Examen de Computabilidad y Complejidad

(CMC)

2 de Julio de 2004

(I) Cuestiones (justifique formalmente las respuestas)

1. ¿Es incontextual el lenguaje $L = \{a^n bxba^n : |x|_b = 2n, x \in \{a,b\}^*, n > 0\}$?

(1 punto)

Solución

El lenguaje L no es incontextual. Procedemos a demostrarlo mediante aplicación de propiedades de cierre para la clase de los lenguajes incontextuales. Definimos en primer lugar $L_1 = L \cap a^*b^*a^* = \{a^n b^{2n+2} a^n, n > 0\}$. A continuación definimos el homomorfismo h de forma que $h(a) = a, h(b) = bb, h(c) = a, h(d) = bb$ y $h^{-1}(L_1) = L_2 = \{(a+c)^n(b+d)^{n+1}(a+c)^n, n > 0\}$. Formamos ahora la intersección $L_3 = L_2 \cap a^*b^*dc^* = \{a^n b^n dc^n, n > 0\}$. Definimos un nuevo homomorfismo g de forma que $g(a) = a, g(b) = b, g(c) = c, g(d) = \lambda$ y $g(L_3) = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$.

Como sabemos que $\{a^n b^n c^n, n > 0\}$ no es incontextual tampoco puede serlo L.

Otra opción para resolver esta cuestión, quizás mas sencilla pero mas farragosa, consiste en demostrar que L no cumple el lema de bombeo, demostrando, por ejemplo, que siendo N la constante del lema, la palabra $a^N b^{2N+2} a^N$ no puede ser factorizada en la forma requerida.

2. Sea el lenguaje $L \subseteq \{a,b\}^*$ de modo que para cada $x \in \{a,b\}^*, x$ pertenece a L si y sólo si $|x|$ es impar, empieza y termina por a, contiene otra a en su posición central y contiene al menos una b. ¿Es L un lenguaje incontextual?

(1 punto)

Solución

L sí es un lenguaje incontextual, pues es generado por la gramática incontextual definida por las siguientes producciones, siendo S el axioma

$S \rightarrow aAa$

$A \rightarrow bBC|CBb|CAC$

$B \rightarrow CBC|a$

$C \rightarrow a|b$

3. Sea P la operación sobre lenguajes definida como sigue: para cada palabra x del lenguaje, si x contiene un número par de símbolos b, entonces cada símbolo a de x pasa a ser aa; si la palabra x tiene un número impar de símbolos b, entonces queda como está. Por ejemplo, si $x = babaa$, entonces $P(x) = baabaaaa$; si $x = baa$, entonces $P(x) = baa$. ¿Es la familia de los lenguajes recursivamente enumerables cerrada respecto de la operación P?

(1.5 puntos)

Solución

La familia de los lenguajes recursivamente enumerables sí es cerrada bajo P. Sea $L_{pb} = (a^*ba^*b)^*a^*$ el lenguaje formado por todas aquellas palabras x tales que $|x|_b$ es un número par y sea L_{ib} su complementario. Ambos son regulares y, por tanto, recursivamente enumerables. Sea h el homomorfismo tal que $h(a) = aa$, $h(b) = b$. Entonces $L = (L \cap L_{pb}) \cup (L \cap L_{ib})$ y $P(L) = h(L \cap L_{pb}) \cup (L \cap L_{ib})$. Así, puesto que la clase de los lenguajes recursivamente enumerables es cerrada bajo homomorfismos, unión e intersección, si L es recursivamente enumerable también lo será $P(L)$, por lo que la clase es cerrada bajo P.

4. Sean L_1 y L_2 lenguajes. Se define la operación & como sigue: $L_1 \& L_2 = \{x : x \in L_1, \exists y \notin L_2, |x| = |y|\}$. ¿Es la clase de los lenguajes recursivos cerrada bajo la operación &?

(1.5 puntos)

Solución

La clase de los lenguajes recursivos sí es cerrada bajo &. Sean L_1 y L_2 lenguajes recursivos. $\overline{L_2}$ será también recursivo y por tanto existirán máquinas de Turing M_1 y $\overline{M}_2$ tales que M_1 acepta a L_1 y se detiene para todas las entradas y $\overline{M}_2$ genera $\overline{L}_2$ en orden canónico. A partir de M_1 y $\overline{M}_2$ construimos una máquina M que funcionará de la siguiente manera: Cuando M reciba una entrada x activará en primer lugar una subrutina que simula a M_1. Si M_1 rechaza a x, M activará su salida NO. En caso contrario M activará una segunda subrutina que simulará a $\overline{M}_2$ e irá, por tanto, generando las palabras de $\overline{L}_2$ en orden canónico. Cada vez que $\overline{M}_2$ genera una palabra y, M activa una tercera subrutina que comparará $|x|$ con $|y|$. Si $|y| < |x|$, M activará de nuevo a $\overline{M}_2$ que generará la siguiente palabra repitiendose el proceso. Si $|y| = |x|$, M activará su salida SI. Por último, si $|y| > |x|$, M activará su salida NO, pues se habrá verificado que no hay ninguna palabra en $\overline{L}_2$ de la misma longitud que x. En caso de que $\overline{L}_2$ sea finito, cuando $\overline{M}_2$ no pueda generar mas palabras M procederá igual que en el caso anterior por el mismo motivo. Dado que el número de palabras con longitud menor que $|x|$ es finito M se encontrará tras un tiempo finito en una de las tres últimas situaciones. Por tanto la máquina M así construida acepta el lenguaje $L_1 \& L_2$ y se detiene para todas las entradas. Hemos demostrado entonces que si L_1 y L_2 son lenguajes recursivos, $L_1 \& L_2$ también lo es, de lo que se deduce que la clase de los lenguajes recursivos es cerrada bajo &.

