EJERCICIOS PROGRAMACION Y METODOS NUMERICOS

Sofia Diaz Martinez,Sharid Silva Garcia, Francisco Rodríguez Rugeles

February 2025

1 Resolución de Ejercicios

A continuación, resolvemos los ejercicios planteados en el módulo:

1.1 Ejercicio 1: Reglas de Propagación del Fuego

Se deben traducir las reglas de propagación en palabras, teniendo en cuenta F signifca en llamas, U no esta quedamo y B es quemado:

- Si $S_n(X) = B$, entonces $S_{n+1}(X) = B$. Esto significa que el árbol en la posicion X en el tiempo n esta quemado, entonces el árbol en la posicion X en el tiempo n+1 esta quemado.
- Si $S_n(X) = F$, entonces $S_{n+1}(X) = B$. Indica que un árbol en la posicion X en el tiempo n esta en llamas, entonces el árbol en la posicion X en el tiempo n+1 esta quemado.
- Si $S_n(X) = U$, entonces $S_{n+1}(X)$ puede ser U o F, dependiendo de si recibe fuego de sus vecinos. Esto significa que un arbol en la posicion X en el tiempo n esta sin llamas, entonces el árbol en la posicion X en el tiempo n+1 puede estar sin quemar o en llamas.

1.2 Ejercicio 2: Probabilidad de No Propagación

Dado que dos *árboles vecinos* (X_1 y X_2) están en llamas, mientras que uno está quemado (X_3) y otro sin quemar (X_4), se busca calcular la probabilidad de que un *árbol central* X permanezca sin quemar o se incendie en el siguiente paso temporal. El fuego se propaga desde un *árbol en llamas* con probabilidad p. Como los incendios en cada *árbol vecino* son eventos independientes, la probabilidad de que el fuego **no** se propague desde un *árbol en llamas* es $(1-p)$. Entonces, la probabilidad de que el *árbol central* X permanezca sin quemar depende de que ambos *árboles en llamas* no propaguen el fuego.

Sea:

- A: Evento de que el fuego de X_1 no se propague a X.

- B: Evento de que el fuego de X_2 no se propague a X.

Dado que estos eventos son independientes, la probabilidad conjunta de que X permanezca sin quemar es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2 \tag{1}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el *árbol central* X se incendie es el complemento de la probabilidad anterior:

$$P(X \text{ en llamas}) = 1 - P(X \text{ sin quemar}) = 1 - (1 - p)^2 \tag{2}$$

1.3 Ejercicio 3: Probabilidad con Tres Vecinos en Llamas

En este ejercicio, analizamos la probabilidad de que un *árbol* X se mantenga sin quemar o se incendie cuando tiene tres vecinos en llamas. La propagación del fuego sigue un modelo probabilístico donde cada vecino en llamas puede transmitir el fuego con una probabilidad p. Dado que X tiene tres vecinos en llamas, la probabilidad de que NO se incendie depende de que ninguno de sus vecinos transmita el fuego. Como los eventos son independientes, la probabilidad de que un vecino no propague el fuego es $(1-p)$. Para tres vecinos, la probabilidad conjunta de que ninguno de ellos propague el fuego es:

$$P(S_{n+1}(X) = U) = (1 - p)^3 \tag{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el *árbol* X se incendie es el complemento de este evento, es decir:

$$P(S_{n+1}(X) = F) = 1 - (1 - p)^3 \tag{4}$$

1.4 Ejercicio 4: Generalización para i Vecinos en Llamas

En este ejercicio, generalizamos el caso del ejercicio anterior considerando un *árbol* X que tiene i vecinos en llamas. Queremos determinar la probabilidad de que X permanezca sin quemar o se incendie dependiendo del número de vecinos que están en llamas. Cada vecino en llamas puede transmitir el fuego con una probabilidad p, y los eventos de propagación son independientes. Para que X permanezca sin quemar, ninguno de los i vecinos debe propagar el fuego. La probabilidad de que un solo vecino no propague el fuego es $(1 - p)$. Dado que los eventos son independientes, la probabilidad conjunta de que ninguno de los i vecinos propague el fuego es:

$$P(S_{n+1}(X) = U) = (1 - p)^i \tag{5}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el *árbol* X se incendie es el complemento de este evento:

