AULA 4

SISTEMAS NUMÉRICOS

NESTA AULA

- Bases numéricas: Conceito e Histórico
- Sistema de base decimal
- Sistema de base binária
- Sistema de base hexadecimal
- Sistema de base octal
- Conversões entre bases numéricas
- Operações básicas com bases numéricas

METAS DE COMPREENSÃO

- Conhecer o histórico e a evolução dos sistemas de numeração.
- Compreender como representar os sistemas de numeração.
- Conhecer os processos de conversão entre sistemas numéricos.
- Compreender a sistemática de realizar operações básicas aritméticas em qualquer sistema de numeração.

APRESENTAÇÃO

O homem, desde o tempo das cavernas, tinha a necessidade de fazer contas.

Inicialmente, usava riscos em ossos e pedras para a contagem. Em seguida, antigos egípcios adotaram símbolos para representar os números. Várias civilizações da Antiguidade tinham seus próprios símbolos representativos dos números.

Atualmente, adotamos os símbolos numéricos posicionais indo-arábicos e o sistema decimal. Os computadores introduziram o sistema binário. Como este sistema tem representações numéricas extensas, adotaram-se os sistemas numéricos hexadecimal e octal, que simplificam a representação numérica e condensam os números binários.

Nesta aula vamos apresentar os sistemas numéricos e os processos de conversões entre eles. Além disso, mostraremos como realizar operações aritméticas com os diversos sistemas numéricos.

Vamos iniciar com um histórico e evolução dos sistemas de numeração, desde os tempos mais remotos até o tempo atual. Mostraremos os principais sistemas de numeração históricos iniciando com o sistema utilizado pelos antigos egípcios até chegar ao **sistema de numeração** decimal que usamos, de origem indo-arábica.

Em seguida, apresentaremos a representação dos sistemas de base decimal, binária que os computadores utilizam, octal e hexadecimal.

Além de mostrar a representação de cada sistema numérico, serão apresentadas as técnicas de conversão entre os diferentes sistemas numéricos.

Finalizaremos esta aula mostrando os processos de operações básicas com os sistemas numéricos.

É uma aula muito prática, na qual haverá muita atividade para fixar os conceitos apresentados.

Sistema de Numeração

Sistema que representa números de uma forma consistente, representando uma grande quantidade de números úteis, dando a cada número uma única representação, reflete as estruturas algébricas e aritméticas dos números. (Mundo Educação).

BASES NUMÉRICAS: CONCEITO E HISTÓRICO

Como surgiu a noção de número?

O homem, desde os tempos mais remotos, tinha o "sentido" do número. Mesmo sem saber contar, esta faculdade permitia reconhecer a diferença de quantidade numa pequena coleção de pessoas ou objetos. Ele percebia, por exemplo, se faltava algum filho, ou se um objeto tinha sido retirado ou acrescentado em um conjunto de objeto. Esta capacidade é chamada de senso numérico.

O sentido do número, em sua significação primitiva e no seu papel intuitivo, não se confunde com a capacidade de contar, que exige um fenômeno mental mais complicado. Se contar é um atributo exclusivamente humano, algumas espécies de animais parecem possuir um sentido rudimentar do número. Assim opinam, pelo menos, observadores competentes dos costumes dos animais.

O homem aprendeu a completar sua noção de quantidade usando artifícios que o ajudaram a contar. Quando o homem vivia da caça e pesca, ou de recolher frutas de árvores, ele passou a utilizar um pedaço de osso ou madeira, na qual fazia riscos que correspondiam para cada objeto. Outra modalidade de contagem utilizada pelos homens primitivos era fazer um nó numa corda para cada objeto.

Quando o homem se tornou sedentário e passou a ter gado, ele usava o artifício de colocar num saquinho uma pedra para cada animal que saia do curral para pastorar e, na volta, ia retirando uma pedra para cada animal que retornava. Se sobrassem algumas pedras, ele percebia que faltam alguns animais. Portanto, havia uma correspondência entre a quantidade de pedras e a quantidade de animais ou objetos, neste processo primitivo de contagem.

Aliás, a palavra cálculo deriva de *calculus* em latim, que significa pedra. Foi contando objetos com outros objetos que a humanidade começou a construir o *conceito de número*.

Para o homem primitivo, o *número cinco*, por exemplo, estaria sempre ligado a alguma coisa

SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO

Foi partindo dessa necessidade imediata que estudiosos do Antigo Egito passaram a representar a quantidade de objetos de uma coleção através de desenhos – *os* símbolos.

A criação dos símbolos foi um passo muito importante para o desenvolvimento da Matemática.

Muitas vezes não sabemos nem que objetos estamos a somar. Mas isso não importa: a operação pode ser feita da mesma maneira.

Mas como eram os símbolos que os egípcios criaram para representar os números?

O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números-chave:

1 10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000

Os egípcios usavam símbolos para representar esses números.

- Um traço vertical (bastão) representava 1 unidade;
- Um osso de calcanhar invertido representava o número 10;
- Um laço (rolo de corda) valia 100 unidades;
- Uma flor de lótus valia 1.000;
- Um dedo dobrado (apontando) valia 10.000;
- Com um girino (ou peixe) os egípcios representavam 100 mil unidades;
- Uma figura ajoelhada, talvez representando um deus ou homem, valia 1.000.000;

Todos os outros números eram escritos combinando os números-chave.

A Figura 1 mostra os símbolos que representavam os números dos antigos egípcios.Eles representavam os números através de sete símbolos diferentes que podiam ser repetidos até 9 vezes, configurando um sistema numérico decimal.

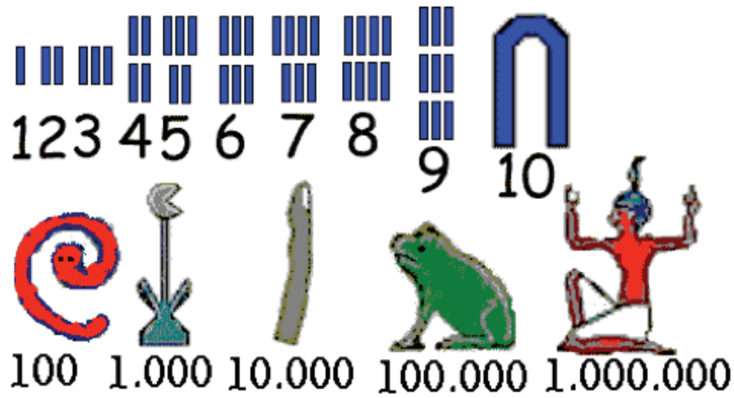


Figura 1

Ao escrever os números, os egípcios não se preocupavam com a ordem dos números, ou seja, o mesmo número podia ser escrito em qualquer sequência que tinha o mesmo valor.

Isto nos leva ao seguinte conceito: temos dois tipos de sistemas de numeração, os **sistemas de numeração posicionais e os não posicionais**.

O sistema de numeração egípcio é não posicional, pois a posição do número não altera seu valor. Isto não vale para nosso sistema de numeração atual, pois a posição do número altera seu valor.

Por exemplo, usando os 3 números 3, 4 e 5, observamos que, conforme sua posição, o número assume outro valor.

345 435 543 354 453 534 utilizam os 3 números em ordens diferentes, formando valores quantitativos diferentes. Portanto, nosso sistema de contagem é chamado de posicional.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO BABILÔNICO

Outro sistema de numeração da Antiguidade é o sistema de numeração babilônico.

Todos os números babilônicos são representados simbolicamente.

O sistema babilônico utiliza a base 60 para a formação de seus numerais.

pense nisso

Nós utilizamos até hoje uma herança do sistema numérico babilônico, de base 60, também chamado de sexagesimal na contagem do tempo. Cada hora do dia tem 60 minutos e cada minuto tem 60 segundos.

O sistema sexagesimal, também conhecido como sistema de numeração babilônico, necessita de 60 algarismos diferentes de 0 a 59.

É um sistema posicional, como nosso sistema numérico decimal.

Eles também tinham noção do conceito zero, que indicavam por um espaço vazio.

A Figura 2 ilustra o sistema de numeração babilônico.

