Examen de Teoría de Percepción - Primer Parcial

ETSINF, Universitat Politécnica de Valéncia, 11 de mayo de 2020

Apellidos: Díaz-Alejo León Nombre: Stéphane

Profesor: ☐ Jorge Civera ☐ Carlos Martínez

Problemas (4 puntos, 90 minutos, con apuntes)

1. (**1 punto**) Calcula el espacio en memoria de las siguientes representaciones:

   a) Representación global directa de una imagen a 256 niveles de gris con resolución 1536×2560 píxeles (**0.15 puntos**)

   b) Representación local de una imagen de 150×200 píxeles, usando ventanas de 25×25 píxeles y una rejilla de desplazamiento horizontal y vertical de 2 píxeles sobre una imagen de 128 niveles de gris, usando representación por histograma de cada ventana (**0.35 puntos**)

   c) Señal de audio mono de 15 minutos de duración, muestreada a 8KHz y 16 bits (**0.2 puntos**)

   d) Conjunto de 500 documentos de 200 palabras máximo cada uno, con un vocabulario de 3500 palabras, representado por *term frequency* (**0.3 puntos**)

   Solución:

   a) 3932160 bytes = 3840 Kb

   b) 1419264 bytes = 1386 Kb

   c) 14400000 bytes $\approx$ 13.7 Mb

   d) 1750000 bytes $\approx$ 1.67 Mb

2. (**1.5 puntos**) Se dispone de un conjunto de muestras en $\mathbb{R}^3$ clasificadas en dos clases:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_1	-3	0	-2	2	-1	3	1
x_2	-3	0	-2	2	-1	3	1
x_3	0	-3	-1	-2	3	1	2
c	A	A	A	B	B	B	B

   Se pide:

   a) Calcula los vectores de proyección PCA del conjunto de muestras (**0.5 puntos**).

   b) Calcula la proyección de las muestras mediante PCA a $\mathbb{R}^2$ (**0.5 puntos**).

   c) Considerando las muestras proyectadas mediante PCA a $\mathbb{R}^2$, ¿sería suficiente un clasificador lineal para obtener un error de clasificación igual a cero? Justifica la respuesta (**0.5 puntos**).

   Solución:

   a) Para calcular los vectores de proyección PCA primero es necesario obtener la matriz de covarianzas de los datos. En este caso, como $\bar{\mathbf{x}} = (0\ 0\ 0)^t$, la matriz de covarianzas es:

$$\Sigma = \frac{1}{7}\left(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1^t + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2^t + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3^t + \mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{x}_4^t + \mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{x}_5^t + \mathbf{x}_6 \cdot \mathbf{x}_6^t + \mathbf{x}_7 \cdot \mathbf{x}_7^t\right) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calculamos los valores propios de la matriz de covarianzas

$$\left|\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \text{donde} \qquad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 0.$$

   Los vectores propios asociados son

$$\lambda_1 = 8 \quad \rightarrow \quad w_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \rightarrow \quad w_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^t$$

$$\lambda_3 = 0 \quad \rightarrow \quad w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}^t.$$