$$P(S_{n+1}(X) = F) = 1 - (1 - p)^i \tag{6}$$

1.5 Ejercicio 5: Simulación Computacional

En este ejercicio, se implementa una simulación computacional para modelar la propagación del fuego en un bosque. La propagación sigue un esquema probabilístico, donde la probabilidad de que un árbol se queme en el siguiente instante depende de sus vecinos y de un parámetro de ignición p. La simulación se ejecutará en un modelo de tiempo discreto. A continuación, se presenta un código en Python que permite simular la propagación del fuego en una cuadrícula bidimensional. El usuario puede ingresar la probabilidad de ignición p y el número de iteraciones para observar la evolución del incendio.

El código realiza lo siguiente:

- Inicializa una cuadrícula de árboles con un porcentaje aleatorio de árboles vivos.
- Se establece un punto inicial de fuego en el centro de la cuadrícula.
- Iterativamente, el fuego se propaga a los árboles vecinos con probabilidad p.
- Se visualiza cada paso de la simulación usando colores específicos:
  - Verde: Árbol sin quemar.
  - Naranja: Árbol en llamas.
  - Negro: Árbol quemado.

Mirar el código en GitHub

1.6 Ejercicio 6: Caminos Autorestrictivos

Este ejercicio analiza la propagación del fuego en un bosque representado por una retícula bidimensional $\mathbb{Z}^2$. Dado que el fuego solo puede propagarse a árboles vecinos y no puede regresar a árboles previamente quemados, se modela la propagación como un camino autoevitante.

1.6.1 Inciso a: Primera elección del fuego

El fuego comienza en el origen $(0,0)$ y se propaga a uno de sus cuatro vecinos:

- Norte $(0,1)$
- Sur $(0,-1)$
- Este $(1,0)$
- Oeste $(-1,0)$

Por lo tanto, hay **4 opciones** para la primera propagación del fuego.

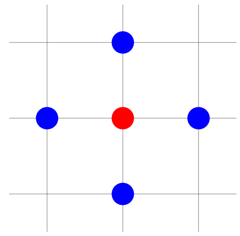

Figure 1: Opciones de propagación en el primer paso.

1.6.2 Inciso b: Segunda elección del fuego

Después de quemar un árbol vecino, el fuego debe propagarse a otro árbol adyacente sin volver al punto de origen. Esto significa que la nueva elección tiene 3 opciones. Por ejemplo, si el fuego se movió a $(1, 0)$ en el primer paso, entonces puede moverse a:

- $(2, 0)$ hacia el Este
- $(1, 1)$ hacia el Norte
- $(1, -1)$ hacia el Sur

Por lo tanto, hay **3 opciones** en este paso.

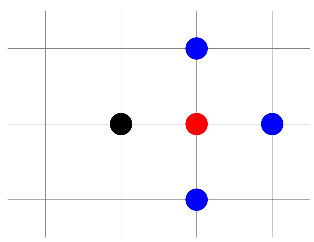

Figure 2: Opciones de propagación en el segundo paso.

1.6.3 Inciso c: Tercera elección del fuego

En el tercer paso, el fuego nuevamente debe propagarse sin volver a los árboles previamente quemados. Siguiendo el mismo razonamiento que en el inciso b, hay **3 opciones** para este tercer movimiento.

1.7 Ejercicio 7: Caminos de Longitud Fija

El ejercicio 7 analiza la cantidad de caminos autoevitantes en una retícula bidimensional $\mathbb{Z}^2$ de longitud fija. El objetivo es determinar cuántos caminos distintos puede seguir el fuego al propagarse en función de la cantidad de pasos.

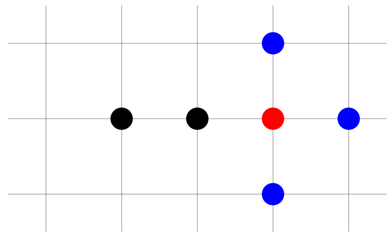

Figure 3: Opciones de propagación en el tercer paso.