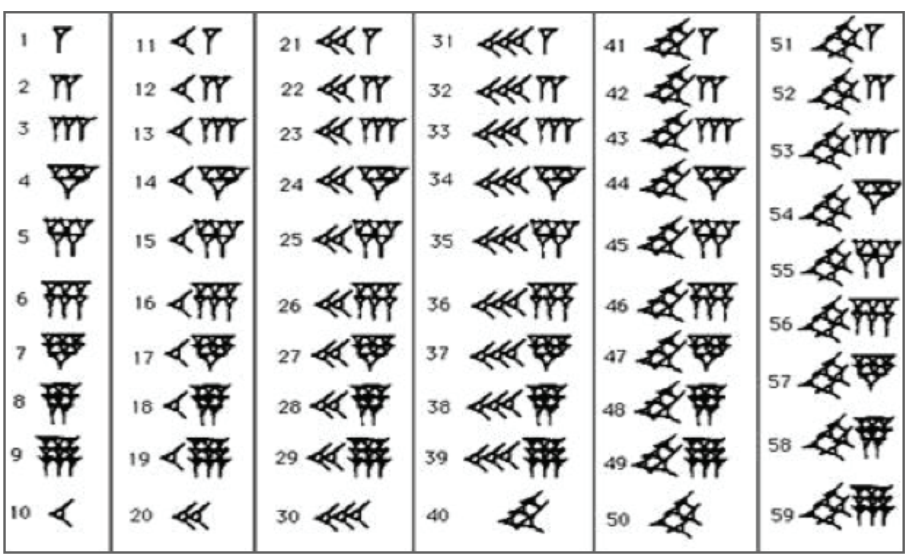


Figura 2

O sistema de numeração deles era posicional como o nosso.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO MAIA

Outro sistema de numeração importante é o sistema utilizado pelos maias, que era um grupo de tribos que habitavam a América do Sul 3.500 anos atrás.

Eles desenvolveram um sistema de numeração que podia representar qualquer número com apenas três símbolos.

Uma concha representava o zero, um ponto representava o número 1 e uma barrinha, o número 5.

Nós usamos um sistema de numeração de base decimal. Os maias, no entanto, usavam um sistema numérico vigesimal (de base vinte).

Os números deles eram representados da seguinte forma:

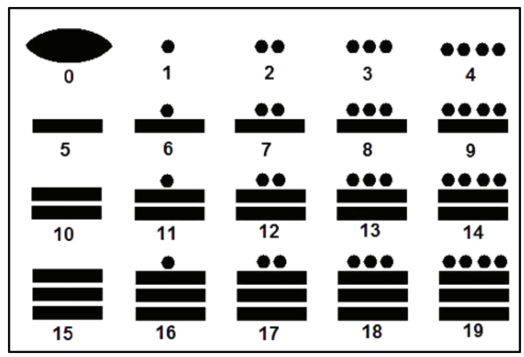


Figura 3

Observem que eles utilizavam o número zero, o que é uma grande evolução e parece ser a primeira citação da utilização do zero.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANO

De todas as civilizações da Antiguidade, a dos romanos foi ,sem dúvida, a mais importante.

Eles inventaram um sistema numérico baseado nas próprias letras do alfabeto. Este sistema de numeração se baseava em 7 letras, conforme vemos na Figura 4:

Letras	Valores
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Figura 4

Eles usavam um sistema numérico não posicional que, como vimos é um sistema numérico em que o símbolo que representa o número tem sempre o mesmo valor, independentemente da posição em que se encontra no número.

O sistema de numeração romano foi adotado por muitos povos. Mas ainda era difícil efetuar cálculos com este sistema.

Por isso, matemáticos de todo o mundo continuaram a procurar intensamente símbolos mais simples e mais apropriados para representar os números.

E como resultado dessas pesquisas, aconteceu na Índia uma das mais notáveis invenções de toda a história da Matemática: O sistema de numeração decimal.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido ao fato de que os hindus o inventaram, e também devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental.

Algumas características deste sistema é: ter base dez; ter um símbolo para representar o zero; para representar qualquer número se utilizam os **algarismos** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0; obediência a princípio posicional (ordens e classes).

Criou-se, então, o valor posicional formando grupos de dez; cada grupo de dez forma-se uma ordem, ao agruparem três ordens, obtemos uma classe. Dessa forma, é possível formar qualquer número utilizando esses algarismos. Esse sistema ficou conhecido como sistema de numeração decimal.

Algarismo

Algarismo ou dígito é um tipo de representação, um símbolo numérico, utilizado em combinação para representar números em sistemas de numeração posicional.

? você sabia?

A palavra algarismo tem origem no nome do matemático árabe Mohammed ibn Musa Al-khowarizmi (780 - 850). O sobrenome deste matemático árabe Al-Khowarismi, acabou gerando a palavra algarismo, que hoje utilizamos para denominar os números de 0 a 9. É uma homenagem a este célebre matemático que traduziu para o árabe os livros de matemática vindos da Índia.

Al-khowarizmi foi o autor do primeiro livro árabe conhecido, que trazia explicações minuciosas dos cálculos hindus, por isso o seu nome deu origem a palavra algarismo.

Os Hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

- o sistema numérico é decimal (como o egípcio, o romano e o chinês eram);
- o sistema de numeração é posicional (como o babilônico);
- o sistema de numeração tem o zero, que é um símbolo que representa o nada.

Estas três características tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Por isso, ele é usado hoje por quase todo mundo.

palavra de autor

"Começamos a nossa história abordando aquela que parece ser a noção matemática mais simples: o processo de contagem.

Ele começou a ser desenvolvido pelo ser humano muito antes de haver a escrita ou civilização e, por isso, possuímos poucos elementos concretos para sua análise. No entanto, as habilidades de contagem precedem qualquer desenvolvimento matemático mais sofisticado e sua compreensão é um passo inicial essencial para uma abordagem histórica da matemática. O ser humano possui habilidades naturais para pensar noções quantitativas rudimentares: muito e pouco, grande e pequeno, lento e rápido. A evolução humana, de uma vida primitiva para uma vida em sociedade, incorporou novos desafios sociais e econômicos. Novas demandas surgiram na organização do espaço nas teorias de produção e nas relações de natureza comercial. Estímulos vieram da interação com a natureza ao seu redor, em especial da observação dos céus. O homem se viu assim diante da necessidade de pensar numericamente. "

MOL, Rogério S. *Introdução à História da Matemática*, 2013, p.13.

SISTEMA DE BASE DECIMAL

Cada sistema de numeração é apenas um método diferente de representar quantidades.

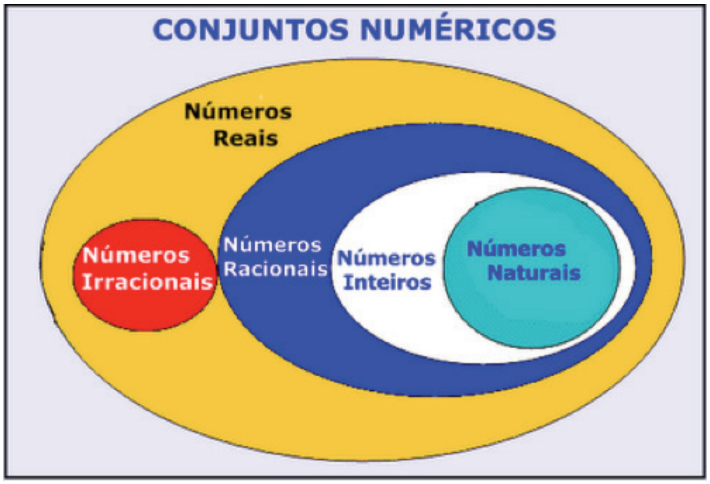
As quantidades em si não mudam; mudam apenas os símbolos usados para representá-las.

A quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de base.

Os sistemas de numeração mais utilizados são:

- Decimal – Base 10
- Binário – Base 2
- Octal – Base 8
- Hexadecimal – Base 16

Antes de falar a respeito do sistema numérico decimal que hoje utilizamos em nosso dia a dia, vamos lembrar a classificação dos conjuntos numéricos em suas categorias. Conforme vemos na Figura 5, temos o conjunto de números reais. Os números racionais e irracionais, os números inteiros e os números naturais.



O conjunto de números naturais é aquele que usamos para contar e é formado por:

ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}

O conjunto de números inteiros representa uma evolução em relação aos números naturais, pois introduz os números negativos que ajudam a trabalhar com o conceito de dívidas, por exemplo.

ℤ = {...,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3...}

O conjunto de números racionais é formado por todos os números que podem ser representados na forma de razão ou fração: Q=a/b

Por sua vez, os números irracionais são aqueles que não podem ser representados por uma razão entre dois números (fração). Por exemplo:

$\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504880168872420...

$\sqrt{3}$ = 1,73205080756887729352744634150...

π = 3,14159265358979323846264338832...

Todos os conjuntos citados fazem parte do que chamamos de conjunto de números reais.

REPRESENTAÇÃO DOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Vamos estabelecer o conceito de notação ou representação polinomial, que é válida para qualquer sistema de **base numérica**.