(II) PROBLEMAS:

5. Se pide construir un módulo *Mathematica* que, tomando como entrada una gramática incontextual (con el formato explicado en las clases de laboratorio), devuelva *True* si la gramática contiene producciones de la forma $A \to A\alpha A\beta$, donde $\alpha, \beta \in (Auxiliares \cup Terminales)^*$ y *False* en caso contrario.

(2 puntos)

Solución

```
Problema5[G_List]:=Module[{i,j},
   For[i=1,i ≤ Length[G[[3]]],i++,
      For[j=1,j ≤ Length[G[[3,i,2]]],j++,
        If[Length[G[[3,i,2,j]]] > 1,
          If[(First[G[[3,i,2,j]]]==G[[3,i,1]])&& MemberQ[Rest[G[[3,i,2,j]]],G[[3,i,1]]],Return[True]]
        ]
      ]
   ];
   Return[False]
]
```

6. Sea la gramática G definida por las producciones $S \to AA|0$ y $A \to 1S1|\lambda$. Sea el homomorfismo $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ con $h(0) = 10$ y $h(1) = 0$. Se pide obtener una gramática incontextual para el lenguaje $(h(L(G)) \cup L(G))^r$.

(1 punto)

Solución

Formamos en primer lugar una gramática para $h(L(G))$

$S_h \to A_h A_h | 10$

$A_h \to 0 S_h 0 \mid \lambda$

A continuación, una gramática para $h(L(G)) \cup L(G)$

$S_\cup \to S_h \mid S$

$S_h \to A_h A_h | 10$

$A_h \to 0 S_h 0 \mid \lambda$

$S \to AA \mid 0$

$A \to 1S1 \mid \lambda$

Por último, una gramática para $(h(L(G)) \cup L(G))^r$

$S_r \to S_h \mid S$

$S_h \to A_h A_h \mid 01$

$A_h \to 0S_h0 \mid \lambda$

$S \to AA \mid 0$

$A \to 1S1 \mid \lambda$

siendo S_r el símbolo inicial.

7. Dada la gramática G con las siguientes producciones,

$$\begin{array}{ll} S \to BEBE \mid A0C & A \to CC \mid 0A1S \mid 0 \\ B \to 0B \mid D1 & C \to EB \mid AS \mid \lambda \\ D \to ABA \mid SBE & E \to SS \mid 0AD \mid \lambda \end{array}$$

se pide obtener una gramática simplificada y en forma normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$.

(2 puntos)

Solución

Procedemos en primer lugar a simplificar la gramática G

Eliminación de símbolos no generativos

Símbolos generativos: $\{0, 1, A, C, E, S\}$.

Gramática sin símbolos no generativos:

$$\begin{array}{ll} S \to A0C & A \to CC \mid 0A1S \mid 0 \\ C \to AS \mid \lambda & E \to SS \mid \lambda \end{array}$$

Eliminación de símbolos no alcanzables

Símbolos alcanzables: $\{S, A, 0, C, 1\}$.

Gramática sin símbolos no alcanzables:

$$\begin{array}{ll} S \to A0C & A \to CC \mid 0A1S \mid 0 \\ C \to AS \mid \lambda & \end{array}$$

Eliminación de producciones vacías

Símbolos anulables:$\{C, A\}$.

Gramática sin producciones vacías:

$$\begin{array}{ll} S \to A0C \mid 0C \mid A0 \mid 0 & A \to CC \mid C \mid 0A1S \mid 01S|0 \\ C \to AS|S & \end{array}$$

Eliminación de producciones unitarias

$\mathcal{C}(S) = \{S\}$; $\mathcal{C}(A) = \{A, C, S\}$; $\mathcal{C}(C) = \{C, S\}$.

Gramática sin producciones unitarias:

$$\begin{array}{ll} S \to A0C \mid 0C \mid A0 \mid 0 & A \to CC \mid 0A1S \mid 01S \mid 0 \mid AS \mid A0C \mid 0C \mid A0 \\ C \to AS \mid A0C \mid 0C \mid A0 \mid 0 & \end{array}$$

La gramática ya está simplificada puesto que no contiene símbolos inútiles.

Paso a Forma Normal de Chomsky

Sustitución de símbolos terminales:

$S \to AX_0C|X_0C|AX_0|0$

$A \to CC \mid X_0AX_1S \mid X_0X_1S \mid 0 \mid AS \mid AX_0C \mid X_0C \mid AX_0$

$C \to AS \mid AX_0C \mid X_0C \mid AX_0 \mid 0$

$X_0 \to 0$

$X_1 \to 1$

Factorización de las producciones y obtención de la gramática definitiva en FNC

$S \to AY_1 \mid X_0C \mid AX_0 \mid 0$
$A \to CC \mid X_0Y_2 \mid X_0Y_3 \mid 0 \mid AS \mid AY_1 \mid X_0C \mid AX_0$
$Y_3 \to X_1S$
$X_0 \to 0$

$Y_1 \to X_0C$
$Y_2 \to AY_3$
$C \to AS \mid AY_1 \mid X_0C \mid AX_0 \mid 0$
$X_1 \to 1$