Examen de Computabilidad y Complejidad

CMC

26 de Enero de 2005

CUESTIONES: (Justifique formalmente las respuestas)

1. ¿Es el lenguaje $L = \{x2y : x, y \in \{0, 1\}^*, |x|_0 = |y|_0\}$ incontextual?

(1 punto)

El lenguaje L es incontextual porque es generado por la siguiente gramática incontextual

$$G: S \rightarrow 0S0 \mid S1 \mid 1S \mid 2$$

1) $L(G) \subseteq L$. Demostraremos por inducción sobre n que si $S \Rightarrow^n z \in \{0,1,2\}^*$, entonces $z \in L$.

i) Caso base: n=1. Así, $S \Rightarrow z = 2$ y claramente $z \in L$.

ii) Caso inductivo: Supóngase que $S \Rightarrow^{n+1} z$, $n \geq 1$. Por hipótesis de inducción si $S \Rightarrow^n x \in \{0,1,2\}^*$, entonces $x \in L$. Hay tres situaciones derivativas posibles:

a) $S \Rightarrow 1S \Rightarrow^n z = 1x$

b) $S \Rightarrow S1 \Rightarrow^n z = x1$

c) $S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow^n z = 0x0$

donde, en cualquier caso, $S \Rightarrow^n x$. Así, $x \in L$ y en consecuencia también 1x, x1 y 0x0 están en L. Luego $z \in L$.

2) $L \subseteq L(G)$. Lo demostraremos por inducción sobre la longitud de las palabras de L. Sea $z \in L$.

i) Caso base: $|z| = 1$. Así, $z = 2$ y claramente $S \Rightarrow 2$, por lo que $z \in L(G)$.

ii) Caso inductivo: $|z| > 1$. Existen tres casos a considerar:

a) $z = 1x$

b) $z = x1$

c) $z = 0x0$

Claramente en todos ellos $x \in L$. Además $|z| > |x|$; así, por hipótesis de inducción: $S \Rightarrow^* x$. En consecuencia:

a) $S \Rightarrow 1S \Rightarrow^* 1x = z$

b) $S \Rightarrow S1 \Rightarrow^* x1 = z$

c) $S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow^* 0x0 = z$

Por tanto, en cualquier caso, $z \in L(G)$.

2. Se define $L \subseteq \{0, 1\}^*$ como el lenguaje formado por aquellas palabras que tienen el segmento más largo de ceros más largo que el segmento más largo de unos. ¿Es el lenguaje L incontextual?

(1 punto)

Supóngase que el lenguaje es incontextual y sea n la constante del Lema de Iteración. Considérese la palabra $z = 1^n0^{n+1}1^n \in L$, que de acuerdo a las condiciones del Lema de Iteración puede factorizarse como $z = uvwxy$, con $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n$ y $uv^iwx^iy \in L$ $\forall i \geq 0$.

Las posibles factorizaciones *potenciales*, de acuerdo al Lema de Iteración, son las siguientes:

I) $v, x \in \{1\}^*$, en estos casos al iterar con $i > 1$ se incumplen las condiciones de pertenencia al lenguaje, ya que la palabra iterada es de la forma $1^m0^{n+1}1^n$ o $1^n0^{n+1}1^m$ con $m > n$, por tanto no es una factorizacion admisible.

II) $v, x \in \{0\}^*$, en estos casos al iterar con $i = 0$ se incumplen las condiciones de pertenencia al lenguaje, ya que la palabra iterada es de la forma $1^n0^m1^n$ con $m < n$, por tanto no es una factorizacion admisible.

III) $v \in \{1\}^+$ y $x \in \{0\}^+$, o $v \in \{0\}^+$ y $x \in \{1\}^+$, en estos casos al iterar con $i = 0$ se incumplen las condiciones de pertenencia al lenguaje, ya que la palabra iterada es de la forma $1^k0^m1^n$ o $1^n0^m1^k$ con $m < n$, por tanto no es una factorizacion admisible.
IV) v o x contiene unos y ceros, en estos casos al iterar con $i = 0$ se incumplen las condiciones de pertenencia al lenguaje, ya que la longitud del segmento más largo de ceros disminuye y uno de los segmentos de unos permanece inalterado, por tanto no es una factorizacion admisible.

