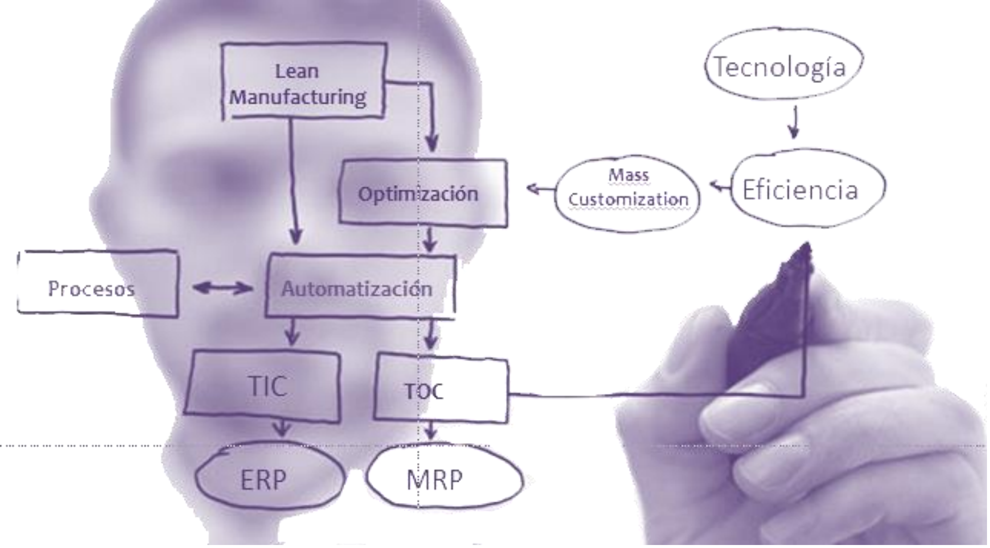


DEIOAC-UPV

3. Métodos de Programación Lineal (I)

Objetivos

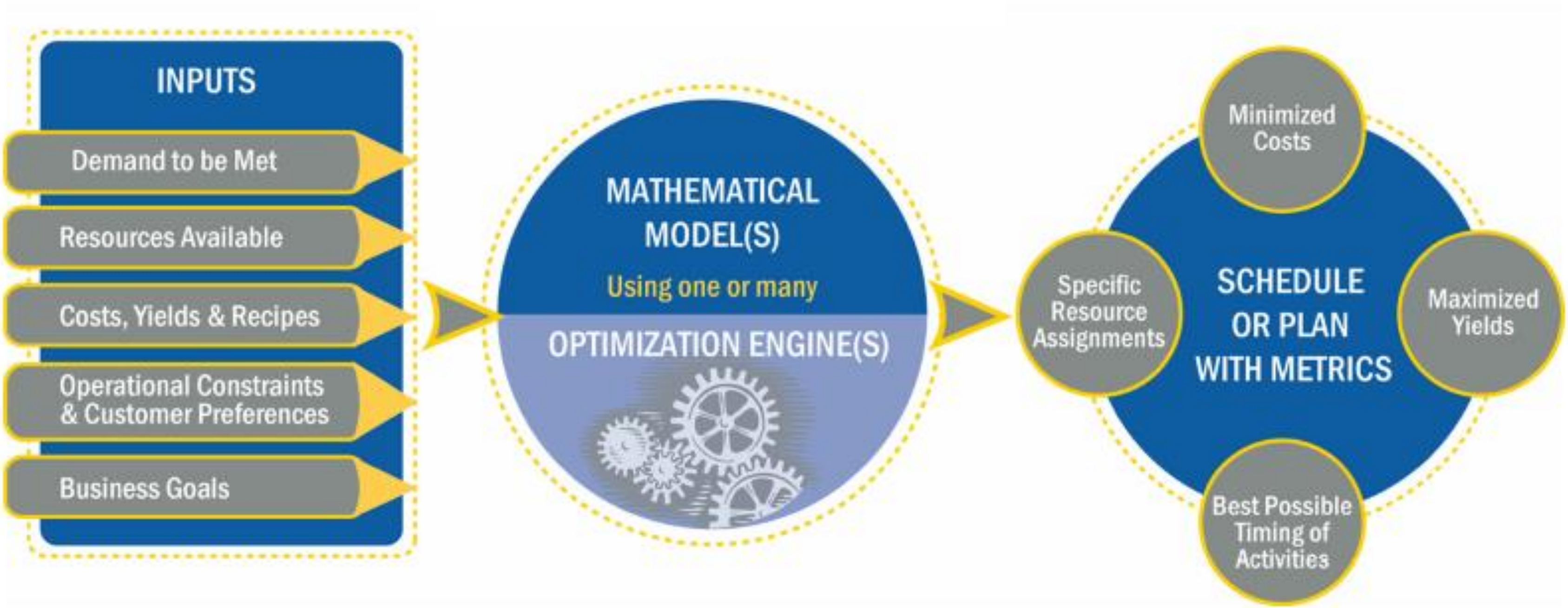
Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- Conocer e identificar las características de un problema de Programación Lineal.
- Resolver gráficamente modelos lineales con dos variables.
- Analizar la sensibilidad de la solución óptima a cambios en los datos de entrada del modelo.
- Expresar en forma estándar un problema lineal.
- Conocer y saber manejar los términos básicos relacionados con la Programación Lineal: solución básica, variables básicas, coste reducido, coste de oportunidad, etc.
- Conocer los fundamentos del algoritmo Simplex.
- Resolver problemas lineales mediante el algoritmo Simplex.
- Identificar e interpretar la información correspondiente a la solución óptima obtenida mediante el algoritmo Simplex.
- Interpretar los informes de solución óptima y análisis de sensibilidad obtenidos con software de optimización.

CONTENIDOS

3.1 Introducción

- Los sistemas de toma de decisiones basados en optimización tienen una arquitectura bien definida como se muestra en el siguiente gráfico:



3.1 Introducción

¿Qué características ha de tener un *modelo* para ser de Programación Lineal?

¿Cómo se obtiene la *Solución Óptima* de un modelo de Programación Lineal?

3.1 Introducción

- **Programación Lineal**: es uno de los métodos más poderosos y flexibles para el análisis cuantitativo.

- Se utiliza en todo tipo de organizaciones diariamente para resolver gran variedad de problemas:
  - planificación de la producción,
  - problemas de mezclas,
  - gestión de personal,
  - gestión de inventarios,
  - gestión de rutas de vehículos,
  - corte de materias primas,
  - …

3.1 Introducción

- Hemos visto una variedad de problemas decisionales que pueden ser formulados y analizados como problemas de programación lineal. El siguiente paso es, una vez modelizado como un programa lineal, **cómo resolverlo para encontrar una solución óptima?**

- La solución más sencilla es hacer **'click en el botón Resolver'** de un optimizador…. Pero**,**

Necesitamos saber algo más de lo que ocurre al pulsar el botón 'Resolver'

3.1 Introducción

- Razones para adquirir algunos conocimientos básicos sobre los procedimientos de solución:

1. Incrementar la confianza en la validez y potencia de estos algoritmos
2. Comprender el significado de la información contenida en los informes de solución
3. Comprender el significado de algunos resultados no muy frecuentes al resolver estos problemas (e.g. el problema no tiene solución, la solución es no acotada).

UN PROBLEMA DE PRODUCCIÓN

- Una empresa de producción de componentes informáticos dispone de 3 departamentos. La fabricación de los componentes se hace en el departamento 1 (producción), el test de los mismos se realiza en el departamento 2 (control de calidad) y en el departamento 3 (montaje) se realiza el ensamblado
- Debido a la disminución en los beneficios, la gerencia ha decidido reorganizar la producción de la empresa

3.1 Introducción

- Se interrumpirá la producción de componentes no rentables para comenzar la producción de dos nuevas placas base
  - **Placa base 1** (más sencilla, se testea en el departamento de producción)
  - **Placa base 2** (fabricada por otra empresa)

- La placa base 1 requiere parte de la capacidad de producción en los departamentos 1 y 3 y nada en el departamento 2

- La placa base 2 sólo necesita trabajo en los departamentos 2 y 3

3.1 Introducción

- La compañía puede vender todas las placas base que se puedan fabricar
- Cada placa base se fabricará en lotes de 50 placas
- Capacidad productiva de los departamentos y requerimientos de cada lote:

	Tiempo de producción (h/lote)		
	PRODUCTO		
Departamento	Placa 1	Placa 2	Tiempo de producción disponible (h/semana)
1 (Producción)	1	0	4
2 (Calidad)	0	2	12
3 (Montaje)	3	2	18

3.1 Introducción

- Teniendo en cuenta la capacidad de producción de los departamentos y que el beneficio por lote es 3000 y 5000 € respectivamente,

¿Cuál es la producción que maximiza el beneficio total de la compañía?

3.1 Introducción

- **VARIABLES**:

Las variables decisión del problema son:

X1: Número de lotes de la placa base 1 fabricados por semana

X2: Número de lotes de la placa base 2 fabricados por semana

- ***HIPÓTESIS 1 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: DIVISIBILIDAD***

Todas las variables pueden asumir cualquier valor real

- Si las variables solo tienen sentido en el caso de tomar valores discretos **pero** toman un **valor real elevado** (superior a 10) en la solución óptima, es aceptable <u>considerarlas como continuas</u> y redondear su valor

- ***HIPÓTESIS 2 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD***

Todas las variables son no negativas

- Si $Xi \leq 0$
  - Sustituir en el modelo Xi por **Xi' = -Xi**; $Xi' \geq 0$
  - Cuando se obtenga la solución óptima se deshace el cambio
- Si Xi no restringida en signo
  - Indicar que **Xi = Xi1 - Xi2**; $Xi1, Xi2 \geq 0$
  - Sustituir en el modelo Xi por (Xi1 - Xi2)
  - Cuando se obtenga la solución óptima se deshace el cambio

3.1 Introducción

- FUNCIÓN OBJETIVO:

Placas Base	Beneficio por lote (€)	Lotes fabricados por semana	Beneficio por semana
Tipo 1	3000	X_1	$3000\ X_1$
Tipo 2	5000	X_2	$5000\ X_2$
Beneficio Total = $3000\ X_1 + 5000\ X_2 = Z$			

3.1 Introducción

- Teniendo en cuenta la capacidad productiva de los departamentos y requerimientos de cada lote:

	Tiempo de producción (h/lote)		
	PRODUCTO		
Departamento	**Placa 1**	**Placa 2**	**Tiempo de producción disponible (h/semana)**
1 (Producción)	**1**	**0**	**4**
2 (Calidad)	**0**	**2**	**12**
3 (Montaje)	**3**	**2**	**18**

- ... RESTRICCIONES

- RESTRICCIONES:

Capacidad de los departamentos

$$X_1 \leq 4 \qquad \text{(Departamento 1)}$$

$$2X_2 \leq 12 \qquad \text{(Departamento 2)}$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18 \qquad \text{(Departamento 3)}$$

3.1 Introducción

- ***HIPÓTESIS 3 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: LINEALIDAD***

Todas las relaciones entre variables son lineales

- **Proporcionalidad de las contribuciones**
  - La contribución individual de cada variable es estrictamente proporcional a su valor; y el factor de proporcionalidad es constante para toda la gama de valores que la variable puede asumir
- **Aditividad de las contribuciones**
  - La contribución total de las variables es igual a la suma de las contribuciones individuales, sea cual sea el valor de las variables

Formulación del programa lineal

Determinar los valores de las variables:

$$X_1 \geq 0 \;\; y \;\; X_2 \geq 0$$

que optimicen, maximicen en este caso (en otros puede ser minimizar) la ***función objetivo***:

$$\text{Max} \;\; 3\,X_1 + 5\,X_2 \;\; \text{(miles euros)}$$

y verifiquen las ***restricciones:***

$X_1 \leq 4$ **(Departamento 1)**

$2\,X_2 \leq 12$ **(Departamento 2)**

$3\,X_1 + 2\,X_2 \leq 18$ **(Departamento 3)**

Formulación general de un programa lineal

Determinar los valores de las *variables decisión*

$X_j \geq 0 \ \ para \ \ j = 1,2,...,n$

que optimicen (max o min) la *función objetivo*

$MAX \quad \Sigma \, C_j \, X_j$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{(MAX\ Z \equiv MIN\ (-Z))}$

con la condición

$\Sigma \, a_{ij} \, X_j \leq , = , \geq b_i \qquad i=1,2,...,m$

Donde

- **n**: número de variables
- **m**: número de restricciones (=, ≤ o ≥)
- Los c_j , a_{ij} y b_i son los parámetros del modelo

- ***HIPÓTESIS 4 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: CERTIDUMBRE***

Se asume que todos los parámetros del modelo c_j , a_{ij} y b_i son constantes conocidas

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PL

- **Método gráfico** (problemas con dos variables).
- **Método Simplex** (George Dantzig, 1947).
- **Algoritmo del Punto Interior** (**API**; Narendra Karmarkar, 1984).

El **API** sólo supera al Simplex en problemas muy grandes.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PL

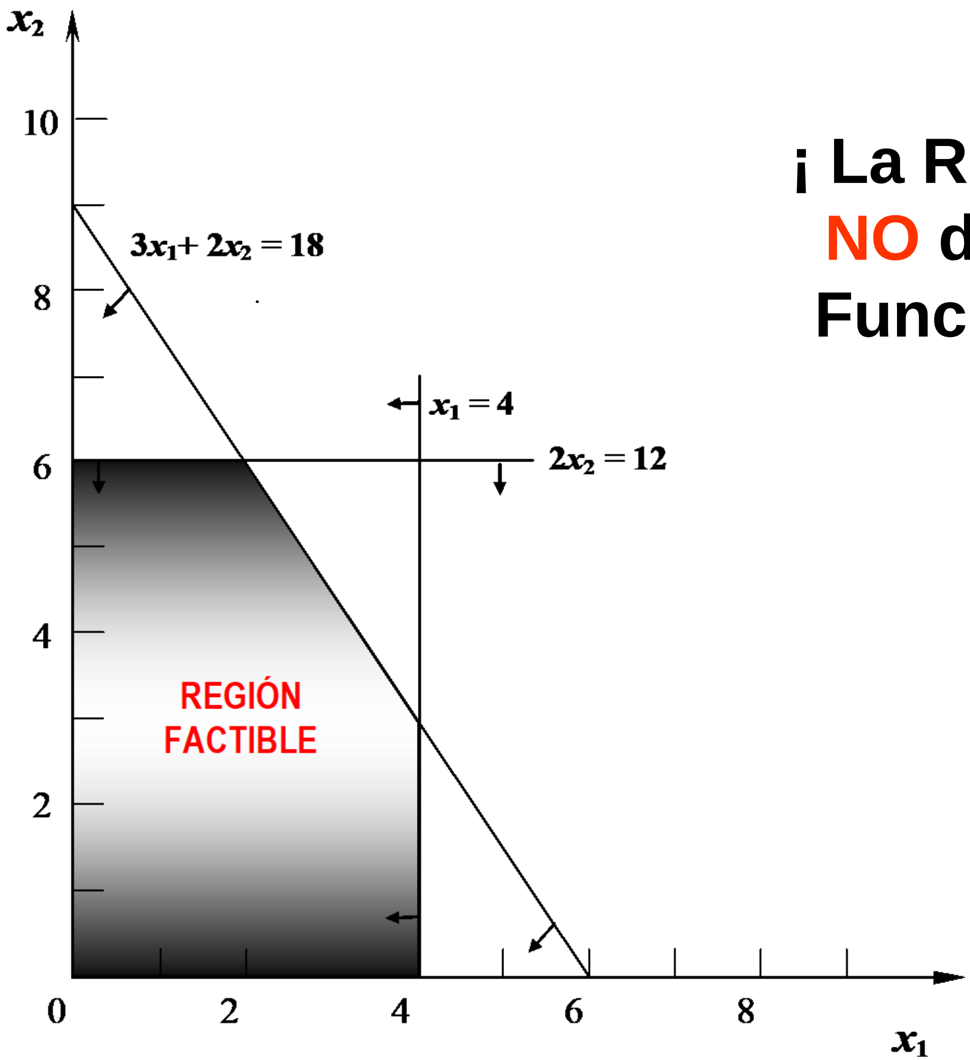
- **Método gráfico** (problemas con dos variables).
- **Método Simplex** (George Dantzig, 1947).
- **Algoritmo del Punto Interior** (**API**; Narendra Karmarkar, 1984).

El **API** sólo supera al Simplex en problemas muy grandes.

