acotadas):

2 Se ha resuelto con LINGO el siguiente modelo de programación lineal:

```
min=7.5*X1+5*X2+7*X3+2*X4+2*X5;
[R1]  2*X1+X2+3*X3+2*X4+X5<=110;
[R2]  3*X1+3*X2+2*X3+X4+2*X5<=165;
[R3]  X1+X2>=45;
[R4]  X3+X4<=40;
[R5]  X1+X4>=20;
[R6]  X4+X5>=10;
[R7]  @BND(0,X1,15);
[R8]  @BND(10,X2,50);
[R9]  @BND(10,X3,15);
```

El objetivo consiste en minimizar el coste total de producción de los 5 artículos que produce la empresa, donde cada coeficiente representa el coste unitario de producción de ese artículo.

R1 y R2 representan las restricciones de capacidad de tiempo de trabajo de las máquinas, y el resto de restricciones representan limitaciones de producción y demanda de los artículos.

Ejercicios Propuestos (Simplex v.acotadas):

- Los informes generados por LINGO se muestran a continuación:

Objective value: 285.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	15.00000	-2.000000
X2	30.00000	0.0000000E+00
X3	10.00000	7.000000
X4	10.00000	0.0000000E+00
X5	0.0000000	0.0000000E+00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	285.0000	1.000000
R1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
R2	0.0000000E+00	0.0000000E+00
R3	0.0000000E+00	-5.000000
R4	20.00000	0.0000000E+00
R5	5.000000	0.0000000E+00
R6	0.0000000E+00	-2.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	2.000000	INFINITY
X2	5.000000	INFINITY	2.000000
X3	7.000000	INFINITY	7.000000
X4	2.000000	INFINITY	0.0
X5	2.000000	0.0	INFINITY

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1	110.0000	INFINITY	0.0
R2	165.0000	5.000000	0.0
R3	45.00000	0.0	1.666667
R4	40.00000	INFINITY	20.00000
R5	20.00000	5.000000	INFINITY
R6	10.00000	0.0	2.500000

Ejercicios Propuestos (Simplex v.acotadas):

- A la vista de los resultados, responde a las siguientes cuestiones, justificando cada una de las respuestas:

a) ¿Existen soluciones óptimas alternativas? En caso afirmativo, ¿cuántas habrá?

b) Indica las ventajas e inconvenientes de utilizar la función @BND

c) Indica e interpreta cada uno de los siguientes datos:

   Coste reducido de X1

   Coste reducido de X2

   Coste reducido de X3

   Coste reducido de X4

d)

d.1) Supongamos que el segundo miembro de R3 tomase el valor 44 ¿Cuál sería el valor de la función objetivo? ¿Y el valor de la variable X5?

d.2) Supongamos que el segundo miembro de R6 tomase el valor 7 ¿Cuál sería el valor de la función objetivo? ¿Y el valor de la variable X5?

3.13 Situaciones especiales en la tabla Simplex

Se pueden identificar cuatro casos especiales en la tabla simplex, para los cuales se tienen señales particulares. Tal identificación es independiente tanto del tamaño del problema como de su objetivo.

1. **Degeneración**

Se identifica en la tabla simplex porque al menos una variable básica tiene valor cero. La degeneración puede ser permanente o definitiva, si se presenta como solución óptima. También puede darse el caso de un problema con solución degenerada transitoria, si tal degeneración se presenta en cualquier iteración intermedia del proceso de búsqueda de la solución óptima.

3.13 Situaciones especiales en la tabla Simplex

2. **Solución no acotada**

   Se identifica en la tabla simplex porque en la columna correspondiente a la variable entrante todos sus coeficientes son no positivos.

3. **Soluciones óptimas alternativas (múltiples)**

   Se identifica en la tabla simplex porque una variable no básica tiene su cj-zj igual a cero. En algunos casos podría ser que más de una variable no básica presente esta condición

   Este caso ocurre cuando alguna de las restricciones que son frontera en la región factible es PARALELA a la función objetivo.

3.13 Situaciones especiales en la tabla Simplex

3. Soluciones óptimas alternativas (múltiples) (cont…)

Si una vez obtenida la solución óptima (**A**), realizamos un cambio de base introduciendo en la base alguna de estas variables no básicas, obtendremos una nueva solución (**B**) con idéntico valor óptimo de la función objetivo

Se puede obtener nuevas soluciones con mismo valor óptimo de la función objetivo mediante combinación lineal convexa:

$$\mathbf{C = \alpha\, A + (1 - \alpha)\, B}$$

$$\textbf{para} \quad \mathbf{0 \leq \alpha \leq 1}$$

Esta situación, permite al responsable de la toma de decisiones generar un conjunto de soluciones con mismo valor óptimo de la función objetivo del problema, y seleccionar la solución que más le interese en función de otros criterios