1.7.1 Caminos Autoevitantes para $n = 2$

En el primer paso, el fuego puede moverse en 4 direcciones (norte, sur, este, oeste). En el segundo paso, se mueve nuevamente pero sin regresar al punto anterior, por lo que tiene 3 opciones.

$$C_2 = 4 \times 3 = 12 \tag{7}$$

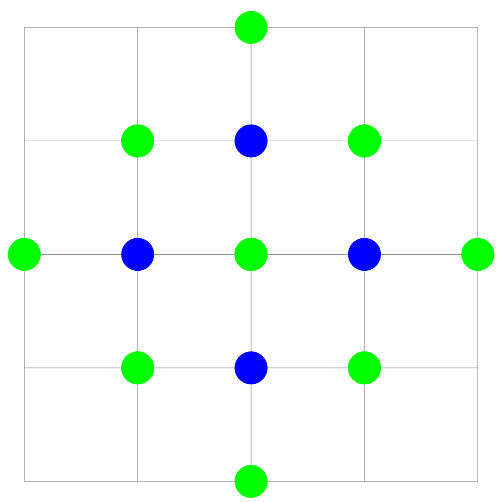

Figure 4: Las 12 posibles trayectorias después de dos pasos.

1.7.2 Caminos Autoevitantes para $n = 3$

Después del segundo paso, en el tercer paso el fuego tiene nuevamente 3 opciones en cada una de las trayectorias previas.

$$C_3 = 4 \times 3 \times 3 = 36 \tag{8}$$

$$C_3 = 4 \times 3 \times 3 = 36 \tag{9}$$

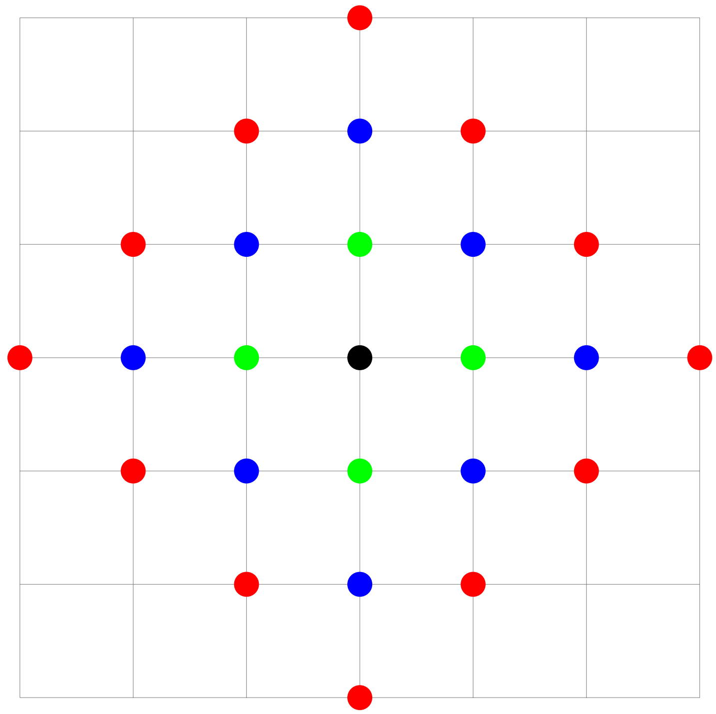

Figure 5: Las posiciones alcanzadas después de uno, dos y tres pasos.

1.8 Ejercicio 8: Probabilidad de Expansión del Fuego

La probabilidad de propagación del fuego se modela con la serie geométrica:

$$Q \leq 4p \sum_{n=1}^{N} (3p)^{n-1} \tag{10}$$

donde:

- p es la probabilidad de propagación en cada paso,
- N es el número total de pasos considerados,
- la serie representa la acumulación de probabilidades en cada nivel de expansión.

