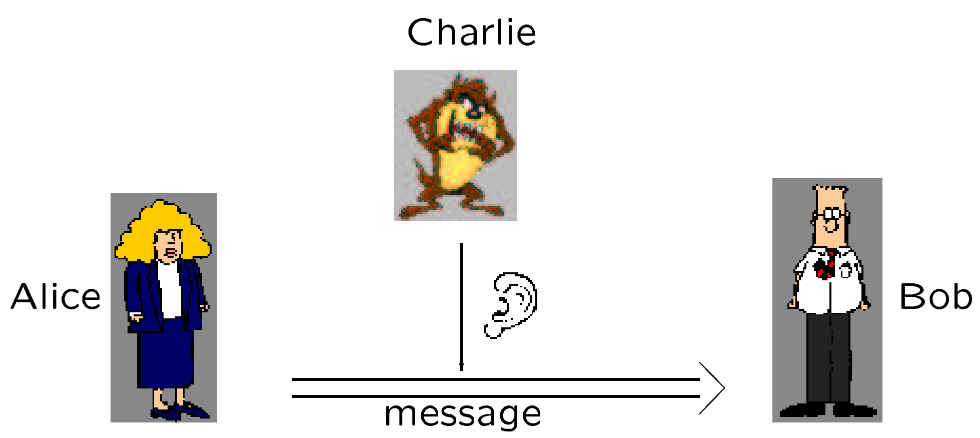
La cryptographie
ou les mathématiques au service de
la protection de l'information

Anne Canteaut

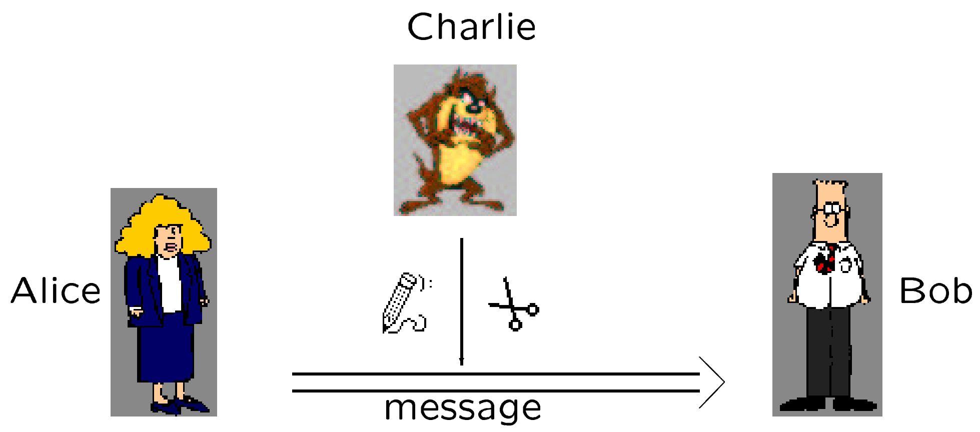
INRIA-projet CODES
Domaine de Voluceau
78153 Le Chesnay
Anne.Canteaut@inria.fr
http://www-rocq.inria.fr/codes/Anne.Canteaut/

Attaques passives



menace contre la **confidentialité de l'information** :

une information sensible parvient à une personne autre que son destinataire légitime.



menace contre l'**intégrité de l'information** :

l'information reçue est interprétée comme provenant d'une personne autre que son véritable auteur.

Différents types d'attaques actives

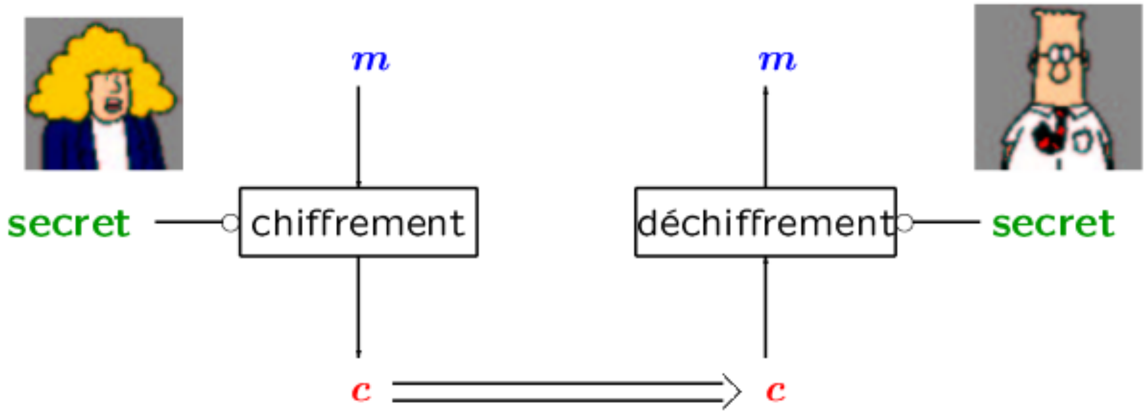
- usurpation d'identité (de l'émetteur ou du récepteur)
- altération des données = modification du contenu du message
- destruction du message
- retardement de la transmission
- répétition du message
- répudiation du message = l'émetteur nie avoir envoyé le message

... -19^{e} s.	transpositions et substitutions alphabétiques
1883	*La cryptographie militaire* [Kerckhoffs]
	→ formalisation des systèmes de chiffrement
1926	*Cipher printing telegraph systems for secret wire and radio telegraphic communications* [Vernam]
	→ chiffrement de Vernam
1939-44	Enigma et les "bombes" de Bletchley Park
1949	*Communication theory for secrecy systems* [Shannon]
	→ notion de sécurité inconditionnelle
1973-77	standardisation du DES
1976	*New directions in cryptography* [Diffie - Hellman]
	→ invention de la cryptographie à clef publique
1978	*A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems* [Rivest-Shamir-Adleman]
	→ invention du RSA

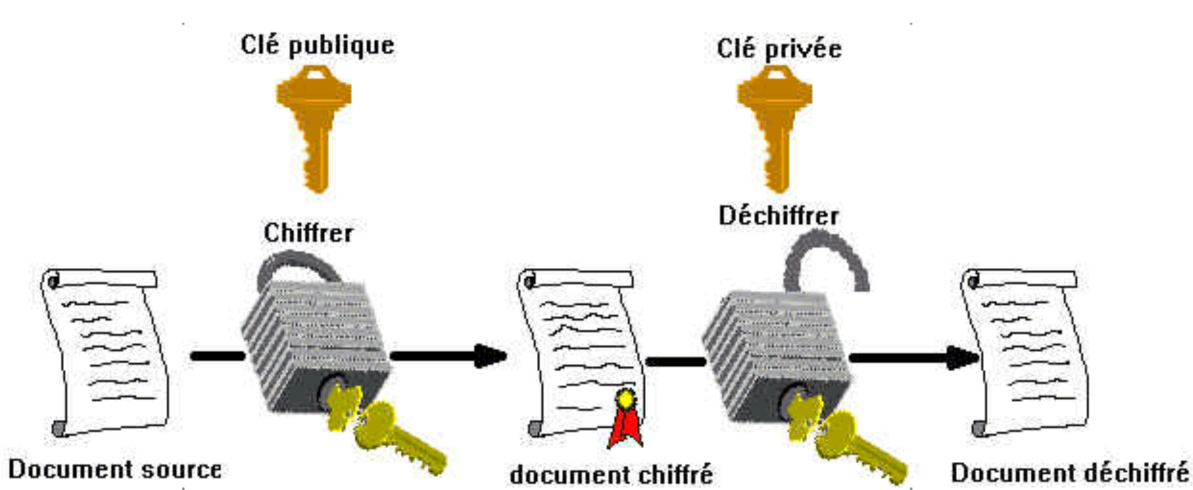
La cryptographie à clef secrète

Principe :

Emetteur et destinataire partagent un **même secret** qui leur permet de chiffrer et de déchiffrer.



Les deux personnes ont partagé un secret, qui sert aussi bien pour chiffrer que pour déchiffrer.



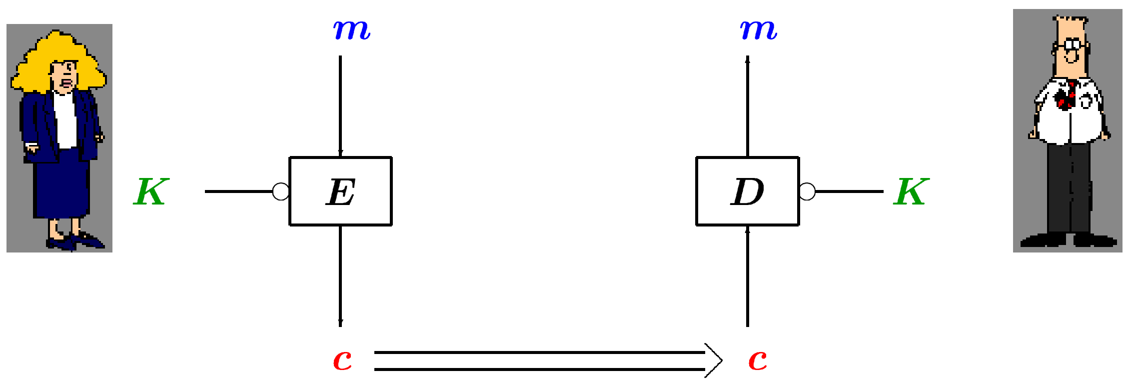
Principes de Kerckhoffs (1883)

“Il faut bien distinguer entre un système d’écriture chiffré, imaginé pour un échange momentané de lettres entre quelques personnes isolées, et une méthode de cryptographie destinée à régler pour un temps illimité la correspondance des différents chefs d’armée entre eux. [...]