Por tanto no hay ninguna factorización admisible y puesto que se incumple el Lema de Iteración el lenguaje no es incontextual.

3. Sean $L \subseteq \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$. Se define la operación *Inserta*$(a,L) = \{xay : xy \in L\}$.
a) Si L es recursivo ¿lo es también *Inserta*(a,L)?

(1 punto)

Si L es recursivo también lo es *Inserta(a,L)*. Sea M una MT que reconoce a L y que se detiene para cada entrada. Definimos una MT M' que actúa como sigue.

```
Operando a partir del comienzo de x:
   si existe una nueva ocurrencia de a, todavía no
        considerada, eliminarla y aplicar la palabra
        resultante a M, si se detiene aceptando hacer lo
        mismo, en otro caso restaurar x y volver a
        proceder;
   en otro caso detenerse rechazando.
```

Claramente M' reconoce a *Inserta(a,L)* y se detiene para cada entrada, por tanto *Inserta(a,L)* es recursivo.

b) Si L es recursivamente enumerable ¿lo es también *Inserta*(a,L)?

(1 punto)

Si L es recursivamente enumerable también lo es *Inserta(a,L)*. Sea G un generador de L, seguidamente definimos un generado G' para *Inserta(a,L)*. El generador G' simula a G de modo que cuando G genera una palabra x G' genera las $|x|+1$ palabras obtenidas a partir de x insertando una *a* en cada posición admisible.

4. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) Si L es un lenguaje recursivamente enumerable y $L' \subseteq L$ entonces L' es recursivamente enumerable.

(0,5 puntos)

Sea $L = \{0,1\}^*$ y L' el lenguaje diagonal. Se tiene que L es recursivamente enumerable, L' no lo es y $L' \subseteq L$. por tanto la afirmación es falsa.

b) Si L_1 y $L_1 - L_2$ son recursivos, entonces L_2 también es recursivo.

(0,5 puntos)

Sea $L_1 = \emptyset$ y L_2 el lenguaje universal. Obviamente L_1-$L_2 = \emptyset$. Puesto que el lenguaje $\emptyset$ es recursivo y el lenguaje diagonal no se tiene que la afirmación es falsa.

PROBLEMAS:

5. Desarrolle un módulo *Mathematica* que a partir de una gramática incontextual devuelva la gramática resultante de eliminar las producciones cuyos consecuentes no se encuentran en forma normal de Chomsky.

(2 puntos)

```
P5[G_List] := Module[{producciones, consecuentes, i, j, c},
    producciones = {};
    For[i=1, i ≤ Length[G[[3]]], i++,
      consecuentes = {};
      For[j = 1, j ≤ Length[G[[3,i,2]]], j++,
        c = G[[3,i,2,j]];
        If[(Length[c] == 1 && Intersection[G[[2]],c] ≠ {})||
              (Length[c] == 2 && Intersection[G[[2]],c] == {}),
          AppendTo[consecuentes,c]
        ]
      ];
      AppendTo[producciones,{G[[3,i,1]],consecuentes}]
    ];
    Return[{G[[1]],G[[2]],producciones,G[[4]]}]
 ]
```

6. Dada la gramática *G* cuyas reglas son las definidas abajo, obtener una gramática simplificada en forma normal de Chomsky que genere L(G) −{λ}.

$S \rightarrow ABAB|CCB|10SS$
$A \rightarrow 0A|0D1$
$B \rightarrow 0A1|CC|\lambda$
$C \rightarrow 0|BB$
$D \rightarrow CSC|0C0|\lambda$

(2 puntos)

Inicialmente todos los símbolos son útiles.
Eliminación de las producciones λ: anulables = {S,B,C,D}.

