Examen de Computabilidad y Complejidad

(CMC)

25 de enero de 2006

(I) CUESTIONES: (Justifique formalmente las respuestas)

1. ¿Es el lenguaje $\{0^i1^j2^k \mid i = j \vee i = k\}$ incontextual?

$L = \{0^i1^j2^k / i = j \vee i = k\} = \{0^i1^j2^k / i = j\} \cup \{0^i1^j2^k / i = k\} =$
$\{0^i1^i / i \geq 0\}\{2^k / k \geq 0\} \cup \{0^i1^j2^i / i,j \geq 0\}$.
Así podemos poner $L = L_1 \cup L_2$ con $L_1 = \{0^i1^i / i \geq 0\}\{2^k / k \geq 0\}$ y $L_2 = \{0^i1^j2^i / i,j \geq 0\}$. Adicionalmente, también podemos poner $L_1 = L_{11}L_{12}$ con $L_{11} = \{0^i1^i / i \geq 0\}$ y $L_{12} = \{2^k / k \geq 0\}$. Ahora podemos asociar, de modo inmediato, a cada uno de estos lenguajes una gramática incontextual de las vistas en clase.

G_{11}: $S_{11} \rightarrow 0S_{11}1 \mid \lambda$	$L(G_{11}) = L_{11}$
G_{12}: $S_{12} \rightarrow 2S_{12} \mid \lambda$	$L(G_{12}) = L_{12}$
G_1: $S_1 \rightarrow S_{11}S_{12}$	$L(G_1) = L_1$
G_2: $S_2 \rightarrow 0S_22 \mid A$	$L(G_2) = L_2$
$A \rightarrow 1A \mid \lambda$	
G: $S \rightarrow S_1 \mid S_2$	$L(G) = L$

Por tanto, por las propiedades de cierre de los lenguajes incontextuales, el lenguaje dado es incontextual.

(1.0 punto)

2. ¿Es el lenguaje $\{a^nb^m / n \geq 1 \wedge m = \lfloor \log_2 n \rfloor\}$ incontextual? ($\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.)

Supóngase que el lenguaje es incontextual. Sea k la constante del Lema de Iteración. Considérese la palabra $z = a^nb^m$, donde $n = 2^k$ y $m = k$. Claramente z es una palabra del lenguaje y $|z| \geq k$. Demostraremos que el lenguaje no es incontextual estableciendo que no existe ninguna factorización admisible de z = uvwxy en las condiciones del Lema de Iteración. Las posible factorizaciones potencialmente admisibles son las siguientes:

i) $v,x \in a^*$, en este caso al tomar una iteración $i = 0$ obtenemos una palabra $z' = a^{n'}b^k$ con $n' < 2^k$, en consecuencia $\lfloor \log_2 n' \rfloor < k$. Así $z \notin L$.
ii) $v,x \in b^*$,en este caso con cualquier iteración $i \neq 1$, el número de b's será distinto de k y así la palabra iterada no pertenece al lenguaje.
iii) $v \in a^+b^+$ o $x \in a^+b^+$, en este caso al iterar con $i > 1$ se rompe la estructura sintáctica básica del lenguaje, esto es, se producen palabras con a'sb'sa'sb's..., de modo que estas palabras no pertenecen al lenguaje.
iv) $v \in a^+$ y $x \in b^+$, en este caso iterando con $i = 2$ obtenemos una palabra z' tal que $|z'|_a = 2^k + p$ y $|z'|_b = k + q$, donde $p \geq 1$, $q \geq 1$ y $2 \leq p + q \leq k$. En consecuencia como $\lfloor \log_2|z'|_a \rfloor = k$, ya que $p < 2^k$ y en consecuencia $2^k < |z'|_a = 2^k + p < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$, se tiene que $z' \notin L$.

Por tanto no hay ninguna factorización admisible y puesto que se incumple el Lema de Iteración el lenguaje no es incontextual.

(1.0 punto)

3. Sean L_1, L_2 y L lenguajes. Sea *RE* la clase de los lenguajes recursivamente enumerables. Pruebe o refute la siguiente implicación:

$(\forall L, L_1, L_2)[(L_1 \in RE \wedge L_2 \in RE \wedge L_1 \cap L_2 = \varnothing \wedge L_1 \cap L \neq \varnothing \wedge L_2 \cap L \neq \varnothing) \Rightarrow L \in RE]$.

