Computabilidad y Complejidad
Ejercicios Unidad Temática: Funciones recursivas

En la respuesta se puede utilizar cualquier función recursiva primitiva que aparezca bien en el tema de teoría o bien en los boletines de ejercicios propuestos y resueltos

1.-Sea una función recursiva primitiva $g: \mathbf{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbf{N}$. Se define la función de $\mathbf{N}^k$ a $\mathbf{N}$

$\tau x . g(x, n_1, \ldots, n_k) =$

$$\begin{cases} m, \text{ si } (\exists i \in \{0, \ldots, x\})(g(i, n_1, \ldots, n_k) = m \\ \qquad \wedge (\forall j: 0 \leq j < i)(g(j, n_1, \ldots, n_k) = 0)) \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que la función $\tau x . g(x, n_1, \ldots, n_k)$ es recursiva primitiva.

$\tau x . g(n, n_1, \ldots, n_k) = \sum_{0 \leq i \leq n} (g(i, n1, \ldots, nk) \ * \ cosg(\sum_{0 \leq j \leq i} g(j, n_1, \ldots, n_k) \ * \ menor(j, i))$

2.-Sean f, g y h funciones recursivas primitivas definidas de $\mathbf{N}$ a $\mathbf{N}$ y sea k un número natural predeterminado. Se define la función p como sigue

$$p(n) \begin{cases} f(g(h(n-2)+1)+1) \ si \ n > 1 \\ k \ si \ n \leq 1 \end{cases}$$

¿Es p una función recursiva primitiva?

p(n) = igual(n,0) * k +
igual(n,1) * k +
desigual(n,0) * desigual(n,1) * t(n)

t(n) = f(g(h(pred^2(n)) + 1) + 1)

3.-Sea la función `primo`: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, definida de modo que

`primo(n)` =

- **1, si n es primo**
- **0, en otro caso**

Demuestre que `primo` es una función recursiva primitiva

primo(n) = maig(n,2) * igual($\sum_{0 \leq i \leq n} cosg\big(resto(n, i)\big) * mayor(n, 0)$, 2)

4.-Sean f y g dos funciones primitivo recursivas y se define la función h como sigue

$$\boldsymbol{h(n) = \begin{cases} f(n)^{g(n+1)} \; si \; f(n) > g(n) \\ g(n)^{f(n+1)} \; si \; f(n) \leq g(n) \end{cases}}$$

¿Es h una función recursiva primitiva?

h(n) = mayor(f(n),g(n)) * exp(g(n+1),f(n)) +
cosg(mayor(f(n),g(n))) * exp(f(n+1),g(n))

5.-Se define la función `f`: `N×N` ⟶ `N` de modo que `f(n,m)` es igual al producto de los divisores de n que son pares y mayores que `m` y menores que `n`, si los hay, o `1` en otro caso.

Demuestre que `f` es una función recursiva primitiva.

f(n,m) = $\prod_{0 \le i \le n} \max\left(cosg\big(resto(n,i)\big) * cosg\big(resto(i,2)\big) * mayor(i,m) * menor(i,n) * i, 1\right)$