> ***Base numérica***
>
> A base de um sistema de numeração é uma certa quantidade de unidades que deve constituir uma unidade de ordem imediatamente superior.

Qualquer número em qualquer base obedece à seguinte representação:

$$\textbf{Número} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_0 b^0$$

a_n = algarismo, b = base do número
n = quantidade de algarismo - 1

Por exemplo, o número de base decimal $(34965)_{10}$

Onde a base b=10 e n=4

os algarismos serão:

$a_4 = 3$ $a_3 = 4$ $a_2 = 9$ $a_1 = 6$ e $a_0 = 5$

Portanto o número

$(34965)_{10} = (3 \times 10^4) + (4 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$

Ou $3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Esta representação vale para qualquer sistema numérico como podemos ver nos exemplos seguintes:

$128_{(base10)} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^{1\,+}\ 8 \times 10^0$

$54347_{(base10)} = 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10_1 + 7 \times 10^0$

$100_{(base2)} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \text{ X } 2^0 = 4$

$101_{(base2)} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \text{ X } 2^0 = 5$

$24_{(base8)} = 2 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 16 + 4 = 20$

$16_{(base8)} = 1 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = 8 + 6 = 14$

$A79_{(base16)} = 10 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = 2681$

$5A7_{(base16)} = 5 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 7 \times 16^0 = 1447$

Agora vamos falar dos sistemas numéricos decimais.

Este sistema tem base 10 e, portanto, utiliza dez símbolos. Seus elementos são os seguintes:

Elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Embora o Sistema Decimal possua somente dez símbolos, qualquer número acima disso pode ser expresso usando o sistema de peso por posicionamento, conforme o exemplo a seguir:

$3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

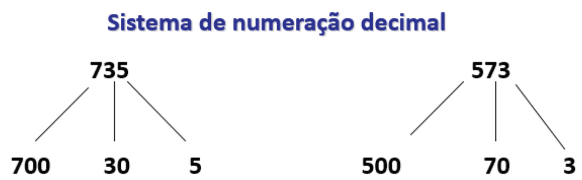
$3000 + 500 + 40 + 6 = 3546$

O número **3546** representa, portanto, a soma de 3 milhares (10^3), com 5 centenas (10^2), com 4 dezenas (10^1) e com 6 (10^0) unidades.

Observação: Lembramos que qualquer número elevado a zero é 1.

Dependendo do posicionamento, o dígito terá peso. Quanto mais próximo da extrema esquerda do número estiver o dígito, maior será a potência de dez que estará multiplicando o mesmo, ou seja, mais significativo será o dígito.

Outro exemplo para visualizar o que apresentamos:



Se tivermos números após a vírgula, usaremos a base 10 elevada a números negativos. Os valores serão decimais, centésimos, milésimos etc. Cada número será multiplicado pelas potências negativas crescentes. O exemplo a seguir ilustra o que falamos:

$$6.954{,}25 = (6\times10^{3}) + (9\times10^{2}) + (5\times10^{1}) + (4\times10^{0}) + \\ + (2\times10^{-1}) + (5\times10^{-2})$$

```
6.000
  900
   50
    4
    0,2
    0,05
---------------
6.954,25
```

Outro exemplo:

1998,923 = $1\text{x}10^3 + 9\text{x}10^2 + 9\text{x}10^1 + 8\text{x}10^0 + 9\text{x}10^{-1} + 9\text{x}10^{-1} + 2\text{x}10^{-2} + 3\text{x}10^{-3} =$

$= 1\text{x}1000 + 9\text{x}100 + 9\text{x}10 + 8\text{x}1 + 9\text{x}0{,}1 + 2\text{x}0{,}01 + 3\text{x}0{,}001$

A Figura 6 mostra a representação de um número na base dez:

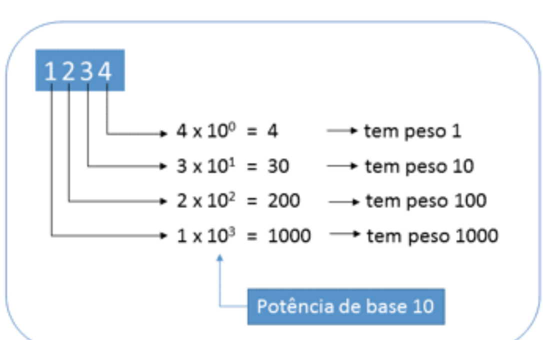


Figura 6

A tTabela 1, a seguir, pode ajudar a utilizar as potências de 10 (que é base do sistema decimal)

POTÊNCIA	VALOR	POTÊNCIA	VALOR
10^0	1		
10^1	10	10^{-1}	0,1
10^2	100	10^{-2}	0,01
10^3	1.000	10^{-3}	0,001
10^4	10.000	10^{-4}	0,0001
10^5	100.000	10^{-5}	0,00001
10^6	1.000.000	10^{-6}	0,000001
10^7	10.000.000	10^{-7}	0,0000001
10^8	100.000.000	10^{-8}	0,00000001
10^9	1.000.000.000	10^{-9}	0,000000001
10^{10}	10.000.000.000	10^{-10}	0,0000000001

Tabela 1

SISTEMA DE BASE BINÁRIA

É o sistema de numeração mais utilizado em processamento de dados digitais, pois utiliza apenas dos algarismos (0 e 1), sendo, portanto, mais fácil de ser representado por circuitos eletrônicos (os dígitos binários podem ser representados pela presença ou não de tensão).

Base: 2 (quantidade de símbolos)

Elementos: 0 e 1.

Os dígitos binários chamam-se BITS (BInary digiT). Assim como no sistema decimal, dependendo do posicionamento, o algarismo ou bit terá um peso. O da extrema esquerda será o bit mais significativo e o da extrema direita será o bit menos significativo.

O Conjunto de 8 bits é denominado Byte.

No sistema binário, representamos os números de 1 a 10, do seguinte modo:

DECIMAL

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

BINÁRIO

0 1

0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1

A equivalência entre os dez números do sistema decimal pode ser representada numa série de dígitos binários, cuja base é 2, conforme abaixo:

$$
\begin{aligned}
(1)_{10} &= 1x2^0 = (1)_2 \\
(2)_{10} &= 1x2^1 + 0x2^0 = (10)_2 \\
(3)_{10} &= 1 \ x \ 2^1 + 1x2^0 = (11)_2 \\
(4)_{10} &= 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 = (100)_2 \\
(5)_{10} &= 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 = (101)_2 \\
(6)_{10} &= 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = (110)_2 \\
(7)_{10} &= 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 = (111)_2 \\
(8)_{10} &= 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 = (1000)_2 \\
(9)_{10} &= 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 = (1001)_2 \\
(10)_{10} &= 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = (1010)_2
\end{aligned}
$$

A Figura 7 mostra a representação de um número na base binária

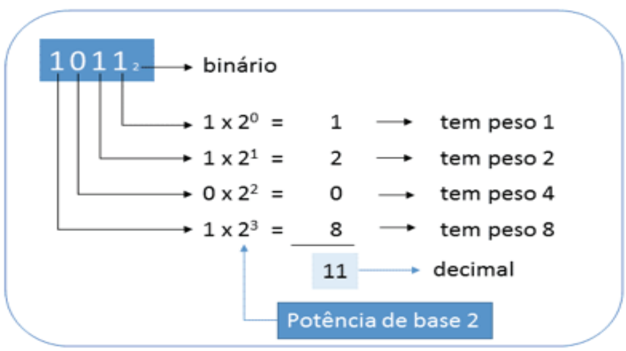


Figura 7

A tabela de conversão ajuda a utilizar as bases do sistema binário.

POTÊNCIA	VALOR	POTÊNCIA	VALOR
2^0	1		
2^1	2	2^{-1}	0,5
2^2	4	2^{-2}	0,25
2^3	8	2^{-3}	0,125
2^4	16	2^{-4}	0,0625
2^5	32	2^{-5}	0,03125
2^6	64	2^{-6}	0,015625
2^7	128	2^{-7}	0,0078125
2^8	256	2^{-8}	0,00390625
2^9	512	2^{-9}	0,001953125
2^{10}	1.024	2^{-10}	0,0009765625
2^{11}	2.048	2^{-11}	0,00048828125
2^{12}	4.096	2^{-12}	0,000244140625

Tabela 2

SISTEMA DE BASE HEXADECIMAL

O sistema de numeração hexadecimal, como o próprio nome indica, tem base 16. Portanto, possui 16 dígitos representativos que são:

Elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. (de zero a quinze)

Note o seguinte:

A equivale a 10

B equivale a 11

C equivale a 12

D equivale a 13

E equivale a 14

F equivale a 15

O Sistema Hexadecimal (base 16) foi criado com o propósito de minimizar a representação de um número binário, que é muito extenso.