Dans le second cas, [...] il faut que le système n’exige pas le secret, et qu’il puisse sans inconvénient tomber entre les mains de l’ennemi. [...]

Si l’Administration veut mettre à profit tous les services que peut rendre un système de correspondance cryptographique bien combiné, elle doit absolument renoncer aux méthodes secrètes, et établir en principe qu’elle n’acceptera qu’un procédé qui puisse être enseigné au grand jour dans nos écoles militaires, que nos élèves seront libres de communiquer à qui leur plaira.”

Tous les détails du système, notamment les procédés de chiffrement et de déchiffrement, sont connus sauf la valeur de la clef.
La sécurité repose uniquement sur le secret de la clef.



Attaque d'un système de chiffrement

- L'attaquant connaît le texte chiffré c.
  $\Longrightarrow$ il veut retrouver le texte clair m ou mieux, la clef K.

- L'attaquant connaît des couples (texte clair, texte chiffré).
  $\Longrightarrow$ il veut retrouver la clef K ou au moins, pouvoir décrypter d'autres messages.

Substitution.

Remplacement des lettres du clair par d'autres lettres ou d'autres symboles en respectant l'ordre.

Système de Jules César

$$\begin{array}{rccl} E_K : & \{0,1,\ldots,25\} & \longrightarrow & \{0,1,\ldots,25\} \\ & i & \longmapsto & (i+K) \bmod 26 \end{array}$$

$K = 3$, BRUTUS $\longmapsto$ EUXWXV

Substitutions alphabétiques

La clef est un mot quelconque. $K =$ CRYPTANALYSE
On supprime les lettres en double : CRYPTANLSE
On rajoute à la suite, dans l'ordre alphabétique, toutes les lettres qui ne sont pas dans le mot.
On les écrit dans un tableau 3 * 9

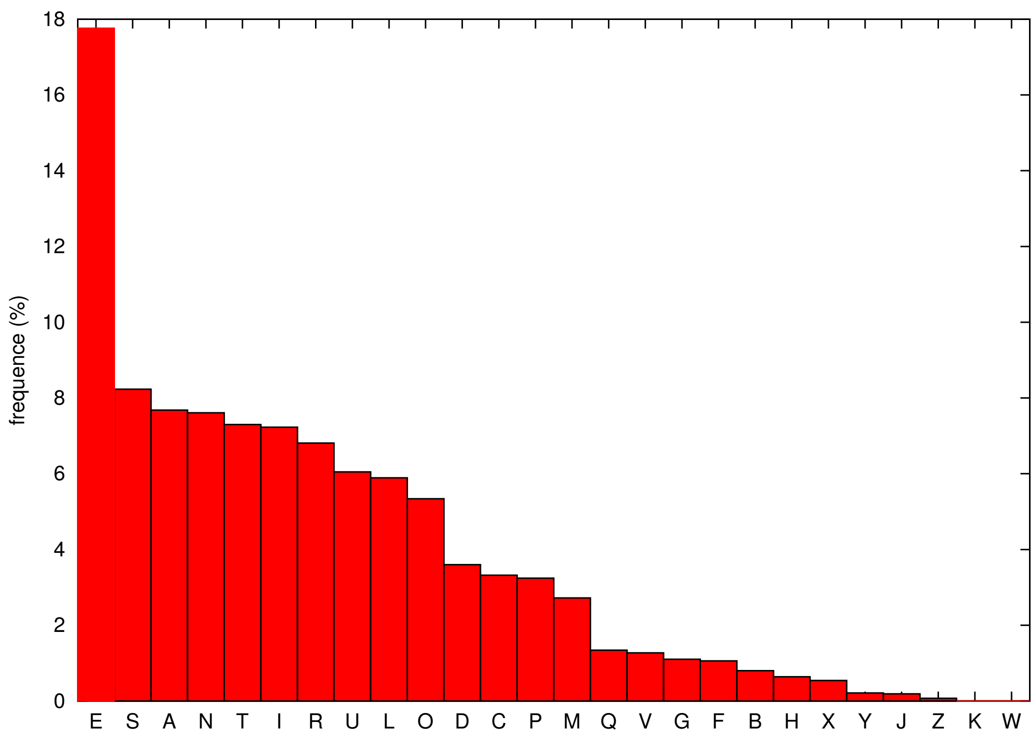
C	R	Y	P	T	A	N	L	S
E	B	D	F	G	H	I	J	K
M	O	Q	U	V	W	X	Z	

Le tableau lu colonne par colonne donne le nouvel alphabet.

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$f(x)$	C	E	M	R	B	O	Y	D	Q	P	F	U	T	G	V	A	H	W	N	I	X	L	J	Z	S	K

nvxlbgi avxw n ctxnbw ubn dvttbn r bhxqacyb
awbggbgi rbn cueciwvn lcnibn vqnbcxz rbn tbwn
hxq nxqlbgi qgrvubgin mvtacygvgn rb lvscyb
ub gclqwb yuqnncgi nxw ubn yvxoowbn ctbwn
c abqgb ubn vgi qun rbavnbn nxw ubn aucgmdbn
hxb mbn wvqn rb u ckxw tcucrwvqin bi dvgibxz
ucqnnbgi aqibxnbtbgi ubxwn ywcgrbn cqubn eucgmdbn
mvttb rbn clqwvgn iwcqgbw c mvib r bxz
mb lvscybxw cqub mvttb qu bni ycxmdb bi lbxub
uxq gcyxbwb nq ebcx hx qu bni mvtqhxb bi ucqr
u xg cycmb nvg ebm clbm xg ewxubyxbxub
u cxiwb tqtb bg evqicgi u qgoqwtb hxq lvucqi
ub avbib bni nbteuceub cx awqgmb rbn gxbbn
hxq dcgib uc ibtabib bi nb wqi rb u cwmdbw
bzqub nxw ub nvu cx tquqbx rbn dxbbn
nbn cqubn rb ybcgi u btabmdbgi rb tcwmdbw

Fréquence des lettres en Français



Dans le chiffré :

B	N	C	U	X	Q	G	I	W	V
18,7	9,91	7,78	6,90	6,72	6,37	5,84	5,84	5,30	4,60

En Français :

E	S	A	N	T	I	R	U	L	O
17,8	8,23	7,68	7,61	7,30	7,23	6,81	6,05	5,89	5,34

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow E \\ N &\longrightarrow S \\ C &\longrightarrow A \end{aligned}$$

svxlegi avxw s atxsew ues dvttes r ehxqaaye
aweggegi res aueaiwvs lasies vqseaxz res tews
hxq sxqlegi qgrvuegis mvtaaygvgs re lvsaye
ue galqwe yuqssagi sxw ues yvxoowes atews
a aeqge ues vgi qus reavses sxw ues auagmdes
hxe mes wvqs re u akxw tauarwvqis ei dvgiexz
uaqssegi aqiexsetegi uexws ywagres aques euagmdes
mvtte res alqwvgs iwaqgew a mvie r exz
me lvsayexw aque mvtte qu esi yaxmde ei lexue
uxq gayxewe sq eeax hx qu esi mvtqhxe ei uaqr
u xg ayame svg eem alem xg ewxueyxexue
u axiwe tqte eg evqiagi u qgoqwte hxq lvuaqi
ue aveie esi seteuaeue ax awqgme res gxees
hxq dagie ua ietaeie ei se wqi re u awmdew
ezque sxw ue svu ax tquqex res dxees
ses aques re yeagi u etaemdegi re tawmdew

Bigrammes les plus fréquents dans le chiffré :

ES	UE	GI	RE	EG	EX	IE	SE	QU	TE	UA	EW	AG	AQ	HX	XW
25	17	13	12	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7

Bigrammes les plus fréquents en Français :

ES	LE	EN	DE	RE	NT	ON	ER	TE	SE	ET	EL	QU	AN	NE	OU	AI

$$U \longrightarrow L$$
$$R \longrightarrow D$$
$$G \longrightarrow N$$
$$Q \longrightarrow I$$

Fréquence des bigrammes

Bigrammes les plus fréquents dans le chiffré :

ES	LE	NI	DE	EN	EX	IE	SE	IL	TE	LA	EW	AN	AI	HX	XW
25	17	13	12	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7

Bigrammes les plus fréquents en Français :

ES	LE	EN	DE	RE	NT	ON	ER	TE	SE	ET	EL	QU	AN	NE	OU	AI

$$I \longrightarrow T$$

svxlent avxw s atxsew les dvttes d ehxiaaye
awennent des aleatwvs lastes viseaxz des tews
hxi sxilent indvlents mvtaaynvns de lvsaye
le naliwe ylissant sxw les yvxoowes atews
a aeine les vnt ils deavses sxw les alanmdes
hxe mes wvis de l akxw taladwvits et dvntexz
laissent aitexsetent lexws ywandes ailes elanmdes
mvtte des aliwvns twainew a mvte d exz
me lvsayexw aile mvtte il est yaxmde et lexle
lxi nayxewe si eeax hx il est mvtihxe et laid
l xn ayame svn eem alem xn ewxleyxexle
l axtwe tite en evitant l inoiwte hxi lvlait
le avete est setelaele ax awinme des nxees
hxi dante la tetaete et se wit de l awmdew
ezile sxw le svl ax tiliex des dxees
ses ailes de yeant l etaemdent de tawmdew

