



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellazione e Controllo
di un cambio automatico
a rotismi epicicloidali
ad otto marce**

Candidato
Paolo PAGANO

Relatori

Prof.re Enrico GALVAGNO

Prof.re Alessandro VIGLIANI

Anno Accademico 2019/20

Indice

1	Introduzione	8
2	Studio Preliminare	10
2.1	Cinematica della trasmissione	10
2.1.1	Prima Marcia	12
2.1.2	Seconda Marcia	13
2.1.3	Terza Marcia	15
2.1.4	Quarta Marcia	16
2.1.5	Quinta Marcia	18
2.1.6	Sesta Marcia	19
2.1.7	Settima Marcia	20
2.1.8	Ottava Marcia	21
2.1.9	Retromarcia	22
2.2	Riscrittura rapporti di trasmissione	23
2.3	Calcolo delle sigma	24
2.4	Tipo di rapportatura	24
2.4.1	Rapportatura Geometrica	24
2.4.2	Rapportatura Progressiva	25
2.5	Rapportatura progressiva rigorosa	27
2.5.1	Premessa	27
2.5.2	Dimensionamento Rapportatura Progressiva rigorosa	27
2.6	Validazione Rapportatura Progressiva rigorosa	31
2.6.1	Considerazioni	31
2.7	Calcolo della coppia in uscita dal cambio	33
2.7.1	Cambio marcia Prima-Seconda ($A - B - C \rightarrow A - B - E$)	34

2.7.2	Cambio marcia Seconda - Terza ($A - B - E \rightarrow B - C - E$)	37
2.7.3	Cambio marcia Terza - Quarta ($B - C - E \rightarrow B - D - E$)	39
2.7.4	Cambio marcia Quarta - Quinta ($B - D - E \rightarrow B - C - D$)	41
2.7.5	Cambio marcia Quinta - Sesta ($B - C - D \rightarrow C - D - E$)	43
2.7.6	Cambio marcia Sesta - Settima ($C - D - E \rightarrow A - C - D$)	45
2.7.7	Cambio marcia Settima - Ottava ($A - C - D \rightarrow A - D - E$)	47
2.8	Calcolo della matrice dinamica del cambio	49
2.8.1	Studio delle forze di contatto tra le ruote	51
2.8.2	Equazioni di equilibrio	55
2.8.3	Matrice $[M]$ e vettori $[\Omega]$, $[T]$	57
2.8.4	Risoluzione Sistema Matriciale	60
3	Implementazione in Simulink e Simscape	69
3.1	Modello Simulink	70
3.1.1	Inerzia Equivalente e Carico Resistente del Veicolo	70
3.1.2	Coppie come ingressi del sistema	72
3.1.3	Attivazione Frizioni	75
3.1.4	Dimensionamento Frizioni	76
3.1.5	Accelerazioni e Velocità angolari	80
3.1.6	Calcolo delle velocità iniziali per ciascuna marcia	81
3.2	Modello Simscape	83
4	Validazione dei risultati	85
4.1	Validazione rapporti di trasmissione	85
4.2	Verifica scorrimento dischi frizione	88
4.3	Verifica coppie agenti sulle frizioni in prima marcia	90
5	Cambio marcia Prima-Seconda	93
5.1	Cambio marcia con variazione lineare delle pressioni di comando delle frizioni	93
5.2	Cambio marcia con logica di controllo	103
5.2.1	Errore sulla stima di un parametro all'interno della logica di controllo	117
6	Conclusioni e Sviluppi futuri	119