Se considerarmos quatro dígitos binários, ou seja, quatro bits, o maior número que se pode expressar com esses quatro bits é 1111, que é, em decimal 15. Como não existem símbolos dentro do sistema arábico que possam representar os números decimais entre 10 e 15, sem repetir os símbolos anteriores, foram usados símbolos literais das letras alfabéticas: A, B, C, D, E e F.

Exemplo de representação de números de base hexadecimal:

$$\begin{aligned}(4CD9E)16 &= (E \text{ x } 160) + (9 \text{ x } 161) + (D \text{ x } 162) + (C \text{ x } 163) + (4 \text{ x } 164)\\ &= (14 \text{ x } 1) + (9 \text{ x } 16) + (13 \text{ x } 256) + (12 \text{ x } 4.096) + (4 \text{ x } 65.536)\\ &= 14 + 2.304 + 3.328 + 49.152 + 262.144\\ &= 316.942\end{aligned}$$

Portanto, utilizando as bases de 16, verificamos que o número $(4CD9E)_{16}$ corresponde ao número 316.942 na base decimal.

Se tivermos um número em hexadecimal com dígitos após a vírgula, usaremos as potências de 16 negativas. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(7A3, B5)_{16} &= (7 \text{ x } 16^{2}) + (A \text{ x } 16^{1}) + (3 \text{ x } 16^{0}) + (B \text{ x } 16^{-1}) + (5 \text{ x } 16^{-2})\\ &= (7 \text{ x } 256) + (10 \text{ x } 16) + (3 \text{ x } 1) + (11 \text{ x } 0{,}0625 + (5 \text{ x } 0{,}0039)\\ &= 1792 + 160 + 3 + 0{,}6875 + 0{,}0195 = \mathbf{1.955{,}707}\end{aligned}$$

Treinaremos mais este tipo de conversão posteriormente.

A Figura 8 mostra a representação de um número na base hexadecimal

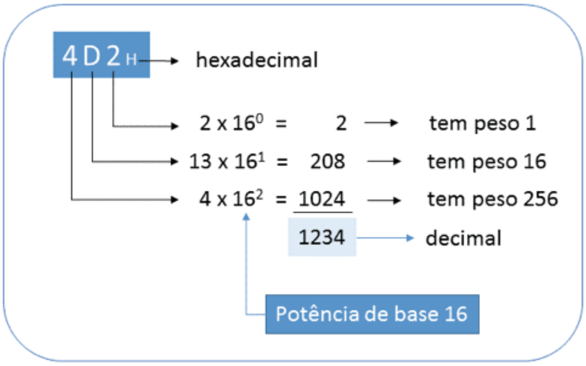


Figura 8

A Tabela 3 mostra a equivalência entre os sistemas numéricos decimal, binário e hexadecimal.

DECIMAL	BINÁRIO	HEXADECIMAL
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Para facilitar os cálculos, a tabela de potências de 16 é apresentada em seguida na Figura 9.

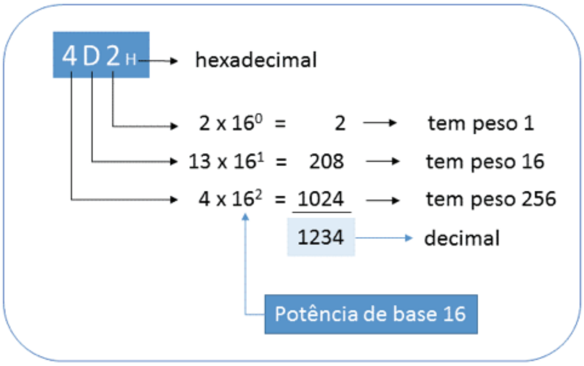


Figura 9

SISTEMA DE BASE OCTAL

Outro sistema numérico utilizado, para simplificar e reduzir as representações do sistema binário, é o sistema octal, de base oito. Ele possui 8 dígitos para representá-lo. Os dígitos deste sistema são, portanto:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7

O Sistema Octal (base 8) é formado por oito símbolos ou dígitos; para representação de qualquer dígito em octal, necessitamos de três dígitos binários.

Os números octais têm, portanto, um terço do comprimento de um número binário e fornecem a mesma informação.

Vamos agora apresentar exemplos de números na base octal.

O número $(331)_8 \rightarrow (217)_{10}$

O número $(45)_8 \rightarrow (37)_{10}$

Este cálculo é visualizado na Figura 10..

3	3	1
3×8^2	3×8^1	1×8^0
192 + 24 + 1 = **217**		

4	5
4×8^1	5×8^0
32 + 5 = **37**	

Figura 10

Outro exemplo de número octal, agora com dígitos após a vírgula:

$(734{,}16)_8 = (7 \times 8^2) + (3 \times 8^1) + (4 \times 8^0) + (1 \times 8^{-1}) + (6 \times 8^{-2}) = (7 \times 64) + (3 \times 8) + (4 \times 1) + (1 \times 0{,}125) + (6 \times 0{,}0156) = 448 + 24 + 4 + 0{,}125 + 0{,}0936 = \mathbf{476{,}186}$

A Figura 11 seguinte 4.20 mostra a representação de um número na base octal.

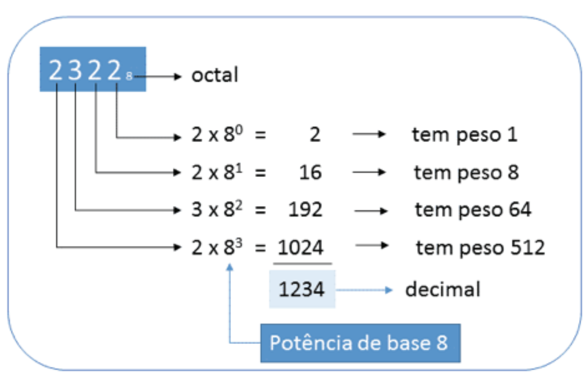


Figura 11

Para ajudar a fazer os cálculos e representações numéricas, a Tabela 4 apresenta a equivalência entre os sistemas decimal, binário, octal e hexadecimal

Tabela de Valores			
Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Tabela 4

Podemos utilizar outras bases além destas que foram apresentadas como a base três, por exemplo, que utiliza 3 dígitos que são 0, 1, e 2.

A sequência numérica será, portanto, a seguinte:

0,1,2,10,11,12,20,21,22,100,101,102,110, 111, 112, ...

0,1,2,10,11,12, 20,21,22,100, 101,102,110...(base 3)

0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12....(base10)

Outro exemplo seria a base 5, que utiliza 5 dígitos (0, 1, 2, 3, 4), conforme vemos a seguir:

0,1,2,3,4,10,11,12,13,14,20,21,22,23,24,30...

....

0,1,2,3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15...

Ou então a base 7 que tem 7 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), conforme vemos a seguir:

0,1,2,3,4,5,6,10,11,12,13,14,15,16,20,21,22,23,24...

....

0,1,2,3,4,5,6, 7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15,16,17,18...

Atividade 1

Utilizando o conceito de bases numéricas, resolva o problema abaixo:

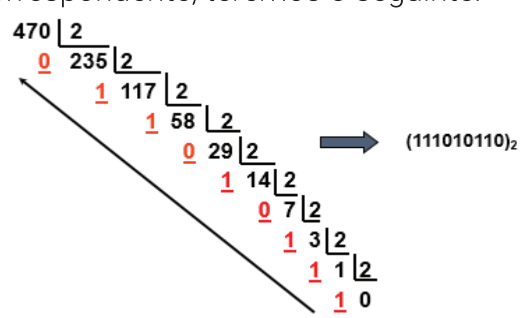
Uma caixa alienígena com o número 21 gravado na tampa foi entregue a um grupo de cientistas. Ao abrirem a caixa, encontraram 17 objetos. Considerando que o alienígena tem um formato humanoide, quantos dedos ele tem nas duas mãos?

CONVERSÕES ENTRE BASES NUMÉRICAS

CONVERSÃO DE DECIMAL PARA BINÁRIO

O processo utilizado é fazer divisões sucessivas por 2 até se obter o quociente 0 (zero) e pegar todos os restos da divisão encontrados em ordem inversa.