Definimos $x = 3p$. Entonces, sabemos que:

$$Q \leq 4p \sum_{n=N}^{\infty} (3p)^{n-1}$$

Reconocemos que la sumatoria es una serie geométrica infinita de la forma:

$$\sum_{n=N}^{\infty} r^{n-1}$$

donde $r = 3p$. La fórmula para la suma de una serie geométrica desde un índice N hasta infinito es:

$$\sum_{n=N}^{\infty} r^{n-1} = \frac{r^{N-1}}{1-r}, \quad \text{para } |r| < 1.$$

Aplicando esto a nuestra expresión, obtenemos:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (3p)^{n-1} = \frac{(3p)^{N-1}}{1-3p}.$$

Multiplicando por $4p$:

$$Q \leq 4p \cdot \frac{(3p)^{N-1}}{1-3p}.$$

Por lo tanto, el resultado final es:

$$Q \leq 4p\frac{(3p)^{N-1}}{1-3p}.$$

1.9 Ejercicio 9: Límite de Expansión

En este ejercicio, analizamos el comportamiento del límite de Q cuando $N \to \infty$. A partir de la expresión obtenida en el ejercicio anterior:

$$Q \leq 4p \sum_{n=N}^{\infty} (3p)^{n-1} \tag{11}$$

debemos evaluar el límite de esta expresión cuando $N \to \infty$ y determinar en qué condiciones $Q \to 0$.

Sabemos que la suma de una serie geométrica infinita con razón $r = 3p$ es:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (3p)^{n-1} = \frac{(3p)^N}{1-3p}, \quad \text{para } p < \frac{1}{3}. \tag{12}$$

Multiplicando por $4p$, obtenemos:

$$Q \leq 4p \cdot \frac{(3p)^N}{1-3p}. \tag{13}$$

Tomamos el límite cuando $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} Q \leq \lim_{N\to\infty} 4p \cdot \frac{(3p)^N}{1-3p}. \tag{14}$$

Si $p < \frac{1}{3}$, entonces $(3p)^N \to 0$ cuando $N \to \infty$, lo que implica que:

$$\lim_{N\to\infty} Q = 0. \tag{15}$$

Sin embargo, si $p \geq \frac{1}{3}$, la serie no converge a 0, lo que indica que Q no está acotado.

Por lo tanto, cuando $p < \frac{1}{3}$, la probabilidad de expansión del fuego tiende a 0 a medida que $N \to \infty$, lo que significa que el incendio se extinguirá eventualmente. Por el contrario, si $p \geq \frac{1}{3}$, la propagación del fuego se mantiene indefinidamente.

1.10 Ejercicio 10: Límite Inferior de p_c

Queremos determinar el valor del umbral crítico p_c, definido como:

$$p_c = \inf\{p : P(E_\infty) > 0\}.$$

Paso 1: Interpretación de la Definición

La cantidad $P(E_\infty)$ representa la probabilidad de que ocurra una expansión infinita del proceso en cuestión. Para que esto sea posible, la probabilidad de que el proceso continúe indefinidamente debe ser positiva.

El umbral p_c se define como el menor valor de p para el cual la expansión del proceso se vuelve posible con probabilidad no nula.

Paso 2: Relación con la Expansión del Proceso

Sabemos por los ejercicios anteriores que:

$$Q \leq 4p\frac{(3p)^{N-1}}{1-3p}.$$

Cuando $p < \frac{1}{3}$, la serie geométrica converge, lo que implica que la propagación del proceso es controlada. Sin embargo, si $p \geq \frac{1}{3}$, la expresión en el límite deja de ser finita, lo que sugiere un crecimiento ilimitado.

Paso 3: Determinación del Valor Crítico

Para que la expansión ocurra indefinidamente con probabilidad positiva, se requiere que la propagación del fuego no esté acotada. Esto sucede cuando la serie deja de converger, lo que ocurre cuando:

$$3p \geq 1 \Rightarrow p \geq \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, el valor crítico de p_c es:

$$p_c = \frac{1}{3}.$$

El umbral crítico p_c indica el punto a partir del cual la expansión del proceso se vuelve posible indefinidamente. Si $p \geq p_c$, el proceso se propaga sin límite; si $p < p_c$, la propagación es finita y eventualmente se detiene.

1.11 Ejercicio 11: Longitud Mínima de una Frontera de Fuego

Determinar el menor número posible N de aristas en la frontera B.

Para encontrar el mínimo número de aristas en la frontera B, consideremos el conjunto inicial I de M sitios adyacentes alineados en una fila:

$$I = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (M,0)\}.$$

La propagación del fuego genera un conjunto J de sitios quemados, donde $I \subset J$.