Elenco delle figure

2.1	Schema Cambio ZF 8HP 70	11
2.2	Schema di attivazione frizioni	11
2.3	Flusso di potenza prima marcia	12
2.4	Flusso di potenza seconda marcia	14
2.5	Flusso di potenza terza marcia	15
2.6	Flusso di potenza quarta marcia	17
2.7	Flusso di potenza quinta marcia	18
2.8	Flusso di potenza settima marcia	20
2.9	Flusso di potenza ottava marcia	21
2.10	Flusso di potenza retromarcia	22
2.11	Grafico $\omega_{motore} - \omega_{out,cambio}$	27
2.12	Grafico $\omega_{motore} - \omega_{out,cambio}$, rapportatura progressiva rigorosa	30
2.13	Diagramma Coppie	33
2.14	8 speed AT con inerzie, coppie e velocità angolari	50
2.15	Rotismo Epicicloidale	51
2.16	Forze di contatto sul satellite	52
2.17	Rotismo epicicloidale con 4 satelliti	54
2.18	Coppie agenti sull'albero 1	55
2.19	Coppie agenti sull'albero 3	57
3.1	Definizione del carico resistente T_2	71
3.2	Coppie come ingressi del sistema	73
3.3	Calcolo della coppia T_E	74
3.4	Attivazione delle frizioni	75
3.5	Schema di attuazione frizioni	76

3.6	Frizioni e freni attivati	76
3.7	Calcolo delle accelerazioni angolari	80
3.8	Blocco Demux per invio segnali di pressione	83
3.9	Modello Simscape	84
4.1	Rapporto di trasmissione Prima Marcia $i_I = 4.696$	86
4.2	Rapporto di trasmissione Seconda Marcia $i_{II} = 3.130$	86
4.3	Rapporto di trasmissione Terza Marcia $i_{III} = 2.104$	86
4.4	Rapporto di trasmissione Quarta Marcia $i_{IV} = 1.667$	87
4.5	Rapporto di trasmissione Quinta Marcia $i_V = 1.285$	87
4.6	Rapporto di trasmissione Sesta Marcia $i_{VI} = 1$	87
4.7	Rapporto di trasmissione Settima Marcia $i_{VII} = 0.839$	88
4.8	Rapporto di trasmissione Ottava Marcia $i_{VIII} = 0.667$	88
4.9	Scorrimento dischi frizione A	89
4.10	Scorrimento dischi frizione B	89
4.11	Velocità ω_1 e ω_7	89
4.12	Verifica coppia T_A	91
4.13	Verifica coppia T_B	92
4.14	Verifica coppia T_C	92
5.1	Profilo delle pressioni agenti sulle frizioni (Prima-Seconda)	95
5.2	Scorrimento frizioni C ed E (Prima-Seconda)	95
5.3	Coppie agenti sulle frizioni C ed E (Prima-Seconda) + coppia motore T_1	98
5.4	Rapporto di trasmissione Prima-Seconda	98
5.5	Flusso di potenza - fase 1	99
5.6	Flusso di potenza - fase 2	100
5.7	Flusso di potenza - fase 3	100
5.8	Flusso di potenza - fase 4	100
5.9	Flusso di potenza - fase 5	101
5.10	Flusso di potenza - fase 6	101
5.11	Andamento giri motore (Prima-Seconda)	102
5.12	Andamento velocità veicolo (Prima-Seconda)	102
5.13	Andamento accelerazione (Prima-Seconda)	103

5.14	Calcolo di $T_{1,real}$	106
5.15	Calcolo della pressione p_C all'inizio della torque phase	106
5.16	Calcolo della pressione p_E alla fine della torque phase	107
5.17	Input ed Output della logica a stati	107
5.18	Sequenza degli stati e delle fasi all'interno della logica di controllo	110
5.19	Output dello Stato Veicolo=2, fase=1	110
5.20	Valori di coppia motrice e profili di pressione in prima marcia	111
5.21	Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 1	111
5.22	Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 2	112
5.23	Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 3	112
5.24	Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 4	113
5.25	Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 5	113
5.26	Profili delle pressioni agenti sulle frizioni C ed E	114
5.27	Andamento delle coppie con profili di pressione ad hoc	114
5.28	Andamento rapporto di trasmissione prima-seconda	115
5.29	Raccordo delle velocità ω_6 e ω_7	116
5.30	Accelerazione veicolo durante cambio marcia prima-seconda	117
5.31	Andamento delle coppie con errore di stima del coefficiente d'attrito	118
5.32	Accelerazione veicolo con errore di stima del coefficiente d'attrito	118

