Examen de Computabilidad y Complejidad
(CMC)
6 de julio de 2005

(I) CUESTIONES: (Justifique formalmente las respuestas)

1. ¿Es el lenguaje $\{xx^ry \in \{a,b\}^* \ / \ |x|_a = |y|_a\}$ incontextual?

(1.0 punto)

Supóngase que el lenguaje es incontextual. Sea n la constante del Lema de Iteración. Considérese la palabra $z = b^na^na^nb^na^n$. Claramente z es una palabra del lenguaje ya que puede verse como ss^rt con $s = b^na^n$ y $t = a^n$. Demostraremos que el lenguaje no es incontextual estableciendo que no existe ninguna factorización admisible de z = uvwxy en las condiciones del Lema de Iteración. Nòtese que $|s|_a = |s^r|_a = |t|_a$.

Las posible factorizaciones potencialmente admisibles son las siguientes:

1) $v,x \in b^*$, y son segmentos de la primera secuencia de b's. Tomando una iteración mayor que 1 obtenemos una palabra de la forma $b^ma^na^nb^na^n$ con $m > n$, en consecuencia no admite ninguna descomposición de la forma ss^rt porque no lo permite el número m de b's (puesto que s tendría necesariamente que ser b^ma^n). Así, éstas no son factorizaciones admisibles.

2) $v,x \in a^*$, y son segmentos de la primera secuencia de a's (a^na^n). Para cualquier iteración distinta de 1 podemos conseguir un número par de a's que permita una descomposición de la forma ss^r quedando, por tanto, $b^na^ma^mb^na^n$ con $m \neq n$, pero por esto no pertenecerá al lenguaje. Así, éstas no son factorizaciones admisibles.

3) $v,x \in b^*$, y son segmentos de la segunda secuencia de b's. Tomando una iteración igual a cero obtenemos una palabra de la forma $b^na^na^nb^ma^n$ con $m < n$, en consecuencia no admite ninguna descomposición de la forma ss^rt porque no lo permite el número m de b's. Así, éstas no son factorizaciones admisibles.

4) $v,x \in a^*$, y son segmentos de la segunda secuencia de a's. Para cualquier iteración distinta de 1 obtenemos una palabra de la forma $b^na^na^nb^na^m$ con $m \neq n$, pero por esto no pertenecerá al lenguaje. Así, éstas no son factorizaciones admisibles.

5) En el resto de factorizaciones $vwx \in b^+a^+$, o $vwx \in a^+b^+$, en cualquier caso, al considerar la iteración cero, la palabra resultante: o bien no podrá descomponerse de la forma ss^rt o si se puede se tendrá entonces que $|s|_a \neq |t|_a$. Así, éstas no son factorizaciones admisibles.

2. ¿Es el lenguaje $\{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$ incontextual?

(1.0 punto)

El lenguaje es incontextual porque se genera mediante la siguiente gramática incontextual

$$G: S \to aSb \mid aSbb \mid \lambda.$$

Seguidamente demostramos que $L(G) = \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$.

I)$L(G) \subseteq \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$. Lo demostraremos por inducción sobre el número de pasos en la derivación.

a) Caso base: $S \Rightarrow x \in \{a,b\}^*$, así $x = \lambda \in \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$.

b) Caso general: supóngase que $S \Rightarrow^n x$ con $n > 1$. Por hipótesis de inducción si $S \Rightarrow^m y \in \{a,b\}^*$ con $m < n$, entonces $y \in \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$. La derivación de x es de la forma

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow^{n-1} x \quad \text{o} \quad S \Rightarrow aSbb \Rightarrow^{n-1} x,$$

en el primer caso x = azb y en el segundo x = azbb con $S \Rightarrow^{n-1} z \in \{a,b\}^*$, así $z \in \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$. En consecuencia también $x \in \{a^nb^m \ / \ n \leq m \leq 2n\}$ en cualquiera de los dos casos, puesto que si $z = a^nb^m$ con $n \leq m \leq 2n$, en el primer caso $azb = a^{n+1}b^{m+1}$ que cumple que $n+1 \leq m+1 \leq 2n+2$ y en el segundo $azbb = a^{n+1}b^{m+2}$ que también cumple que $n+1 \leq m+2 \leq 2n+2$.

II) $\{a^n b^m \,/\, n \le m \le 2n\} \subseteq L(G)$. Sea $x \in \{a^n b^m \,/\, n \le m \le 2n\}$, así $x = a^n b^m$ con $n \le m \le 2n$. Sea $i = m-n$ y $j = 2n-m$, se tiene que $m = 2i+j$ y $n = i+j$. Puede generarse x a partir de S en n+1 pasos, aplicando i veces la producción $S \to aSbb$, j veces la producción $S \to aSb$ y finalmente una vez la producción $S \to \lambda$.

3. Sean L y L' dos lenguajes, se define la operación F de modo que $F(L,L') = \{x \in L \,/\, x^r \notin L'\}$. Si L y L' son lenguajes recursivos ¿lo es también F(L,L')?

