Tema 3: Multiplicadores de Lagrange

- Modelo: $P(c=i) = p_i$ para $1 \leq i \leq C$ y $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, $\mathbf{\Theta} = (p_1, \ldots, p_C)^t$
- Conjunto de N muestras: S
- Logaritmo de la versoimilitud: $q_s(\mathbf{\Theta}) = L_S(\mathbf{\Theta}) = \log P(S \mid \mathbf{\Theta}) = \sum_{i=1}^{N} c_i \log p_i$
- Estimación de máxima verosimilitud: $\mathbf{\Theta}^* = \operatorname*{arg\,max}_{\substack{p_1,\ldots,p_C \\ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1}} \sum_{i=1}^{N} c_i \log p_i$
- Lagrangiana: $\Lambda(p_1, \ldots, p_C, \beta) = \sum_{i=1}^{N} c_i \log p_i + \beta \left(1 - \sum_{i=1}^{N} p_i\right)$
- Soluciones óptimas en func. de β: $\frac{\partial \Lambda}{\partial p_j} = \frac{c_j}{p_j} - \beta = 0 \Rightarrow p_j^*(\beta) = \frac{c_j}{\beta} \quad 1 \leq j \leq C$
- Función dual de Lagrange: $\Lambda_D(\beta) = \sum_{i=1}^{C} c_i \log c_i - \sum_{i=1}^{C} c_i \log \beta + \beta - \sum_{i=1}^{C} c_i$
- Valor óptimo de β: $\frac{d\,\Lambda_D}{d\,\beta} = 1 - \sum_{i=1}^{C} \frac{c_i}{\beta} = 0 \Rightarrow \beta^* = \sum_{i=1}^{C} c_i = N$
- Solución final: $p_j^* = \frac{c_j}{N} \quad 1 \leq j \leq C$