- **SOLUCIÓN POSIBLE**
  - Combinación de valores de las variables que satisface simultáneamente todas las restricciones

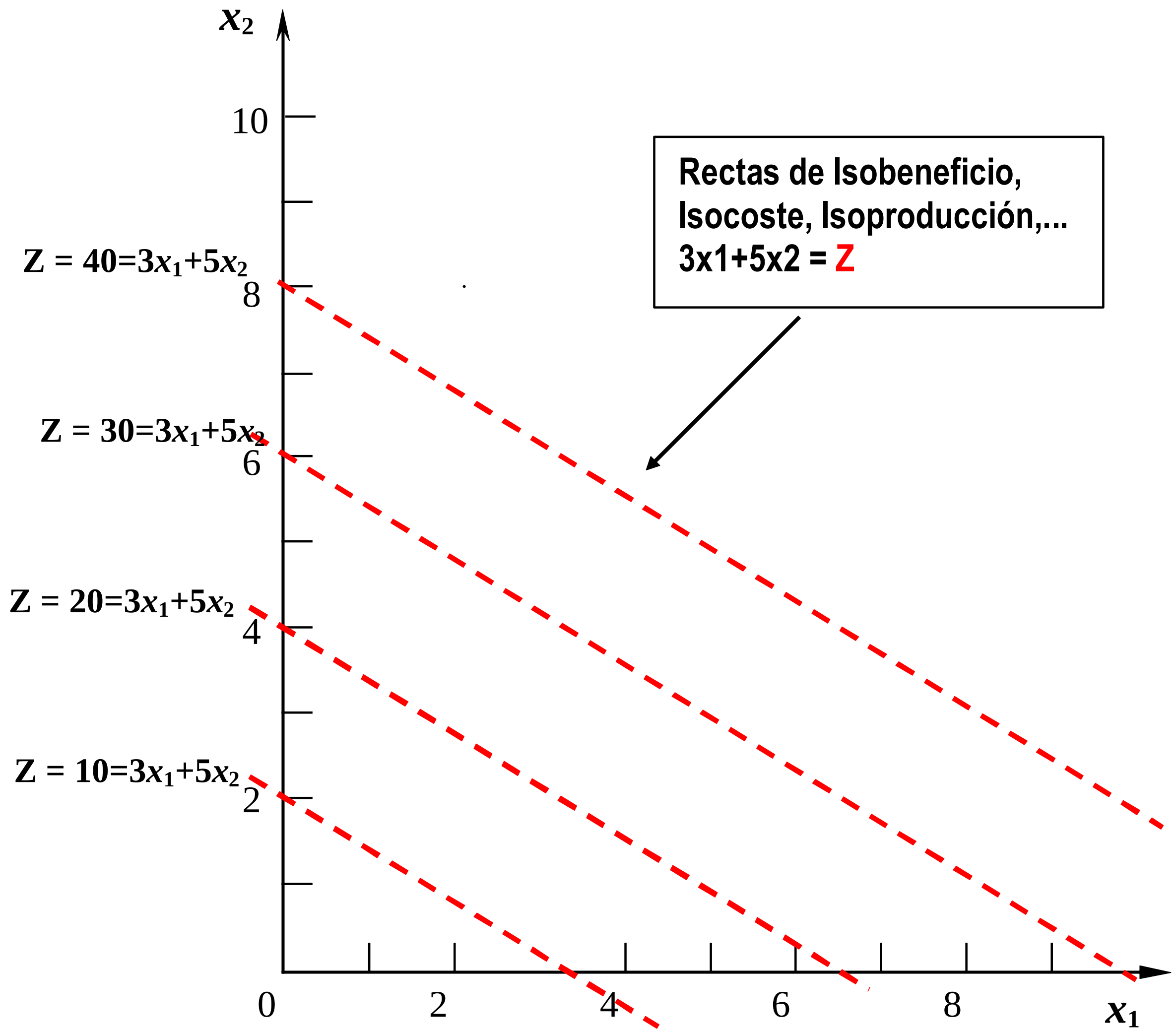
- **REGIÓN FACTIBLE**
  - Conjunto de todas las soluciones posibles (C.S.P.)

3.2 Región factible y solución gráfica



¡ La Región Factible NO depende de la Función Objetivo !

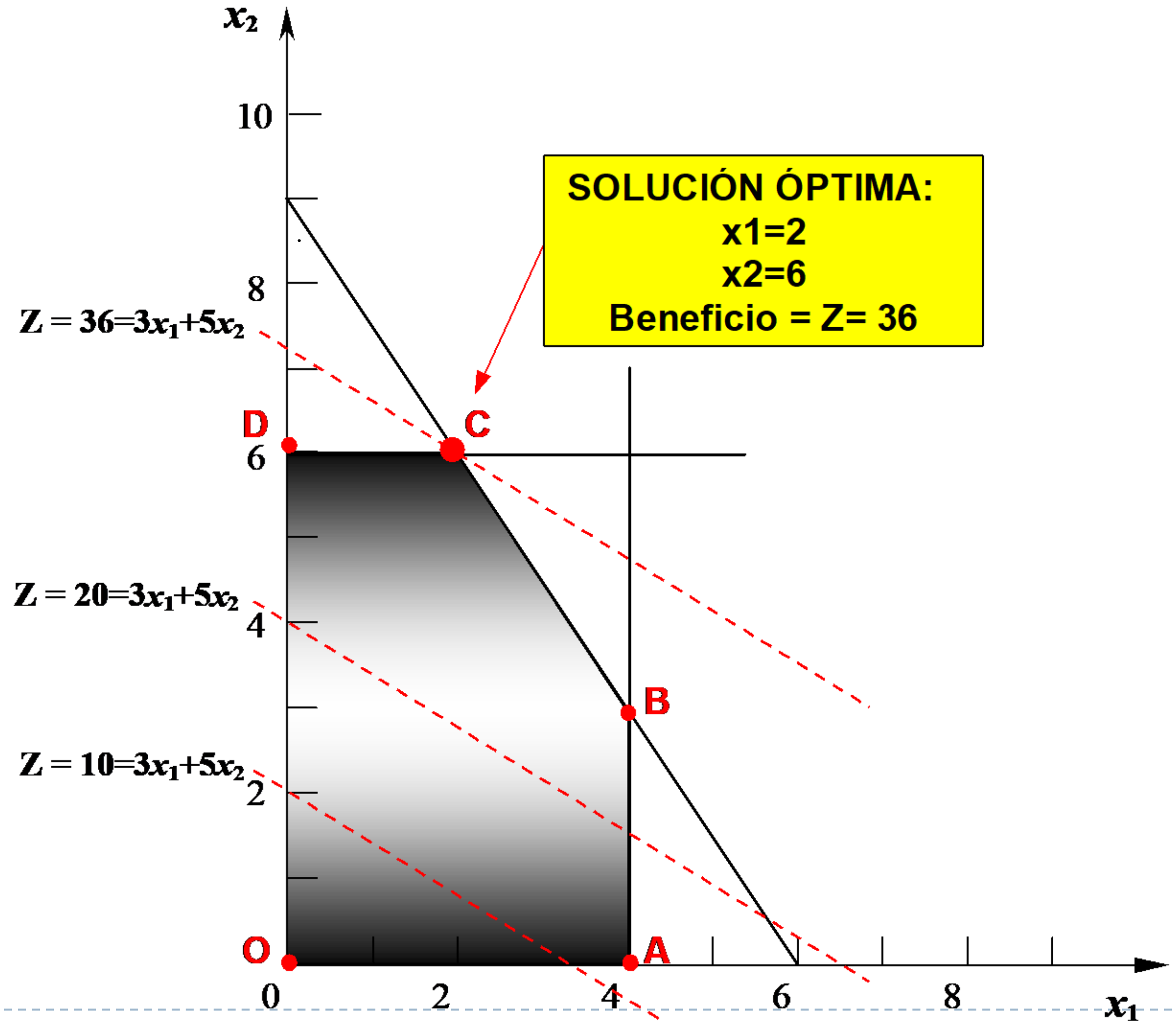
3.2 Región factible y solución gráfica



FUNCIÓN

OBJETIVO

SOLUCIÓN GRÁFICA: MAXIMIZAR BENEFICIO



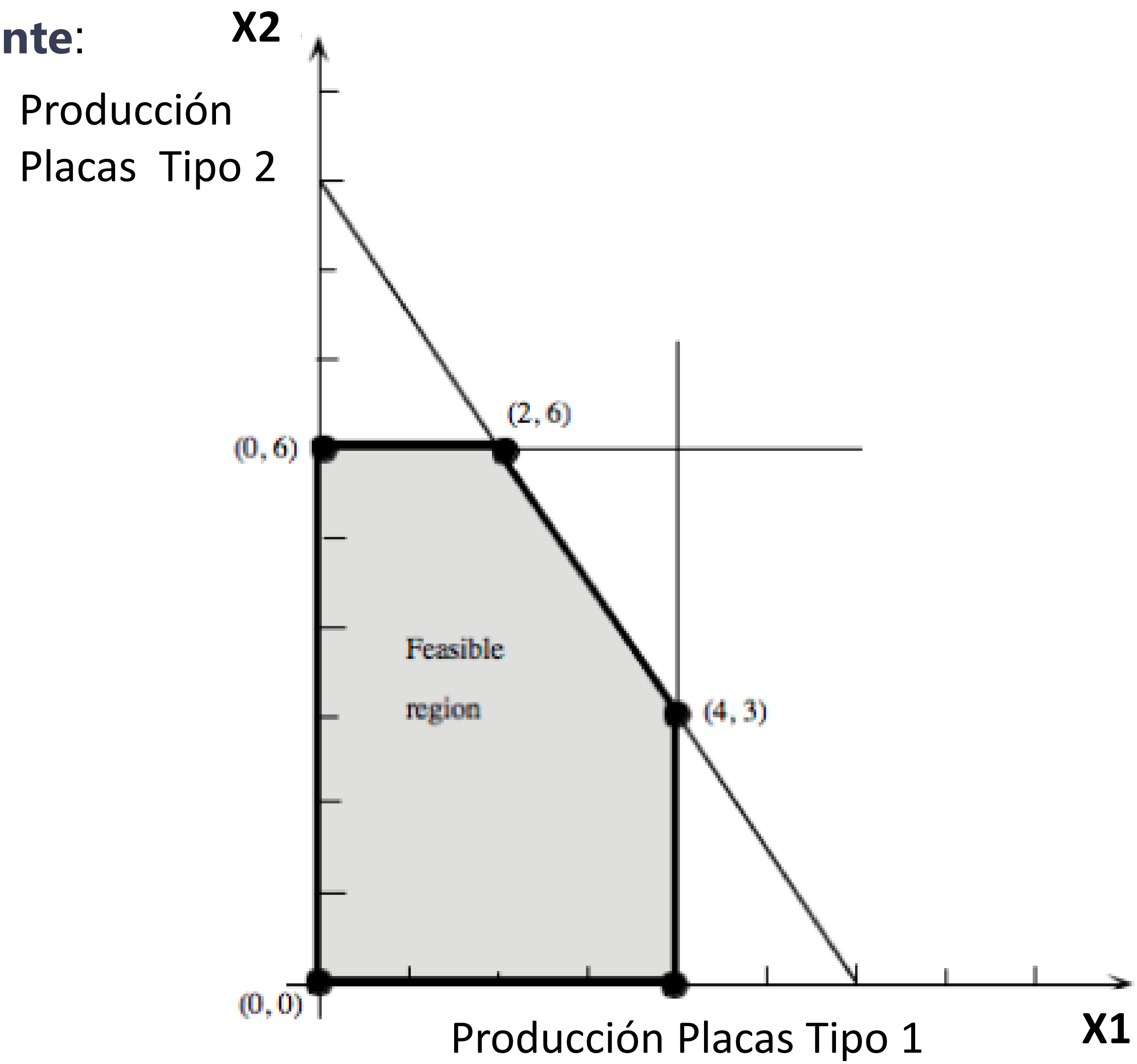
3.2 Región factible y solución gráfica

Algunas conclusiones importantes...

- Una solución óptima debe estar en la **frontera de la región factible**
- Si un problema de programación lineal tiene exactamente una solución óptima, esta solución debe ser un vértice de la región factible (**punto extremo**).
- Un **punto extremo** es una solución factible que se encuentra en la **intersección entre la frontera de restricciones**.
- El algoritmo Simplex es un procedimiento extremadamente eficiente para resolver problemas de Programacion Lineal. Evalúa únicamente **puntos extremos** (vértices de la región factible).

3.2 Región factible y solución gráfica

Analíticamente:



Enumeración de los Puntos Extremos

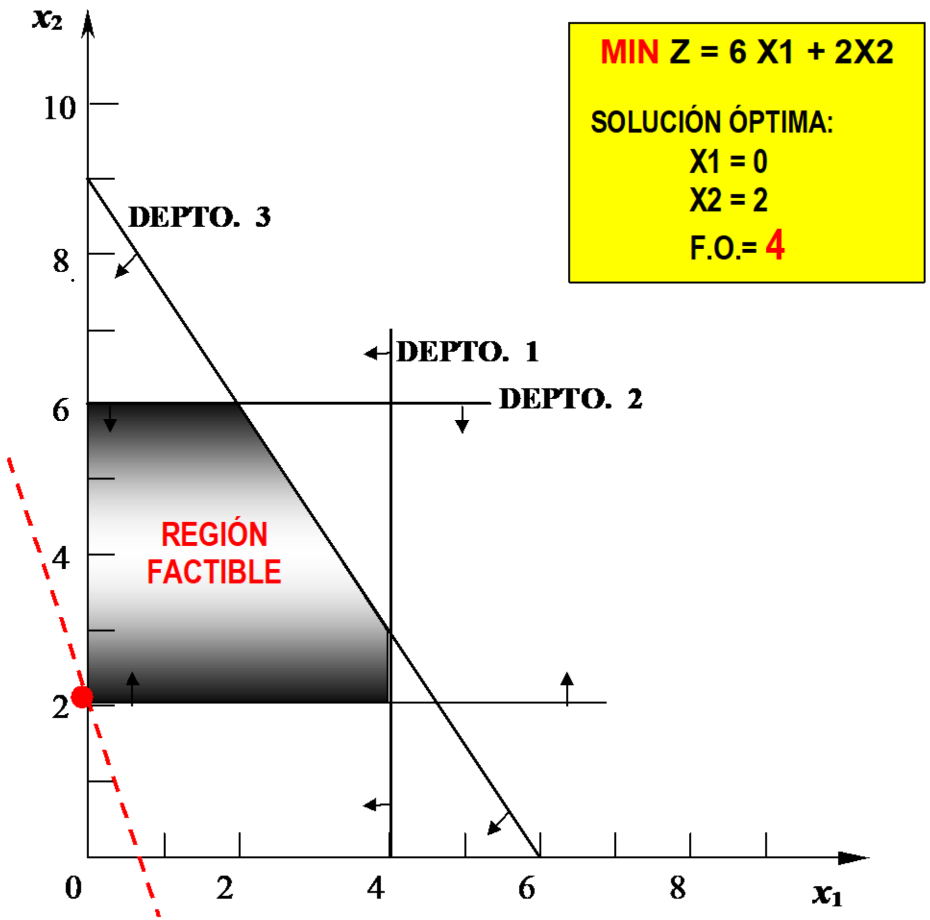
	Punto Extremo	Beneficio= 300*X1* + 500*X2*	
	(*X1*, *X2*) = (0, 0)	Beneficio = 300(0) + 500(0) = 0 €	
	(*X1*, *X2*) = (0, 6)	Beneficio = 300(0) + 500(6) = 3.000 €	
S. Optima→	**(*X1*, *X2*) = (2, 6)**	**Beneficio = 300(2) + 500(6) = 3.600 €**	**←Mejor**
	(*X1*, *X2*) = (4, 3)	Beneficio = 300(4) + 500(3) = 2.700 €	
	(*X1*, *X2*) = (4, 0)	Beneficio = 300(4) + 500(0) = 1.200 €	

Ejercicio Propuesto:

- Teniendo en cuenta que el coste de cada lote de placas tipo 1 es de 6.000€ y 2.000€ en el caso de las placas de tipo 2, si el objetivo fuera minimizar los costes semanales ¿cuál es la solución óptima?

- Calcula la solución óptima teniendo en cuenta que se desea minimizar los costes y satisfacer una demanda de al menos 2 lotes de placas tipo 2.