Elenco delle tabelle

2.1	Rapporto tra i denti della corona e del solare per ciascun rotismo	24
2.2	Rapporti di trasmissione consecutivi	25
2.3	Valori $\phi - K_\phi$	26
2.4	Valori $\phi - K_\phi$, primo dimensionamento	28
2.5	Rapporti di trasmissione, primo dimensionamento	29
2.6	Rapportatura Progressiva rigorosa	30
2.7	Raggi ruote dentate	67
3.1	Numero dischi di ciascuna frizione	74
3.2	Raggi effettivi a cui si genera la coppia	74
3.3	Superfici su cui agisce la pressione di attuazione	75
3.4	Coppie agenti sulle frizioni per ciascuna marcia (forma letterale)	78
3.5	Coppie agenti sulle frizioni per ciascuna marcia	78
3.6	Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $220 \text{ N} \cdot \text{m}$	79
3.7	Massime coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $220 \text{ N} \cdot \text{m}$	79
3.8	Velocità iniziali $\omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$	82
4.1	Calcolo della coppia motrice per avere velocità costante	90
4.2	Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $2.64 \text{ N} \cdot \text{m}$	91
5.1	Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, prima marcia	104
5.2	Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, seconda marcia	104
5.3	Calcolo della pressione necessaria sulla frizione C per generare una coppia di $100 \text{ N} \cdot \text{m}$	105

5.4	Calcolo della pressione necessaria sulla frizione E per generare una coppia di $66.7 \text{ N} \cdot \text{m}$	105
-----	---	-----

Capitolo 1

Introduzione

Il cambio automatico rappresenta una tecnologia che pone le proprie origini intorno ai primi anni del secolo scorso. Uno dei primi esempi di trasmissione automatica completamente idraulica che ha trovato largo impiego nel mondo delle autovetture è la trasmissione "*Hydramatic*", sviluppata da General Motors nel 1932.

All'inizio del suo sviluppo, questo tipo di cambio ha trovato diffusione principalmente nel mercato automotive Nord-Americano per una serie di ragioni quali, ad esempio, un minor costo del carburante ed una presenza di autovetture con cilindrata superiori rispetto al mondo europeo. Una crescente attività di sviluppo ingegneristico su questo tipo di tecnologia ha permesso il concepimento di cambi in grado di garantire un notevole risparmio di carburante con conseguente riduzione delle emissioni, un buon comfort durante la marcia e buone performance garantite al guidatore.

I cambi automatici racchiudono tre tipologie: l'AMT (Automated Manual Transmission), meglio noto come "robotizzato", il DCT (Dual Clutch Transmission), tradotto in italiano come "cambio a doppia frizione" ed infine l'AT (Automatic Transmission), costituito da più rotismi epicicloidali interconnessi tra di loro.

Lo studio proposto nel seguito riguarderà l'AT messo in commercio nel 2008 dal gruppo tedesco ZF sotto il nome di ZF-8HP70. Questo tipo di cambio è costituito da 4 rotismi epicicloidali, 2 freni multidisco e 3 frizioni multidisco.

L'azione combinata dei freni e delle frizioni sugli elementi dei singoli rotismi, ovvero sui solari, sulle corone e sui portatreni dei satelliti, permette di ottenere un ben preciso rapporto di trasmissione per tutte le otto marce più la retro, di cui è costituito il cambio.

La trattazione proporrà nel dettaglio lo studio della cinematica, la scrittura di tutte le

equazioni di equilibrio del sistema al fine di ottenere una formulazione matriciale da implementare in Matlab-Simulink.

In aggiunta, verranno ricavate le equazioni che descrivono gli andamenti delle coppie durante un cambio marcia, sia della frizione che viene attivata (entrante), sia di quella che viene disattivata (uscente), allo scopo di impostare nel modo corretto una logica di controllo.