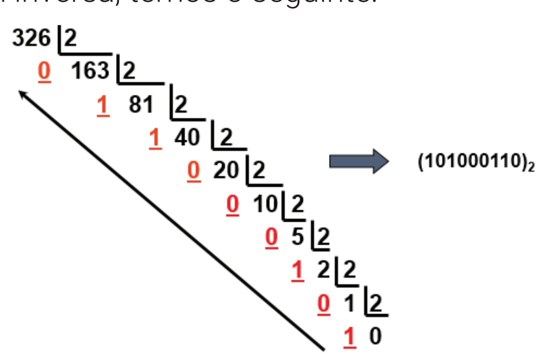
Por exemplo, se quisermos transformar o número 470 em decimal para o binário correspondente, teremos o seguinte:



Portanto $(470)_{10} = (11101010110)_2$

Outro exemplo: Converter o número **326** de decimal para binário.

Pelas divisões sucessivas por 2 até obter o quociente 0 e pegando o resto em ordem inversa, temos o seguinte:



Portanto $(326)_{10} = (101000110)_2$

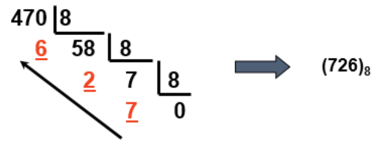
Atividade 2

Converter os números $(78)_{10}$ $(123)_{10}$ $(795)_{10}$ para binário.

CONVERSÃO DE DECIMAL PARA OCTAL

O processo é similar à conversão de decimal para octal. Vamos usar divisões sucessivas e pegar o resto em ordem inversa. A diferença é que dividiremos os números por 8 (oito), que é a base da conversão que desejamos.

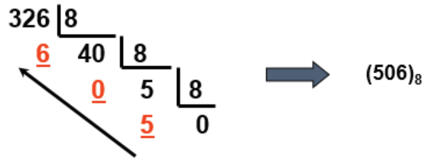
Por exemplo: se eu quiser converter o número 470 de decimal para octal, faria o seguinte:



Portanto $(470)_{10} = (726)_8$

Outro exemplo: Converter o número **326** de decimal para octal.

Pelas divisões sucessivas por 8 até obter o quociente 0 e pegando o resto em ordem inversa, temos o seguinte:



Portanto $(326)_{10} = (506)_8$

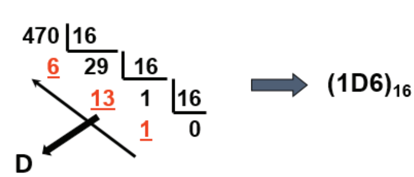
Atividade 3

Usando o método de divisões sucessivas por 8 e pegando o resto em ordem inversa, obter o equivalente em octal dos seguintes números em decimal: 784   512   419.

CONVERSÃO DE DECIMAL PARA HEXADECIMAL

O processo é similar às conversões anteriores. Vamos usar divisões sucessivas e pegar o resto em ordem inversa. A diferença é que dividiremos os números agora por 16 (dezesseis), que é a base da conversão que desejamos.

Por exemplo, se eu quiser converter o número 470 de decimal para hexadecimal, faria o seguinte:



Portanto $(470)_{10} = (1D6)_{16}$

Note que representamos o número 13 em hexadecimal pelo símbolo D

Vamos agora fazer a conversão do número 326 de decimal para hexadecimal. O processo é idêntico e o resultado é o seguinte:

Portanto $(326)_{10} = (146)_{16}$

Atividade 4

Dados os números 586 732 e 378, na base decimal, transformá-los em hexadecimal

A partir das conversões anteriores, percebemos um padrão que é o seguinte:

Para converter um número da base decimal para qualquer outra base, utilizamos o método de fazer divisões sucessivas pela base para a qual queremos fazer a conversão até que o quociente vire zero. Em seguida, pegamos o resto das divisões em ordem inversa. Este será o resultado da conversão.

CONVERSÃO DE BINÁRIO PARA DECIMAL

Para converter um número binário em decimal, utilizamos a representação polinomial (soma do produto dos algarismos pela base correspondente à posição no número)

Por exemplo:

$10100_{(2)} = 20_{(10)}$

$$\underbrace{1 \times 2^4}_{16} + \underbrace{0 \times 2^3}_{0} + \underbrace{1 \times 2^2}_{4} + \underbrace{0 \times 2^1}_{0} + \underbrace{0 \times 2^0}_{0} = 20_{(10)}$$

Outro exemplo:

$(11011101)_2 = ?$

$$\underbrace{1 \times 2^7}_{128} + \underbrace{1 \times 2^6}_{64} + \underbrace{0 \times 2^5}_{0} + \underbrace{1 \times 2^4}_{16} + \underbrace{1 \times 2^3}_{8} + \underbrace{1 \times 2^2}_{4} + \underbrace{0 \times 2^1}_{0} + \underbrace{1 \times 2^0}_{1} = 121_{(10)}$$

Mais um exemplo é mostrado a seguir:

Conversão de binário para decimal

Exemplo:

$$100011_{(2)} = 35_{(10)}$$

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 35_{(10)}$$

Atividade 5

Converter os seguintes números binários em decimais:

$(111)_2$ = ______________________________

$(100110)_2$ = ______________________________

$(11001)_2$ = ______________________________

$(1100001)_2$ = ______________________________

$(11001111)_2$ = ______________________________

Qual é o número máximo representado por oito dígitos binários?

____

____

____

CONVERSÃO DE BINÁRIO PARA OCTAL E HEXADECIMAL

As conversões do sistema numérico binário para octal ou hexadecimal são feitas pelo processo de agrupar bits. Cada conjunto de três números binários corresponde a um número octal. Portanto, agrupamos todos os dígitos 1 e 0 do número binário em conjuntos de três, começando pela direita. Adicionamos zeros à esquerda do último dígito, caso não haja dígitos suficientes para criar um grupo de três dígitos binários.

Vamos ver um exemplo:

10011011_2

1 0	0 1 1	0 1 1	
0 1 0	0 1 1	0 1 1	
$2^2 2^1 2^0$	$2^2 2^1 2^0$	$2^2 2^1 2^0$	
4 2 1	4 2 1	4 2 1	
0 2 0	0 2 1	0 2 1	➔ (0+2+0) (0+2+1) (0+2+1) ➔ $2\ 3\ 3_8$

Portanto, $(10011011)_2 = (233)_8$

Vamos explicar o que fizemos, passo a passo, colocamos outro exemplo:

- **Problema:**
  - Converta **101010011**$_2$ para octal.
- **Separe em grupos de três:**
  - 101 010 011
- **Adicione os espaços reservados:**
  - 101 010 011
    421 421 421
- **Marque cada posição:**
  - 101 010 011
    421 421 421
    401 020 021

Adicione os números em cada conjunto de três dígitos. Quando souber quais posições estão no número octal, adicione cada conjunto de três dígitos individualmente. Então, para o conjunto 101, que equivale a 4, 0 e 1, você vai chegar no número **5** (4 + 0 + 1 = 5{\displaystyle 4+0+1=5}); para o conjunto 010, você chegará ao número 2 (0 + 2 + 0) e, para o último trio 011, chegamos ao número 3 (0 + 2 + 1). Portanto, a conversão para octal dará o seguinte resultado: 523_8

Outro exemplo:

- **Problema:** Converta **101010011**$_2$ para octal.
- **Separe, adicione os espaços reservados e marque cada posição:**
  - 101 010 011
    421 421 421
    401 020 021
- **Adicione cada conjunto de três dígitos:** {\displaystyle (4+0+1)(0+2+0)(0+2+1)=5,2,3}(4 + 0 +1) (0 + 2 +0) (0 + 2 + 1) = 5 2 3_8

Para facilitar esta conversão, podemos usar a tabela de conversão de binário para octal seguinte:

Octal	binário
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabela 5

Por exemplo, para converter o número binário **110101** para octal, usando a tabela de conversão, teremos o seguinte:

1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1
6_8			5_8		
65					

O resultado será, portanto: **65**

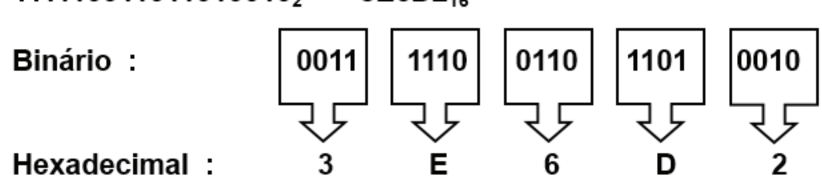
De modo semelhante, para converter um número binário para hexadecimal, reunimos agora os binários de quatro em quatro (em vez de três em três do octal, pois, para representar os dezesseis dígitos hexadecimais em binários, precisamos de 4 dígitos binários, conforme a tabela de conversão seguinte):

DECIMAL	BINÁRIO	HEXADECIMAL
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Tabela 6

Como exemplo, vamos converter o número binário **111110011011010010_2** em hexadecimal, agrupando os números de quatro em quatro e usando a tabela de conversão:

$$111110011011010010_2 = 3E6D2_{16}$$



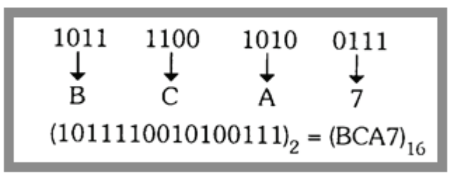
Conforme vemos, o resultado será **$3E6D2_{16}$**

Outro exemplo: Converter o número **01011011**$_2$ de binário para hexadecimal. A conversão dará **5B**$_{16}$

0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
$5_{10} = 5_{16}$				$11_{10} = B_{16}$			
5B							

Mais um exemplo:

$$\mathbf{(1011110010100111)_2 = (\ ?\ )_{16}}$$



Resumindo, para converter um número binário em octal, agrupamos os números de 3 em 3 e, para converter em hexadecimal, agrupamos os números de 4 em 4, conforme vemos na Figura 12.