3.13 Situaciones especiales en la tabla Simplex

4. **Problema sin solución factible**

   Se identifica en la tabla simplex porque al menos una variable artificial permanece en la base y al realizar iteraciones no es posible sacarla de la base

3.14 Otros algoritmos de programación lineal

- El desarrollo de más impacto durante la década de 1980 en Investigación Operativa fue el descubrimiento del enfoque del **punto interior** para resolver problemas de programación lineal
- El algoritmo del punto interior fue desarrollado por el matemático Narendra Karmarkar (AT&T Bell Laboratories) en 1984
- El algoritmo del punto interior sigue un enfoque distinto al del algoritmo del simplex y es especialmente potente para resolver problemas de programación lineal de enormes dimensiones

3.14 Otros algoritmos de programación lineal

- En la actualidad el software de optimización más eficiente incluye en general al menos un algoritmo de punto interior junto con el método simplex. Continúa la competencia por la supremacía entre ambos enfoques para resolver problemas muy grandes
- El algoritmo del punto interior es iterativo y comienza por identificar una solución prueba factible. En cada iteración se mueve de una solución prueba actual a una solución prueba mejor en la región factible. El proceso continúa hasta llegar a una solución prueba que es (en esencia) óptima

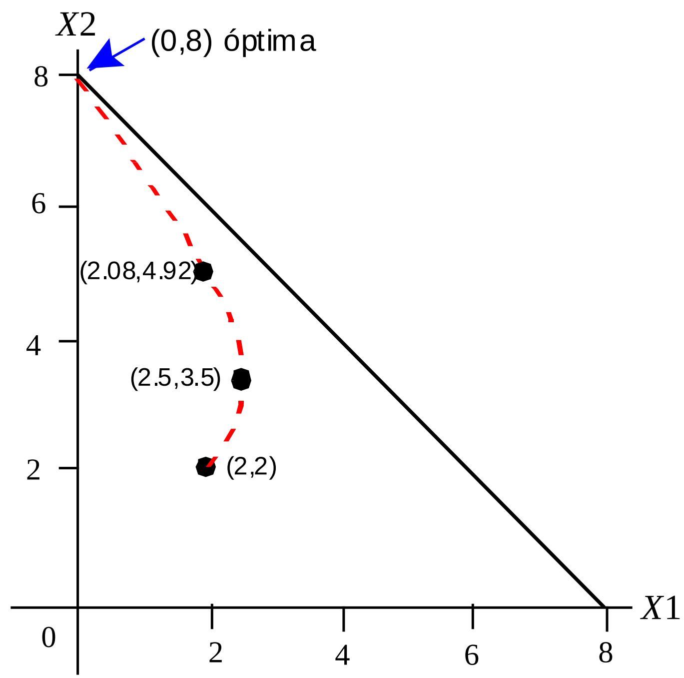
3.14 Otros algoritmos de programación lineal

- La gran **diferencia** frente al algoritmo Simplex se encuentra en la naturaleza de estas soluciones prueba:
  - Para el método Simplex las soluciones prueba son soluciones básicas factibles (puntos extremos) de manera que todos los movimientos se hacen por las aristas de la frontera de la región factible.
  - Para el algoritmo de Karmarkar, las soluciones prueba son puntos interiores, i.e. puntos interiores de la región factible

3.14 Otros algoritmos de programación lineal

- La siguiente figura ilustra la trayectoria del algoritmo del punto interior para el programa lineal:

Max Z=x1 + 2x2
s.a: x1 + x2 ≤ 8
x1, x2 ≥ 0



3.14.1 Comparación con el algoritmo Simplex

- El algoritmo del **punto interior** es un algoritmo de complejidad polinomial, es decir, el tiempo que requiere para resolver cualquier problema de programación lineal se puede acotar superiormente por una función polinomial del tamaño del problema. Sin embargo el **algoritmo del simplex** es un algoritmo de complejidad exponencial. Por tanto la diferencia en eficiencia en el peor caso es considerable. No obstante esto no dice nada en cuanto a su eficiencia promedio en problemas reales

3.14.1 Comparación con el algoritmo Simplex

- Los factores básicos que determinan la **eficiencia** de un algoritmo para un problema real son el **tiempo promedio por iteración** y el **número de iteraciones**.

  Respecto a estos factores:

  - Los algoritmos de punto interior son mucho más complicados que el método simplex. Son necesarios muchos más cálculos en cada iteración para encontrar la siguiente solución. Por tanto el tiempo de cálculo por iteración muchas veces es mayor para un algoritmo de punto interior que para el método simplex.