La parte conclusiva marcherà l'importanza di un controllo meticoloso sui profili di pressione per l'attuazione delle frizioni in fase di cambio marcia. Questo garantisce sicuramente comfort al passeggero durante la manovra, ma soprattutto permette di non avere ricircolo di potenza e quindi evitare sovraccarichi meccanici sugli organi della trasmissione.

Capitolo 2

Studio Preliminare

2.1 Cinematica della trasmissione

In questa sezione, si effettua lo studio della cinematica della trasmissione, ovvero il calcolo dei rapporti di trasmissione di ciascuna delle 8 marce più la retro in funzione del numero dei denti delle ruote che compongono l'intero cambio, ovvero 4 rotismi epicicloidali semplici.

In tal modo, conoscendo da catalogo i rapporti di trasmissione di ciascuna marcia [9], una volta calcolati i rapporti di tutte le marce in funzione del numero dei denti, è possibile verificare se i 4 rotismi sono identici l'uno con l'altro o quantomeno identificare una funzione che legghi tra loro il numero dei denti di un rotismo rispetto ad un altro.

Nella fig.2.1, è possibile osservare la disposizione dei 4 rotismi epicicloidali; si qualifica rotismo n.1 quello a sx dello schema e così fino ad arrivare al rotismo n.4 a dx.

Nella fig.2.2, è mostrata l'attivazione dei sistemi di attrito a seconda della marcia selezionata [4].

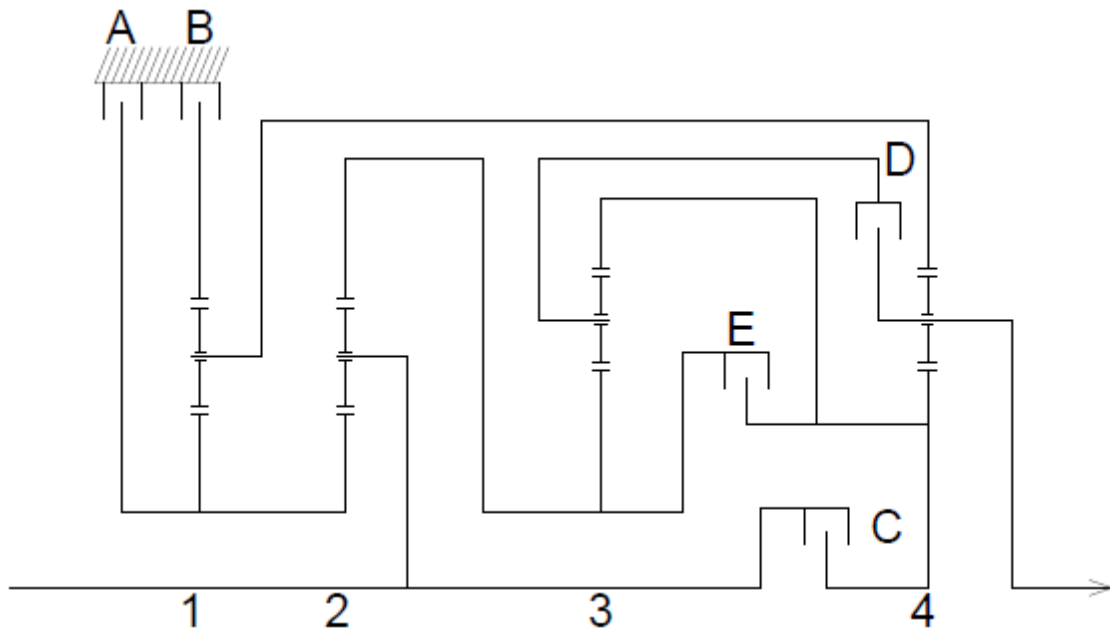


Figura 2.1: Schema Cambio ZF 8HP 70

Gear	Brake		Clutch			Ratio i	Gear step
	A	B	C	D	E		
1	●	●	●			4,696	
2	●	●			●	3,130	1,50
3		●	●		●	2,104	1,49
4		●		●	●	1,667	1,26
5		●	●	●		1,285	1,30
6			●	●	●	1,000	1,29
7	●		●	●		0,839	1,19
8	●			●	●	0,667	1,25
R	●	●		●		-3,297	Total 7,05