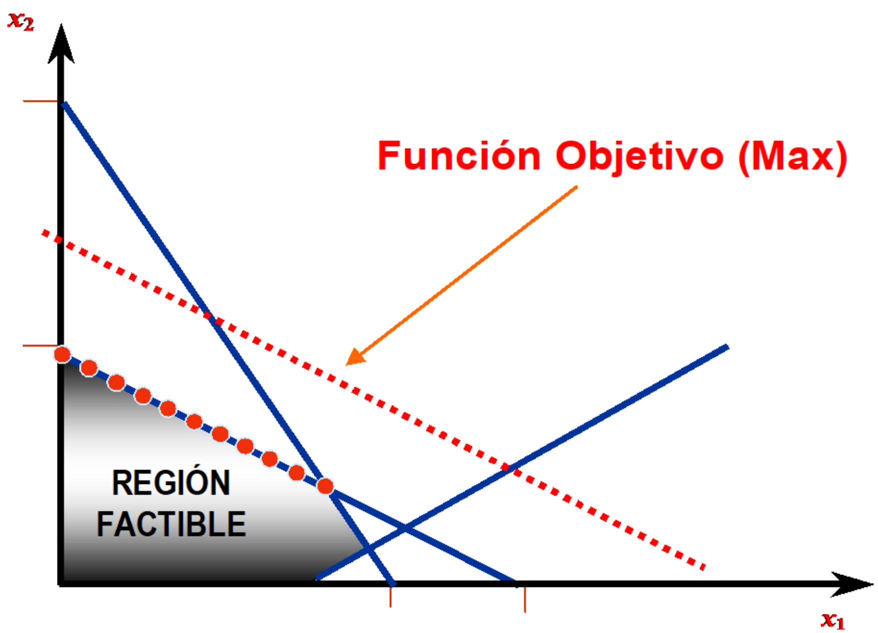
3.2 Región factible y solución gráfica



3.2 Región factible y solución gráfica

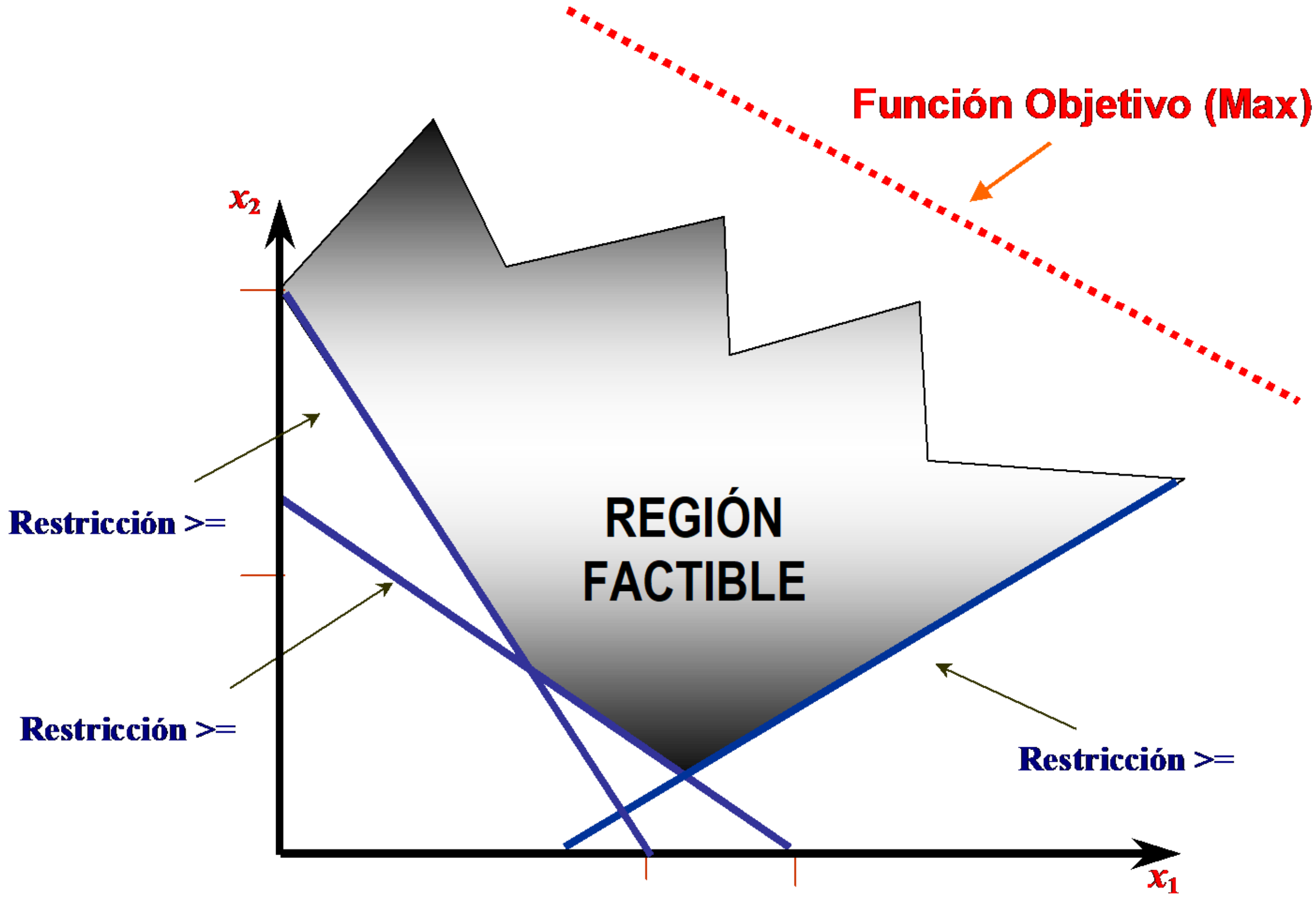
- **Al resolver un programa lineal podemos encontrarnos con cuatro casos**

1. **Solución única** (el problema de planificación de la producción en la empresa de componentes informáticos)
2. **Soluciones alternativas** (infinitas soluciones)

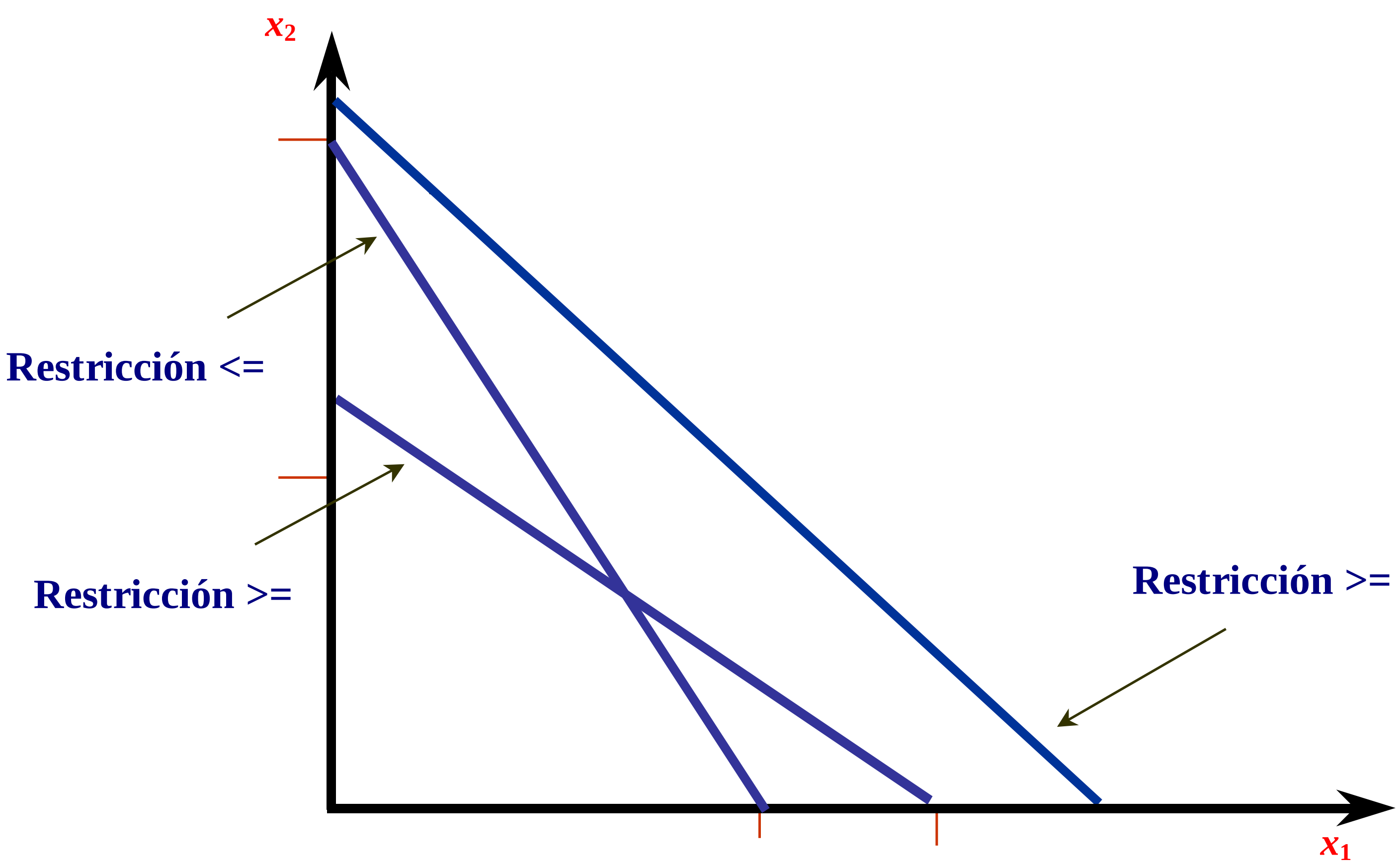


3.2 Región factible y solución gráfica

3. Solución no acotada



4. **No hay solución**



FORMA ESTÁNDAR DE UN PROBLEMA LINEAL (PL)

Un PL está en forma estándar si cumple:

- Todas las restricciones son igualdades.
- Todas las variables son de naturaleza no negativa.

Cómo pasar a forma estándar cualquier PL:

- Desigualdades: añadir variables de holgura.
- Variables: aplicar equivalencias. (*vistas en las Hipótesis de PL*)

Todo PL puede expresarse en forma estándar.

FORMA ESTÁNDAR DE UN PROBLEMA LINEAL (PL)

Un PL está en forma estándar si cumple:

- Todas las restricciones son igualdades.
- Todas las variables son de naturaleza no negativa.

Cómo pasar a forma estándar cualquier PL:

- Desigualdades: añadir variables de holgura.
- Variables: aplicar equivalencias. (*vistas en las Hipótesis de PL*)

Todo PL puede expresarse en forma estándar.

VARIABLES DE HOLGURA

- **Holgura**

  Ante una solución posible, **diferencia** entre el **valor** que toma la **restricción** y el coeficiente del **segundo miembro**

- **Variable de holgura**

  Con frecuencia, resulta interesante identificar de una forma explícita esta diferencia introduciendo en la restricción una variable

  Estas variables están sujetas a las mismas consideraciones de divisibilidad y no negatividad que las variables decisión

3.3 Variables de holgura

MODELO EN FORMA GENERAL	$\rightarrow$	MODELO EN FORMA ESTANDAR

$X_1 + X_3 = 4$ (depto.1)

$2X_2 + X_4 = 12$ (depto.2)

$3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$ (depto.3)

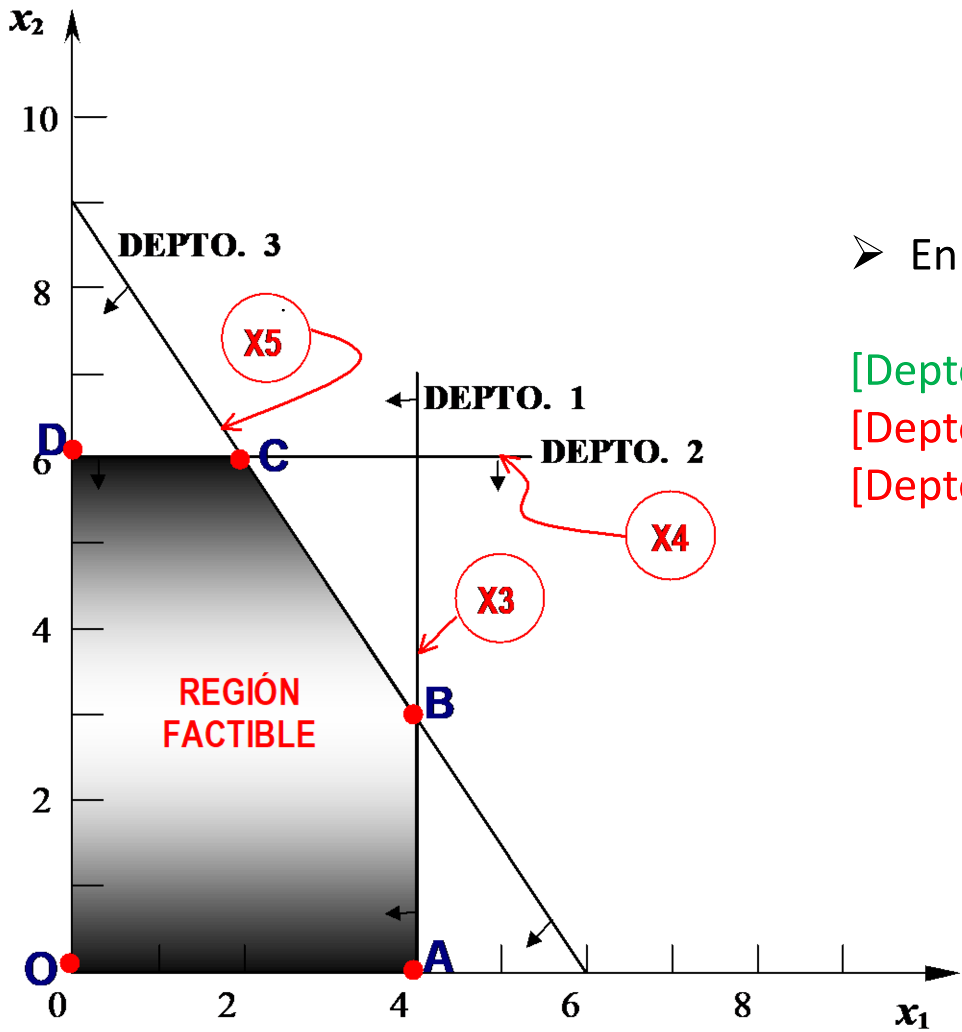
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mathbf{x}_{\mathbf{holgura}} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \mathbf{x}_{\mathbf{exceso}} = b_i$$

- Interpretación de las variables de holgura (dada una solución)

  - **=0**: Restricción Limitativa (Cuello de botella del sistema)
  - **>0**: Recursos no utilizados o capacidad no utilizada

3.3 Variables de holgura



- En la solución óptima (C):

[Depto1] Es un recurso sobrante
[Depto2] Es cuello de botella
[Depto3] Es cuello de botella

3.4 Análisis de sensibilidad

- En **Programación Lineal**: los coeficientes del modelo son datos de entrada (parámetros fijos del modelo)

- En problemas reales:
  - Los coeficientes del modelo no están (en general) perfectamente fijados ya que dependen de parámetros no controlables y no pueden predecirse con exactitud
  - Resulta interesante estudiar cómo varía la solución óptima o el plan de producción si cambia algún parámetro de entrada

3.4 Análisis de sensibilidad

- Cada variación de los parámetros del modelo generará un nuevo programa lineal
- El ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD (A.S.) proporciona herramientas para el cálculo de las soluciones óptimas y el plan de producción de los problemas resultantes tras la modificación de los parámetros originales del problema, SIN RESOLVER DE NUEVO EL MODELO
  - A.S. COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO (C_i)
  - A.S. VECTOR RECURSOS (b_i)

Aprenderemos a deducirlo/razonarlo gráficamente, y más adelante lo veremos también en prácticas, con la ayuda de LINGO®.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE Ci

- **Observación:** La modificación del coeficiente de una variable en la función objetivo implica cambiar la pendiente de la función objetivo
- Si el cambio es suficientemente grande habrá cambio de solución óptima

OBJETIVO:

Determinar el intervalo de variación de C_i dentro del cual la solución óptima o plan óptimo de producción (valor de las variables decisión y de holgura) **NO CAMBIA.**

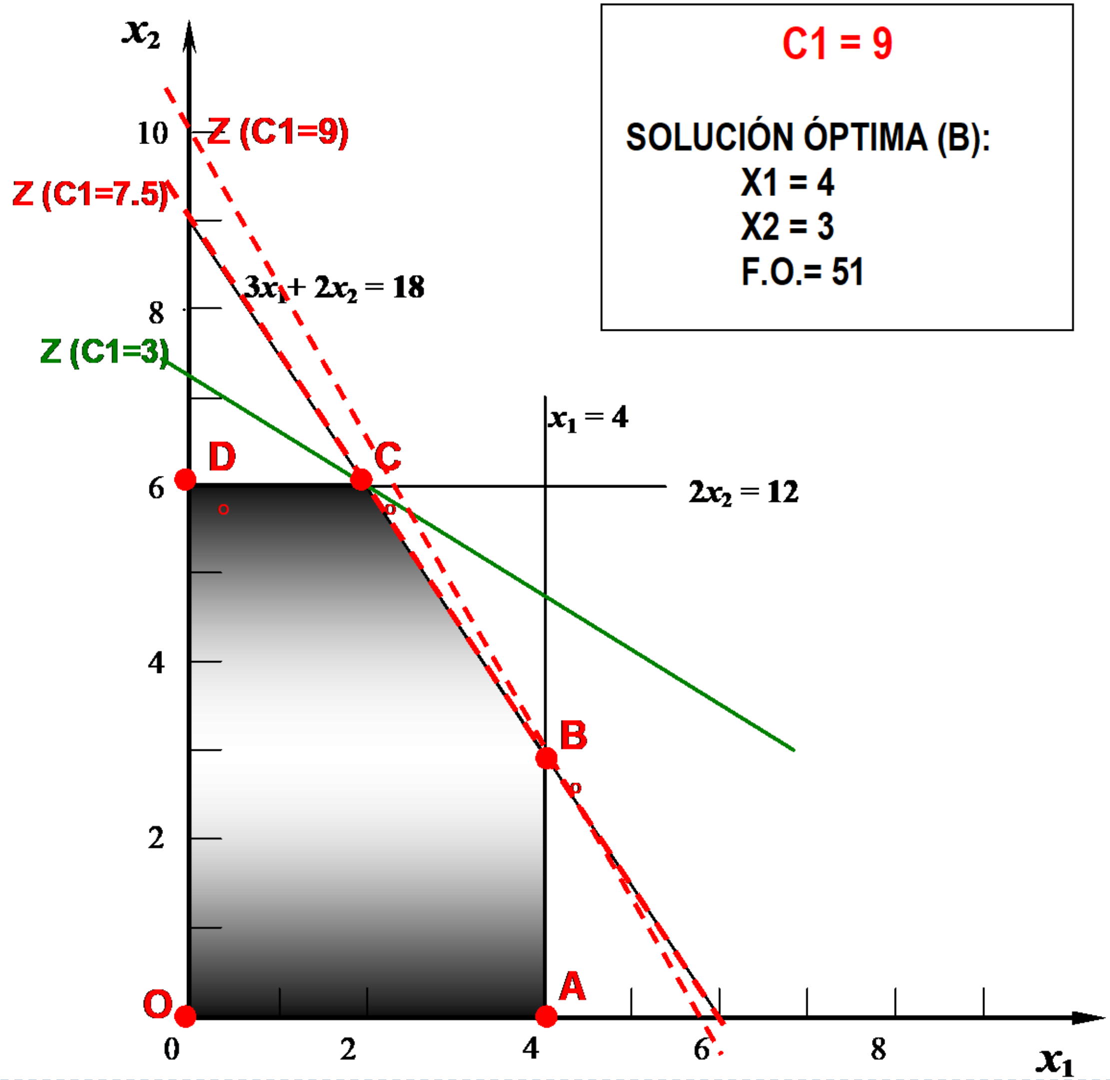
El valor óptimo de la función objetivo puede cambiar

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE Ci

- EJEMPLO
  - El departamento comercial había estimado incorrectamente el beneficio asociado a cada lote de placas tipo 1 que es 9000€ en lugar de 3000€ (manteniéndose el resto de coeficientes con sus valores anteriores)
  - La FO será: MAX Z= **9** $*X_1 + 5*X_2$

¿HABRÁ CAMBIADO LA SOLUCIÓN ÓPTIMA?