Para determinar el número mínimo de aristas en la frontera B:

1. Cada punto en J está rodeado por un cuadrado unitario en la retícula dual W_2. 2. La frontera B se forma por aristas cerradas en W_2. 3. Para rodear completamente la región quemada, la frontera debe cubrir la parte superior e inferior de la fila inicial I, además de cerrar los extremos.

Dado que I tiene $M+1$ árboles en fila, se requieren:

- $M+2$ aristas en la parte superior, - $M+2$ aristas en la parte inferior, - 2 aristas adicionales para cerrar los extremos izquierdo y derecho.

Por lo tanto, el número mínimo de aristas en la frontera B es:

$$N = 2(M+1) + 2 = 2M + 4.$$

1.12 Ejercicio 12: Probabilidad de Frontera Cerrada

Dado un contorno B de longitud k, donde $k \geq N$, determinar la probabilidad de que todas las k aristas sean cerradas.

La frontera B está formada por k aristas en la retícula dual W_2, y cada arista tiene una probabilidad de estar cerrada de $1-p$. Dado que cada una de estas aristas es independiente, la probabilidad de que todas las k aristas sean cerradas es simplemente el producto de las probabilidades individuales:

$$P(\text{todas las } k \text{ aristas cerradas}) = (1-p)^k. \tag{16}$$

Esta expresión nos da la probabilidad de que la frontera B esté completamente cerrada, evitando que el fuego se propague más allá de J.

1.13 Ejercicio 13: Probabilidad de una Frontera Abierta

Si $p > \frac{2}{3}$, demostrar que $0 \leq 3(1-p) < 1$, y analizar qué ocurre con la probabilidad R cuando N aumenta.

Para comenzar, definimos la expresión clave en el problema:

$$3(1-p). \tag{17}$$

Si $p > \frac{2}{3}$, entonces:

$$1 - p < 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \tag{18}$$

Multiplicando ambos lados por 3:

$$3(1-p) < 3 \times \frac{1}{3} = 1. \tag{19}$$

Además, como $p \leq 1$, tenemos que $1 - p \geq 0$, lo que implica:

$$0 \leq 3(1-p). \tag{20}$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$0 \leq 3(1-p) < 1. \tag{21}$$

Ahora, analizamos el comportamiento de la probabilidad R conforme N aumenta. Sabemos que:

$$R = (1-p) \sum_{k=N}^{\infty} k[3(1-p)]^{k-1}. \tag{22}$$

Dado que $0 \leq 3(1-p) < 1$, la serie geométrica correspondiente converge y, cuando N crece, la suma de los términos restantes se aproxima a cero. Como resultado:

$$\lim_{N \to \infty} R = 0. \tag{23}$$

Es decir, al aumentar N, la probabilidad R disminuye progresivamente hasta acercarse a cero.

1.14 Ejercicio 14: Límite Superior de p_c

Dado que $p > \frac{2}{3}$, demostrar que la probabilidad de propagación infinita del fuego, $P(E_\infty)$, es mayor que 0 y concluir qué se puede decir sobre el valor de la probabilidad crítica p_c.

Sabemos que la probabilidad de existencia de una frontera cerrada B en la retícula dual W_2 está dada por:

$$R = \sum_{k=N}^{\infty} k[3(1-p)]^{k-1}(1-p). \tag{24}$$

En el ejercicio anterior (Ejercicio 13), demostramos que si $p > \frac{2}{3}$, entonces $0 \leq 3(1-p) < 1$, lo que implica que la serie geométrica converge y que $R \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Si la probabilidad de que exista una frontera cerrada B alrededor del conjunto J es menor que 1, entonces hay una probabilidad positiva de que el fuego se propague indefinidamente, es decir:

$$P(E_\infty) = 1 - R > 0. \tag{25}$$

Por lo tanto, para valores de $p > \frac{2}{3}$, la probabilidad de propagación infinita del fuego es positiva, lo que significa que la probabilidad crítica p_c debe satisfacer:

$$p_c \leq \frac{2}{3}. \tag{26}$$

Esta cota superior complementa la cota inferior obtenida anteriormente, donde se demostró que $p_c \geq \frac{1}{3}$. Se sabe que el valor exacto de p_c es $\frac{1}{2}$, como fue probado por Kesten (1980).