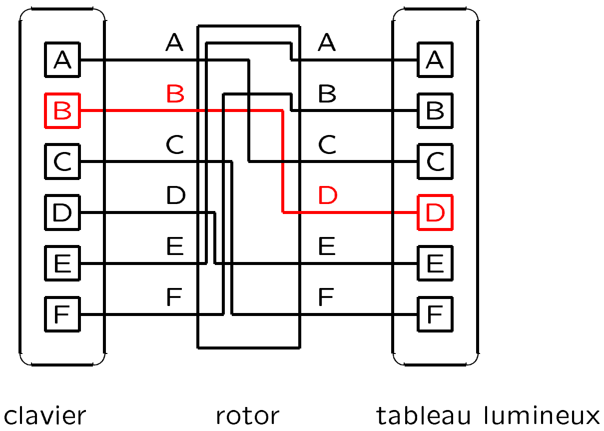
Quelques mots du chiffré :

indvlent vnt	$V \longrightarrow O$
oiseaxz	$X \longrightarrow U$ $Z \longrightarrow X$
a aeine	$A \longrightarrow P$
leuws	$W \longrightarrow R$
taladroits	$T \longrightarrow M$
yrandes	$Y \longrightarrow G$

soulent pour s amuser les dommes d ehuipage
prennent des aleatros lastes oiseaux des mers
hui suilent indolents mompagnons de losage
le nalire glissant sur les gouoores amers
a peine les ont ils deposes sur les planmdes
hue mes rois de l akur maladroits et donteux
laissent piteusement leurs grandes ailes elanmdes
momme des alirons trainer a mote d eux
me losageur aile momme il est gaumde et leule
lui naguere si eeau hu il est momihue et laid
l un agame son eem alem un erulegueule
l autre mime en eoitant l inoirme hui lolait
le poete est semelaele au prinme des nuees
hui dante la tempete et se rit de l armder
exile sur le sol au milieu des duees
ses ailes de geant l empemdent de marmder

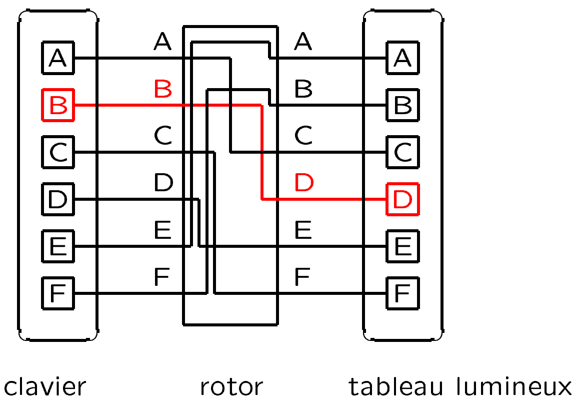
Enigma

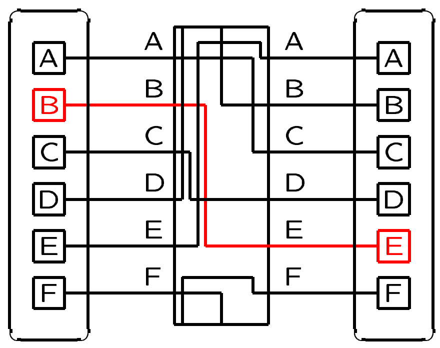
source : http://www.nsa.gov/museum/enigma.html



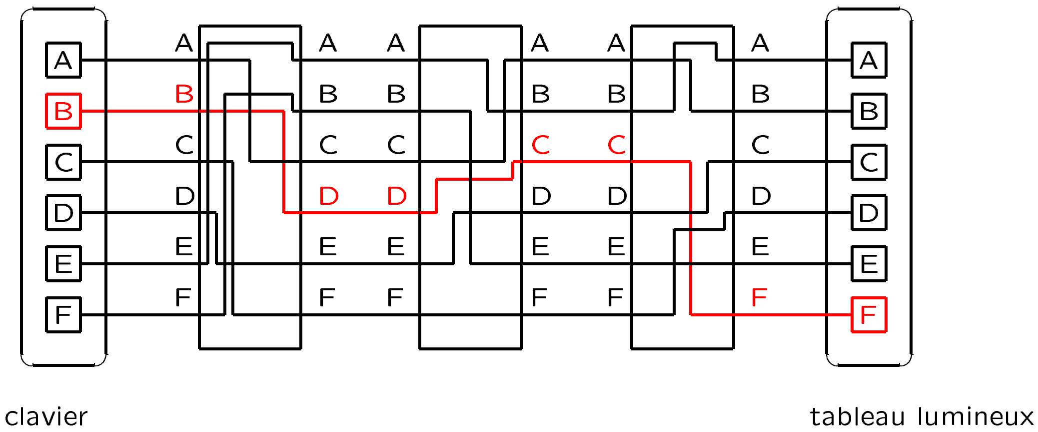
⟶ Substitution alphabétique.

On tourne le rotor d'une position après chaque lettre



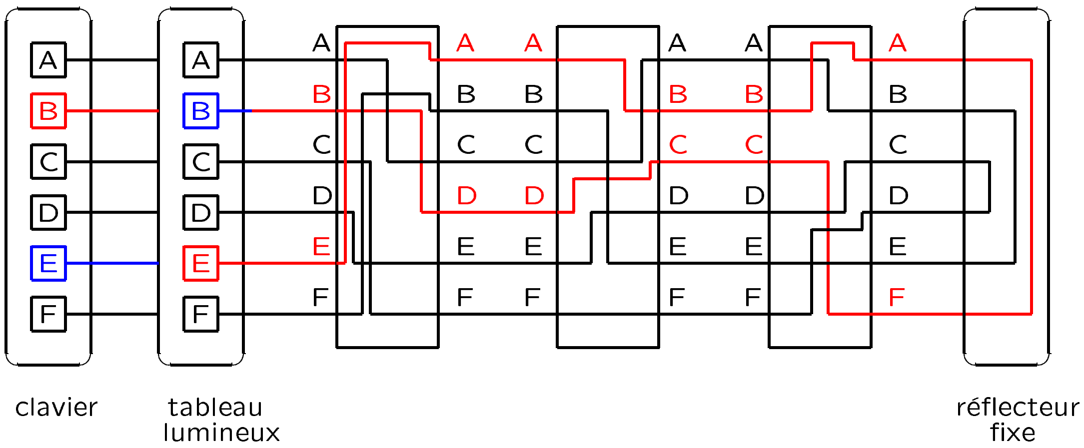


⟶ Substitution avec 26 alphabets différents.



$\longrightarrow$ Substitution avec $\mathbf{26^3}$ alphabets différents.

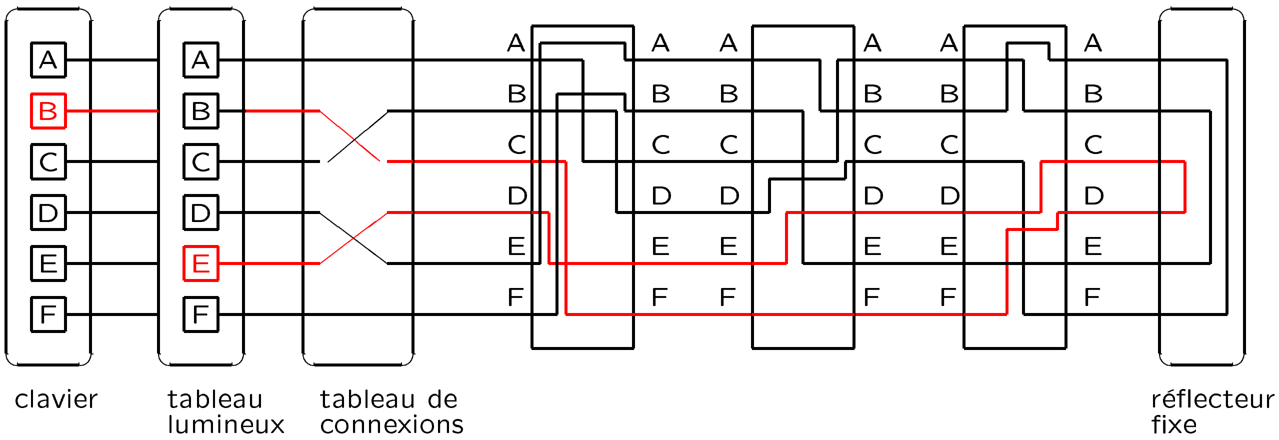
Machine à 3 rotors avec réflecteur



$\longrightarrow$ Le chiffrement et le déchiffrement sont les mêmes opérations.

