[30] Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal con desviación estándar poblacional de 25 horas. Se toma una muestra aleatoria de 16 focos, la cual resulta tener una duración media de 1014 horas.

(a) (10 puntos) Confeccione un intervalo de confianza del 95 % para la duración media.

(b) (10 puntos) ¿Es posible suponer que la duración media difiere de las 1100 horas, indicadas por el fabricante? Utilice un nivel de significancia del 5 %. Justifique.

(c) (10 puntos) ¿Qué tamaño muestral se requiere para estimar la duración media de los focos, con una confianza del 98.12 % y una amplitud de 4 horas?

Solución: Sea X : { Durancíón, en horas, de un foco de 75 watts }. Por enunciado $X \sim N(\mu, 25^2)$. El intervalo de confianza pedido está dado por:

$$\left[\overline{X} \mp Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En donde $\alpha = 0{,}05$ y $Z_{1-\alpha/2} = 1{,}96$. Luego, reemplazando con la información de enunciado, se tiene que el intervalo pedido es:

$$IC_{95\,\%}(\mu) = [1001{,}8; 1026{,}3]$$

Por enunciado, se tiene la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0 : \mu = 1100$$
$$H_1 : \mu \neq 1100$$

Por lo que, utilizando el estadístico de prueba Z rechazaremos la hipótesis nula si:

$$Z \leq -1,96 \qquad \text{o si} \qquad Z \geq 1,96$$

Luego, el valor de nuestro estadístico está dado por: $Z = -13{,}76$. Utilizando el intervalo de confianza del item a), y dado que la amplitud es 4 horas. Se tiene:

$$2Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4$$

En donde $\alpha = 0{,}0188$ y $Z_{1-\alpha/2} = 2{,}35$. Luego, despejando para n y usando el hecho que $\sigma = 25$, se tiene que el tamaño de muestra pedido es: $n = 862,89 \approx 863$