$S \rightarrow ABAB \mid ABA \mid AAB \mid AA \mid CCB \mid CB \mid CC \mid B \mid C \mid 10SS \mid 10S \mid 10$
$A \rightarrow 0A \mid 0D1 \mid 01$
$B \rightarrow 0A1 \mid CC \mid C$
$C \rightarrow 0 \mid BB \mid B$
$D \rightarrow CSC \mid SC \mid CC \mid CS \mid C \mid S \mid 0C0 \mid 00$

Eliminación de las producciones unitarias.

$S \rightarrow ABAB \mid ABA \mid AAB \mid AA \mid CCB \mid CB \mid CC \mid 10SS \mid 10S \mid 10 \mid 0A1 \mid 0 \mid BB$
$A \rightarrow 0A \mid 0D1 \mid 01$
$B \rightarrow 0A1 \mid CC \mid 0 \mid BB$
$C \rightarrow 0 \mid BB \mid 0A1 \mid CC$
$D \rightarrow CSC \mid SC \mid CC \mid CS \mid 0 \mid BB \mid 0A1 \mid 0C0 \mid 00 \mid ABAB \mid ABA \mid AAB \mid AA \mid CCB \mid CB \mid 10SS \mid 10S \mid 10$

Forma Normal de Chomsky.

$S \rightarrow AX_1 \mid AX_2 \mid AX_3 \mid AA \mid CX_4 \mid CB \mid CC \mid C_1X_5 \mid C_1X_7 \mid C_1C_0 \mid C_0X_{10} \mid 0 \mid BB$
$A \rightarrow C_0A \mid C_0X_8 \mid C_0C_1$
$B \rightarrow C_0X_{10} \mid CC \mid 0 \mid BB$
$C \rightarrow C_0X_{10} \mid CC \mid 0 \mid BB$
$D \rightarrow CX_9 \mid SC \mid CC \mid CS \mid 0 \mid BB \mid C_0X_{10} \mid C_0X_{11} \mid C_0C_0 \mid AX_1 \mid AX_2 \mid AX_3 \mid AA \mid CX_4$

$| CB | \; C_1X_5 | C_1X_7 | C_1C_0$

$X_1 \rightarrow BX_2$
$X_2 \rightarrow AB$
$X_3 \rightarrow BA$
$X_4 \rightarrow CB$
$X_5 \rightarrow C_0X_6$
$X_6 \rightarrow SS$
$X_7 \rightarrow C_0S$
$X_8 \rightarrow DC_1$
$X_9 \rightarrow SC$
$X_{10} \rightarrow AC_1$
$X_{11} \rightarrow CC_0$
$C_0 \rightarrow 0$
$C_1 \rightarrow 1$

7. Dadas la gramáticas G_1 cuyas reglas son $S \rightarrow 0S0S|1S1S|\lambda$; G_2 cuyas reglas son $S \rightarrow SSA|AA|0|1$, $A \rightarrow SAS|\lambda$ y G_3 cuyas reglas son $S \rightarrow aSS|aSSb|b$. Dada la sustitución definida como $f(0) = L(G2)^r$ y $f(1) = L(G1)^+$ obtenga una gramática que genere f(L(G))L(G).

(1 punto)

f(0): $S_0 \rightarrow AS_0S_0 \mid AA \mid 0 \mid 1$ $\quad A \rightarrow S_0AS_0 \mid \lambda$

f(1): $S_1 \rightarrow S''S_1 \mid S''$ $\quad S'' \rightarrow 0S''0S'' \mid 1S''1S'' \mid \lambda$

f(L(G)): $S' \rightarrow S_0S'S_0S' \mid S_1S'S_1S' \mid \lambda$

f(L(G))L(G): $S \rightarrow S'X$ $\quad X \rightarrow 0X0X \mid 1X1X \mid \lambda$