Clef secrète : ordre des rotors + positions de départ des rotors.

$$\mathbf{6} \times (\mathbf{26})^{\mathbf{3}} = \mathbf{105\ 456} \text{ possibilités.}$$



Clef secrète :

ordre des rotors + positions des rotors + 6 couples de lettres transposées.

$$6 \times (26)^3 \times 100\ 391\ 791\ 500 \simeq 10^{13} \text{ possibilités.}$$

Enigma au début de la guerre

Nombre de clefs secrètes

3 rotors choisis parmi 5	10 possibilités
Ordre des trois rotors	6 possibilités
Position initiale des rotors	$26^3 = 17\ 576$ possibilités
Tableau de connexions (10 paires de lettres)	$150\ 738\ 274\ 937\ 250$ possibilités

$$\simeq 10^{20} \text{ possibilités}$$

Idée d'attaque [Rejewski 1939]

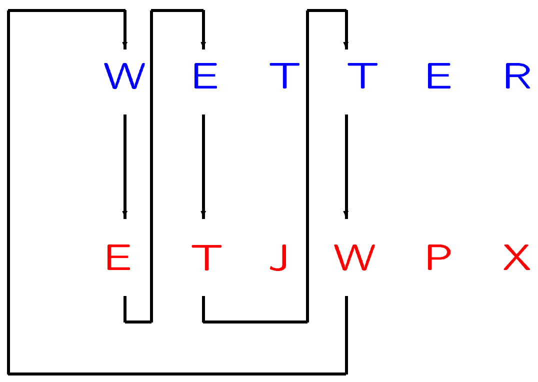
Dissocier la recherche des positions des rotors de celle des connexions en exploitant le fait que certains messages clairs sont connus.

Principe.

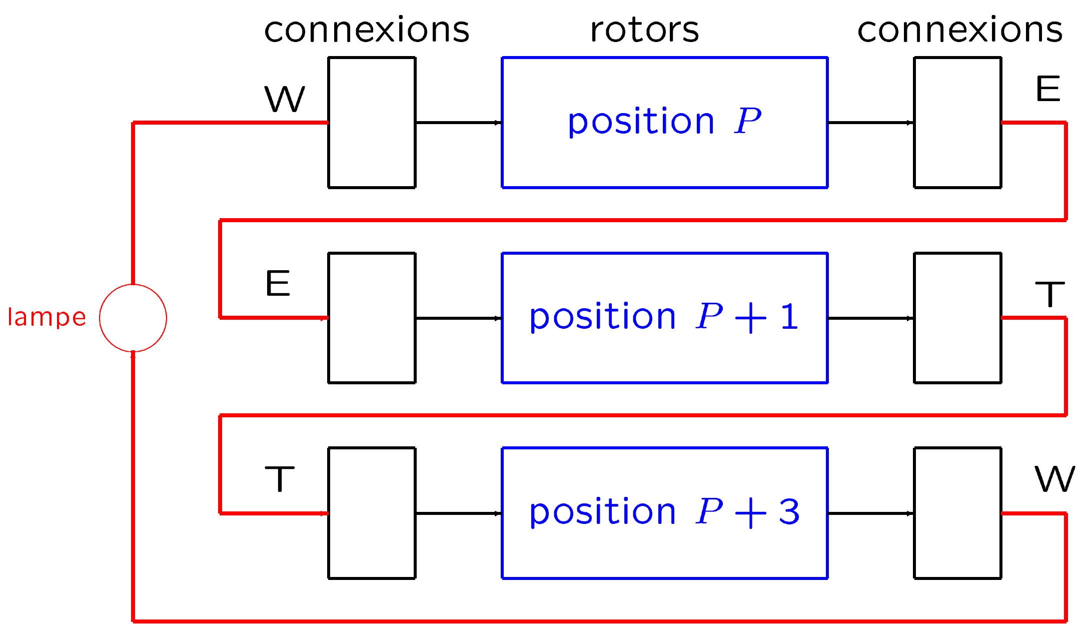
On dispose d'un couple clair-chiffré.

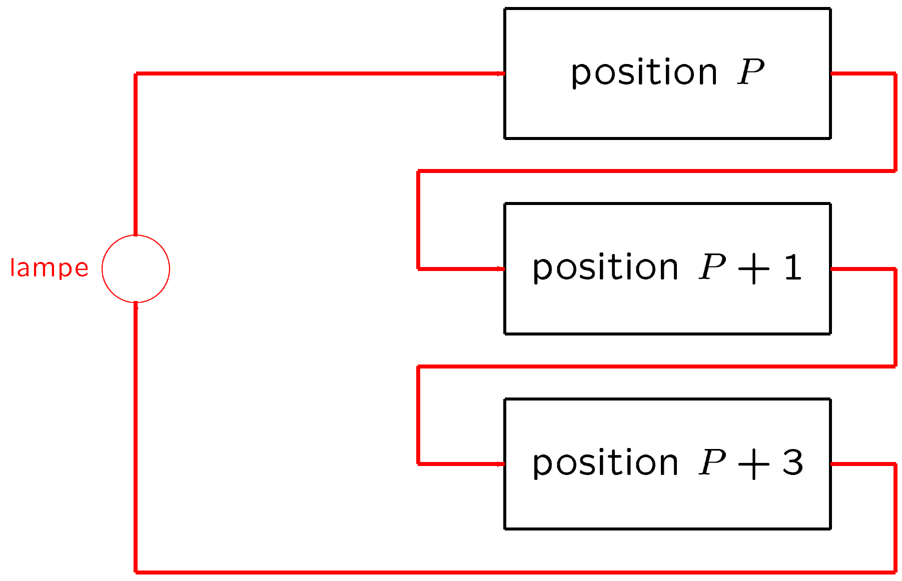
clair : WETTER   chiffré : ETJWPX

On recherche des "boucles" au sein de ce message.



Recherche de la position des rotors





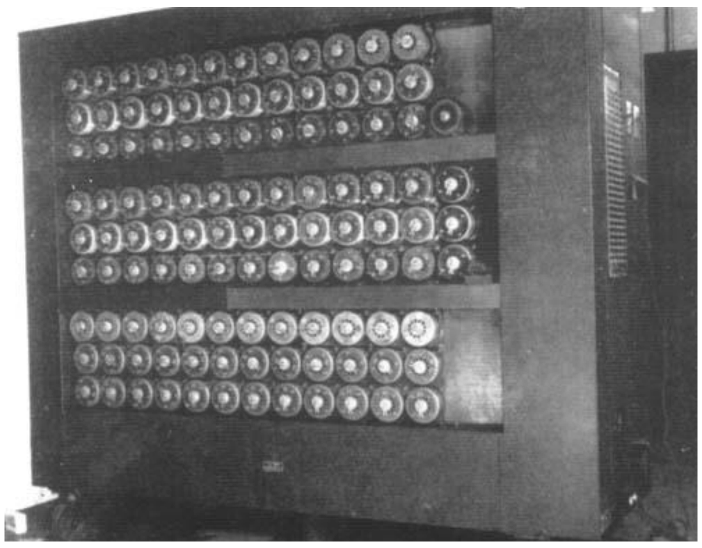
Il suffit d'essayer les $\mathbf{26^3 = 17\ 576}$ positions possibles pour chacun des 60 choix de rotors.

$\longrightarrow$ 1 054 560 possibilités.

Les bombes de Turing

Automatisation de la recherche de la clef secrète.

20 280 essais par seconde pour les plus rapides (50 secondes pour retrouver la clef).



source : `http://www.jharper.demon.co.uk/bombe1.htm`

Sécurité inconditionnelle

La connaissance du message chiffré n'apporte aucune information sur le message clair.

$\longrightarrow$ La seule attaque possible est la recherche exhaustive de la clef secrète.

Un système incassable : le chiffrement de Vernam (1926)

clair	s	y	s	t	e	m	e	i	n	c	a	s	s	a	b	l	e
	18	24	18	19	4	12	4	8	13	2	0	18	18	0	1	11	4
clef	g	v	w	q	t	y	s	k	r	g	s	e	d	l	w	p	m
	6	21	22	16	19	24	18	10	17	6	18	4	3	11	22	15	12
chiffré	24	19	14	9	23	10	22	18	4	8	18	22	21	11	23	0	16
	y	t	o	j	x	k	w	s	e	i	s	w	v	l	x	a	q

La clef est une suite aléatoire de lettres aussi longue que le clair.

clair s y s t e m e i n c a s s a b l e
clef g v w q t y s k r g s e d l w p m
chiffré y t o j x k w s e i s w v l x a q

clair a u c u n e i n f o r m a t i o n
clef y z m p k g j k r d e f j l e s c
chiffré y t o j x k w s e i s w v l x a q

Un même message chiffré peut correspondre à n'importe quel texte clair ayant le même nombre de lettres.

La sécurité en pratique

Sécurité inconditionnelle [Shannon 49]

Pour qu'un système soit inconditionnellement sûr, il faut que la clef secrète soit aussi longue que le texte clair.

⟶ Tous les autres systèmes sont théoriquement cassables.

Sécurité pratique

La connaissance du message chiffré (et de certains couples clairs-chiffrés) ne permet de retrouver ni la clef ni le message clair en un temps humainement raisonnable.

$\mathcal{K}$ = nombre de clefs possibles.

Retrouver la clef nécessite en moyenne $\mathcal{K}/2$ essais.

Qu'est-ce qu'un temps humainement raisonnable ?

DES (standard U.S. de chiffrement 1977)
clef secrète : 56 bits $\longrightarrow 2^{56} \simeq 10^{17}$ possibilités.