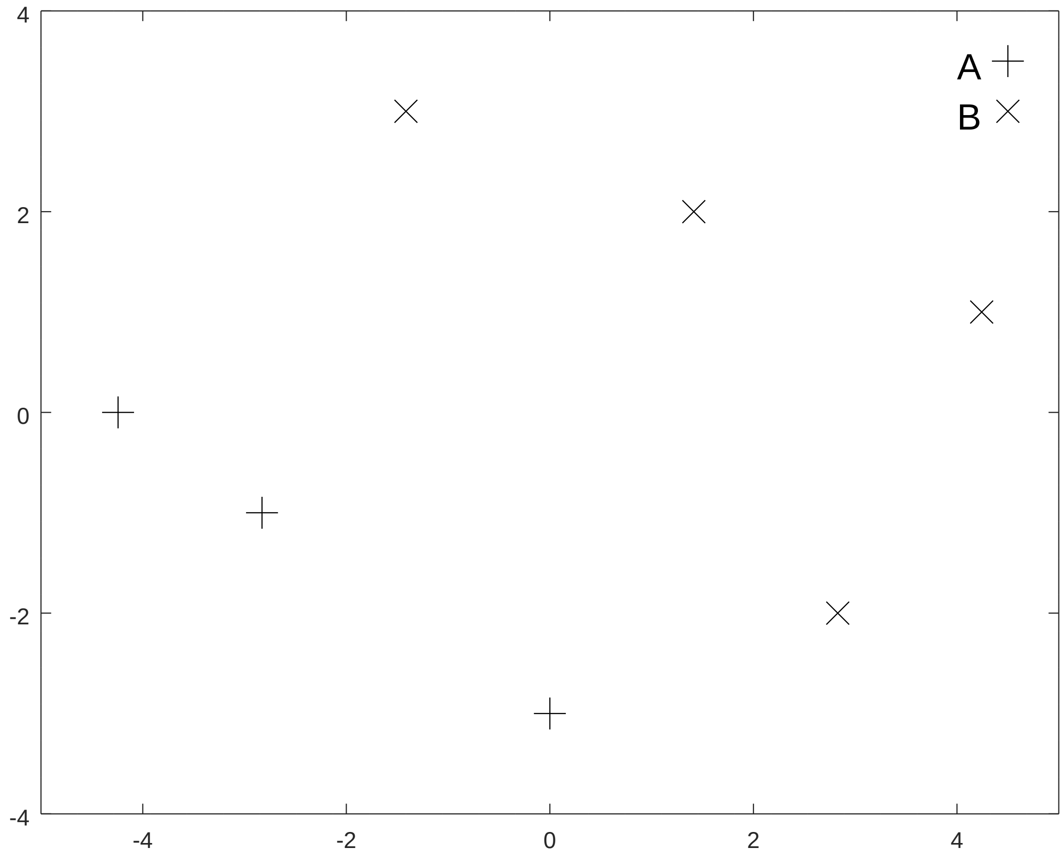


Figura 1: Proyección de las muestras mediante PCA a $\mathbb{R}^2$.

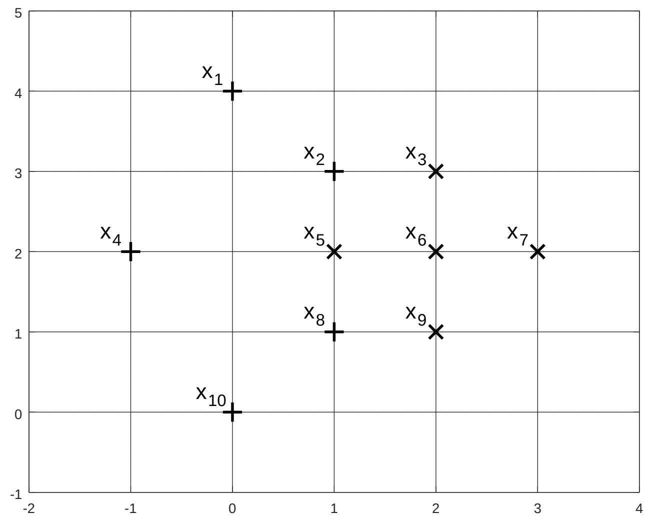
b) Proyectamos sobre los dos vectores propios de mayor valor propio asociado

n	1	2	3	4	5	6	7
x_1	$-3\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
x_2	0	-3	-1	-2	3	1	2
c	A	A	A	B	B	B	B

c) Como se puede observar en la Figura 1, sí es posible separar las muestras de la clase A de la clase B mediante una frontera lineal.

