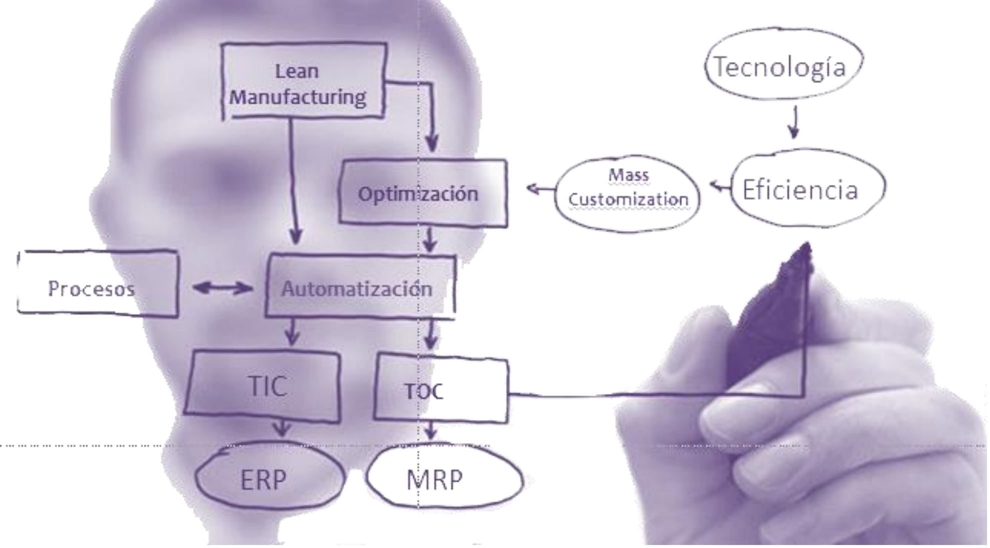


DEIOAC-UPV

3. Métodos de Programación Lineal (III)

CONTENIDOS

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad (NO para Examen)

3.17 Análisis de Sensibilidad

- 3.17.1 Análisis de Sensibilidad de coeficientes en la función objetivo
- 3.17.1 Análisis de Sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

3.18 Introducción de una nueva variable

3.17 Análisis de sensibilidad

- En los modelos de programación lineal los **coeficientes** de la función objetivo (c_j) y el segundo miembro de las restricciones (b_i) se dan como datos de entrada o como **parámetros fijos** del modelo

- En los problemas reales los valores de estos coeficientes no están, en general, perfectamente fijados, debido a que la mayoría de ellos dependen de parámetros no controlables, por ejemplo, futuras demandas, coste de materias primas, coste de energía, etc. Y **no se pueden predecir con exactitud** antes de que el problema sea resuelto

3.17 Análisis de sensibilidad

- También puede suceder que aunque conozcamos los parámetros exactamente estemos interesados en estudiar cómo varía la solución óptima si **cambiamos algún parámetro intencionadamente** (como simulación o por circunstancias del momento)

Ambas situaciones se resuelven de forma análoga

- El objetivo fundamental del análisis post-óptimo es identificar los parámetros sensibles (i.e. los parámetros tales que si sus valores cambian, cambia la solución óptima). Del mismo modo para ciertos parámetros que no están clasificados como sensibles también resulta de utilidad determinar el intervalo de valores del parámetro para el que la solución óptima no cambia (mantiene la optimalidad o la factibilidad)

3.17 Análisis de sensibilidad

- Cada variación en los valores de los datos del problema generará un nuevo problema de programación lineal. El **análisis de sensibilidad** nos proporcionarán herramientas para el cálculo de las soluciones óptimas de los problemas obtenidos por la modificación de los parámetros originales del problema así como para el cálculo de los intervalos en los que la solución óptima o el coste de oportunidad se mantiene
- En el procedimiento de cálculo de la nueva solución (si ha cambiado algún parámetro del modelo) o bien del intervalo de análisis de sensibilidad, se partirá de la solución óptima del problema original antes de ser modificado, y a partir de ella se calcularán las soluciones asociadas a las modificaciones

3.17 Análisis de sensibilidad

- En general, **una modificación de los parámetros del modelo** provocará que al considerar como **solución inicial** la **base óptima del problema original**, ésta **deje de ser óptima** o **factible**:

A. La modificación **c'** del vector de costes original **c** únicamente supone una modificación en $c' - c'^t_B B^{-1} a$. Por tanto, la solución inicial del problema modificado, la construida con **la base óptima** del problema original, **mantiene la factibilidad** PERO **puede perder la optimalidad**.

El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del coeficiente en cuestión de modo que se mantienen las ***condiciones de optimalidad***

3.17 Análisis de sensibilidad

B. La modificación **b'** del vector de recursos **b** únicamente supone una modificación en $\mathbf{x_B = B^{-1} b'}$**.** Por tanto, **la solución inicial** del problema modificado, la construida con la base óptima del problema original, **mantiene la optimalidad** PERO **puede perder la factibilidad**.