39 jours sur 10 000 Pentium (réalisé en 1997)
2,5 jours sur une machine de moins de \$ 250 000 (1998)
Pour 1 million de \$, l'attaque prend 35 minutes.
Pour 10 millions de \$, l'attaque prend 3,5 minutes.

Actuellement, le nombre de clefs possibles doit être au moins de $2^{128} \simeq 10^{38}$ (clef de 128 bits)

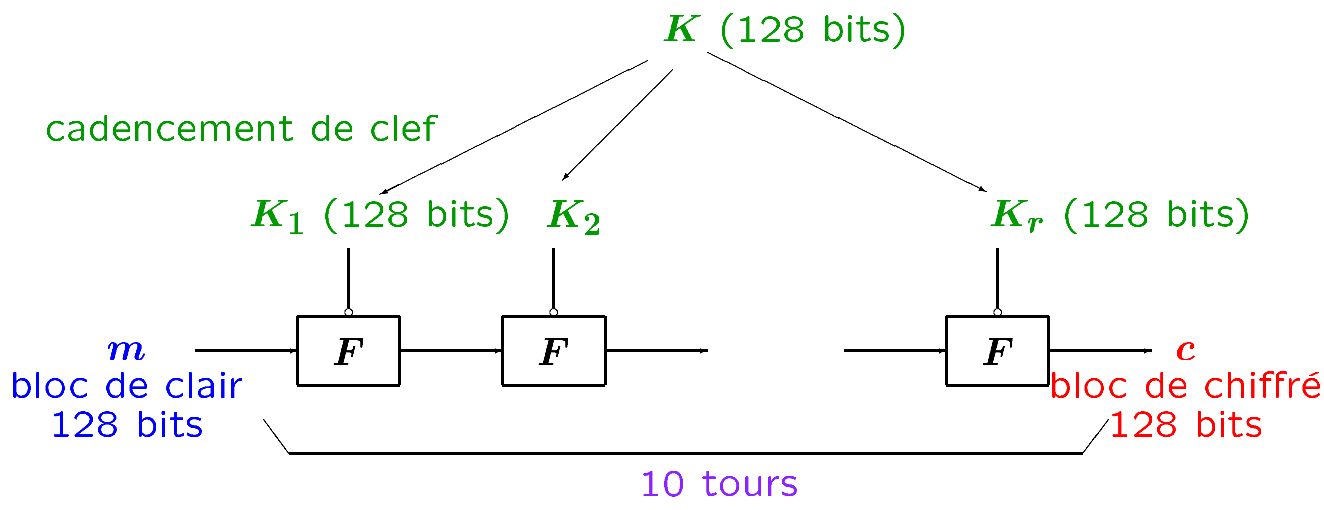
Loi de Moore :
la puissance des ordinateurs double tous les 18 mois

AES - Advanced Encryption Standard (2000)

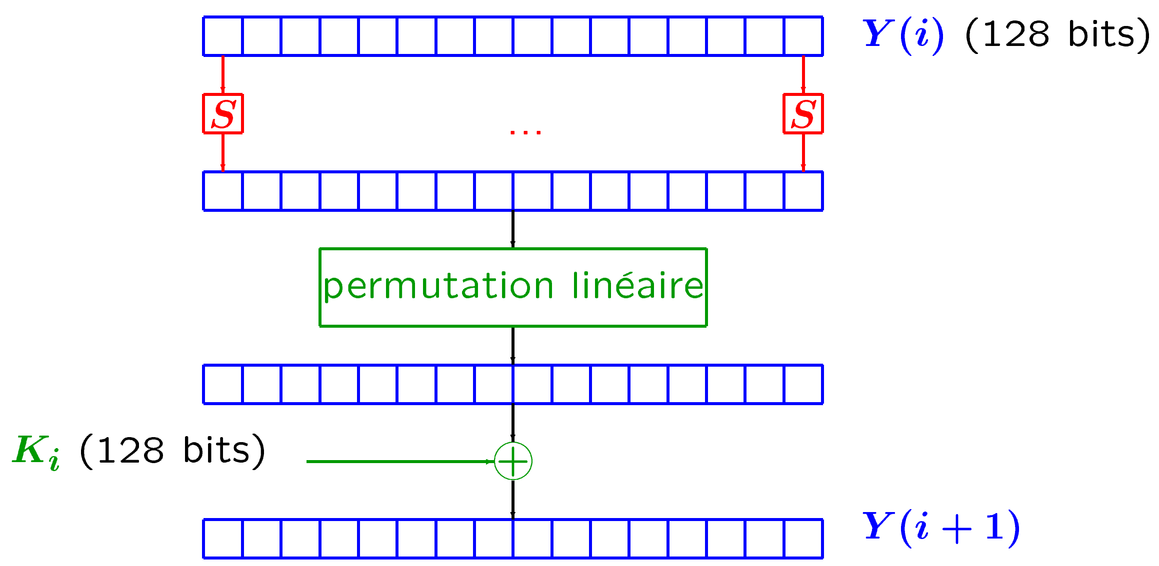
Taille de la clef : 128 /192 /256 bits

Le texte clair est découpé en blocs de 128 bits (16 caractères).
Le système chiffre les blocs successivement avec la même clef.

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{clair} & = (& m_1 , & m_2 , & \dots & m_N) \\
 & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \boxed{E_K} & \boxed{E_K} & & \boxed{E_K} \\
 & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\text{chiffré} & = (& c_1 , & c_2 , & \dots & c_N)
\end{array}
$$



Fonction itérée de l'AES



S : inversion dans le corps fini à 2^8 éléments.

La cryptographie à clef publique

Fonctions à sens unique

$$f : x \longmapsto f(x) = y$$

f est à sens unique si :

- étant donné x, il est facile de calculer $f(x)$.
- étant donné y, il est très difficile de calculer x.

très difficile = infaisable en un laps de temps réaliste avec une puissance de calcul raisonnable.

$\Longrightarrow$ De bonnes fonctions à sens unique sont des fonctions telles que la recherche de x à partir de $f(x)$ est un problème mathématique réputé difficile.

Notons $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers modulo p, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \{0, \ldots, p-1\}$.
Soit $a \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$

$$\begin{array}{rccc} f_{a,p}: & (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \\ & x & \longmapsto & a^x \bmod p \end{array}$$

Exemple.

$$\begin{array}{rccc} f: & \{1, \ldots, 540\} & \longrightarrow & \{1, \ldots, 540\} \\ & x & \longmapsto & 2^x \bmod 541 \end{array}$$

$$f(10) = 2^{10} \bmod 541 = 1024 \bmod 541 = 483$$

Les entiers modulo p

Proposition
$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Proposition
Soit p un entier premier. Le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ est cyclique :
il existe $g \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, appelé élément générateur, tel que

$$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* = \{g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}\}$$

Exemple.
$g = 3$ est un générateur de $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$:

$$\{3^i \bmod 7, \;\; 0 \leq i < 7\} = \{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$$

Théorème

Soit p un entier premier et g un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \\ & x & \longmapsto & g^x \bmod p \end{array}$$

est bijective.

Exemple.

$$\begin{array}{rccc} f: & \{1, \dots, 540\} & \longrightarrow & \{1, \dots, 540\} \\ & x & \longmapsto & 2^x \bmod 541 \end{array}$$

Calcul de $f(x) = g^x \bmod p$

On décompose x en base $\mathbf{2}$:

$$x = 19 = 2^4 + \quad + \quad + 2^1 + 2^0 = (10011)_2 = (x_4, \dots, x_0)_2$$

Au départ, $y = 1$.

- Si $x_i = 0$, $y \longleftarrow y^2 \bmod p$.
- Si $x_i = 1$, $y \longleftarrow y^2 \cdot g \bmod p$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & (1^2) \cdot g \\ y & = & ((1^2) \cdot g)^2 \\ y & = & (((1^2) \cdot g)^2)^2 \\ y & = & ((((1^2) \cdot g)^2)^2)^2 \cdot g \\ y & = & (((((1^2) \cdot g)^2)^2)^2 \cdot g)^2 \cdot g \end{array}$$

$$\left(((((1) \cdot g)^2)^2)^2 \cdot g\right)^2 \cdot g = \left(g^{2^3+1}\right)^2 \cdot g = g^{2^4+2+1}$$

$\longrightarrow$ Calcul linéaire en la taille de x.

Trouver $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $g^x \bmod p = y$.

Exemple. Trouver x tel que $2^x = 69 \bmod 541$?

Le logarithme discret

Trouver $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $g^x \bmod p = y$.

Exemple. Trouver x tel que $2^x = 69 \bmod 541$?

$$\begin{aligned} 2^{280} \bmod 541 &= 58 \\ 2^{290} \bmod 541 &= 423 \\ 2^{300} \bmod 541 &= 352 \end{aligned}$$

Trouver $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $g^x \bmod p = y$.

Exemple. Trouver x tel que $2^x = 69 \bmod 541$?