3.4 Análisis de sensibilidad



C1 = 9

SOLUCIÓN ÓPTIMA (B):

X1 = 4

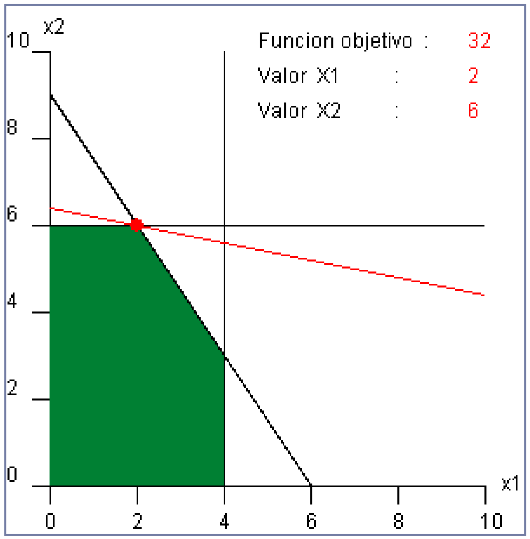
X2 = 3

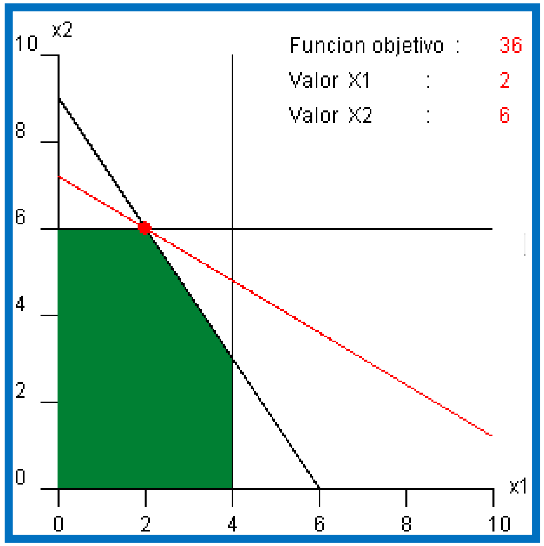
F.O.= 51

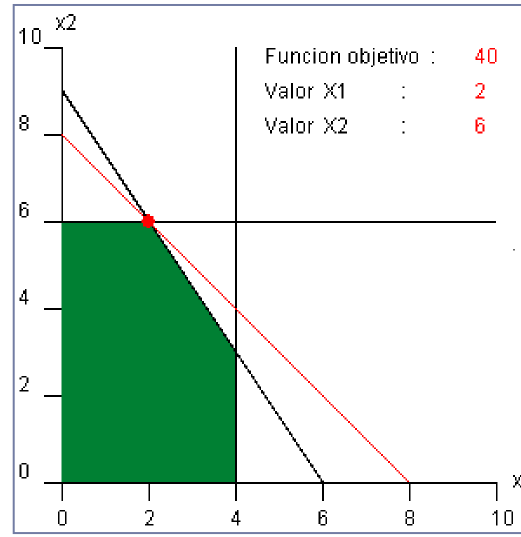
- **Gráficamente, ¿cuándo se mantendrá la solución óptima inalterada?**

3.4 Análisis de sensibilidad

Modelo Original







MAX Z = **1** X1 + 5 X2

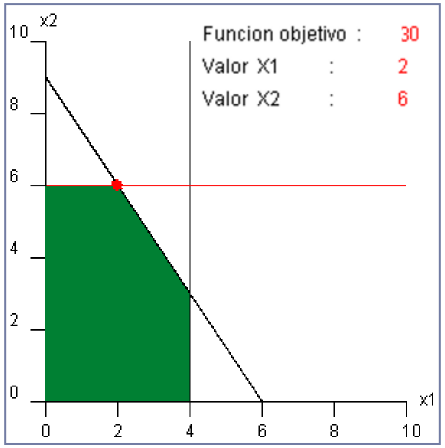
MAX Z = **3** X1 + 5 X2

MAX Z = **5** X1 + 5 X2

↓ Cx1 en 2

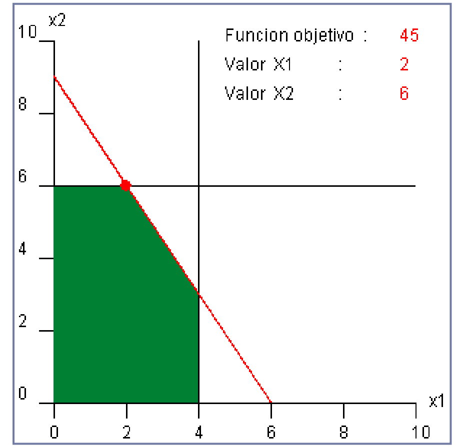
↑ Cx1 en 2

3.4 Análisis de sensibilidad

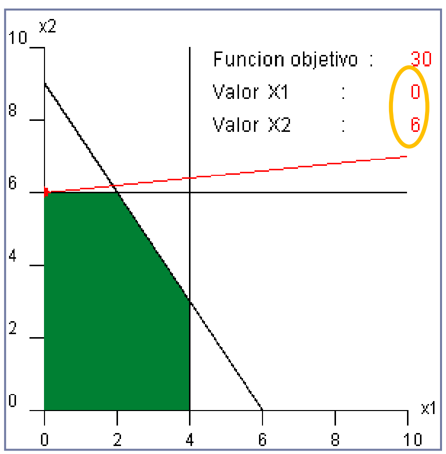


MAX Z = **0** X1 + 5 X2

Límites
ANÁLISIS
DE
SENSIBILIDAD

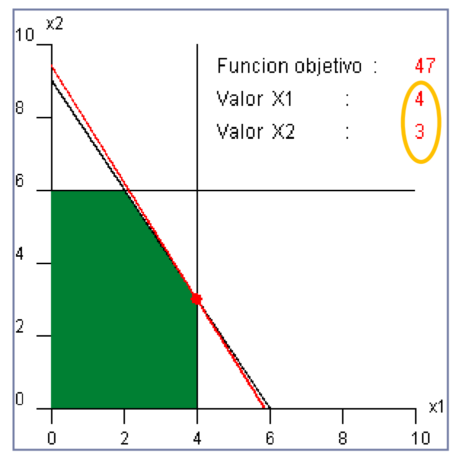


MAX Z = **7.5** X1 + 5 X2



MAX Z = **-0.5** X1 + 5 X2

FUERA DE
Límites
ANÁLISIS
DE
SENSIBILIDAD



MAX Z = **8** X1 + 5 X2

- **CONCLUSIONES de A.S. de C1:**

  Mientras **C1∈ [0,...,7.5]:**

  - La solución óptima **NO CAMBIA** (permanece en el punto C (X1=2, X2=6))
  - **SÍ CAMBIA** el **VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO,** pero podemos recalcular exactamente su nuevo valor
  - Para los **valores extremos del intervalo**, existen soluciones alternativas (por tanto, **infinitas soluciones**) todas con el mismo valor de la función objetivo

3.4 Análisis de sensibilidad

Ejercicio propuesto:

- A partir del análisis de sensibilidad para C1 que acabamos de calcular, indica el valor de una solución óptima así como el valor de la función objetivo cuando C1=0.

- Calcula el intervalo de Análisis de Sensibilidad para C2 (suponiendo que el resto de parámetros del modelo son los del problema original).

Ver Applet

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE bi

COSTE DE OPORTUNIDAD de una **RESTRICCIÓN:**

- "**VARIACIÓN**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

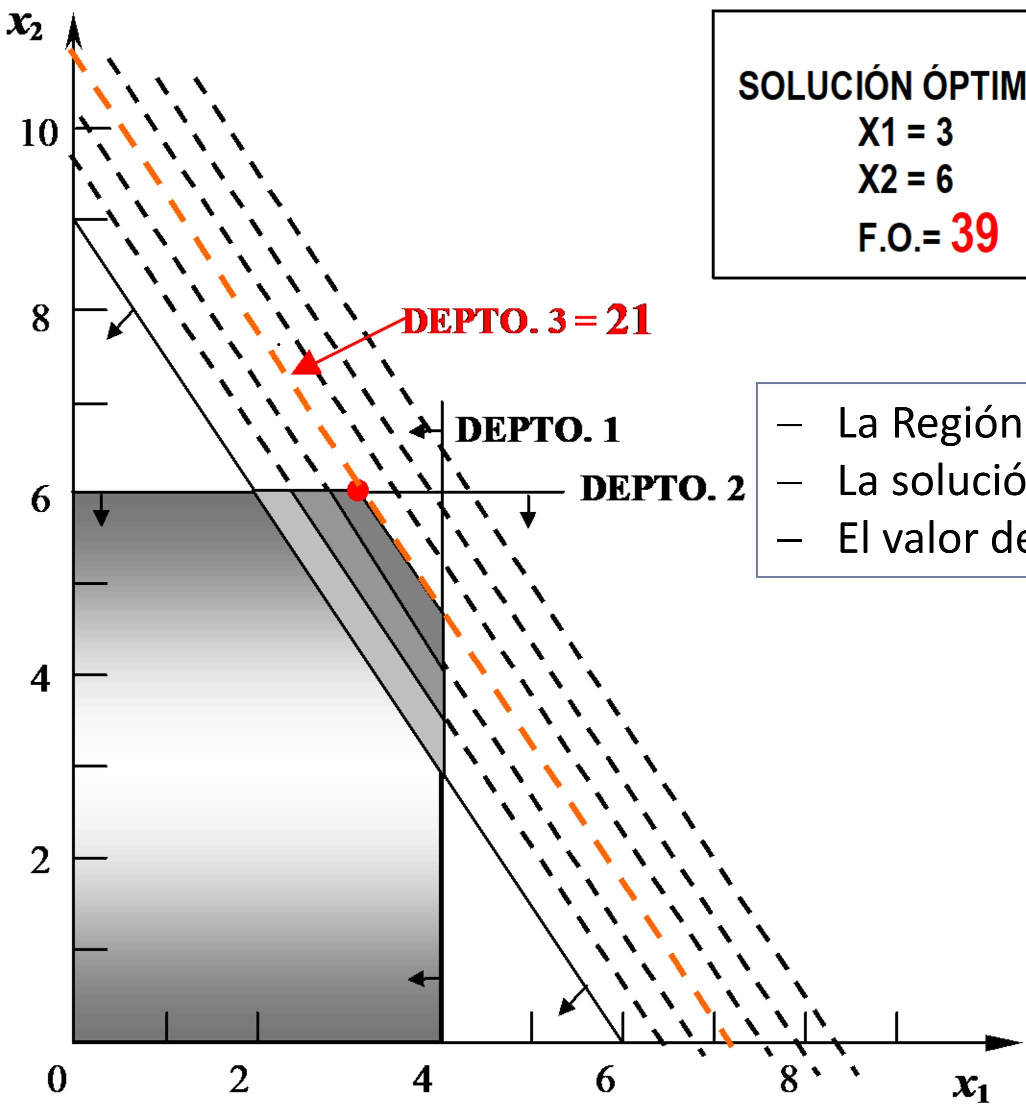
- **OBJETIVO:**
  - Determinar el intervalo de variación de b_i dentro del cual el **COSTE DE OPORTUNIDAD** es **CONSTANTE**
    - En este intervalo,
      - La **base** (variables con valor cero y variables con valor distinto de cero) permanece constante
      - **Se puede predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo**

- EJEMPLO de PRODUCCIÓN
  - La gerencia se está planteando la adquisición de nueva maquinaria en el departamento 3 que supondría aumentar la capacidad de producción de dicho departamento a **21** horas semanales

¿CUÁL SERÍA EL NUEVO BENEFICIO?

¿SEGUIRÍAMOS FABRICANDO UNIDADES DE LOS MISMOS TIPOS DE PLACA BASE?

3.4 Análisis de sensibilidad

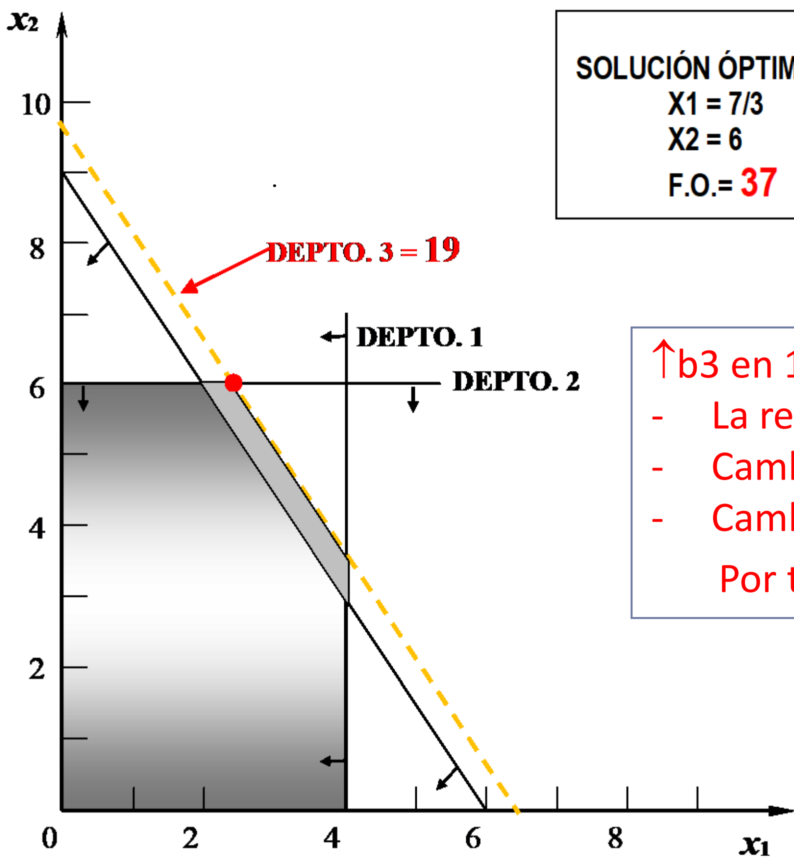


SOLUCIÓN ÓPTIMA:
X1 = 3
X2 = 6
F.O.= 39

- La Región Factible cambia (se amplía)
- La solución óptima cambia
- El valor de la función objetivo cambia

3.4 Análisis de sensibilidad

Y, ¿cuál es el efecto del incremento **unitario** del lado derecho de la restricción 3?



SOLUCIÓN ÓPTIMA:
X1 = 7/3
X2 = 6
F.O.= **37**

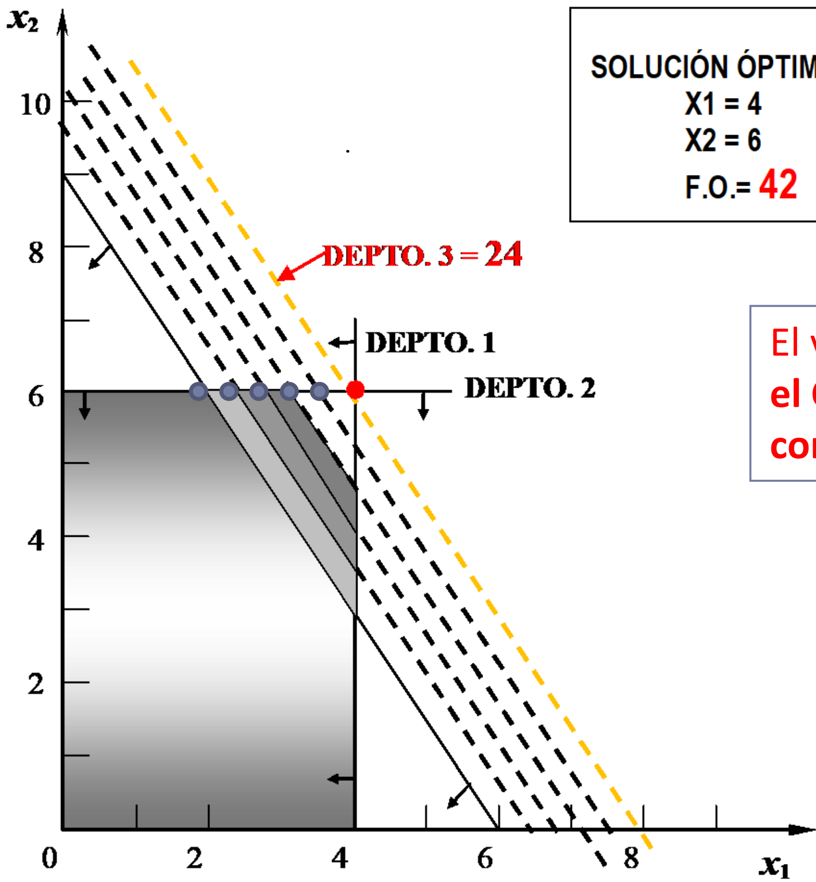
↑b3 en 1 unidad (1 hora) supone:

- La región factible cambia (se amplía)
- Cambia la Solución Optima
- Cambia el valor de la F.Objetivo: +1

Por tanto, el C.Oportunidad del Depto. 3 es **+1**

3.4 Análisis de sensibilidad

Y, ¿en qué rango de valores puede cambiar b3 y mantenerse el C.Oportunidad constante?