El enunciado es falso. Sea L un lenguaje no recursivamente enumerable (por ejemplo, el lenguaje diagonal o el lenguaje complementario del lenguaje universal). L es un lenguaje infinito y por tanto existen dos palabras diferentes que pertenecen al mismo; sean x_1 y x_2 dos palabras en estas condiciones. Sean ahora $L_1 = \{x_1\}$ y $L_2 = \{x_2\}$. Se tiene que $L_1 \in RE \wedge L_2 \in RE \wedge L_1 \cap L_2 = \varnothing \wedge L_1 \cap L \neq \varnothing \wedge L_2 \cap L \neq \varnothing$ y sin embargo no $L \in RE$.

(1.0 punto)

4. Se define la siguiente operación sobre palabras: $P(x) = 0^n x 0^n$ donde $n = |x|_0$. Esta operación se extiende del modo usual a lenguajes, esto es: $P(L) = \{P(x) / x \in L\}$. Pruebe o refute las siguientes implicaciones:

4.1) L es recursivo $\Rightarrow$ P(L) es recursivo.

Veamos que P(L) es recursivo cuando L lo es. Puesto que L es recursivo existe una MT M que se detiene para cada entrada y que reconoce a L. Sea M' la MT constituida, y que opera, como sigue: M' tiene un módulo M" que cuando recibe la entrada z (de M') examina si su número de ceros es (o no) múltiplo de 3, ya que si pertenece a P(L) necesariamente ha de ser así. [Esto se puede llevar a cabo utilizando tres estados: p_0, p_1 y p_2; se inicia el proceso en p_0 y cada vez que se lee un cero se transita al siguiente estado (módulo 3), esto es, se transita de p_0 a p_1, de p_1 a p_2 y de p_2 a p_0. Si al terminar se está en el estado p_0, entonces el número de ceros es múltiplo de 3 , en cualquier otro caso no lo es.] Si no es múltiplo de 3 M' se detiene sin aceptar. Si el número de ceros es múliplo de 3, entonces M" lo divide por 3 [este cociente puede obtenerse incrementando un contador, originalmente a cero, cada vez que se realiza la transición de p_2 a p_0] y examina si existe en la entrada z un prefijo y un sufijo de ceros con esta longitud. Si no los hay M' se detiene sin aceptar. Si los hay los elimina y emite la palabra z' resultante, continuándose como sigue.

Seguidamente arranca la máquina M y le suministra la entrada z'. Procediendo a partir de este punto tal y como lo hace M.

Así M' es una MT de que se detiene para cada entrada y que reconoce a P(L).

(1.0 punto)

4.2) P(L) es recursivo $\Rightarrow$ L es recursivo.

Del apartado anterior se deriva que la operación P es inyectiva, en consecuencia podemos proceder como sigue. Puesto que P(L) es recursivo existe una MT M_1 que se detiene para cada entrada y que lo reconoce. Sea M_1' la MT definida como sigue: Cuando recibe una entrada x calcula su número de ceros n y le añade el prefijo y el sufijo 0^n; la palabra x', así formada, $x' = 0^n x 0^n$, se aplica a M_1 procediendo, a partir de aquí, igual que M_1.

Así M_1' es una MT que se detiene para cada entrada y que reconoce a L.

(1.0 punto)

(II) PROBLEMAS

5. Una gramática incontextual tiene la propiedad P si y sólo si cada consecuente comienza con un símbolo terminal y para cada antecedente no hay dos, o más, consecuentes que comiencen con el mismo terminal. Dé un módulo *Mathematica* que teniendo como entrada una gramática incontextual examine si cumple o no la propiedad P de modo que retorne *True* si se cumple y *False* en caso contrario.

```
testP[G_List]:=Module[{P,producciones,i,consecuentes,j,
                      símbolos,carácter},
    P = True;
    producciones = G[[3]];
    i = 1;
    While[(i ≤ Length[producciones]) && P,
      consecuentes = producciones[[i,2]];
      j = 1;
      símbolos = G[[1]];
      While[(j ≤ Length[consecuentes]) && P,
        If[consecuentes[[j]] == {}, P = False,
          carácter = consecuentes[[j,1]];
          If[MemberQ[símbolos,carácter], P = False,
            AppendTo[símbolos,carácter]
            ]
          ];
        j++
        ];
      i++
      ];
    Return[P]
  ]
```

(2.0 puntos)

6. Dadas las gramáticas

G_1: $S \to 0S0S \mid 11S \mid \lambda$

G_2: $S \to 0AS1 \mid 1AA \mid 0$

$A \to 0SA1 \mid SS \mid \lambda$

G_3: $S \to 0SS1 \mid S10S \mid \lambda$

y la sustitución: $f(0) = L(G_3)$, $f(1) = L(G_2)$. Obtener una gramática incontextual para el lenguaje: $(L(G_1)^r \cup f(L(G_2)))^+$.