Figura 2.2: Schema di attivazione frizioni

Allo stesso tempo, per definire in maniera univoca gli elementi della trasmissione richiamati nelle equazioni seguenti, si adotta la nomenclatura:

- S : solare del rotismo;
- P : planetario del rotismo;
- R : Ring (Corona) del rotismo;

- Z : numero dei denti di una ruota;
- ω : velocità angolare di un solare o di una corona;
- Ω : velocità angolare di un portatreno (porta-planetari);
- i : rapporto di trasmissione.

La nomenclatura Z_{s1} descrive il numero di denti del solare del rotismo n.1; allo stesso modo, si adotta una nomenclatura analoga nel successivo svolgimento analitico per definire il numero di denti di altri componenti appartenenti a rotismi differenti.

Il rapporto di trasmissione in questo caso di studio è definito come il rapporto tra la velocità dell'albero in ingresso ω_{in} e la velocità dell'albero in uscita ω_{out} che, nel cambio in esame, corrisponde alla velocità del portatreno del rotismo n.4, ovvero Ω_4 .

2.1.1 Prima Marcia

La figura 2.3 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in prima marcia, ovvero i freni A e B e la frizione C.

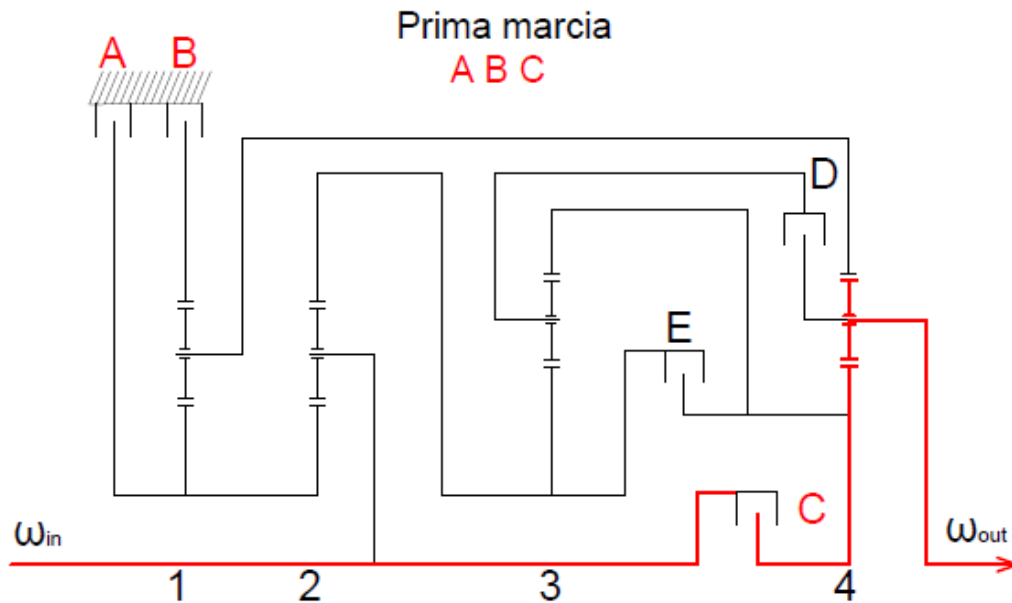


Figura 2.3: Flusso di potenza prima marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{r1} = 0, \omega_{s1} = 0, \Omega_1 = 0$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = 0, \omega_{r2} = \omega_{s3}, \Omega_2 = \omega_{in}$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2}, \omega_{r3} = \omega_{s4}$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \omega_{r3} = \omega_{in}, \omega_{r4} = \Omega_1 = 0, \Omega_4 = \omega_{out}$.