SOLUCIÓN ÓPTIMA:
X1 = 4
X2 = 6
F.O.= 42

El valor límite de b3 dentro del cual el **el COportunidad** se mantiene **constante e igual a +1 es b3=24**

CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE b3:

- **Mientras b3 ∈ [12,..,24]**
  - El coste de oportunidad de la restricción del departamento 3 se mantiene constante e igual a +1.
  - La solución óptima cambia al tratarse de una restricción limitativa en la solución óptima.
  - El valor de la función objetivo cambia pero se puede predecir su valor (en función del C.Oportunidad)
  - Se mantiene la misma Solución Básica (variables que son 0 y ≠ 0

3.4 Análisis de sensibilidad

Además, hay que tener en cuenta que:

- El coste de oportunidad de una restricción que no se verifica estrictamente en la Solución óptima es = 0
- El coste de oportunidad de una restricción que se verifica estrictamente en la Solución Óptima es en general $\neq 0$
- Los costes de oportunidad proporcionan a la gerencia una valiosa información acerca de los beneficios que pueden obtenerse al suavizar las restricciones. Si estos beneficios superan el coste que provoca suavizar una restricción dada, entonces dichos cambios son interesantes

3.4 Análisis de sensibilidad

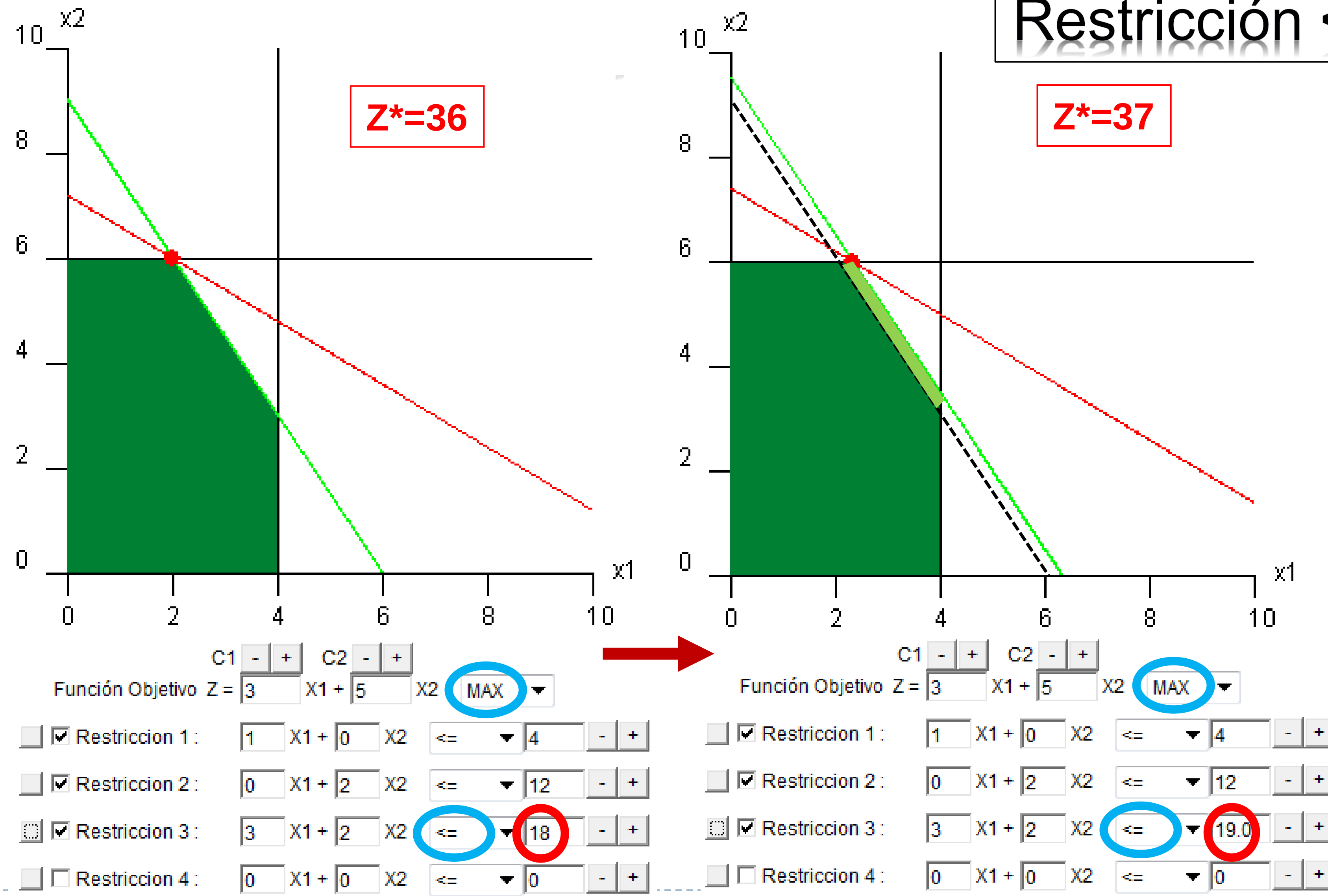
COSTE DE OPORTUNIDAD de una **RESTRICCIÓN: "VARIACIÓN"** del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN** $\leq$
  - "**MEJORA**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **MEJORA**: si **MAX** → **aumento** en el valor de la F.O**.**
      si **MIN** → **disminución** en el valor de la F.O.

- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN** $\geq$
  - "**EMPEORAMIENTO**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **EMPEORAMIENTO**: si **MAX** → **disminución** en el valor de la F.O.
      si **MIN** → **aumento** en el valor de la F.O.

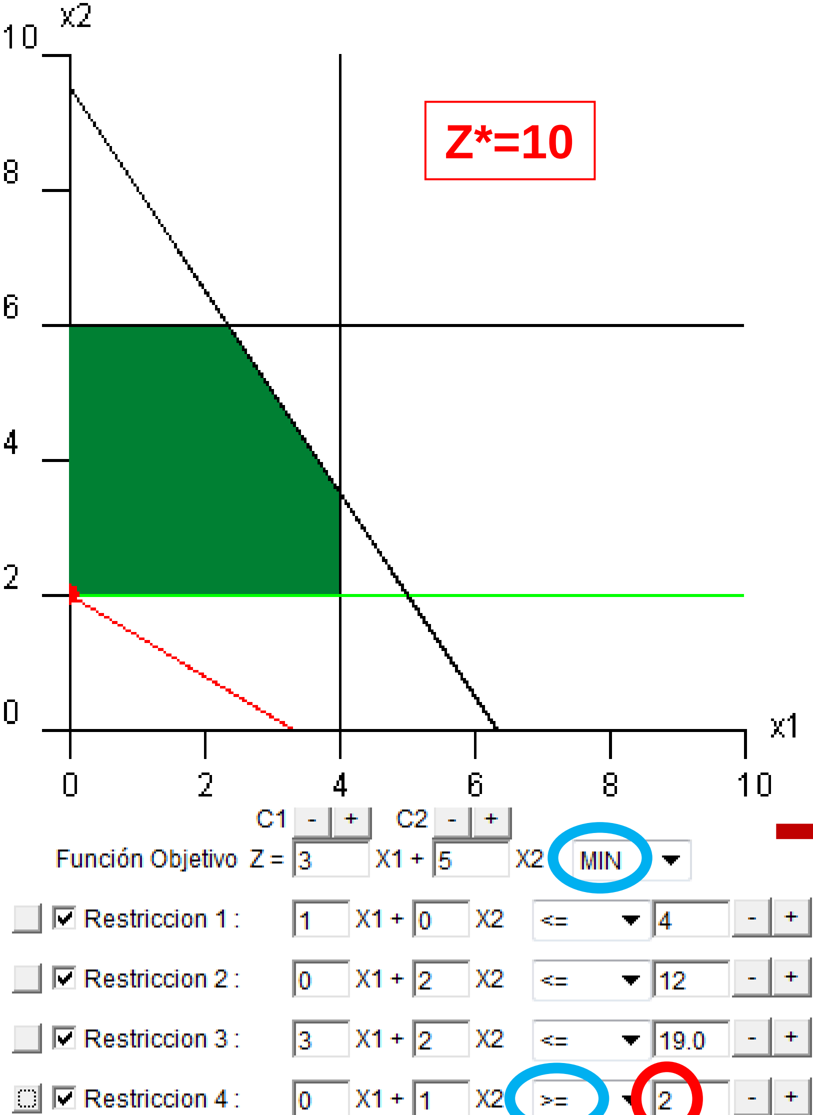
3.4 Análisis de sensibilidad

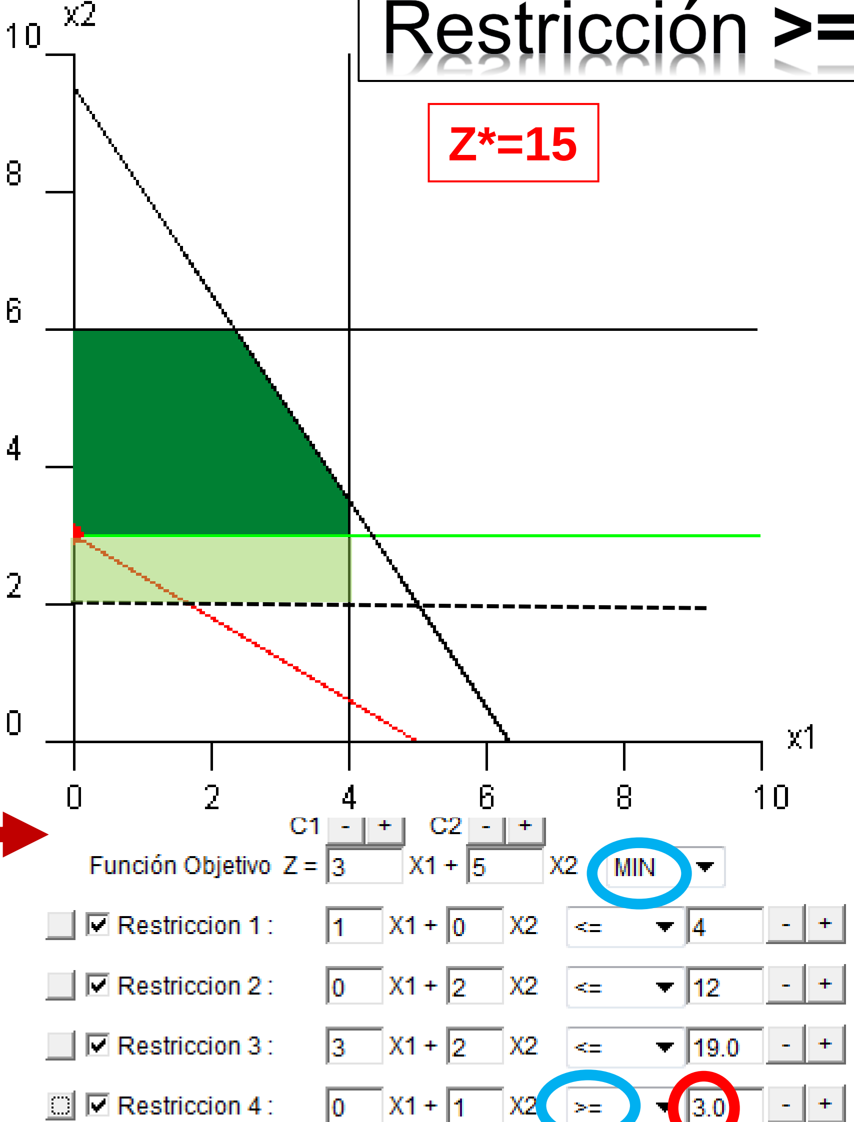
Restricción <=



3.4 Análisis de sensibilidad

Restricción >=





3.5 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

```
!EJEMPLO1: UN EJEMPLO DE PLANIFICACIÓN DE LA
  PRODUCCION;
[OBJ] MAX = 3 * X1 + 5 * X2;
[DEPTO1] X1 <= 4;
[DEPTO2] 2*X2 <= 12;
[DEPTO3] 3*X1 + 2*X2 <= 18;
```

3.5 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

SOLUCIÓN ÓPTIMA

Objective value: 36.00000 (VALOR FUNCION OBJETIVO)

……………………………………………VALOR VARIABLES…………………………………………………………

Variable	Value	Reduced Cost (COSTE REDUCIDO)
X1	2.000000	0.0000000
X2	6.000000	0.0000000

…………………………………………VALOR RESTRICCIONES……………………………………………………

Row	Slack or Surplus (HOLGURA)	Dual Price (COSTE DE OPORTUNIDAD)
OBJ	36.00000	1.000000
DEPTO1	2.000000	0.0000000
DEPTO2	0.0000000	1.500000
DEPTO3	0.0000000	1.000000

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges (A.S.COEFICIENTES F.O.)

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	4.500000	3.000000
X2	5.000000	INFINITY	3.000000

Righthand Side Ranges (A.S. 2º MIEMBRO RESTRICCIONES)

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
DEPTO1	4.000000	INFINITY	2.000000
DEPTO2	12.00000	6.000000	6.000000
DEPTO3	18.00000	6.000000	6.000000

COSTE REDUCIDO

- El coste reducido para una variable igual a cero en la solución óptima, indica el cambio en el valor de la función objetivo por unidad de incremento en el valor de dicha variable.
- El coste reducido indica cuánto debería mejorar el coeficiente en la función objetivo de una variable que es cero en la solución óptima actual, antes de que empezara a interesar que dicha variable fuese distinta de cero.

CUESTIONES:

1. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y sobre el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 4 (miles de €) en el beneficio asociado a las placas base tipo 1?
2. Idem si el incremento fuera de 5 (miles de €).
3. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y sobre el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 4 horas en la capacidad del departamento 2? Y si el incremento fuera de 8 horas?
4. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 10 horas en la capacidad del departamento 1?

CUESTIONES:

5. Se dispone de una partida presupuestaria para aumentar la capacidad de un departamento. ¿Cuál de los tres departamentos mejorarías? Justifica la respuesta.

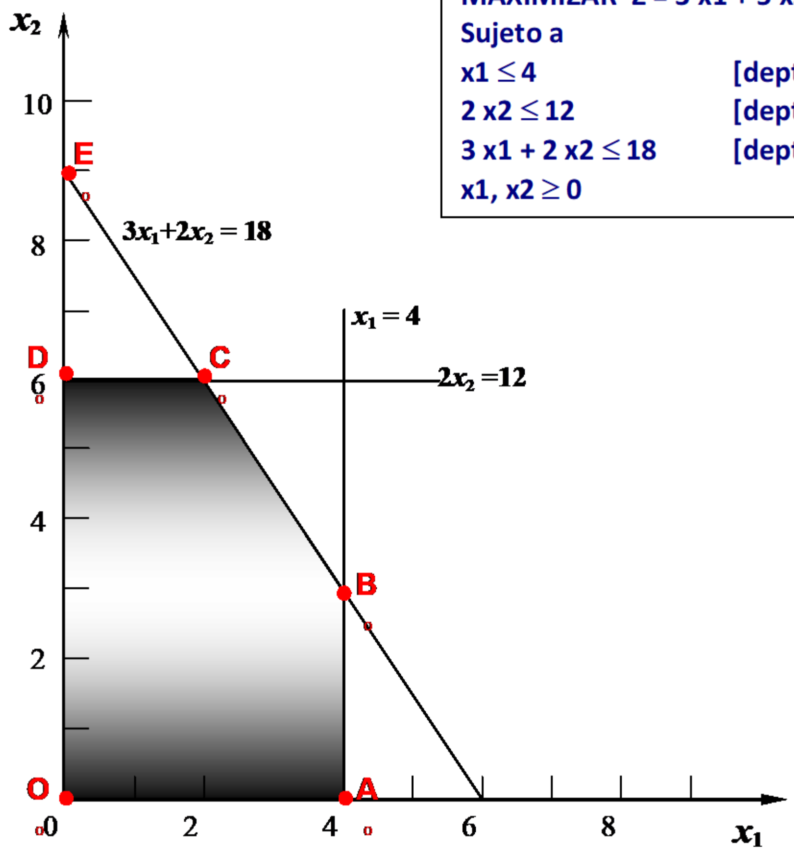
6. Nos plantean la posibilidad de fabricar semanalmente un tercer tipo de placa base que requeriría 1 hora del departamento de Producción y 1 hora en el departamento de Calidad. Este nuevo tipo de placa base no necesita pasar por el departamento de Montaje. El beneficio de cada lote de la nueva placa base es de 2000€.