$f(0)$:	G'_0:	$S_0 \to 0S_0S_01 \mid S_010S_0 \mid \lambda$
$f(1)$:	G'_1:	$S_1 \to 0A_1S_11 \mid 1A_1A_1 \mid 0$
		$A_1 \to 0S_1A_11 \mid S_1S_1 \mid \lambda$
$L(G_1)^r$:	G'_2:	$S_2 \to S_20S_20 \mid S_211 \mid \lambda$
$f(L(G_2))$:	G'_3:	$S_3 \to S_0A_3S_3S_1 \mid S_1A_3A_3 \mid S_0$
		$A_3 \to S_0S_3A_3S_1 \mid S_3S_3 \mid \lambda$
$L(G_1)^r \cup f(L(G_2))$:	G'_4:	$S_4 \to S_2 \mid S_3$
$(L(G_1)^r \cup f(L(G_2)))^+$:	G':	$S \to S_4S \mid S_4$

(1.5 puntos)

7. Dada la gramática G

$S \to AA \mid BC$ $\qquad$ $A \to 01SB \mid \lambda$

$B \to SAB \mid D \mid 0$ $\qquad$ $C \to 0C1 \mid EC$

$D \to AC \mid BS \mid 0A$ $\qquad$ $E \to 0S \mid A1 \mid \lambda$

obtener una gramática incontextual G' simplificada y en Forma Normal de Chomsky de modo que L(G') = L(G) – {λ}.

Eliminación de los símbolos inútiles.

Símbolos auxiliares generativos: A,B,D,E,S.

$S \to AA$
$A \to 01SB \mid \lambda$
$B \to SAB \mid D \mid 0$
$D \to BS \mid 0A$
$E \to 0S \mid A1 \mid \lambda$

Símbolos alcanzables: S,A,B,D,0,1.

$S \to AA$
$A \to 01SB \mid \lambda$
$B \to SAB \mid D \mid 0$
$D \to BS \mid 0A$

Eliminación de las producciones λ.

Símbolos anulables: A,S.

$S \to AA \mid A$
$A \to 01SB \mid 01B$
$B \to SAB \mid SB \mid AB \mid B \mid D \mid 0$
$D \to BS \mid B \mid 0A \mid 0$

Eliminación de las producciones unitarias.

$S \to AA \mid 01SB \mid 01B$
$A \to 01SB \mid 01B$
$B \to SAB \mid SB \mid AB \mid 0 \mid BS \mid 0A$
$D \to SAB \mid SB \mid AB \mid 0 \mid BS \mid 0A$

Eliminación de los símbolos inútiles.

Todos los símbolos son generativos. El símbolo D es inalcanzable.

$S \to AA \mid 01SB \mid 01B$
$A \to 01SB \mid 01B$
$B \to SAB \mid SB \mid AB \mid 0 \mid BS \mid 0A$

Forma Normal de Chomsky.

$S \rightarrow AA \mid C_0C_1SB \mid C_0C_1B$
$A \rightarrow C_0C_1SB \mid C_0C_1B$
$B \rightarrow SAB \mid SB \mid AB \mid BS \mid C_0A \mid 0$
$C_0 \rightarrow 0$
$C_1 \rightarrow 1$

$S \rightarrow AA \mid C_0X_1 \mid C_0X_3$
$A \rightarrow C_0X_1 \mid C_0X_3$
$B \rightarrow SX_4 \mid SB \mid AB \mid BS \mid C_0A \mid 0$
$X_1 \rightarrow C_1X_2$
$X_2 \rightarrow SB$
$X_3 \rightarrow C_1B$
$X_4 \rightarrow AB$
$C_0 \rightarrow 0$
$C_1 \rightarrow 1$

(1.5 puntos)