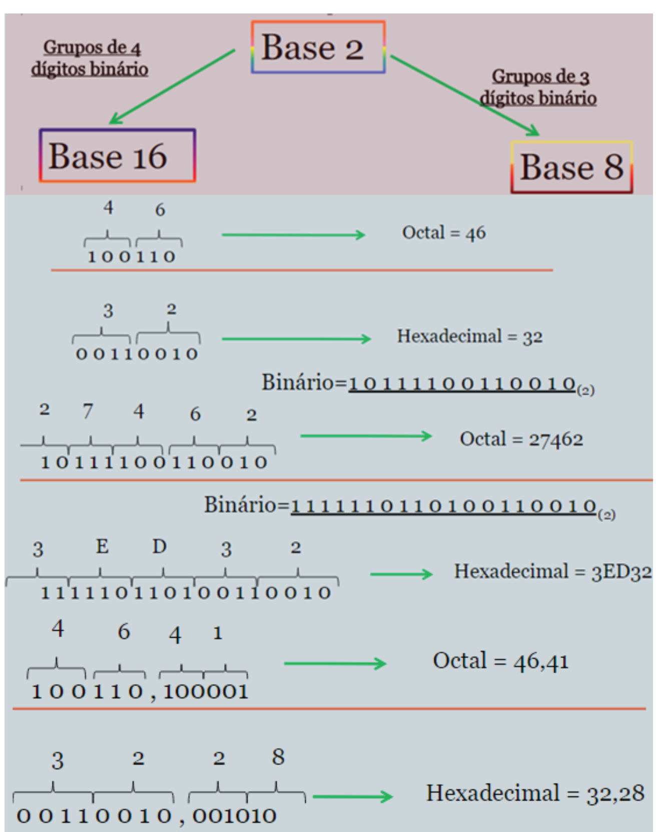


Figura 12

CONVERSÃO DE OCTAL E HEXADECIMAL PARA BINÁRIO

De modo similar, para converter um número octal para binário, cada número octal gera 3 binários.

Por exemplo, o número octal 765341_8 se transforma em 111110101011100001_2 em binário, conforme vemos em seguida

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1_8 \\ 111 & 110 & 101 & 011 & 100 & 001_2 \end{array}$$

Do mesmo modo, cada número em hexadecimal se transforma em binário, gerando 4 binários por número.

Por exemplo, o número hexadecimal $AD89C7_{16}$

se transforma em $101011011000100111000111_2$ em binário, conforme vemos em seguida:

$$\begin{array}{cccccc} A & D & 8 & 9 & C & 7_{16} \\ 1010 & 1101 & 1000 & 1001 & 1100 & 0111_2 \end{array}$$

Outro exemplo é o seguinte:

$$(A79E)_{16} = (\ ?\ )_2$$

$$\begin{array}{cccc} A & 7 & 9 & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1010 & 0111 & 1001 & 1110 \end{array}$$

$$(A79E)_{16} = (1010011110011110)_2$$

CONVERSÃO DE OCTAL PARA HEXADECIMAL E HEXADECIMAL PARA OCTAL

Na conversão entre octal e hexadecimal, é mais fácil primeiro passar para binário, e de binário para octal ou hexadecimal. Lembrando que cada 4 números binários correspondem a um número hexadecimal e que cada grupo de três números binários equivalem a um número octal.

CONVERSÃO DE NÚMERO HEXADECIMAL PARA OCTAL

Primeiro, transforma-se o número hexadecimal em binário e, então, este é convertido em octal. Obtemos assim a seguinte equivalência para esta conversão:

Hexadecimal → Binário → Octal

Exemplo:

A F 9 8 C_{16} **Hexadecimal**

1010 1111 1001 1000 1100 **Binário**

010 101 111 100 110 001 100

2 5 7 4 6 1 4_8 **Octal**

Observamos, neste exemplo, que o número **AF98C** em hexadecimal é inicialmente convertido em binário (cada hexadecimal corresponde a 4 dígitos binários). Em seguida, agrupamos os dígitos binários de 3 em 3 e obtemos o equivalente número octal que é **2574614**.

Outro exemplo:

Vamos converter o número **BC85A**$_{16}$ de hexadecimal para octal.

B C 8 5 A_{16} **Hexadecimal**

1011 1100 1000 0101 1010 **Binário**

010 111 100 100 001 011 010

2 7 4 4 1 3 2_8 **Octal**

CONVERSÃO DE NÚMERO OCTAL PARA HEXADECIMAL

Primeiro, transforma-se o número octal em binário e, então, este é convertido em hexadecimal. Obtemos, assim, a seguinte equivalência para esta conversão:

Octal → Binário → Hexadecimal

Exemplo:

Vamos converter o número octal **76414**$_8$ em hexadecimal

7 6 4 1 4_8

111 110 100 001 100

0111 1101 0000 1100

7 D 0 C_{16}

Outro exemplo:

Vamos agora converter o número octal **65473**$_8$ em hexadecimal

6 5 4 7 3_8

110 101 100 111 011

0110 1011 0011 1011

6 B 3 B_{16}

CONVERSÕES DE QUALQUER SISTEMA NUMÉRICO PARA DECIMAL

Vimos anteriormente como converter um sistema binário para decimal. A regra para transformar qualquer sistema em decimal é a mesma. Para converter qualquer sistema numérico em decimal, utilizamos a representação polinomial (soma do produto dos algarismos pela base correspondente à posição no número)

Por exemplo:

Converter o sistema hexadecimal em decimal:

$2CA48_{16} \rightarrow (\ )_{10}$

$2CA48_{16} = (2x16^4) + (12x16^3) + (10x16^2) + (4x16^1) + (8x16^0) =$

$= 2 \times 65536 + 12 \times 4096 + 10 \times 256 + 4 \times 16 + 8 \times 1 =$

$= 131072 + 49152 + 2560 + 64 + 8 = (182856)_{10}$

Converter o sistema octal em decimal:

$76324_8 \rightarrow (\ )_{10}$

$76324_8 = (7x8^4) + (6x8^3) + (3x8^2) + (2x8^1) + (4x8^0) =$

$= 7 \times 4096 + 6 \times 512 + 3 \times 64 + 2 \times 8 + 4 \times 1 =$

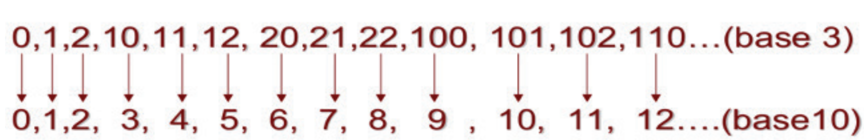
$= 28672 + 3072 + 192 + 16 + 4 = (31956)_{10}$

OUTRAS BASES NUMÉRICAS

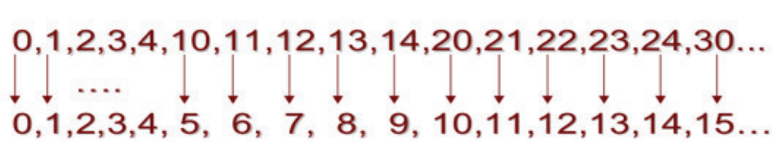
Até o momento, fizemos conversões envolvendo a base decimal, que usamos no quotidiano, e as base binárias, octal e hexadecimal, que são utilizadas em computação.

Porém, os conceitos apresentados se aplicam a qualquer base numérica.