   Teniendo en cuenta la información de la solución óptima actual, ¿sería rentable producir el nuevo producto?

- Trabajaremos con el problema de producción del apartado anterior. El modelo y representación gráfica es la siguiente:

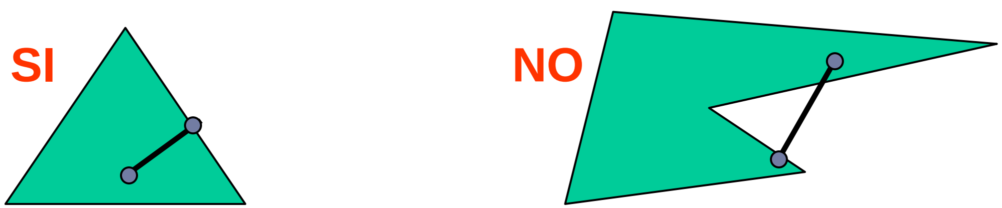
MAXIMIZAR $Z = 3\,x1 + 5\,x2$
Sujeto a

$x1 \leq 4$	[depto. 1]
$2\,x2 \leq 12$	[depto. 2]
$3\,x1 + 2\,x2 \leq 18$	[depto. 3]
$x1, x2 \geq 0$	



3.6 Conceptos básicos de programación lineal

- **CONJUNTO CONVEXO**: un conjunto es convexo si dados dos puntos A y B cualesquiera, contenidos en el mismo, el segmento de recta que los une queda contenido en dicho conjunto



- Esta es una característica de la **REGIÓN FACTIBLE** de todo programa lineal y es la base del procedimiento de resolución conocido como **ALGORITMO SIMPLEX**

3.6 Conceptos básicos de programación lineal

- **PUNTOS EXTREMOS**: Vértices del polígono que forma la región factible (en el caso de dos variables)

- La **solución óptima** de un problema de programación lineal, si existe, es un **punto extremo** (vértice) de la región factible (i.e. cumple todas las restricciones). Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples, entonces al menos dos deben ser puntos extremos. En este caso, cualquier solución óptima se obtendrá como combinación lineal convexa de dichos puntos extremos.

¿Cómo se generan estos puntos extremos algebraicamente?

Paso 1: Pasar el modelo a **forma estándar**

(añadir variables de holgura):

Modelo en Forma General

Max Z=3x1 + 5x2

$x1 \leq 4$

$2x2 \leq 12$

$3x1 + 2x2 \leq 18$

$x1, x2 \geq 0$

Modelo en Forma Estándar

Max Z=3x1 + 5x2

$x1 + \mathbf{x3} = 4$

$2x2 + \mathbf{x4} = 12$

$3x1 + 2x2 + \mathbf{x5} = 18$

$xj \geq 0$, para j=1,2,3,4,5

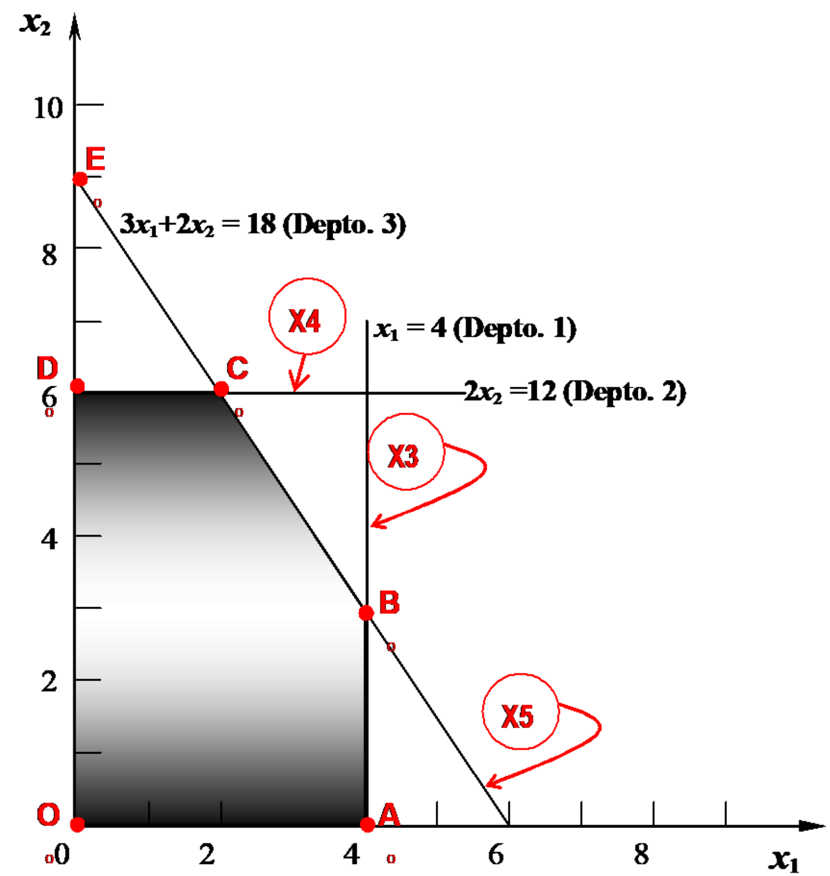
Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} x1 \quad\quad\quad &+ x3 = 4 \quad (\text{depto.}1) \\ 2\,x2 \quad\quad &+ x4 = 12 \; (\text{depto.}2) \\ 3\,x1 + 2\,x2 &+ x5 = 18 \; (\text{depto.}3) \end{aligned}$$

- En el sistema de ecuaciones resultante al pasar el modelo a forma estándar: **n > m**, por tanto se pueden elegir **n-m** variables cualesquiera e igualarlas a cualquier valor arbitrario para **resolver el sistema de m ecuaciones en términos de las m variables restantes**. El método simplex usa **0** para ese valor arbitrario

- La elección de las variables que se igualan a cero para obtener los puntos extremos no es arbitraria:

  - En el sistema de ecuaciones al igualar a cero X_1 y X_5 obtenemos el punto **E**: $X_2=9$ y $X_4=-6$
    SOLUCIÓN **NO** FACTIBLE



SOLUCIÓN BÁSICA

Toda solución obtenida resolviendo el sistema de ecuaciones en el que se ha igualado a cero n-m variables

- Dado un programa lineal en la forma estándar con ***n*** variables (**de decisión y de holgura**) y ***m*** restricciones podemos afirmar que el subconjunto de variables que forma una solución básica se encuentra **igualando a cero *(n-m)*** variables y resolviendo el sistema de ***m*** ecuaciones resultantes con ***m*** variables

Este sistema de ecuaciones tiene solución única

- En una solución básica, las ***(n-m)*** variables que se igualan a cero son las **variables no básicas** y las ***m*** restantes son las **variables básicas**

- **SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE**: Es una solución básica en la cual toda $\mathbf{x_j \geq 0}$

- **SOLUCIONES BÁSICAS ADYACENTES**: En un programa lineal con **m** restricciones, dos soluciones básicas son adyacentes si sus conjuntos de variables básicas tienen **m-1** en común

3.6 Conceptos básicos de programación lineal

$0 \rightarrow (0, 0, \neq 0, \neq 0, \neq 0)$

$A \rightarrow (\neq 0, 0, 0, \neq 0, \neq 0)$

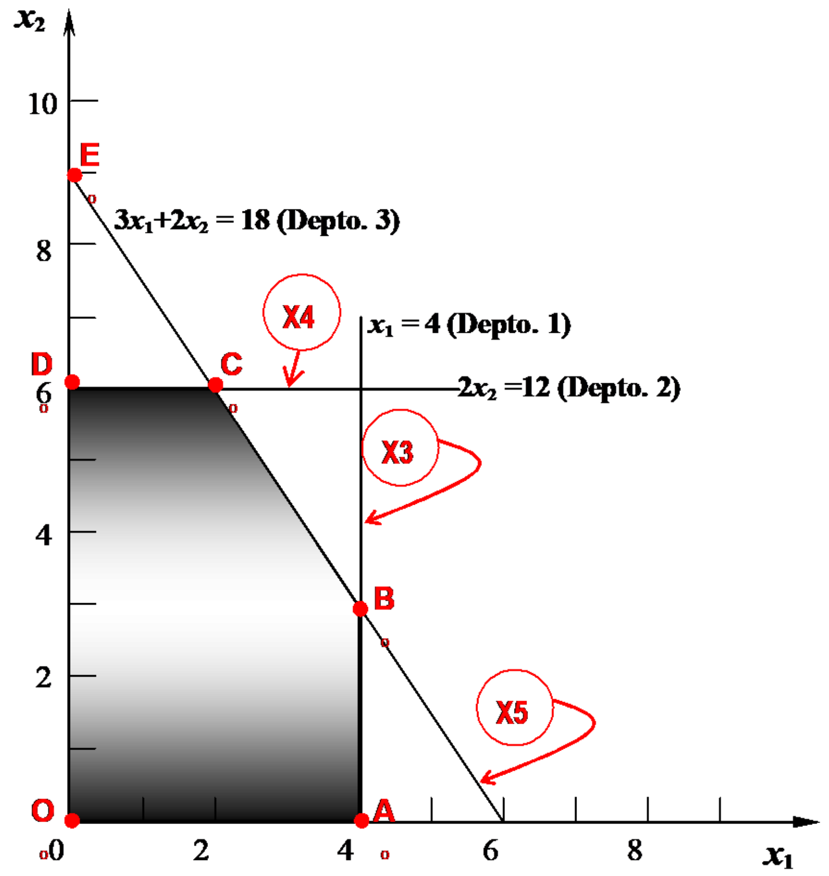
$A \rightarrow (\neq 0, 0, 0, \neq 0, \neq 0)$

$B \rightarrow (\neq 0, \neq 0, 0, \neq 0, 0)$

IDEM: $B \leftrightarrow C$

$C \leftrightarrow D$

$D \leftrightarrow O$



3.6 Conceptos básicos de programación lineal

- **SOLUCIÓN DEGENERADA**: Es una solución básica factible que tiene **menos de m** variables estrictamente positivas

- **SOLUCIÓN NO DEGENERADA**: Es una solución básica factible con exactamente **m** variables estrictamente positivas

- **SOLUCIÓN ÓPTIMA**: Es una solución básica factible que optimiza la función objetivo del problema

3.7 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- El método Simplex es el algoritmo de resolución de problemas de programación lineal más importante. Fue desarrollado en 1947 por George Dantzig y **ha sido considerado uno de los algoritmos más importantes del siglo XX** (Nash, 2002)

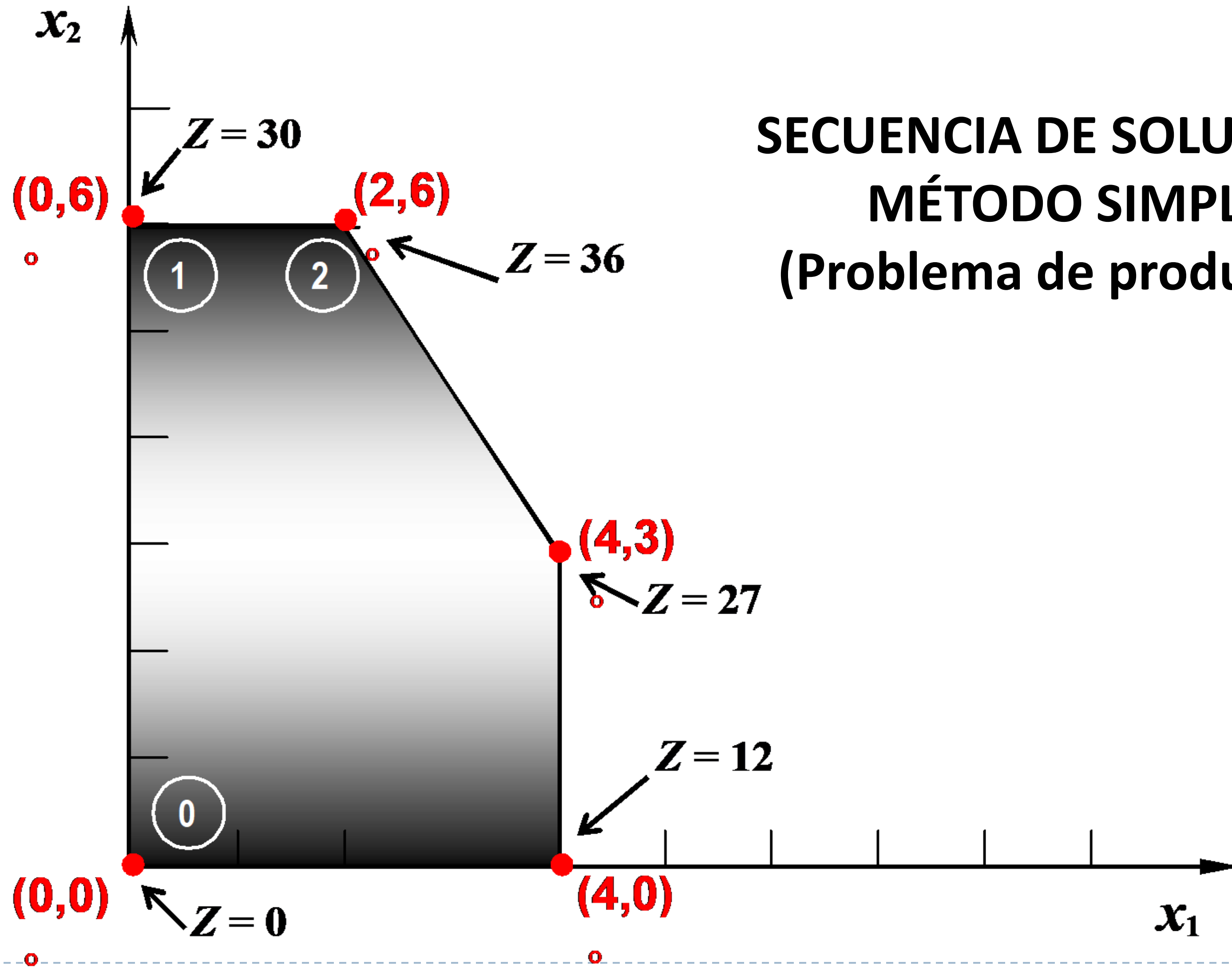
- El algoritmo Simplex se basa en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con el procedimiento de Gauss-Jordan apoyado con criterios para el cambio de la solución básica. Es un procedimiento iterativo que se aplica hasta que se cumple la condición de optimalidad

3.7 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- La **idea general** del método Simplex consiste en partir de una solución básica factible e ir a una solución básica factible adyacente con mejor valor de la función objetivo

- Este proceso continúa hasta que ya no se puedan obtener mejoras y se habrá encontrado la solución óptima

3.7 Algoritmo Simplex: conceptos básicos



SECUENCIA DE SOLUCIONES MÉTODO SIMPLEX (Problema de producción)

3.7 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- La aplicación del método Simplex se desarrolla a través de las siguientes etapas:

INICIALIZACIÓN: **Encontrar una solución básica factible inicial (SB$_0$)**

PRUEBA DE OPTIMALIDAD **(Cj-Zj)** **¿Es óptima la solución básica actual?**

SI LO ES → **FIN**

SI NO

ITERACIÓN **1º Elegir JE** **2º Elegir IS** **Realizar una iteración para encontrar una solución <u>básica factible adyacente mejor</u> que la anterior**

- Trabajaremos con el ejemplo de producción de componentes informáticos:

MAXIMIZAR $Z = 3x1 + 5\ x2$

Sujeto a

$x1 \leq 4$

$2\ x2 \leq 12$

$3\ x1 + 2\ x2 \leq 18$

$x1,\ x2 \geq 0$

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La aplicación del método simplex en forma de tablas implica:

1. Expresar el modelo en forma estándar
2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

1. Pasar el modelo a forma estándar introduciendo las correspondientes variables de holgura:

$$\text{Max } Z = 3x1 + 5x2$$

$$\begin{array}{lllll} x1 & + x3 & & & = 4 \\ 2x2 & & + x4 & & = 12 \\ 3x1 + 2x2 & & & + x5 & = 18 \end{array}$$

$$xj \geq 0, \text{ para } j=1,2,3,4,5$$

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular:

E1: $x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4$

E2: $0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 12$

E3: $3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 18$

E4: $-Z + 3x_1 + 5x_2 = 0$

Condiciones de la Tabla Simplex:

- Cada VBásica (**VB**) aparece con coeficiente no cero en una y sólo una de las ecuaciones.
- En la ecuación en la que la VB aparece con coeficiente no cero, su coeficiente es 1
- Cada ecuación contiene sólo 1 VB con coeficiente 1 (para el resto será 0)
- El valor de la función objetivo, Z, aparece sólo en la ultima ecuación y con coeficiente -1

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular:

E1: $x1 + 0x2 + x3 + 0x4 + 0x5 = 4$

E2: $0x1 + 2x2 + 0x3 + x4 + 0x5 = 12$

E3: $3x1 + 2x2 + 0x3 + 0x4 + x5 = 18$

E4: $-Z + 3x1 + 5x2 = 0$

Condiciones de la Tabla Simplex:

- Cada VBásica (**VB**) aparece con coeficiente no cero en una y sólo una de las ecuaciones.
- En la ecuación en la que la VB aparece con coeficiente no cero, su coeficiente es 1
- Cada ecuación contiene sólo 1 VB con coeficiente 1 (para el resto será 0)
- El valor de la función objetivo, Z, aparece sólo en la última ecuación y con coeficiente -1

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

Solución básica factible inicial (SB_0): todas las variables decisión igual a 0

MATRIZ IDENTIDAD (VAR. BÁSICAS)

VECTOR RECURSOS

VAR. BÁSICAS

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

- Z

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La ventaja de esta tabla es que permite disponer de la solución de forma inmediata. En particular, sabiendo que las Variables No Básicas (VNB) son igual a 0, el valor de las VB es el del segundo miembro de las ecuaciones.
- En nuestro ejemplo, cuando x1=x2=0, se determina fácilmente por observación que la solución es x3=4, x4=12, x5=18 y -z=0.
- En las sucesivas iteraciones del Simplex, se deben mantener estas mismas características, i.e., las VB siempre deben tener asociada la matriz identidad de modo que se disponga del valor de las mismas de forma inmediata.