El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del segundo miembro en cuestión de modo que se mantienen las ***condiciones de factibilidad***

3.17 Análisis de sensibilidad

- Para ilustrar el cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad de los parámetros de un modelo de programación lineal utilizaremos el problema de *producción de componentes informáticos*:

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } 3x1 + 5x2 \\
\text{s.a:} \\
\quad x1 \qquad\qquad + x3 \qquad\qquad\qquad = 4 \\
\qquad 2\,x2 \qquad\qquad + x4 \qquad\qquad = 12 \\
\quad 3\,x1 + 2\,x2 \qquad\qquad + x5 \quad = 18 \\
\\
x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0
\end{array}
$$

3.17 Análisis de sensibilidad

- Cuya solución óptima es la que se muestra en la siguiente tabla:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

VNB = X4, X5

✍

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

- El objetivo del análisis de sensibilidad de los coeficientes en la función objetivo es determinar el intervalo de variación de dichos coeficientes en el que no hay cambio de solución óptima. Vamos a considerar dos situaciones:

1. Sólo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables no básicas** en la solución óptima
2. Sólo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables básicas** en la solución óptima

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

1. **Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable no básica:**

- La modificación del c_j de una variable no básica que pasa a ser $c'_j = c_j + \Delta c_j$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $c_B^t B^{-1} a_j$ **NO cambia** ya que xj es variable no básica y por tanto no aparece en c_B
- **La modificación del c_j de una variable no básica sólo afecta al cálculo de su propio $c_j - z_j$**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x4}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x4} mientras: $c_{x4} - z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B B^{-1})\, a_{x4} \leq 0$ **(MAX)**

En la solución óptima, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1) \leftarrow \text{Cte.}$$

$$z_{x4} = (c^t_B B^{-1})\, a_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$$c_{x4} - z_{x4} \leq 0 \rightarrow c_{x4} - 3/2 \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x4} \leq 3/2}$$

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Mientras **$c_{x4} \leq 3/2$:**

- La solución óptima **NO CAMBIA**
- Como x4 es no básica, el valor de la función objetivo **NO CAMBIA**
- En el límite, es decir cuando c_{x4}=3/2, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Ejercicio Propuesto:
▪ **Calcular el intervalo de variación de c_{x5} en el que la solución óptima no cambia. ¿Cuál es el valor de la función objetivo mientras c_{x5} varía en ese intervalo?**

✍

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

2. **Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable básica:**

- La modificación del c_i de una variable básica que pasa a ser $c'_i = c_i + \Delta c_i$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B{}^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $c_B{}^t B^{-1} a_j$ **CAMBIA** ya que xi es variable básica y aparece en c_B

- **La modificación del c_i de una variable básica afecta al cálculo de los $c_j - z_j$ de las variables no básicas**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x1}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x1} mientras **$c_{x4}-z_{x4} \leq 0$** **y** **$c_{x5}-z_{x5} \leq 0$**

En la solución óptima, B^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B B^{-1} = (0, 5, c_{x1}) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 5/2-1/3\, c_{x1}, 1/3\, c_{x1})$$

$$z_{x4} = (c^t_B B^{-1})\, a_{x4} = (0, 5/2-1/3\, c_{x1}, 1/3\, c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2 - 1/3\, c_{x1}$$

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

$$z_{x5} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x5} = (0,\ 5/2-1/3\, c_{x1},\ 1/3\, c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3\, c_{x1}$$

$$c_{x4}-z_{x4} \leq 0 \rightarrow 0-5/2+1/3\, c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \leq 15/2=7.5}$$

$$c_{x5}-z_{x5} \leq 0 \rightarrow 0-1/3\, c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \geq 0}$$

Mientras **$0 \leq c_{x1} \leq 7.5$:**

- La solución óptima **NO CAMBIA**
- El valor de la función objetivo **CAMBIA: $Z=30+2c_{x1}$**
- En los límites, es decir cuando $c_{x1}=0$ o $c_{x1}=7.5$, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Ejercicio Propuesto:

- **Calcular el intervalo de variación de c_{x2} en el que no cambia la solución óptima**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- La modificación del segundo miembro de una restricción (vector recursos):
  - **Afecta** (en general) a la región factible
  - **Puede afectar** a la factibilidad de la solución actual
  - **No afecta** a la optimalidad de la solución
  - **Afecta** (en general) al valor de la función objetivo

- El objetivo es calcular el intervalo en el que puede variar el segundo miembro de una restricción y **mantenerse constante el coste de oportunidad**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

