TRABAJO TEMA 4 APR

1.- Realizar el desarrollo completo para la obtención de la función de Lagrange primal y dual para las máquinas de vectores soporte con márgenes blando (separabilidad no lineal).

Función a minimizar:

$$\frac{1}{2}\theta^t\theta + C\sum_{n=1}^{N}\varsigma_n$$

Sujeta a las siguientes restricciones en desigualdad:

$$c_n(\theta^t x_n + \theta_0) \geq 1 - \varsigma_n, 1 \leq n \leq N$$
$$\varsigma_n \geq 0, 1 \leq n \leq N$$

Función de Lagrange primal formada por la función a minimizar y la resta de las restricciones en desigualdad con la forma apropiada:

$$\Lambda(\theta, \theta_0, \varsigma, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\theta^t\theta + C\sum_{n=1}^{N}\varsigma_n - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left(c_n(\theta^t x_n + \theta_0) + \varsigma_n - 1\right) - \sum_{n=1}^{N}\beta_n\varsigma_n$$

Sujeta a:

$$\alpha_n \geq 0, \beta_n \geq 0 \; y \; \varsigma_n \geq 0 \; para \; 1 \leq n \leq N$$

Soluciones óptimas:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \theta^* = \sum_{n=1}^{N} c_n\alpha_n x_n$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta_0} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} = 0 \Rightarrow C\sum_{n=1}^{N} 1 - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n - \sum_{n=1}^{N}\beta_n = 0$$
$$\Rightarrow C\sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} 1 * \alpha_n + \sum_{n=1}^{N} 1 * \beta_n$$
$$\Rightarrow C = \alpha_n + \beta_n \; para \; 1 \leq n \leq N \; (1)$$

Función de Lagrange dual:

$$\Lambda_D(\alpha, \beta) = \Lambda(\theta^*, {\theta_0}^*, \varsigma^*, \alpha, \beta)$$
$$= \frac{1}{2}\theta^{*t}\theta^* + C\sum_{n=1}^{N}{\varsigma_n}^* - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left(c_n\left(\theta^{*t}x_n + {\theta_0}^*\right) + {\varsigma_n}^* - 1\right) - \sum_{n=1}^{N}\beta_n{\varsigma_n}^*$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n{}^t x_m + C \sum_{n=1}^{N} \varsigma_n{}^* - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(c_n \left(\sum_{m=1}^{N} c_m \alpha_m x_m{}^t x_n + \theta_0{}^* \right) + \varsigma_n{}^* - 1 \right) - \sum_{n=1}^{N} \beta_n \varsigma_n{}^*$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n{}^t x_m + C \sum_{n=1}^{N} \varsigma_n{}^* - \theta_0{}^* \sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varsigma_n{}^* - \sum_{n=1}^{N} \beta_n \varsigma_n{}^*$$

Utilizando (1) podemos llegar a:

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n{}^t x_m + C \sum_{n=1}^{N} \varsigma_n{}^* + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \varsigma_n{}^* - C \sum_{n=1}^{N} \varsigma_n{}^* - \sum_{n=1}^{N} \beta_n \varsigma_n{}^*$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} c_n c_m \alpha_n \alpha_m x_n{}^t x_m$$

Sujeta a:

$$\alpha_n \geq 0, C = \alpha_n + \beta_n \; para \; 1 \leq n \leq N \; y \; a \sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n = 0$$

2.- Diseñar el grafo dirigido y acíclico para la clasificación en 5 clases utilizando SVM para dos clases y la estrategia uno-contra-uno.