Por exemplo, a base numérica 3, que utiliza os três dígitos 0, 1 e 2:



Outra base poderia ser a base numérica 5, que utiliza os cinco dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5:



Podemos também exemplificar a base numérica 7, que utiliza os sete dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, e 6:

REGRAS GERAIS DE CONVERSÃO NUMÉRICA:

- Decimal para outra Base

Se desejamos converter um número de uma base decimal para qualquer outra base, utilizamos o processo de divisão, sendo que o divisor será sempre a base para a qual deseja fazer a conversão. Fazemos divisões sucessivas até obter o quociente zero. Em seguida, pegamos o resto das divisões em ordem inversa.

- De outra base para decimal

Utilizamos as bases elevadas à potência como peso, conforme a posição do dígito no número a ser convertido para decimal. Em seguida, somamos as parcelas obtidas. É um método em que cada número é transformado em polinômio, conforme vimos:

Número = $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_n\text{-}2b^{n-2} \ldots + a_0 b^0$

Onde:

a_n = algarismo,

b = base do número

n = quantidade de algarismo - 1

- De binário para octal e vice-versa

Agrupamos o número binário em conjunto de três dígitos, sendo que cada um deste conjuntos representa um número octal. Do mesmo modo, para converter um número octal em binário, cada número octal é convertido em 3 dígitos binários.

- De binário para hexadecimal e vice-versa

Agrupamos o número binário em conjunto de quatro dígitos, sendo que cada um destes conjuntos representa um número hexadecimal. Do mesmo modo, para converter um número hexadecimal em binário, cada número hexadecimal é convertido em 3 dígitos binários.

- De octal para hexadecimal e vice-versa

Primeiro convertemos o número octal ou hexadecimal em binário como passo intermediário e, depois, o número binário é transformado em octal ou hexadecimal, de acordo com as regras 3 e 4 anteriores.

Atividade 6

Agora que vimos todas as regras de conversões numéricas, tente resolver o seguinte exercício:

a. Converter o número decimal $(784)_{10}$ em binário, octal e hexadecimal;
b. Converter o número binário $(1011010110)_2$ em octal, hexadecimal e decimal;
c. Converter o número octal $(7542)_8$ em binário, hexadecimal e decimal;
d. Converter o número hexadecimal $(A79DC)_{16}$ em binário, octal e decimal.

OPERAÇÕES B ÁSICAS COM BASES NUMÉRICAS

SOMA DE SISTEMAS NUMÉRICOS

Quando realizamos uma soma em qualquer sistema numérico, se a soma de uma coluna ultrapassar a base numérica, passamos para a coluna seguinte da soma a quantidade de bases ultrapassadas e deixamos o resto na coluna anterior.

dica

Pense no processo intuitivo que você utiliza para fazer somas em nosso sistema decimal. Quando a soma de uma coluna ultrapassa a base, você passa a quantidade de bases para a coluna seguinte, e mantém o resto na coluna atual.

Exemplificando, se a soma de uma coluna dá 27, você deixa 7 na coluna atual e passa 2 (duas bases 10) a serem somados na coluna seguinte.

Você vai entender com as somas que iremos realizar com os diversos sistemas numéricos.

Exemplo:

Vamos somar os números decimais seguintes:

```
 2  2  2  2  2  1      (quantidade de bases dez somadas às colunas seguin
    9  8  7  8  6  5
    8  7  9  6  7  9
    8  9  6  7  9  5
---------------------------
 2  7  6  4  3  3  9
```

Note que a soma da primeira coluna deu um total de 19, que ultrapassou a base 10 (sistema decimal). Portanto passamos uma base (que corresponde a 10) para a coluna seguinte (a segunda) e deixamos o resto 9 (19-10) na coluna anterior (a primeira).

A soma da coluna dois deu um total de 23, que ultrapassou a base 10. Então passamos 2 bases (2x10=20) para a terceira coluna e mantemos o resto 3 (23-20=3) na segunda coluna. E assim por diante.

Esta regra vale para somas em qualquer sistema numérico.

Por exemplo, vamos realizar uma soma de números binários:

```
  2  2  1  1  1  1  1  1       (quantidade de bases 2 somadas às colunas seguint
     1  1  0  1  1  0  1  1
     1  1  1  1  1  1  0  1
     1  1  0  1  0  1  1  1
-----------------------------------
1  0  1  0  1  0  1  1  1  1
```

Na primeira coluna, a soma deu 3, ultrapassando a base 2. Portanto, passamos uma base para a segunda coluna e deixamos o resto 1 na primeira coluna (3-2=1).

Note que a soma da sexta coluna deu 4, o que equivale a duas bases de 2 que passamos para a sétima coluna seguinte, sendo que o resto zero {4-(2x2)=0} permaneceu na sexta coluna.

Na oitava coluna (última), a soma deu 5, ultrapassando a base 2 em dobro e sobrando 1 {5-(2x2)=1}. Portanto, passamos 2 para a coluna seguinte, a nona. A soma da nona coluna deu 2, o que equivale a uma base 2, que passamos para a coluna seguinte, a décima, sobrando 0 na coluna anterior, a nona.

Vamos agora realizar uma soma de número octais. Vale a mesma regra. Contudo, agora a base é 8.

```
2  1  1  2  2  1      (quantidade de bases 8 somadas às colunas seguintes)
   7  6  3  4  5  1
   5  0  2  7  6  5
   4  3  7  6  5  7
-------------------------
2  1  1  6  3  1  5
```

Se fizermos uma soma com números hexadecimais, vale estritamente a mesma regra. Por exemplo, vamos somar números hexadecimais, cuja base, como sabemos, é 16:

```
1  2  2  2  2  2      (quantidade de bases 16 somadas às colunas seguintes)
   A  9  7  D  E  F
   B  C  D  C  E  9
   5  F  D  B  A  A
----------------------------
1  C  6  3  6  8  2
```

A primeira coluna deu uma soma de 34, o que equivale a duas bases de 16, que passamos para a segunda coluna seguinte, sobrando 2 {34-(2x16)=2}, que permanece na coluna 1. Note que na sexta coluna, a soma deu 28, o que equivale a uma base 16 que passa para a coluna seguinte, a sétima, sobrando 12, que equivale a C {28-16=12 que é C em hexadecimal}, e que permanece na sexta coluna.

SUBTRAÇÃO DE SISTEMAS NUMÉRICOS

Quando realizamos uma subtração, o processo segue a seguinte regra que vamos ver através de um exemplo no sistema decimal.

```
 1  1        1  1     (quantidade de bases subtraídas da coluna seguinte, emprestadas para a
coluna anterior)
 9  5  4  3  7  6   ➔ Minuendo
 5  8  7  2  9  8   ➔ Subtraendo
------------------------
 3  6  7  0  7  8   ➔ Resultado da subtração
```

Na primeira coluna, subtraímos o número 8 de 6. Como 6 é menor que 8, emprestamos uma base da segunda coluna que é 10. Portanto, subtraímos agora 8 de 16 (6 + 10), o que resulta em 8. Na segunda coluna, como emprestamos uma base para a primeira coluna, passamos a subtrair 9 de 6 (7-1). Do mesmo modo, como 6 é menor que 9, emprestamos uma base da terceira coluna. Agora subtraímos 9 de 16, o que resulta em 7. Na terceira coluna, a subtração passa a ser de 2 (3-1 emprestado) menos 2, o que resulta em zero. E assim por diante, sempre que tentamos subtrair um número de outro menor, emprestamos uma base do número da coluna seguinte, diminuindo em 1, portanto, o número da coluna seguinte. Este processo vale para qualquer sistema numérico.

Vamos agora realizar uma subtração no sistema binário:

As regras são as seguintes:

```
                         10
   0      1      1     1 0
 - 0    - 1    - 0    - 1
 -----  -----  -----  -----
   0      0      1      1 → [1 e empresta 1 base : 10 - 1 = 1]
```

Exemplo:

```
            (+2)
          -1 +10
 1   1   1   0   1      (29)10
 1   0   0   1   1      (19)10
 -----------------     ---------
 0   1   0   1   0      (10)10
```

Na primeira coluna, 1 menos 1 resulta em 0. Na segunda coluna, 0 é menor que 1 (minuendo menor que o subtraendo). Portanto, precisamos emprestar uma base da terceira coluna (10 em binário que equivale a 2). Agora, com a base emprestada, teremos 2 menos 1, o que resulta em 1 para a segunda coluna. Na terceira coluna, como emprestamos uma base, o número 1 passa para 0. Teremos então 0 menos 0, que resulta em 0. Na quarta coluna, 1 menos 0 resulta em 1, e na quarta coluna, 1 menos 1, resulta em 0.