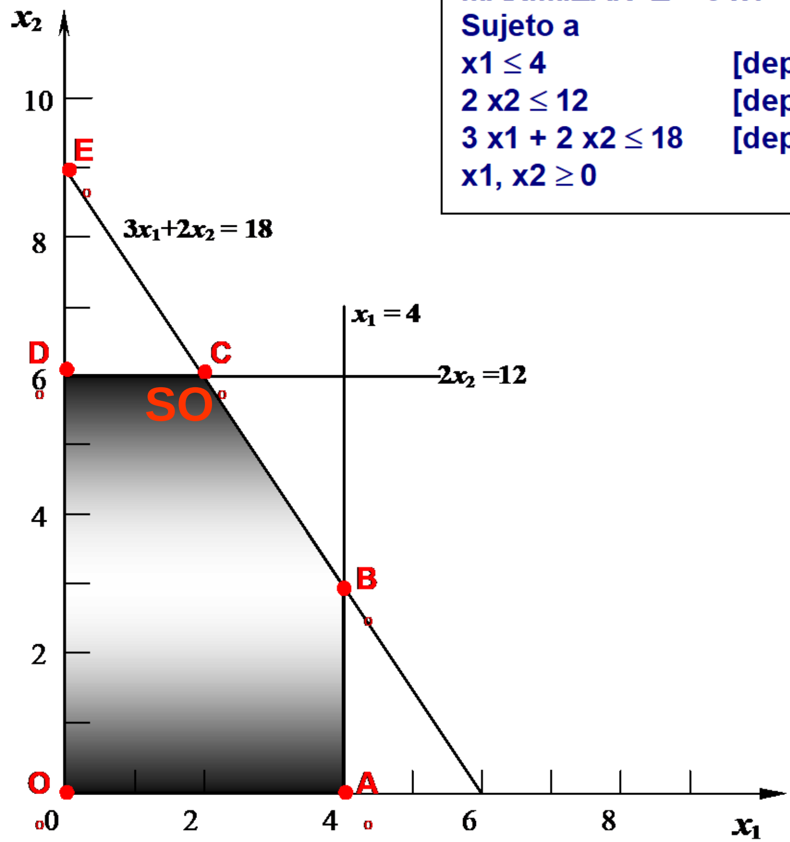
- Al modificar **b** a **b’** **se mantendrá el coste de oportunidad** y el **plan de producción** **mientras se mantenga la factibilidad de la solución ($x_B \geq 0$)**, es decir mientras se cumpla que la solución óptima con el nuevo vector b’ es factible:

$$\mathbf{x'_B{}^*} = B^{-1}b' \geq \mathbf{0}$$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

MAXIMIZAR $Z = 3\,x1 + 5\,x2$
Sujeto a

$x1 \leq 4$	[depto. 1]
$2\,x2 \leq 12$	[depto. 2]
$3\,x1 + 2\,x2 \leq 18$	[depto. 3]
$x1, x2 \geq 0$	



1. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 2, b2:

[depto.2] 2 x2 + x4 = **12**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la restricción 2 es:

$$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x4}$$

$$c^t_B\ B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1)$$

$$z_{x4} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x4} = 0 - 3/2 = -3/2$$

- Como la restricción es de tipo '$\leq$' el coste de oportunidad es

$$\boxed{+\ 3/2}$$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 2 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ \boxed{b2'} \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ b2' \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x3'^* = 4 + 1/3\, b2' - 6 \geq 0 \rightarrow -2 + 1/3\, b_2' \geq 0 \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{b_2' \geq 6}}$

$x2'^* = 1/2\, b_2' \geq 0 \rightarrow$ $\mathbf{b_2' \geq 0}$

$x1'^* = -1/3\, b_2' + 6 \geq 0 \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{b_2' \leq 18}}$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- La **solución** sigue siendo **factible** siempre que las tres **variables básicas** sigan siendo **no negativas**, por tanto la solución sigue siendo factible mientras: $\boxed{6 \leq b'_2 \leq 18}$

1. El coste de oportunidad es constante e igual a **+3/2**
2. La solución óptima cambia (ya que restricción Limitativa)
3. El valor de la función objetivo cambia (se puede recalcular con el coste de oportunidad)
4. El plan de producción (base) es constante
5. En los límites la solución es degenerada

2. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 1, b1:

[depto.1] x1 + x3 = **4**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la **restricción 1** es:

$$\mathbf{c_{x3}-z_{x3}} = c_{x3} - (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = 0 - (0,\ 3/2,\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- Como se trata de una **restricción no limitativa en la solución óptima** $\rightarrow$ **C.O. = 0**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 1 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1' \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x3'^* = b1' + 4 - 6 \geq 0 \rightarrow b_1' - 2 \geq 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{b_1' \geq 2}}$