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

Interpretación de los coeficientes en la Tabla Simplex: describen el efecto sobre cada VB al incrementar una VNB

αij^{+}: decremento

αij^{-} : incremento

$\alpha_{4,2}$: Decremento de x4 por unidad de x2 que entre en la solución

MATRIZ IDENTIDAD (VAR. BÁSICAS)

VECTOR RECURSOS

VAR. BÁSICAS

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

COEFICIENTES REDUCIDOS $C_j - Z_j = C_j - \sum \alpha_{ij} \; C_i$

- Z

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- El **coeficiente reducido** de la función objetivo (C_j-Z_j) asociado a la variable x_j siempre representa la variación de la función objetivo por unidad de dicha variable (no básica) que entre en la base. Si es positivo aumentará el valor de la función objetivo, si es negativo disminuirá dicho valor

- El coeficiente reducido de las variables básicas siempre es cero

- Los **C_j-Z_j** en la solución óptima tienen una interpretación especial:
  - Asociados a variable de holgura: **coste de oportunidad** de la restricción asociada
  - Asociado a variable decisión: **coste reducido**

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

$$\underbrace{C_j - Z_j}_{} = C_j - \sum \underbrace{C_i \, \alpha_{ij}}_{}$$

Variación de la función objetivo cuando x_j entra en la base

Variación de la función objetivo debida sólo al cambio de valor de la variable x_j (su coeficiente en la función objetivo)

Variación de la función objetivo debida al cambio de valor de las variables básicas (coeficiente en la función objetivo de las v.básicas * variación en su valor por causa de x_j)

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

… Para cada SBFactible, la pregunta es: Esta solución, ¿es óptima?

PRUEBA DE OPTIMALIDAD: Criterio de la Función Objetivo = **MAX**

VNB = x1, x2

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

NO es solución óptima → ITERACIÓN (SB adyacente)

JE = x2

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

PRUEBA DE OPTIMALIDAD: ¿Esta solución es óptima?

$$Z = 3\,x1 + 5\,x2$$

- El Cj-Zj de las variables no básicas (x_1, x_2) da la tasa de variación de Z si aumentara el valor de esa variable. Esas tasas de variación son positivas.

  De hecho,

  - si $x_1 = 1$ la función objetivo aumenta en 3
  - si $x_2 = 1$ la función objetivo aumenta en 5

- Por tanto, pueden existir puntos extremos con mejor valor de Z → el **punto O NO es solución óptima**

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

ITERACIÓN

PASO 1: Determinar la dirección de movimiento (**Variable que ENTRA EN LA BASE: JE**)

- Variables candidatas: (x_1, x_2)
- Tasa de cambio de Z:

$$Z = 3x1 + 5x2$$

- ¿aumento de x_1? Tasa de mejora en Z=3
- ¿aumento de x_2? Tasa de mejora en Z=5
- 5>3, por tanto se elige x_2 para aumentar Z

$$\boxed{JE = x_2}$$

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

PASO 2: …¿Cuánto puede incrementarse una VNB?

¿ IS ?

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

Al modificar (aumentar) x_2 (**x1=0**) cambia en general el valor de las variables básicas:

(1) x1 + **x3** = 4 **x3=4**

(2) 2x2 + **x4** = 12 **x4=12-2x2** ← **IS**

(3) 3x1 + 2x2 + **x5** = 18 **x5=18-2x2**

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- Para determinar la variable que sale de la base **(IS)** calculamos en una columna adicional el cociente:

  b_i/α_{ij}^+ : número de unidades de xj que deben entrar en la base para que xi sea cero

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	b_i/α_{ij}^+
x3	1	0	1	0	0	4	-
x4	0	2	0	1	0	12	12/2 ← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0	

JE

$$\boxed{\theta x_j = \min \frac{b_i}{\alpha_{ij}}, \quad \forall \alpha_{ij} > 0}$$

¿POR QUÉ NO SE HA CALCULADO EL COCIENTE b_i/α_{ij}^+ CORRESPONDIENTE A x3?

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- Para determinar la variable que sale de la base **(IS)** calculamos en una columna adicional el cociente:

  $\mathbf{bi/\alpha_{ij}^{+}}$: número de unidades de xj que deben entrar en la base para que xi sea cero

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}^{+}
x3	1	0	1	0	0	4	-
x4	0	2	0	1	0	12	12/2 ← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0	

↑ JE

Pivote

Semipivote

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La nueva Solución Básica (SB) debe estar en forma canónica
- Aplicando:

$$\alpha^1_{IS,j}=\alpha^0_{IS,j} / \alpha^0_{IS,JE} = \alpha^0_{IS,j} / \text{PIVOTE}$$

$$\alpha^1_{i,j} = \alpha^0_{i,j} - \text{SEMIPIVOTE} * \alpha^1_{IS,j}$$

se obtiene la nueva *solución básica* que se muestra en la siguiente tabla simplex:

Tabla SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	1/2	0	6
x5	3	0	0	-1	1	6
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30

- **ITERACIÓN 2:**

VNB = x1, x4

Tabla SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	$bi/\alpha_{ij}+$
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

JE: x1 y **IS: x5**

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- **ITERACIÓN 3:**

Tabla SB_2

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

(∀ Cj-Zj asociado a VNB ≤ 0 [MAX])

SOLUCIÓN ÓPTIMA

SOLUCIÓN: producir 2 lotes de placas base tipo 1 y 6 lotes de placas base tipo 2 con un beneficio de 36 miles de euros

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

Solución Óptima con LINGO ®

```
Objective value:                 36.00000

Variable        Value           Reduced Cost
X1              2.000000         0.0000000
X2              6.000000         0.0000000

Row             Slack or Surplus    Dual Price
OBJ              36.00000            1.000000
DEPTO1           2.000000            0.0000000
DEPTO2           0.0000000           1.500000
DEPTO3           0.0000000           1.000000
```

Valor Variables Decisión

Valor Variables Holgura

Cj-Zj

- **CRITERIO PARA ELEGIR LA VARIABLE QUE ENTRA EN LA BASE (JE)**
  - **La variable que entra en la base es aquella VNB tal que:**

    Maximización: $\mathrm{Max}(C_j - Z_j), \forall (C_j - Z_j) > 0$

    Minimización: $\mathrm{Min}(C_j - Z_j), \forall (C_j - Z_j) < 0$

  - Cuando en una iteración no existe ningún coeficiente reducido positivo (caso Max.) no podremos mejorar más el valor de la función objetivo

- **CRITERIO DE LA VARIABLE QUE SALE DE LA BASE** ***(Independiente del criterio de la F.O.)***
  - Dados los α_{ij} de la variable no básica (x_j) que entra en la base, la variable básica que sale (x_i) es aquella que satisface:

$$\theta xj = \min \frac{\text{valor de la variable basica } xi}{\alpha ij}, \quad \forall \alpha ij > 0$$

y θ_{xj} es el valor de x_j en la nueva solución

- **CRITERIO DE OPTIMALIDAD (maximización)**

Una solución básica factible es óptima si:

$(C_j - Z_j) \leq 0 \ \forall$ Variable No Básica

En minimización, $(C_j - Z_j) \geq 0 \ \forall$ VNB

3.8 Algoritmo Simplex en forma de tablas

Ejercicio Propuesto :

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el **método simplex con tablas.**

  MAXIMIZAR Z = 600x1 + 900x2

  s.a:

  $x_1 + 2x_2 \leq 200$

  $1/2x_1 + x_2 \leq 175$

  $x_1, x_2 \geq 0$

  en la tabla de la solución óptima identificar los costes de oportunidad y los costes reducidos y comentar su significado

EJERCICIO PROPUESTO:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el **método simplex con tablas.**

  MAXIMIZAR $Z = 600x1 + 1200x2$

  s.a: $x1 + 2x2 \leq 200$

  $1/2x1 + x2 \leq 175$

  $x1, x2 \geq 0$

  en la tabla de la solución óptima identificar los costes de oportunidad y los costes reducidos y comentar su significado. La solución óptima, ¿presenta alguna característica particular?¿Cuál? Justificar la respuesta.

3.9 Algoritmo Simplex revisado

- Al calcular la solución óptima mediante el algoritmo Simplex con tablas:
  - ¿es necesario realizar todos los **cálculos** en cada iteración del algoritmo?
  - ¿es necesario tener almacenada en **memoria** toda la información de la tabla Simplex actual?

NO

- Veamos qué información ha sido utilizada en cada iteración del problema ejemplo (sombrearemos la información necesaria):

SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}^{+}	
x3	1	0	1	0	0	4	-	
x4	0	2	0	1	0	12	12/2	← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2	
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0		
		↑ JE						

3.9 Algoritmo Simplex revisado

SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	$bi/\alpha_{ij}+$
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

SB_2

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

3.9 Algoritmo Simplex revisado

- Necesitamos:
  - **Valor de las VBasicas** en la SB actual
  - **Valor de la F.O.** en la SB actual
  - **Cj-Zj de las VNB** para determinar si la SB actual es S.Óptima
  - **Columna JE** para determinar la variable que sale de la base (IS)

¿Cómo calcular los datos necesarios en cada iteración?

3.9 Algoritmo Simplex revisado

- Sea un modelo de PL expresado en forma matricial:

  Max Z = $c^t x$

  s.a: $A x = b$

  $x \geq 0$

- **Nomenclatura del Simplex Revisado:**

  $\mathbf{x_B}$ = Vector de variables básicas

  $\mathbf{c^t_B}$ = Coeficientes en la función objetivo asociados a variables básicas

  $\mathbf{x_{NB}}$ = Vector de variables no básicas

  $\mathbf{c^t_{NB}}$ = Coeficientes en la función objetivo asociados a variables no básicas

  B = Matriz cuyas columnas son los vectores de coeficientes técnicos asociados a variables básicas

  NB=Matriz cuyas columnas son los vectores de coeficientes técnicos asociados a variables no básicas

- Entonces, dado el modelo expresado en forma matricial:

$$\mathbf{Max\ Z = c^t_B\, x_B + c^t_{NB}\, x_{NB}}$$

s.a:

$$\mathbf{B\, x_B + NB\, x_{NB} = b}$$

$$\mathbf{x_B,\ x_{NB} \geq 0}$$

¿Cómo calcular la información necesaria en cualquier solución básica?

- **Aplicamos la anterior formulación al modelo ejemplo:**

$$\text{Max } Z = 3x1 + 5x2$$

s.a:

$$\begin{array}{lllllll}
x1 & & + x3 & & & = & 4 \\
 & 2\,x2 & + & x4 & & = & 12 \\
3\,x1 + & 2\,x2 & & & + x5 & = & 18
\end{array}$$

$$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$$

✍

- **En forma matricial:**

$$\textbf{Max } Z = c^t \cdot x = (3, 5, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$$

s.a:

$$Ax = b \;\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\; a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\; a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo calcular el valor de una solución: X_B ?

- En cualquier solución, $\mathbf{B\ x_B + NB\ x_{NB} = b}$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por $\mathbf{B^{-1}}$:

$$B^{-1} B\ x_B + B^{-1} NB\ x_{NB} = B^{-1} b$$

como $(B^{-1} B) = I$, entonces

$$X_B + B^{-1} NB\ x_{NB} = B^{-1} b$$

como $x_{NB}=0$, entonces $(B^{-1} NB\ x_{NB}) = 0$

- Por tanto, el valor de las variables básicas de cualquier solución, se puede calcular según:

$$\boxed{X_B = B^{-1} b}$$

¿Cómo calcular los α_{ij} asociados a la variable que entra en la base (y_{JE})?

- Consideremos la solución obtenida en la segunda tabla del Simplex del problema ejemplo (**SB_1**):

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}+
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

¿?

VB = (x3,x2,x5)

- Según la nomenclatura del Simplex Revisado: (**SB$_1$**)

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad x_{NB} = \begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} ; \quad NB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculamos B^{-1} (con dimensión **m**x**m**), y obtenemos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

✍

- Siguiendo la nomenclatura del Simplex Revisado, **SB_1** se puede expresar:

$$X_B + B^{-1}\,NB\,x_{NB} = B^{-1}\,b$$

$$\begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y_{x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}\ ;\ y_{x4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.9 Algoritmo Simplex revisado

- Entonces, ¿Cómo calcular y_{x1}?:

  $y_{x1} = B^{-1} a_{x1} \rightarrow$ **e**n general $\boxed{\mathbf{y_j = B^{-1} a_j}}$

- ¿Cómo calcular c_j-z_j ?:

  c_j es conocido siempre

  $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}$

  $\mathbf{z_j = c^t_B\, y_j = (\underline{c^t_B\, B^{-1}})\, a_j}$

  Común para todo z_j

- ¿Cómo calcular Z ?:

  $\boxed{\mathbf{Z = c^t_B\, x_B}}$

- **Resumen Simplex Revisado**:

  Con B^{-1}, b, a_j y c (datos originales del problema) y sabiendo cuales son las variables básicas de la solución a estudiar (punto extremo):

  - El valor de las variables básicas:

    $$X_B = B^{-1} b$$

  - Prueba de optimalidad (c_j-z_j):

    $$z_j = c^t_B \, y_j = (c^t_B \, B^{-1}) \, a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

    $$Y_{JE} = B^{-1} \, a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

    $$Z = c^t_B \, x_B$$

- **Complejidad Simplex Revisado**:

$$\boxed{B_{mxm}^{-1}}$$

La complejidad del algoritmo simplex aumenta al aumentar el número de restricciones

3.9 Algoritmo Simplex revisado

¡ Sólo necesitamos tener almacenada B^{-1} !

¡ El resto de datos se calculan a partir de B^{-1} y los datos originales del modelo !

Ejemplo: **Modelo con 50 Variables y 10 Restricciones (≤)**

Modelo en forma estándar:

60 Variables (Decisión + Holgura)

10 Ecuaciones

SIMPLEX:

Número de αij = 600 datos reales

SIMPLEX REVISADO:

$B_{10X10}^{-1} \rightarrow$ 100 datos reales

Algoritmo Simplex Revisado:

0. Solución básica factible inicial (SB_0): $\mathbf{X_B = B^{-1}\, b}$
1. Prueba de optimalidad:

   Calcular c_j-z_j $\forall$VNB: $\mathbf{cj - z_j = cj - \; c^t_B\, y_j \; = cj - (c^t_B\, B^{-1})\, a_j}$

   Si solución óptima: $\rightarrow$ **FIN**

   En otro caso: Seleccionar **JE**
2. Calcular y_{JE} $\mathbf{Y_{JE} = B^{-1}\, a_{JE}}$
3. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\{ \frac{x_B}{y_{JE}} \}$
4. **Cambio de base**: Actualizar B^{-1}; calcular X_B, Calcular Z

   Ir al paso 1

- Aplicaremos el algoritmo Simplex Revisado al problema ejemplo:

- **Modelo en forma estándar:**

Max Z = 3x1 + 5x2

s.a:

$$
\begin{array}{lllllll}
x1 & & + x3 & & & = & 4 \\
 & 2\,x2 & + & x4 & & = & 12 \\
3\,x1 + & 2\,x2 & & & + x5 & = & 18
\end{array}
$$

$$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$$

✍

- Solución Básica inicial (SB_0) – Punto O:

Variables básicas: $x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$z_o = c^t_B\, x_B = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

Tabla Simplex Revisado SB_0

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	**4**
x4	0	1	0	**12**
x5	0	0	1	**18**
$C^t_B\ B^{-1}$	0	0	0	**Z = 0**

1. Prueba de optimalidad SB_0:

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x1,x2

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$z_{x1} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad z_{x2} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_{x1}\text{-}z_{x1} = 3\text{-}0 = 3 \;; \qquad c_{x2}\text{-}z_{x2} = 5\text{-}0 = 5$$

$$\boxed{\textbf{JE} \rightarrow \textbf{X2}}$$

2. Calcular y_{x2}:

$$y_{x2} = B^{-1}\, a_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Seleccionar IS $\rightarrow$ min $\left\{ \frac{x_B}{y_{JE}} \right\}$

Tabla Simplex Revisado SB_0

v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x2}	$\frac{x_B}{y_{x2}}$
x3	1	0	0	4	0	---
x4	0	1	0	12	2	12/2
x5	0	0	1	18	2	18/2
$c^t_B\, B^{-1}$	0	0	0	Z = 0		

IS $\rightarrow$ X4

4. Cambio de base: Actualizar B^{-1} para nueva base:

$$\mathbf{X_B} = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

¿Cálculo?