Vamos agora realizar uma subtração em octal, seguindo o mesmo procedimento e lembrando que agora a base é oito.

```
    +8
-1  -1  +8  -1  +8
 7   6   4   5   3   6     (256350)10
 3   7   5   2   4   1     (129697)10
 ---------------------    -------------
 3   6   7   2   7   5     (126653)10
```

Na primeira coluna, temos 6 menos 1 que resulta em 5. Na segunda coluna, o minuendo 3 é menor que o subtraendo 4. Portanto vamos emprestar uma base oito da terceira coluna, o que acaba totalizando

11 (3+4=11). Então 11 menos 4, resulta em 4 para a segunda coluna. Na terceira coluna, como emprestamos uma base, o cinco se transforma em 4 e teremos, portanto, 4 menos 2, o que resulta em 2. Na quarta coluna, o minuendo 4 é inferior ao subtraendo 5. Portanto, temos que emprestar uma base da quinta coluna, o que torna o minuendo 12 (4+8=12). Então, teremos 12 menos 5, o que resulta em 7 para a quarta coluna. A quinta coluna terá o minuendo igual a 5, pois emprestamos uma base para a quarta coluna (6-1=5). Então o minuendo 5 fica menor que o subtraendo 7. Então emprestaremos uma base da sexta coluna, tornando o minuendo igual a 12 (6-1+8=13). Portanto, 13 menos 7 resulta em 6 na quinta coluna. Finalmente, o minuendo 7 da sexta coluna se torna 6, pois emprestou uma base à coluna anterior. Teremos então 6 menos 3, resultando em 3 para a sexta coluna.

Para terminar, vamos realizar uma subtração em hexadecimal, seguindo o mesmo processo de emprestar bases, caso o minuendo da coluna anterior seja menor que o subtraendo.

-1	+16	-1	+16	-1	+16	
A	C	9	7	F	5	$(11311093)_{10}$
8	D	5	A	C	9	$(9263817)_{10}$
1	**F**	**3**	**D**	**2**	**C**	$(2047276)_{10}$

Na primeira coluna, emprestamos uma base ao minuendo 5, totalizando 21 e, em seguida, subtraímos 9, o que resultou em 12 (C em hexadecimal). Na segunda coluna F (15 em decimal), subtraímos C (12 em hexadecimal). O resultado foi então 2. Na terceira coluna, o minuendo 7 é menor que o subtraendo A (10 em hexadecimal). Portanto, vamos emprestar uma base da quarta coluna. Teremos então 23 (7+16=23) menos A (10 em hexadecimal). O resultado será, então, 13, que equivale a D em hexadecimal (23-10=13). Na quarta coluna, o minuendo foi subtraído de uma base que emprestou, se tornando 8 (9-1=8). O resultado será, portanto, 3 (8-5=3). Na quinta coluna, o minuendo C (13 em hexadecimal) é inferior ao subtraendo D (14 em hexadecimal). Portanto, teremos que emprestar uma base da sexta coluna, obtendo então 29 (13+16=29), resultando a subtração em 15 ou F em hexadecimal (29-14=15) para a quinta coluna. Finalmente, o minuendo A (10 em hexadecimal) da sexta coluna, como emprestou uma base para a coluna anterior se tornou 9 (10-1=9). Teremos, então como resultado para a sexta coluna, o número 1 (9-8=1).

MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Vamos agora mostrar um exemplo de multiplicação binária. É semelhante à multiplicação no sistema decimal.

Por exemplo, vamos multiplicar o número binário $(1101)_2$ por $(1010)_2$:

```
     1101    multiplicando (A)
   × 1010    multiplicador (B)
   ------
     0000
    1101
   0000
  1101
 --------
 10000010    produto (P)
```

1101 (13) × 1010 (10) = 10000010 (130)

Verificamos que a multiplicação binária se torna uma soma de números binários, seguindo as regras de adição binária já vistas.

Outro exemplo:

```
        111010
      x 110101
  ------------
        111010
       0000000
      11101000
     000000000
    1110100000
   11101000000
  ------------
  110000000010
```

Mais um exemplo:

$$
\begin{array}{cr}
 & 10101_2 \\
\times & 111_2 \\
\hline
 & 10101_2 \\
+ & 10101\ \ _2 \\
+ & 10101\ \ \ \ _2 \\
\hline
 & 10010011_2
\end{array}
$$

DIVISÃO BINÁRIA

Como nas demais operações aritméticas, a divisão binária é efetuada de modo semelhante à divisão decimal, lembrando apenas que, no sistema binário, utilizamos apenas os dígitos 0 e 1.

O valor do **divisor** deve ser igual ou menor que o do **dividendo** e, se for igual ou menor, é escrito 1 no quociente. Esse valor é multiplicado pelo divisor e subtraído do dividendo, até atingir o valor zero, no caso da divisão exata.

Vamos mostrar um exemplo de divisão binária.

Por exemplo, vamos dividir o número binário **11011001**$_2$ (26 em decimal) por **1000** (8 em decimal)

O resultado será **11**$_2$ (3 em decimal) e o resto será **0010**$_2$ (2 em decimal):

```
  11010 |1000
- 1000    11
  01010
 - 1000
   0010
```

Outro exemplo.

Vamos dividir o número binário **(11011)**$_2$ por **(11)**$_2$. Os dois primeiros dígitos do dividendo são comparados com o divisor e, se for maior ou igual, é escrito 1 no quociente. Esse valor é multiplicado pelo divisor e subtraído dos dois primeiros dígitos.

```
 1  1  0  1  1  |  1  1
                |----------------
 1  1              1  0  0  1
--------
 0  0  0
    0  0
   --------
    0  0  1
       0  0
      ---------
       0  1  1
          1  1
         ------
          0  0
```

Ao resultado (00) é acrescentado o próximo dígito do dividendo (0). Desde que o valor é menor que o divisor, o dígito 0 é acrescentado ao quociente.

O procedimento é repetido até o último dígito do dividendo, obtendo-se o resultado **1001** e resto **0**.

Atividade 7

Para encerar e testar seu conhecimento, efetue as seguintes conversões numéricas:

1 – Converter os seguintes números para as bases binária, octal e hexadecimal:

a) 10_{10}

b) 64_{10}

c) 121_{10}

d) 1255_{10}

e) 512_{10}

f) 497_{10}

2 – Converter os seguintes números para a base decimal:

a) 10_2
b) 64_8
c) 121_{16}
d) $12C_{16}$
e) 512_8
f) FFF_{16}
g) 11111000011110_2
h) 77_8
i) 1111111111_2

3 – Converter os seguintes números para as bases indicadas:

a) 11_2 → octal

b) 644_8 → hexadecimal

c) 255_{16} → binário

d) 345_8 → binário

e) 512_8 → hexadecimal

f) 497_{16} → octal

g) 111000111_2 → octal

h) 111111111111_2 → hexadecimal

4 – Executar as seguintes operações aritméticas:

- Adição em hexadecimal

ACD9F8

+ C87B79

DEF79A

- Adição em octal

763564

+ 573647

465765

- Adição em binário

10111010

+ 11011011

11011101

- Subtração em hexadecimal

FBC9D8

- AD9789

- Subtração em octal

7654765

- 6754376

- Subtração em binário

1110010101

- 0111010110

- Multiplicação binária

$(11110110)_2$

x $(1010)_2$

- Divisão em binário

$(10111011)_2$ / $(1100)_2$

leitura indicada

UFRGS ***História dos Números.*** Disponível em: <https://goo.gl/G4GEx9> e acesso em: 4 set. 2017.

saiba mais

No tópico de sistemas numéricos, começamos apresentando a origem dos números e do processo de contagem. Vimos a evolução dos sistemas numéricos até chegar a nosso sistema decimal de numeração. Apresentamos também o **sistema de numeração binário**, introduzido pelo computador, que é essencialmente uma máquina binária, que possui dois estados representados pelos bits 0 e 1. Os sistemas de numeração hexadecimal e octal foram vistos também e decorrem da necessidade de condensar a representação numérica binária. Apresentamos as técnicas e regras de conversão entre os diversos sistemas numéricos e realizamos várias atividades práticas, a fim de compreender estes processos. No final, mostramos como se executam operações aritméticas básicas em todos os diversos sistemas numéricos apresentados. Todos estes conceitos básicos de sistemas numéricos são essenciais para poder compreender a arquitetura dos computadores.

Sistema de Numeração Binário

Sistema de numeração posicional de base 2, em que as quantidades são representadas pelos dígitos 0 e 1. É utilizado pelos computadores. Para simplificar a representação dos sistemas binários, costuma-se utilizar sistemas de numeração mais compactos como o sistema octal, composto por três dígitos binários, ou o sistema hexadecimal, composto por quatro dígitos binários.

Anotações