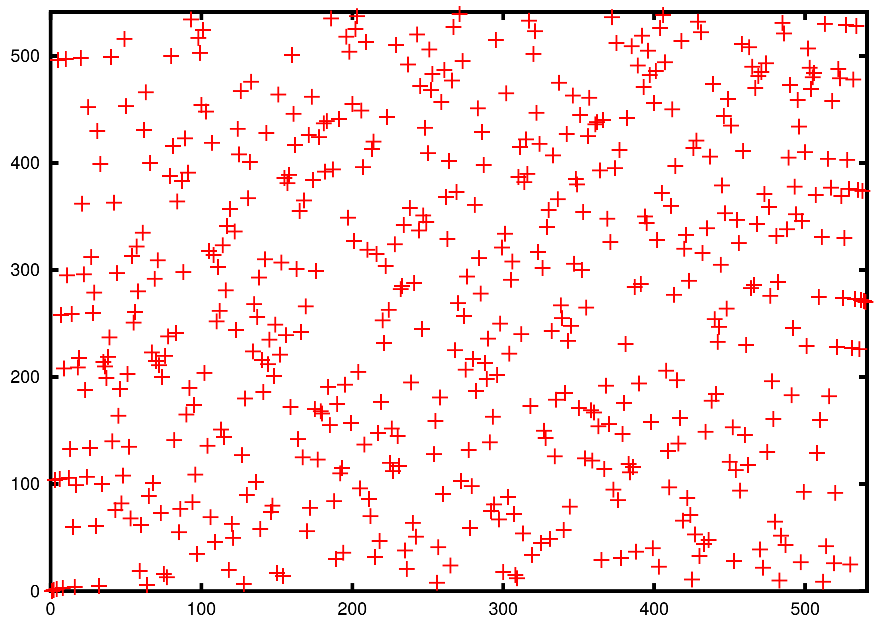
$$\begin{aligned} 2^{280} \bmod 541 &= 58 \\ 2^{290} \bmod 541 &= 423 \\ 2^{300} \bmod 541 &= 352 \end{aligned}$$

$$2^{292} \bmod 541 = 69$$

Le logarithme discret

Trouver x tel que $2^x = 69 \bmod 541$?

Logarithme en base 2 dans les entiers modulo 541

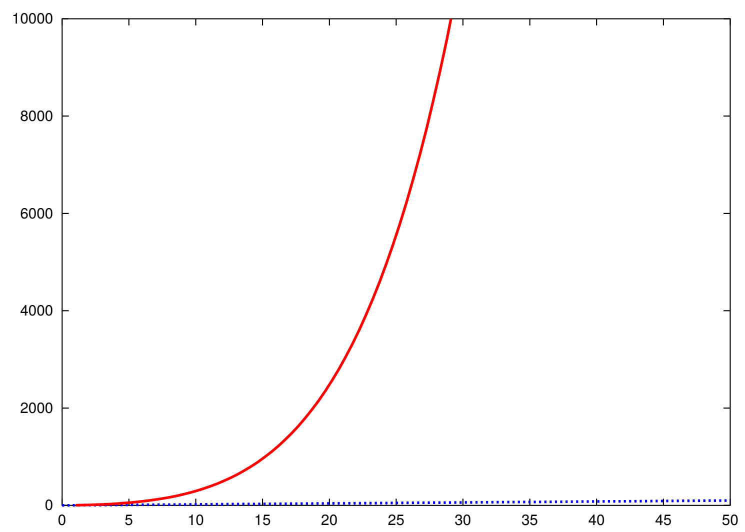


Algorithme du crible du corps de nombres [Gordon-Shirokauer 93]

Complexité.

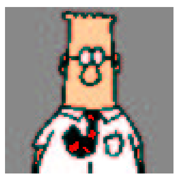
$$\mathcal{O}\left(\exp(2(\log p)^{\frac{1}{3}}(\log\log p)^{\frac{2}{3}})\right)$$

Record. p : nombre de 120 chiffres décimaux [Joux-Lercier 01].



Protocole d'échange de clefs de Diffie-Hellman (1976)

Soit p un entier premier d'au moins 230 chiffres (768 bits)
et g un générateur de $\{1, \dots, p-1\}$.



choisit $x_A \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$		choisit $x_B \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$
$y_A = g^{x_A} \bmod p$	$\xrightarrow{y_A}$ $\xleftarrow{y_B}$	$y_B = g^{x_B} \bmod p$
$K = (y_B)^{x_A} \bmod p$		$K = (y_A)^{x_B} \bmod p$

$$K = (y_A)^{x_B} \bmod p = g^{x_A x_B} \bmod p = (y_B)^{x_A} \bmod p$$

$p = 541$ et $g = 2$

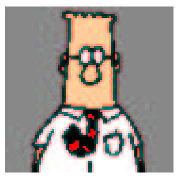
choisit 292

$2^{292} \bmod 541 = 69$

$(171)^{292} \bmod 541 = 368$

$$\xrightarrow{69}$$

$$\xleftarrow{171}$$



choisit 426

$2^{426} \bmod 541 = 171$

$(69)^{426} \bmod 541 = 368$

Sécurité du protocole de Diffie-Hellman

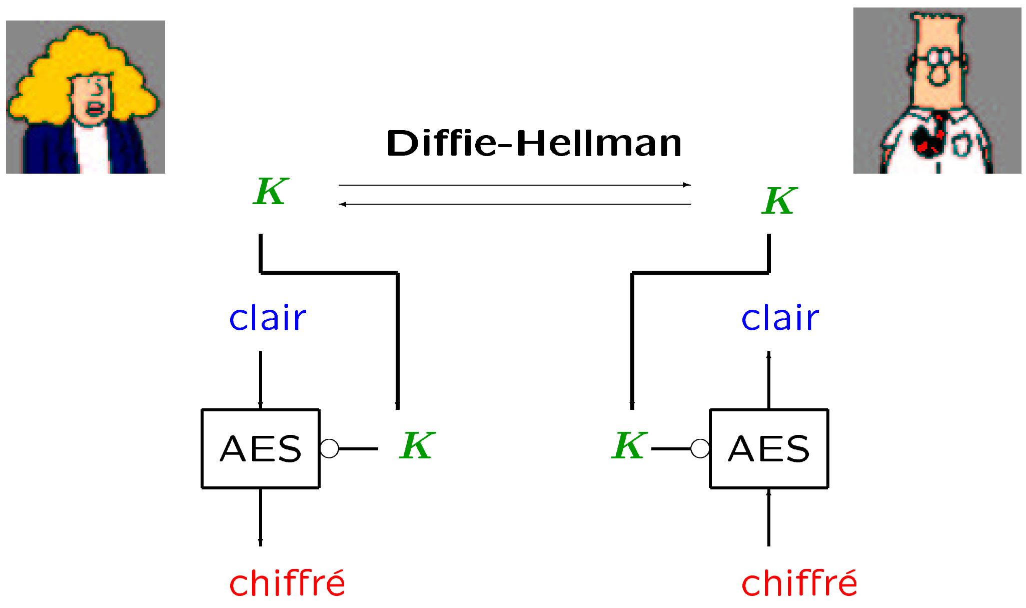
Retrouver le secret commun K revient à résoudre le problème suivant :

Problème de Diffie-Hellman :

Soit p un entier premier et g un générateur de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.
Étant données les valeurs de $(g^a \bmod p)$ et de $(g^b \bmod p)$, calculer $g^{ab} \bmod p$.

Problème ouvert :

Peut-on résoudre le problème de Diffie-Hellman sans résoudre celui du logarithme discret modulo p ?

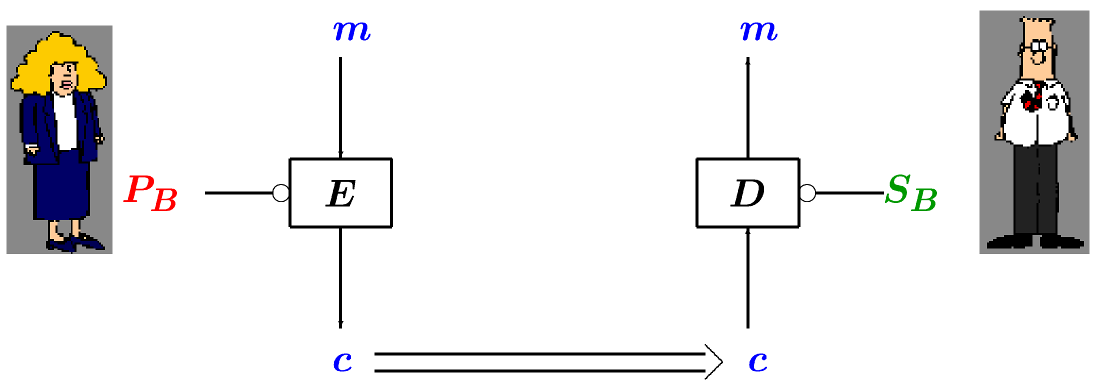


Le chiffrement à clef publique

Principe.

Chaque utilisateur dispose d'une **clef publique** P (disponible dans un annuaire) et d'une **clef privée** S.

$\Longrightarrow$ pas de secret partagé.