(1.5 puntos)

Si L y L' son recursivos, entonces también lo es F(L,L'). Para demostrarlo definimos una MT F que lo reconoce y que se detiene para cada entrada. Sea M una MT que reconoce a L y que se detiene para cada entrada y M' una MT que reconoce a L' que también se detiene para cada entrada. F opera como sigue: dada una entrada x la aplica a M, si M rechaza F se detiene rechazando; en otro caso obtiene el reverso de x y lo aplica a M', si M' rechaza F se detiene aceptando, en otro caso se detiene rechazando.

4. ¿Son los lenguajes recursivamente enumerables cerrados para el homomorfismo inverso?

(1.5 puntos)

Sea un homomorfismo $h: \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ y sea $L \subseteq \Gamma^*$ un lenguaje recursivamente enumerable. Demostramos que también lo es $h^{-1}(L)$. Recuérdese que $h^{-1}(L) = \{x \in \Sigma^* \,/\, h(x) \in L\}$. Puesto que h admite una descripción finita puede codificarse en la función de transición de una MT. Sea M una MT tal que $L(M) = L$. Seguidamente definimos una MT M' con $L(M') = h^{-1}(L)$. M' tiene h embebido en su función de transición y opera como sigue: dada una entrada x, M' obtiene h(x) y se la aplica a M dejándole a ésta el resto de la computación. Por tanto M' acepta a x si y sólo si M acepta a h(x), esto es $L(M') = \{x \in \Sigma^* \,/\, h(x) \in L\} = h^{-1}(L)$.

(II) PROBLEMAS

5. Desarrolle un módulo *Mathematica* de modo que al suministrarle una gramática incontextual retorne True en el caso de que exista alguna producción tal que su consecuente sea un palíndromo y False en otro caso.

(2.0 puntos)

```
pal[G_List] := Module[{encontrado,i,j,c},
    encontrado = False;
    i = 1;
    While[!encontrado && i ≤ Length[G[[3]]],
       j = 1;
      While[!encontrado && j ≤ Length[G[[3,i,2]]],
        c = G[[3,i,2,j]];
        If[Reverse[c] == c, encontrado = True];
        j++
      ];
      i++
    ];
    Return[encontrado]
]
```

6. Sean las gramáticas

$G1 : S \to 0S0S \mid 1S1S \mid \lambda$

$G2 : S \to SSA \mid 0A1A \mid 0 \mid 1 \qquad A \to SA \mid \lambda$

$G3 : S \to aSSb \mid bSSb \mid a$

Sea f la sustitución con f(0) = L(G3)* y f(1) = {λ}. Sea h el homomorfismo con h(0) = 01 y h(1) = 00. Obtenga una gramática incontextual para el lenguaje f(L(G1)) ∪ h(L(G2)).

(1.0 punto)

f(L(G1)): $S' \to XS'XS' \mid YS'YS' \mid \lambda$

f(0): $X \to ZX \mid \lambda$ $\quad Z \to aZZb \mid bZZb \mid a$

f(1): $Y \to \lambda$

h(L(G2)): $S'' \to S''S''A \mid 01A00A \mid 01 \mid 00$ $\quad A \to S''A \mid \lambda$

f(L(G1)) ∪ h(LG2)) : $S \to S' \mid S''$

7. Dada la gramática G obtenga una gramática G' simplificada y en Forma Normal de Chomsky con L(G') = L(G) – {λ}.

G: $S \to ABC \mid ABD \mid AF \mid SS$ $\quad A \to AA \mid AB \mid BB \mid CC$

$B \to BB \mid BCS \mid BD \mid BFB \mid \lambda$ $\quad C \to CCab \mid CDC \mid CF \mid a$

$D \to DFS \mid AFE \mid DBD$ $\quad E \to a \mid b \mid c \mid EE \mid AE$

$F \to FEF \mid DD \mid EDF$

(2.0 puntos)

Eliminación de símbolos inútiles.

Símbolos generativos: S, A, B, C, E.

$S \to ABC \mid SS$

$A \to AA \mid AB \mid BB \mid CC$

$B \to BB \mid BCS \mid \lambda$

$C \to CCab \mid a$

$E \to a \mid b \mid c \mid EE \mid AE$

Símbolos alcanzables: S, A, B, C, a, b.

$S \to ABC \mid SS$

$A \to AA \mid AB \mid BB \mid CC$

$B \to BB \mid BCS \mid \lambda$

$C \to CCab \mid a$

Símbolos anulables: A, B.

Eliminación de producciones λ.

$S \to ABC \mid BC \mid AC \mid C \mid SS$

$A \to AA \mid A \mid AB \mid B \mid BB \mid CC$

$B \to BB \mid B \mid BCS \mid CS$

$C \to CCab \mid a$

Eliminación de producciones unitarias.

$S \to ABC \mid BC \mid AC \mid CCab \mid a \mid SS$

$A \to AA \mid AB \mid BB \mid CC \mid BCS \mid CS$

$B \to BB \mid BCS \mid CS$

$C \to CCab \mid a$

Forma Normal de Chomsky

$S \to AX_1 \mid BC \mid AC \mid CX_2 \mid a \mid SS$

$A \to AA \mid AB \mid BB \mid CC \mid BX_4 \mid CS$

$B \to BB \mid BX_4 \mid CS$

$C \to CX_2 \mid a$

$X_1 \to BC$

$X_2 \to CX_3$

$X_3 \to X_a X_b$
$X_4 \to CS$
$X_a \to a$
$X_b \to b$