Per il quarto rotismo, ricorrendo alla formula di Willis [6], è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r4} - \Omega_4}{\omega_{s4} - \Omega_4} = -\frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \quad (2.1)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{\omega_{r4}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \cdot \frac{\omega_{s4}}{\Omega_4} \quad (2.2)$$

Imponendo $\omega_{r4} = 0$, si ricava:

$$\Omega_4 = \omega_{s4} \cdot \frac{Z_{s4}}{Z_{r4} + Z_{s4}} \quad (2.3)$$

Ricordando che per questa configurazione $\omega_{s4} = \omega_{in}$ ed avendo definito i come $\frac{\omega_{in}}{\Omega_4}$, si ottiene il rapporto di riduzione della prima marcia:

$$i_I = \frac{Z_{r4} + Z_{s4}}{Z_{s4}} \quad (2.4)$$

2.1.2 Seconda Marcia

La figura 2.4 mostra come in seconda marcia gli elementi di attrito che agiscono sono i freni A e B e la frizione E.

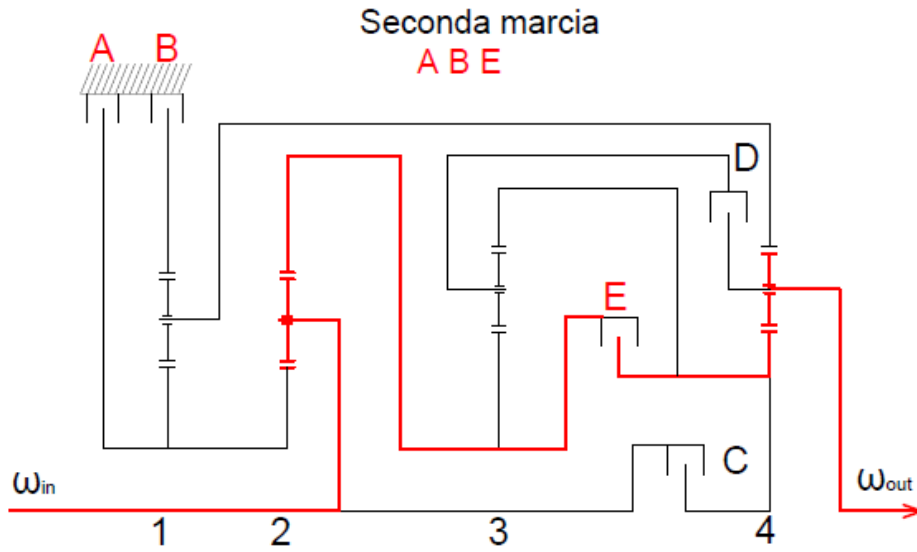


Figura 2.4: Flusso di potenza seconda marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{r1} = 0$, $\omega_{s1} = 0$, $\Omega_1 = 0$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = 0$, $\omega_{r2} = \omega_{s3}$, $\Omega_2 = \omega_{in}$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \Omega_3$;
- 4° rotismo: $\omega_{r4} = \Omega_1 = 0$, $\Omega_4 = \omega_{out}$, $\omega_{s4} = \omega_{r2} = \omega_{s3} = \omega_{r3} = \Omega_3$.

Per il quarto rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r4} - \Omega_4}{\omega_{s4} - \Omega_4} = -\frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \quad (2.5)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{\omega_{r4}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \cdot \frac{\omega_{s4}}{\Omega_4} \quad (2.6)$$

Imponendo $\omega_{r4} = 0$, si ricava:

$$\Omega_4 = \omega_{s4} \cdot \frac{Z_{s4}}{Z_{r4} + Z_{s4}} \quad (2.7)$$

Per il secondo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r2} - \Omega_2}{\omega_{s2} - \Omega_2} = -\frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \quad (2.8)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{\omega_{r2}}{\Omega_2} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{s2}}{\Omega_2} \quad (2.9)$$

Imponendo $\omega_{s2} = 0$, si ricava:

$$\frac{\omega_{r2}}{\Omega_2} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \quad (2.10)$$

ovvero:

$$\omega_{r2} = \omega_{in} \cdot \left(\frac{Z_{r2} + Z_{s2}}{Z_{r2}} \right) \quad (2.11)$$

avendo imposto la relazione $\Omega_2 = \omega_{in}$.