4. Cambio de base: Actualizar B^{-1} para nueva base:

$$X_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de B^{-1} de la nueva solución, mediante las fórmulas del cambio de base aplicadas a B^{-1} anterior:

$$B^{-1}_{anterior} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad y_{x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow Semipivote \\ \longleftarrow Pivote \\ \longleftarrow Semipivote \end{matrix}$$

Cálculo de la segunda fila:

$$\frac{0}{2} \; \frac{1}{2} \; \frac{0}{2} = 0 \quad 1/2 \quad 0$$

- Cálculo de la primera fila

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 0 & \\ - & 0 & (& 0 & 1/2 & 0 &) \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

- Cálculo de la tercera fila

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & 0 & 1 & \\ - & 2 & (& 0 & 1/2 & 0 &) \\ \hline & & & 0 & -1 & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{B^{-1}_{\text{para la nueva SB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Entonces, la nueva SB es:

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tabla Simplex Revisado SB_1

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	**4**
x2	0	1/2	0	**6**
x5	0	-1	1	**6**
$c^t_B B^{-1}$	0	5/2	0	**Z = 30**

$$Z_1 = c^t_B\, x_B = (0, 5, 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 30$$

1. Prueba de optimalidad SB_1:

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x1, x4

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 5/2, 0)$$

$$z_{x1} = (0, 5/2, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad z_{x4} = (0, 5/2, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2$$

c_{x1}-z_{x1} = 3-0 = 3; $\qquad$ c_{x4}-z_{x4} = 0-5/2 = -5/2

La solución actual NO es óptima

Es posible mejorar todavía el valor de la función objetivo

$\boxed{\textbf{JE} \rightarrow \textbf{X1}}$

2. Calcular y_{x1}

$$y_{x1} = B^{-1} a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\{\frac{x_B}{y_{JE}}\}$

Tabla Simplex Revisado SB_1

v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x1}	$\frac{x_B}{y_{x1}}$
x3	1	0	0	4	1	4
x2	0	½	0	6	0	-
x5	0	-1	1	6	3	6/3
$c^t_B B^{-1}$	0	5/2	0	Z = 30		

$$Z_1 = c^t_B\, x_B = (0, 5, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 30$$

$\boxed{\textbf{IS} \rightarrow \textbf{X5}}$

4. Cambio de base: Actualizar B^{-1} para nueva base

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1}_{\text{anterior}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando las fórmulas del cambio de base:

$$B^{-1}_{\text{para la nueva SB}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, la SB_2 es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
				Z = 36

$$Z_2 = c^t_B\, x_B = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$$

1. Criterio de optimalidad SB_2

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica → x4, x5

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1)$$

$$z_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2; \qquad z_{x5} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

c_{x4}-z_{x4} = 0 – 3/2 = -3/2; c_{x5}-z_{x5} = 0-1 = -1

LA SOLUCIÓN ACTUAL ES SOLUCIÓN ÓPTIMA

(c_j-$z_j \leq 0$, $\forall x_j$ NB)

3.9 Algoritmo Simplex revisado

Interpretación Solución Óptima:

v.Básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

c_{x4}-z_{x4} = 0 – 3/2 = -3/2; c_{x5}-z_{x5} = 0-1 = -1

Los departamentos 2 y 3 (calidad y montaje) son los recursos escasos de la empresa ya que en la solución óptima se utilizan por completo sus capacidades (x4=x5=0, son VNB).

A los recursos escasos les corresponde en general un coste de oportunidad $\neq$ 0, en este caso:

- C.O. depto. 2: $c_{x4}-z_{x4}= c_{x4} - c^t_B\, B^{-1}a_{x4} = -3/2$, (restricción $\leq$), **C.O. = +3/2**
  "el valor de la F.O. mejorará (aumentará) en 3/2 por unidad adicional de capacidad depto.2"

- C.O. depto. 3: $c_{x5}-z_{x5}= c_{x5} - c^t_B\, B^{-1}a_{x5} = -1 \rightarrow$ **C.O.=+1** (idem depto.2)
- El departamento 1 (producción) es de holgura en la solución óptima. **C.O.=0**

Ejercicio Propuesto:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el método **simplex revisado**

  MAXIMIZAR $Z = 600x1 + 900x2$

  s.a.

  $x1 + 2x2 \leq 200$

  $1/2x1 + x2 \leq 175$

  $x1, x2 \geq 0$

  en la solución óptima identificar los costes de oportunidad y los costes reducidos

Estamos trabajando con el modelo siguiente que ya está en forma estándar:

$$\text{Max } Z = 3x1 + 5x2$$

$$\begin{array}{lllll} x1 & + x3 & & & = 4 \\ 2\,x2 & + & x4 & & = 12 \\ 3\,x1 + 2\,x2 & & & + x5 & = 18 \end{array}$$

$$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$$

Cuya **solución óptima** es:

v.Básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

$c_{x4}\text{-}z_{x4} = 0 – 3/2 = -3/2;$ $c_{x5}\text{-}z_{x5} = 0\text{-}1 = -1$

3.9 Algoritmo Simplex revisado

- Objetivo: Reoptimizar la solución cuando
  1. Cambia un coeficiente de la función objetivo
  2. Cambia un bi

En cualquiera de esas dos situaciones, el **objetivo** es recalcular la solución óptima a partir de la solución óptima obtenida, sin resolver de nuevo el problema.

- **Nos fijaremos en la expresiones del simplex revisado:**

  - El valor de las variables básicas (FACTIBILIDAD):

    $$X_B = B^{-1}\,b$$

  - Prueba de **optimalidad** (c_j-z_j): (OPTIMALIDAD)

    $$z_j = c^t_B\,y_j = (c^t_B\,B^{-1})\,a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

    $$Y_{JE} = B^{-1}\,a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

    $$Z = c^t_B\,x_B$$

1 CAMBIO DE UN COEFICIENTE de la función objetivo

La modificación de un ci puede afectar a la optimalidad de la solución

- Cuando cambia un coeficiente de la función objetivo, puede afectar a la **optimalidad** de la solución (afecta a los cj-zj).

- Si la modificación es suficientemente grande, puede llegar a dejar de ser óptima. En ese caso, será necesario hacer una **iteración adicional del simplex para reoptimizar la solución**, es decir para obtener la nueva solución optima.

1 CAMBIO DE UN COEFICIENTE de la función objetivo

Recalcular cj-zj

- **Si** se cumple la condición de optimalidad, la solución óptima inicial no ha cambiado

- **Si no** se cumple, la solución optima ha cambiado. Para obtener la nueva solución, hacer una iteración del algoritmo Simplex.

2 CAMBIO DE UN bi

¿Cuál sería la solución óptima si el departamento 3 incrementara en 3 unidades su capacidad? ¿y en el caso de incrementarla en 9 unidades?

- A partir de la tabla de la solución óptima es posible responder a estas cuestiones.

$$[\text{depto.3}]\ 3X_1 + 2X_2 + x5 = 18$$

- bi_{actual} Depto. 3 = 18; bi_{nuevo} Depto. 3 = **21**

v.básicas	B^{-1}			X_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

- **Nos fijaremos en la expresiones del simplex revisado:**

  - El valor de las variables básicas (FACTIBILIDAD):

$$X_B = B^{-1}\, b$$

  - Prueba de **optimalidad** (c_j-z_j): (OPTIMALIDAD)

$$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

$$Y_{JE} = B^{-1}\, a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

$$Z = c^t_B\, x_B$$

2 CAMBIO DE UN bi

- La ***modificación de un bi no afecta a la optimalidad pero sí puede afectar a la factibilidad***, por tanto debemos recalcular x_B cuando b_3=21 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima).

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Z = c^t_B\, x_B = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

3.9 Algoritmo Simplex revisado

… ¿y si b3 se incrementa en 9 unidades?

- La modificación implica que el bi del departamento 3 cuyo valor inicial es 18 pase a ser 27:

$$b3 \rightarrow b3 + 9$$

- **La modificación de un bi no afecta a la optimalidad ($c_j - c_B{}^t B^{-1} a_j$ no varía) pero sí puede afectar a la factibilidad.** Por tanto debemos recalcular x_B cuando b_3=27 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima)

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN NO FACTIBLE (b3=27)

2 CAMBIO DE UN bi

La modificación de un **bi** puede afectar a la **factibilidad** de la solución

- Cuando cambia un bi, afecta al valor de las variables: $X_B = B^{-1} b$

- Si la modificación es suficientemente grande, la solución puede llegar a dejar de ser factible.

En ese caso, será necesario hacer aplicar el algoritmo **SIMPLEX DUAL para reoptimizar la solución**, es decir para obtener la nueva solución optima.

- Si al evaluar el cambio de un bi se obtiene una solución NO Factible, usaremos

ALGORITMO DUAL del SIMPLEX

para obtener una solución factible y óptima al problema.

3.10 Algoritmo simplex dual

Sea el siguiente modelo de PL y su Solución óptima:

$$\text{Max } Z = 3x1 + 5x2$$

$$\begin{aligned} x1 \quad + x3 \quad &= 4 \\ 2\,x2 \quad + x4 \quad &= 12 \\ 3\,x1 + 2\,x2 \quad + x5 &= 18 \\ x1, x2, x3, x4, x5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuya **solución óptima** es:

v.Básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\, B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

ALGORITMO SIMPLEX DUAL

Lo aplicaremos cuando necesitemos reoptimizar una solución que ha dejado de ser factible por el cambio en el valor del bi de alguna restricción

La modificación implica que el bi del departamento 3 cuyo valor inicial es 18 pase a ser 27

$b3 \rightarrow b3 + 9$

3.10 Algoritmo simplex dual

- Cuando el bi del departamento 3 cuyo valor inicial es 18 pase a ser 27:

$$b3 \rightarrow b3 + 9$$

- **La modificación de un bi no afecta a la optimalidad ($c_j - c_B^t B^{-1} a_j$ no varía) pero sí puede afectar a la factibilidad.** Por tanto debemos recalcular x_B cuando b_3=27 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima)

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN NO FACTIBLE (b3=27)

¿es posible alcanzar la factibilidad a partir de esta solución?

ALGORITMO SIMPLEX DUAL

- OBJETIVO: a partir de una SB que cumple el criterio de optimalidad primal y es no factible, encontrar una $SB_{adyacente}$ factible ($x_B \geq 0$)

3.10 Algoritmo simplex dual

- Variante del Algoritmo Simplex que se aplica para **re-optimizar un problema cuando**:
  - Se ha modificado algún parámetro del modelo que ha hecho que la solución óptima haya dejado de ser factible.

- Se diferencia del algoritmo Primal del Simplex en el orden en el que se escoge la variable que entra y la variable que sale en la solución básica.

Algoritmo Simplex:

Algoritmo **Simplex Primal**:	1º: **JE** 2º: **IS** 3º: **Cambio de base**
Algoritmo **Simplex Dual**:	1º: **IS** 2º: **JE** 3º: **Cambio de base**

ALGORITMO SIMPLEX DUAL

- PASOS:

1. Determinar variable **IS**: sale de la base la variable con bi más negativo:

$$\textbf{IS}: x_i \;/\; b_{xi} = \min\{\, bi \mid bi < 0 \}$$

2. Determinar variable **JE**: para conseguir que la factibilidad mejore **y** que el valor de la función objetivo empeore lo menos posible, se seleccionará para entrar en la base una variable xj cuyo **y_{ij} < 0** tal que:

$$\textbf{JE}: x_j \;/\; \left|\frac{c_{xj} - z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \min_{1 \le k \le n} \left\{ \left|\frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}}\right| \; y_{xk} < 0 \right\}$$

(Con el módulo: criterio único para maximizar o minimizar)

✍

3. Cambio de base: → **Actualizar B^{-1}**;

Calcular nueva solución: x_B, **Z**

En el caso de no existir alguna VNB con valor estrictamente negativo en la fila de la variable que sale, el problema que estamos tratando de resolver es no factible

- **CRITERIO DE OPTIMALIDAD (dual)**

Una solución x_B es óptima si es factible ($x_i \geq 0 \ \forall i$)

- Aplicando el **algoritmo dual del simplex** a la tabla de la solución óptima (cuando b3=27):

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	-1
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	5
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 45**

$c_{x4}-z_{x4} = -3/2;\quad c_{x5}-z_{x5} = -1$

3.10 Algoritmo simplex dual

1. **Elegir IS:** x_i / $b_{xi} = \min\{ bi \mid bi < 0\}$

$$\boxed{\textbf{IS} \rightarrow \textbf{x3}}$$

2. **Elegir JE:** $x_j \, / \left| \frac{c_{xj} - z_{xj}}{y_{xj}} \right| = \min_{1\le k\le n} \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \;\middle|\; y_{xk} < 0 \right\}$

Variables no básicas: $x_{NB} = \begin{pmatrix} x4 \\ x5 \end{pmatrix}$;

$$y_{x4} = B^{-1} a_{x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

En los vectores Y lo que nos interesa es la componente que tiene que ver con x3

$$y_{x5} = B^{-1} a_{x5} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

JE→ x5

En este caso SOLO x5 nos sirve para incrementar el valor de x3

3. Cambio de base: Actualizar B^{-1};

Calcular la nueva solución: X_B, Z

v.básicas	B^{-1}			x_B
x5	-3	-1	1	3
x2	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	4
$c^t_B\, B^{-1}$	3	5/2	0	**Z = 42**

$c_{x3}-z_{x3} = -3$; $c_{x4}-z_{x4}=-5/2$

4. Criterio de optimalidad (dual):

xi > 0 ∀i, por tanto la solución actual es **SOLUCIÓN ÓPTIMA**

3.10 Algoritmo simplex dual

Ejercicio Propuesto:

- La capacidad del Departamento 2 aumenta de 12 a 30 hrs.
- Obtener la S.O. y el valor de Z a partir de la S.O. del problema original aplicando el algoritmo simplex dual.

✍

3.10 Algoritmo simplex dual

- Cuando el bi del departamento 2 cuyo valor inicial es 12 pase a ser 30:

$$b2 \rightarrow b2 + 18$$

- **La modificación de un bi no afecta a la optimalidad (c_j-$c_B{}^tB^{-1}a_j$ no varía) pero sí puede afectar a la factibilidad.** Por tanto debemos recalcular x_B cuando b_2=30 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima)

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1}\,b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 30 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN NO FACTIBLE (b2=30)

3.10 Algoritmo simplex dual

1. **Elegir IS:** $x_i \,/\, b_{xi} = \min\{ bi \mid bi < 0\}$

$$\boxed{\mathbf{IS \rightarrow x1}}$$

2. **Elegir JE:** $x_j \,/\left|\dfrac{c_{xj} - z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \min\limits_{1 \le k \le n} \left\{\left|\dfrac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}}\right| \;\middle|\; y_{xk} < 0\right\}$

Variables no básicas: $x_{NB} = \begin{pmatrix} x4 \\ x5 \end{pmatrix}$;

$$y_{x4} = B^{-1} a_{x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

En los vectores Y lo que nos interesa es la componente que tiene que ver con x1

$$y_{x5} = B^{-1} a_{x5} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

JE → x4

En este caso SOLO x4 nos sirve para incrementar el valor de x1

3.10 Algoritmo simplex dual

3. <u>Cambio de base:</u> Actualizar B^{-1};

   Calcular la nueva solución: X_B, Z

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	4
x2	0	0	1/2	9
x4	0	1	-1	12
$c^t_B\ B^{-1}$	0	0	5/2	**Z = 45**

$c_{x1}-z_{x1} = -9/2$; $c_{x5}-z_{x5}=-5/2$

4. <u>Criterio de optimalidad (dual):</u>

   xi > 0 $\forall$i, por tanto la solución actual es **SOLUCIÓN ÓPTIMA**

Ejercicio 4 – 1er parcial Marzo 2019

Ejercicio Propuesto:

Dado el siguiente modelo lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Max} & & z = 2x_1 + x_2 \\ & [\text{R1}] & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ \text{s.a:} & [\text{R2}] & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & [\text{R3}] & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}			x_B
h_1	1	0	-1	8
h_2	0	1	-3	4
x_1	0	0	1	2
$c_B^t B^{-1}$	0	0	2	Z=4

A partir de la tabla de la solución óptima actual, y sabiendo que h_1, h_2 son las variables de holgura de las restricciones R1 y R2 respectivamente, **calcula la solución óptima y el valor de la función objetivo en caso de que el bi de la restricción R2 decremente su valor en 5 unidades**.

Ejercicios Propuestos

Obtener la solución óptima de los siguientes programas lineales aplicando el algoritmo simplex revisado:

a) Max $Z = 5\,x1 + 2\,x2$

s.a: $3\,x1 + x2 \leq 12$

$x1 + x2 \leq 5$

$x1, x2 \geq 0$

SOLUCIÓN: x1=3.5; x2=1.5; Z = 20.5

b) Max $Z = 24\,x1 + 20\,x2$

s.a: $0.5\,x1 + x2 \leq 12$

$1.5\,x1 + x2 \leq 24$

$x1, x2 \geq 0$

SOLUCIÓN: x1=12; x2=6; Z = 408