3. **(1.5 puntos)** Se tiene el siguiente conjunto de datos, cuya representación gráfica se ve en la parte derecha:

$\mathbf{x}_1 = (0{,}4)$	$\mathbf{x}_6 = (2{,}2)$
$\mathbf{x}_2 = (1{,}3)$	$\mathbf{x}_7 = (3{,}2)$
$\mathbf{x}_3 = (2{,}3)$	$\mathbf{x}_8 = (1{,}1)$
$\mathbf{x}_4 = (-1{,}2)$	$\mathbf{x}_9 = (2{,}1)$
$\mathbf{x}_5 = (1{,}2)$	$\mathbf{x}_{10} = (0{,}0)$



Se pide:

a) Aplica una iteración del algoritmo de edición de Wilson sobre el conjunto de datos. El orden de recorrido será **ascendente** según el índice. Se debe emplear la distancia L1 y vecino más cercano. En caso de empate de distancias, siempre se elige la clase incorrecta. (**0.5 puntos**)

b) Aplica sobre los datos originales el algoritmo de condensado CNN, siguiendo los mismos criterios que en el apartado anterior. Muestra la evolución de los conjuntos S y G en todos los pasos. (**0.75 puntos**) *c*) En este caso, ¿habría sido conveniente aplicar edición antes que condensado? Razona la respuesta. (**0.25 puntos**)

Solución:

La matriz de distancias entre prototipos es:

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_1$								
$\mathbf{x}_2$	2	$\mathbf{x}_2$							
$\mathbf{x}_3$	3	1	$\mathbf{x}_3$						
$\mathbf{x}_4$	3	3	4	$\mathbf{x}_4$					
$\mathbf{x}_5$	3	1	2	2	$\mathbf{x}_5$				
$\mathbf{x}_6$	4	2	1	3	1	$\mathbf{x}_6$			
$\mathbf{x}_7$	5	3	2	4	2	1	$\mathbf{x}_7$		
$\mathbf{x}_8$	4	2	3	3	1	2	3	$\mathbf{x}_8$	
$\mathbf{x}_9$	5	3	2	4	2	1	2	1	$\mathbf{x}_9$
$\mathbf{x}_{10}$	4	4	5	3	3	4	5	2	3

a) Aplicación de Wilson:

- $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$, acierto, X no cambia
- $\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5$, error, $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_6$, acierto, X no cambia
- $\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5$, error, $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_8$, empate (error), $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_6 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_9$, acierto, X no cambia
- $\mathbf{x}_7 \to \mathbf{x}_6$, acierto, X no cambia
- $\mathbf{x}_8 \to \mathbf{x}_9$, error, $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_9 \to \mathbf{x}_6$, acierto, X no cambia
- $\mathbf{x}_{10} \to \mathbf{x}_9$, error, $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_9\}$

b) Aplicación de CNN Fase 1: $S = \{\mathbf{x}_1\}$, $G = \{\}$

- $\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_1$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1\}$, $G = \{\mathbf{x}_2\}$
- $\mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_1$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$, $G = \{\mathbf{x}_2\}$
- $\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_1$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4\}$
- $\mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_3$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$
- $\mathbf{x}_6 \to \mathbf{x}_3$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6\}$
- $\mathbf{x}_7 \to \mathbf{x}_3$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$
- $\mathbf{x}_8 \to \mathbf{x}_3$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_8\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$
- $\mathbf{x}_9 \to \mathbf{x}_8$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$
- $\mathbf{x}_{10} \to \mathbf{x}_8$, acierto, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}\}$

Fase 2, iteración 1:

- $\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_8$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_8$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_6 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_7 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_{10} \to \mathbf{x}_8$, acierto, S y G no cambian

Fase 2, iteración 2:

- $\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5$, error, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}\}$
- $\mathbf{x}_6 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_7 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_{10} \to \mathbf{x}_8$, acierto, S y G no cambian

Fase 3, iteración 3:

- $\mathbf{x}_6 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_7 \to \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9$, acierto, S y G no cambian
- $\mathbf{x}_{10} \to \mathbf{x}_8$, acierto, S y G no cambian

Resultado final: $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$, $G = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}\}$

c) En este caso, al no haber "huecos" en las regiones de decisión, el algoritmo de edición previo al condensado tiene el efecto de eliminar los prototipos cercanos a la frontera de decisión, que son los que trata de mantener el algoritmo de condensado; por tanto, al menos con este nivel de vecindad ($k = 1$, puede que con $k > 1$ sí hubiese mantenido prototipos cercanos a las fronteras), no es conveniente aplicar edición antes que condensado.