3.14.1 Comparación con el algoritmo Simplex

- Para problemas pequeños el <u>número de iteraciones</u> tiende a ser comparable. Por tanto en esos casos los algoritmos de punto interior requieren un tiempo mucho mayor

- Sin embargo una ventaja de los algoritmos de punto interior es que los problemas grandes no requieren muchas más iteraciones que los problemas pequeños

3.14.1 Comparación con el algoritmo Simplex

- Un problema con 10.000 restricciones funcionales puede requerir menos de 100 iteraciones mientras que para el mismo problema el método simplex puede requerir 20.000 iteraciones (la razón de la gran diferencia en el número de iteraciones tiene que ver con las trayectorias seguidas). Por tanto, es probable que los algoritmos de punto interior sean más rápidos que el método simplex para problemas muy grandes

3.14.1 Comparación con el algoritmo Simplex

- El método Simplex y sus extensiones son muy adecuados y su uso muy amplio para el análisis de sensibilidad. El enfoque del punto interior en la actualidad tiene una capacidad muy limitada en esta área. Dada la gran importancia del análisis postóptimo este es un fallo crucial que justifica los esfuerzos que permiten cambiar al método Simplex cuando el algoritmo del punto interior termina. A la solución proporcionada se le aplica la prueba de optimalidad del método simplex para verificar si se trata de la solución óptima. Si no es óptima se realizan algunas iteraciones del método simplex hasta alcanzarla. A la solución óptima se le aplica el método simplex para realizar el correspondiente análisis postóptimo

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- Existe una amplia variedad de software de optimización disponible para distintas plataformas hardware y que implementan el método simplex como procedimiento de resolución. Estos programas siguen mayoritariamente el método simplex revisado como forma de implementación. Esta forma calcula y almacena sólo la información necesaria para cada iteración y después guarda los datos esenciales de forma compacta

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- Varios factores afectan el tiempo que requiere el método simplex general en resolver un problema de programación lineal. En orden decreciente de importancia son:
  - Nº de restricciones funcionales ordinarias. El tiempo de cálculo tiende a ser proporcional al cubo de este número
  - Nº de variables. Tiene una importancia relativa (no así en el caso de programación entera, en cuyo caso la complejidad y requerimientos computacionales están directamente relacionados con el número de variables enteras del problema) y aunque se dupliquen puede que ni siquiera se duplique el tiempo de cálculo

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- Densidad de la tabla de coeficientes de las restricciones (i.e. la proporción de coeficientes distintos de cero). Afecta el tiempo de cálculo de cada iteración. En problemas grandes es común que la densidad este por debajo del 5% e incluso que sea menor del 1% y esta proporción tiende a acelerar mucho el método Simplex

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- Actualmente existe gran variedad de software de optimización que incluye opciones de programación lineal y sus extensiones. Entre ellos destacan:
- **LINDO** (**L**inear **IN**teractive and **D**iscrete **O**ptimizer) de Lindo systems, ampliamente utilizado. Disponible para distintas plataformas, permite resolver modelos de programación lineal y entera. Para problemas relativamente pequeños el modelo se puede introducir y resolver de forma intuitiva. En el caso de modelos de grandes dimensiones se hace necesaria la utilización de lenguajes de modelización que faciliten la introducción de datos y formulación del modelo de forma automática. En tal caso resulta más eficiente la utilización de **LINGO** que incluye optimizadores de programación lineal, entera y no lineal así como un lenguaje de especificación que permite la formulación de grandes modelos eficientemente (www.lindo.com).

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- **CPLEX** (IBM ILOG, Inc.) es uno de los programas más potentes que ha marcado el camino de la solución de problemas de programación lineal cada vez más grandes. La versión actual permite resolver con éxito problemas reales de programación lineal con millones de restricciones y un número comparable de variables decisión. Generalmente CPLEX se utiliza junto con un lenguaje de modelización. Varios lenguajes de modelización trabajan con CPLEX como optimizador entre ellos AMPL y OPL Studio (www.ilog.com)

  Tanto **LINDO/LINGO** como **CPLEX** utilizan el método simplex revisado como procedimiento principal de resolución aunque en ambos casos se incluyen además opciones que permiten aplicar algoritmos de punto interior.

3.15 La programación lineal y el software de optimización

- **Optimizadores basados en hojas de cálculo**. Entre los más importantes se encuentran los de Frontline Systems para Microsoft **Excel**. Además del optimizador básico que incluyen estos programas, se dispone de dos más potentes: Premium Solver y Premium Solver Plus.

  Teniendo en cuenta su enorme difusión, las hojas de cálculo proporcionan una manera muy conveniente de formular y resolver modelos de programación lineal y las últimas versiones permiten resolver modelos de grandes dimensiones. Además, es interesante destacar que debido a la gran aceptación de las hojas de cálculo en el entorno empresarial, los optimizadores más potentes incluyen comandos para el intercambio de información con las hojas de cálculo de forma dinámica.

  Recientemente Frontline ha empezado la comercialización de SolverApp que permite la resolución de modelos de optimización en Excel Web App sobre Office 365 o SharePoint 2013, y Excel 2013. De este modo es posible crear y resolver modelos en tablets, móviles y en cualquier dispositivo en el que se pueda utilizar un navegador.