Clef secrète : coffre-fort	**Clef publique : boîte aux lettres**
Alice et Bob ont la clef du coffre.	Seul Bob a la clef de sa boîte.
Alice envoie un message à Bob :	Alice envoie un message à Bob :
1. Alice utilise la clef pour déposer un courrier dans le coffre. 2. Bob utilise la clef pour lire le courrier déposé par Alice.	1. Alice cherche l'adresse de Bob dans un annuaire et dépose un courrier dans la boîte de Bob. 2. Bob utilise sa clef pour lire le courrier déposé dans sa boîte.
Propriétés du coffre-fort : • seuls Alice et Bob peuvent déposer du courrier dans le coffre. • seuls Alice et Bob peuvent lire le courrier déposé dans le coffre.	Propriétés : • toute personne peut envoyer du courrier à Bob. • seul Bob peut lire le courrier déposé dans sa boîte aux lettres.

Fonctions à sens unique avec trappe

$$f : x \longmapsto f(x) = y$$

f est à sens unique avec trappe si :

- étant donné x, il est facile de calculer $f(x)$.
- étant donné y, il est très difficile de calculer x sauf si on connaît une trappe s.

Soit p et q deux entiers premiers, $n = pq$.
Soit e un entier inférieur à n, premier avec $(p-1)(q-1)$.

$$\begin{array}{rccc} f_{e,n}: & \{0,\cdots,n-1\} & \longrightarrow & \{0,\cdots,n-1\} \\ & x & \longmapsto & x^e \bmod n \end{array}$$

Le calcul de $f_{e,n}(x)$ est linéaire en la taille de n.

Un peu d'arithmétique...

Théorème [Fermat]
Soit p un entier premier.

$$\forall x \in \{1,\ldots,p-1\}, \quad x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

$\forall x \neq 0$, la multiplication par x est une bijection de $\{1,\ldots,p-1\}$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{p-1} (xi \bmod p) &= \prod_{i=1}^{p-1} i \\ \Longrightarrow x^{p-1}(p-1)! &\equiv (p-1)! \bmod p \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{pgcd}((p-1)!, p) = 1$, on a

$$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

Corollaire
Soient p et q deux nombres premiers distincts.

$$\forall \lambda \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1), \quad \forall x, \quad x^{\lambda} \equiv x \bmod pq$$

Problème.

Soit $n = pq$ où p et q sont deux entiers premiers.
Soit $e \in \{1,\ldots,n-1\}$ premier avec $(p-1)(q-1)$ et $y \in \{1,\ldots,n-1\}$.
Trouver $x \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $x^e \bmod n = y$.

Quand on connaît p et q :

On cherche un couple de Bezout pour e et $(p-1)(q-1)$:
(a,b) tel que $ae + b(p-1)(q-1) = 1$ (algorithme d'Euclide).
Pour $d = a \bmod (p-1)(q-1)$, on a

$$ed \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1) \; .$$

Alors, pour tout $x \in \{1,\ldots,n-1\}$, on a

$$y^d \bmod n = (x^e)^d \bmod n = x^{ed} \bmod n = x^{1+k(p-1)(q-1)} = x \; .$$

$\Longrightarrow$ On peut retrouver x en un temps polynômial en la taille de n.

Exemple

$p = 127$, $q = 179$ ($n = pq = 22733$) et $e = 17$.
Trouver x tel que $x^{17} \bmod 22733 = 18763$?

On cherche d tel que $17d \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1)$.

$$\begin{aligned}
22428 - 1319 \times 17 &= 5\\
17 - 3 \times 5 &= 2\\
5 - 2 \times 2 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 - 2 \times 2 &= 1\\
5 - 2 \times (17 - 3 \times 5) &= 1\\
7 \times 5 - 2 \times 17 &= 1\\
7 \times (22428 - 1319 \times 17) - 2 \times 17 &= 1\\
7 \times 22428 - 9235 \times 17 &= 1\\
-10 \times 22428 + (22428 - 9235) \times 17 &= 1 \Longrightarrow d = 13193
\end{aligned}$$

$$(x^{17})^{13193} = x \cdot x^{10 \cdot 22428} = x \bmod 22733$$

$$x = 18763^{13193} \bmod 22733 = 17564 \; .$$

Soit $n = pq$ où p et q sont deux entiers premiers.
Soit $e \in \{1,..., n-1\}$ premier avec $(p-1)(q-1)$ et $y \in \{1,... ,n-1\}$.
Trouver $x \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $x^e \bmod n = y$.

Quand on ne connaît pas p et q :

La méthode connue la plus efficace pour retrouver x consiste à chercher d tel que $ed \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1)$.

Pour celà, il faut trouver les deux facteurs premiers p et q de n.

La factorisation

Défi de Pour la Science (1977)

Le nombre
114 381 625 757 888 867 669 235 779 976 146 612 010 218 296
721 242 362 562 561 842 935 706 935 245 733 897 830 597 123
563 958 705 058 989 075 147 599 290 026 879 543 541

est le produit de 2 nombres premiers. Lesquels ?

Défi de Pour la Science (1977)

Le nombre
114 381 625 757 888 867 669 235 779 976 146 612 010 218 296
721 242 362 562 561 842 935 706 935 245 733 897 830 597 123
563 958 705 058 989 075 147 599 290 026 879 543 541

est le produit de 2 nombres premiers. Lesquels ?

Réponse [Atkins, Graff, Lenstra, Leyland 95]

3 490 529 510 847 650 949 147 849 619 903 898 133 417 764
638 493 387 843 990 820 577

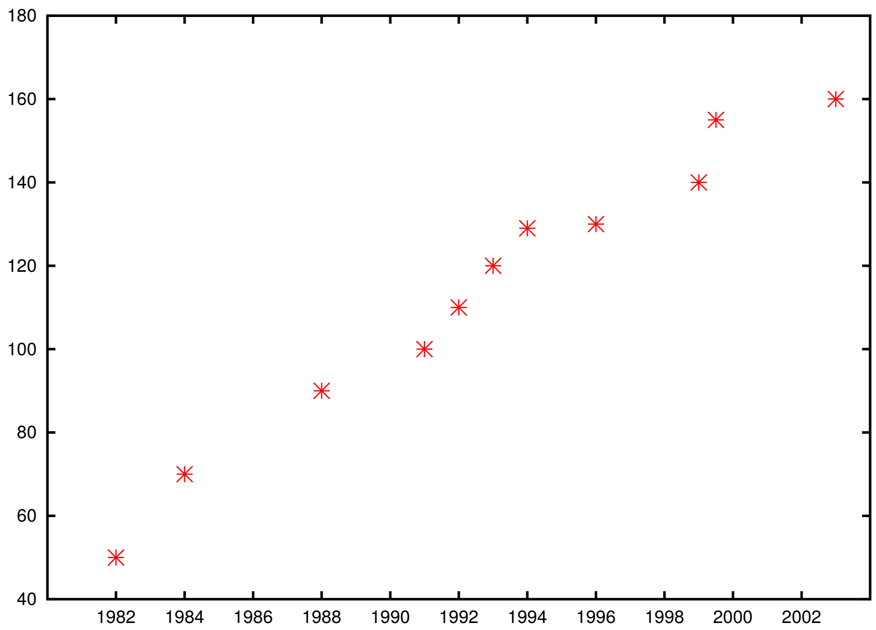
et

32 769 132 993 266 709 549 961 988 190 834 461 413 177 642
967 992 942 539 798 288 533

8 mois de calcul faits par 600 volontaires dans 20 pays
et 45 heures sur une machine massivement parallèle.

Records de factorisation [F. Morain]

Evolution du nombre de chiffres décimaux des nombres factorisés au cours des années.



Factoriser le nombre suivant de 174 chiffres (576 bits)

188 198 812 920 607 963 838 697 239 461 650 439 807 163 563
379 417 382 700 763 356 422 988 859 715 234 665 485 319 060
606 504 743 045 317 388 011 303 396 716 199 692 321 205 734
031 879 550 656 996 221 305 168 759 307 650 257 059

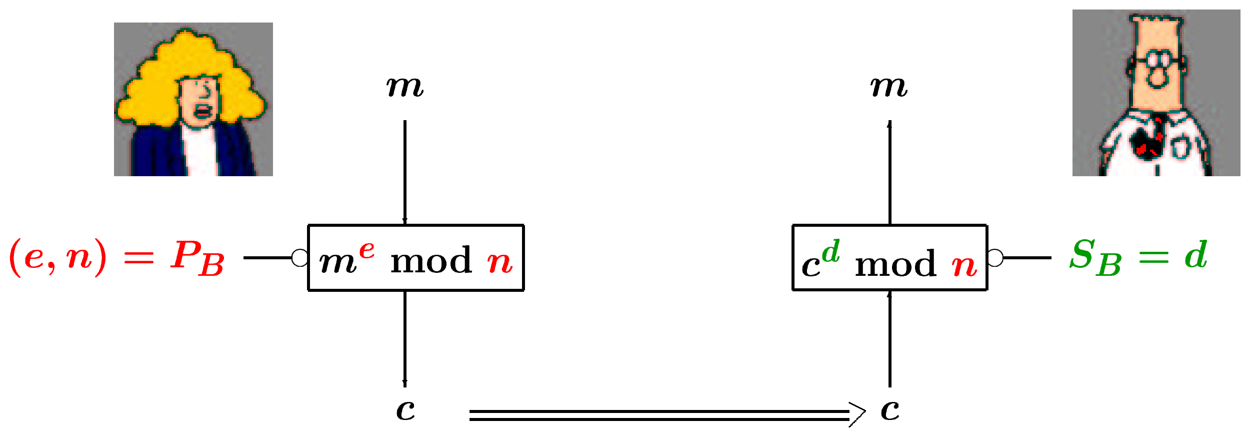
Prix : 10 000 $.