$x2'^* = 6 \geq 0$

$x1'^* = -4 + 6 \geq 0$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- Mientras $\boxed{2 \leq b_1' < +\propto}$:

1. El coste de oportunidad es constante e igual a **0**
2. La solución óptima NO cambia (ya que restricción de Holgura)
3. El valor de la función objetivo NO cambia (ya que restricción de Holgura)
4. El plan de producción (base) es constante
5. En los límites la solución es degenerada

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

En síntesis:

- Para cualquier $\mathbf{b_i}$, su intervalo de análisis de sensibilidad es el intervalo de valores en el que la solución óptima se mantiene factible. Así, el coste de oportunidad de b_i sigue siendo válido para evaluar el efecto del cambio en b_i sobre Z sólo si b_i sigue dentro de este intervalo permisible. Los valores óptimos de las variables básicas se obtienen a partir de la fórmula:

$$\mathbf{x'^*_B = B^{-1}b'}$$

- El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad está basado en el hecho de encontrar el intervalo de valores de b_i tales que $\mathbf{x'^*_B \geq 0}$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

Ejercicio Propuesto:

- **Calcular el intervalo de variación de b_3 en el que el coste de oportunidad es constante**

3.18 Introducción de una nueva variable

- Las variables decisión del modelo generalmente representan las distintas actividades a realizar.

- En algunas situaciones estas actividades se seleccionan entre un grupo grande de actividades posibles en el que las restantes no se eligieron por parecer menos atractivas.

- Sin embargo puede plantearse si merece la pena incluir alguna de las actividades no consideradas antes, es decir, ¿cambiará la solución óptima si se agrega cualquiera de estas nuevas actividades?

3.18 Introducción de una nueva variable

- Añadir otra actividad equivale a:

1. Introducir en el modelo una nueva variable $\mathbf{x_{n+1}}$, con los coeficientes apropiados en las restricciones funcionales, $\mathbf{a_{n+1}}$, y en la función objetivo, $\mathbf{c_{n+1}}$.
2. Se calcularán los valores:

$$c_{n+1} - z_{n+1} = c_{n+1} - c^t_B B^{-1} a_{n+1}$$

$$y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$$

- La optimalidad de la solución dependerá del cj-zj de la nueva variable x_{n+1}, si es ≥ 0 y el problema es de mínimo o si es ≤ 0 y el problema es de máximo, la solución que teníamos para el problema original sigue siendo óptima para el problema modificado. En caso contrario la solución ya no es óptima, dicha variable debe entrar en la base → **Aplicar algoritmo Simplex**

3.18 Introducción de una nueva variable

- La empresa de componentes informáticos está considerando la posibilidad de fabricar un nuevo tipo de placa base. Cada lote de las nuevas placas requiere 2 horas del departamento de producción, 3 horas del departamento de calidad y 1 hora del departamento de montaje. El beneficio semanal por cada lote de placas tipo 3 fabricadas es de 4000 €,

¿LE INTERESARÁ A LA EMPRESA LA FABRICACIÓN DEL NUEVO TIPO DE PLACA? ¿EN QUÉ CANTIDAD?

3.18 Introducción de una nueva variable

- Sea $\mathbf{x_{placa3}}$: Número de lotes de la placa base 3 fabricados por semana
- El nuevo modelo es:

$$\text{Max } 3x1 + 5x2 + \mathbf{4\ x_{placa3}}$$

s.a:

$$
\begin{array}{llll}
x1 & & + \mathbf{2\ x_{placa3}} & \leq 4 \\
 & 2\ x2 & + \mathbf{3\ x_{placa3}} & \leq 12 \\
3\ x1 + 2\ x2 & & + \mathbf{x_{placa3}} & \leq 18 \\
\multicolumn{4}{l}{x1,\ x2,\ \mathbf{x_{placa3}} \geq 0}
\end{array}
$$

3.18 Introducción de una nueva variable

- Teniendo en cuenta que en la solución óptima del problema original:

$$x^*_B = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad (c^t_B\, B^{-1}) = (0 \;\; 3/2 \;\; 1)$$

- Para la nueva actividad, calculamos su $c_{xplaca3}-z_{xplaca3}$ así como su columna $y_{xplaca3}$:

$$c_{xplaca3} - z_{xplaca3} = 4 - (0,\, 3/2,\, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 11/2 = \mathbf{-3/2}$$

- La solución inicial todavía es óptima, por tanto

NO INTERESA la fabricación del nuevo tipo de placa

¿Cómo se interpreta el valor de $c_{xplaca3} - z_{xplaca3}$?

3.18 Introducción de una nueva variable

Ejercicio Propuesto:
Y si el beneficio semanal por cada lote de placas tipo 3 fabricadas fuera de 6000€, ¿interesaría fabricar el nuevo tipo de placa base 3?