http://www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges/factoring/numbers.html

Le chiffrement RSA [Rivest - Shamir - Adleman 78]

Principe :

Bob choisit deux grands nombres premiers p et q
et un entier e premier avec $(p-1)(q-1)$.
Il calcule $n = pq$ et d tel que $ed \bmod (p-1)(q-1) = 1$.
$\Longrightarrow$ clef publique $= (e, n)$, clef privée $= d$



Bob choisit $p = 127$ et $q = 179$ et $e = 17$.
Il calcule $n = pq = 22733$
et d tel que $17d \bmod (p-1)(q-1) = 1 \Longrightarrow d = 13193$
$\Longrightarrow$ clef publique $= (17, 22733)$, clef privée $= d = 13193$

OUI $= (15, 21, 9)$
$15 + 21 \cdot 26 + 9 \cdot 26^2$
$= 6645$

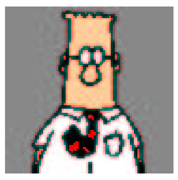
$\boxed{6645^{17} \bmod 22733}$

5159
$11 + 16 \cdot 26 + 7 \cdot 26^2$
$(11, 16, 7) =$ KPG $\Longrightarrow$ KPG$=(11, 16, 7)$

OUI $= (15, 21, 9)$
6645

$\boxed{5159^{13193} \bmod 22733}$

5159



Remarques sur la taille des clefs

- Chiffrement à clef secrète avec une clef de k bits

  Recherche exhaustive parmi tous les mots de k bits
  $= 2^{k-1}$ essais en moyenne.

  $\Longrightarrow$ Longueur de clef recommandée : 128 bits.

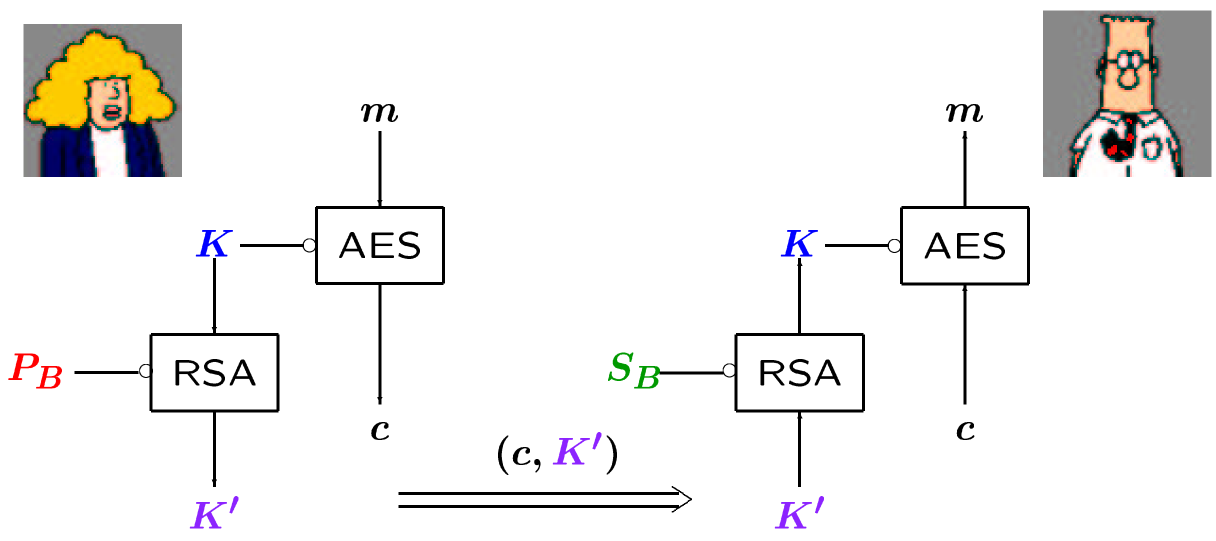
- RSA avec une clef privée de k bits

  Factorisation d'un nombre de k bits $\ll 2^{k-1}$ essais

  $\Longrightarrow$ Longueur de clef recommandée : 768 ou 1024 bits.

	clef secrète	**clef publique**
gestion	la clef est secrète aux 2 extrémités. grand nombre de clefs dans un réseau	seule la clef privée est secrète. garantie de l'authenticité des clefs publiques
sécurité	pas de preuve formelle de sécurité	repose sur la difficulté (supposée) de problèmes mathématiques
performances	très rapides 10-100 Mbits/s	très lents 10-100 Kbits/s

Systèmes de chiffrement hybrides



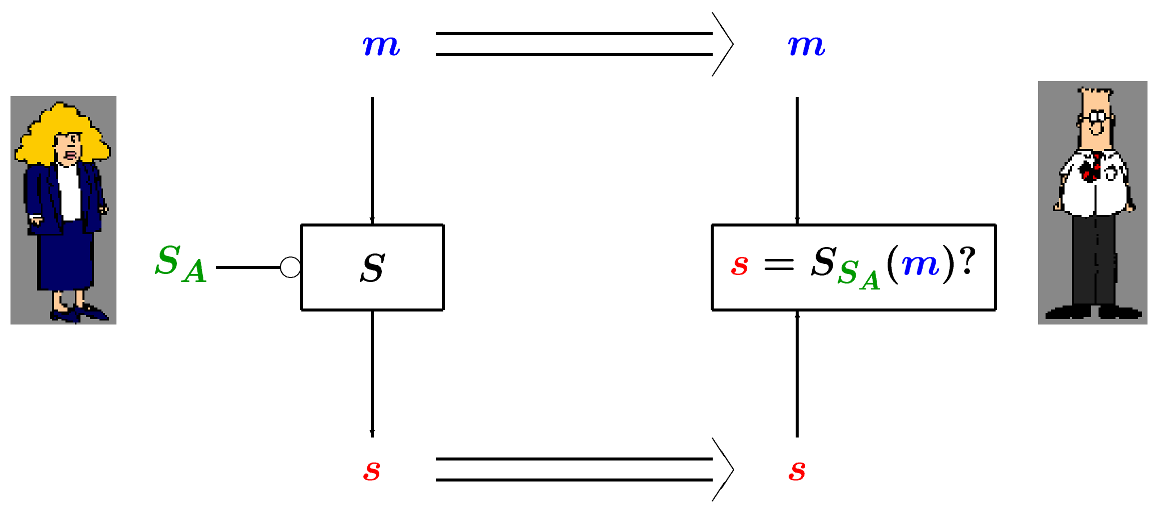
Principe :

Alice envoie à Bob un message clair m et lui associe une signature s.

Propriétés requises :

- La signature s ne peut pas être contrefaite
  $\longrightarrow$ identification du signataire.
- La signature s n'est pas réutilisable.
- Le message signé est inaltérable
  $\longrightarrow$ authentification du message.
- Alice ne peut pas nier avoir signé le message
  $\longrightarrow$ non-répudiation.

La signature numérique



Seule la personne qui connaît la clef S_A est capable de produire la signature.

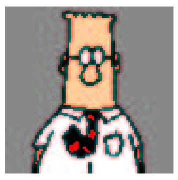
Soit (e, n) la clef publique d'Alice et d sa clef secrète.

m

$d = S_A$ — $\boxed{m^d \bmod n}$ → s

(m, s)

$s \Longrightarrow s$



m

$\boxed{s^e \bmod n = m?}$ — $P_A = (e, n)$

$\Longrightarrow$ Seul celui qui connaît d peut produire s.

La signature RSA : exemple

Clef publique d'Alice $= (17, 22733)$
Clef privée d'Alice $= 13193$.

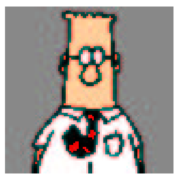
OUI $= 6645$

$\boxed{6645^{13193} \bmod 22733}$

15364

$(6645, 15364)$

$15364 \Longrightarrow 15364$



6645

$\boxed{15364^{17} \bmod 22733 = 6645?}$

$\Longrightarrow$ Seule Alice est capable de trouver s tel que

$$s^{17} \bmod 22733 = 6645 \ .$$

Chiffrement à clef secrète

- conception de nouvelles attaques ;
- élaboration de preuves de sécurité et définition de critères de sécurité ;
- construction de nouveaux systèmes de chiffrement à clef secrète.

Cryptographie à clef publique

- étude de la complexité de la factorisation et du logarithme discret.
- recherche de nouveaux algorithmes à clef publique fondés sur d'autres problèmes et plus rapides que les algorithmes existants.

Autres fonctionnalités cryptographiques

protection des droits d'auteurs ; protocoles complexes.

Eléments bibliographiques

Aspects historiques

- S. Singh. *Histoire des codes secrets*. Jean-Claude Lattès, 1999.

- J. Stern. *La science du secret*. Odile Jacob, 1996.

- D. Kahn. *Codebreakers, revised edition*. Ed. Charles Scribner, 1996.

Ouvrages de référence

- A.J. Menezes, P.C. van Oorschot, et S.A. Vanstone. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, 1997. Disponible gratuitement sur `http://cacr.math.uwaterloo.ca/hac/`.

- B. Schneier. *Applied Cryptography*. Wiley Inc., 1996.