Ricordando che per questa configurazione $\omega_{r2} = \omega_{s4}$, è possibile sostituire la relazione (2.11) nella (2.7), ottenendo così:

$$\Omega_4 = \omega_{in} \left(\frac{Z_{r2} + Z_{s2}}{Z_{r2}} \right) \left(\frac{Z_{s4}}{Z_{r4} + Z_{s4}} \right) \quad (2.12)$$

$$i_{II} = \left(\frac{Z_{r2}}{Z_{r2} + Z_{s2}} \right) \left(\frac{Z_{r4} + Z_{s4}}{Z_{s4}} \right) \quad (2.13)$$

2.1.3 Terza Marcia

La figura 2.5 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in terza marcia, ovvero il freno B e le frizioni C ed E.

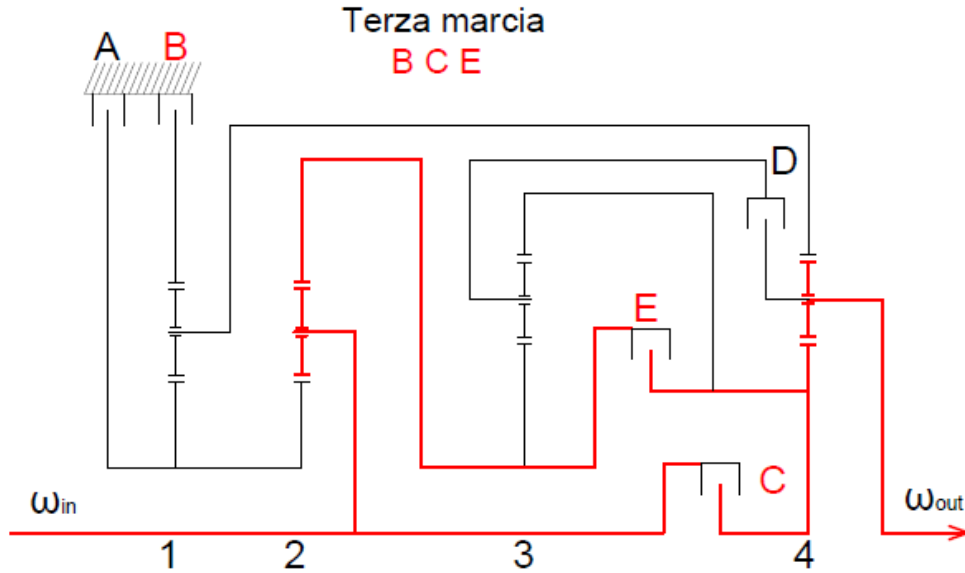


Figura 2.5: Flusso di potenza terza marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{r1} = 0$, $\omega_{s1} = \omega_{s2}$, $\Omega_1 = \omega_{r4}$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = \omega_{s1}$, $\omega_{r2} = \omega_{s3} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \omega_{in} = \Omega_3$, $\Omega_2 = \omega_{in}$;

- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \omega_{in} = \Omega_3$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \omega_{in}$, $\omega_{r4} = \Omega_1$.

Per il quarto rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r4} - \Omega_4}{\omega_{s4} - \Omega_4} = -\frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \quad (2.14)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{\omega_{r4}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \cdot \frac{\omega_{s4}}{\Omega_4} \quad (2.15)$$

Per il primo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis ed imponendo $\omega_{r1} = 0$, si arriva a scrivere:

$$\Omega_1 = \omega_{in} \cdot \frac{Z_{s1}}{Z_{r1} + Z_{s1}} \quad (2.16)$$

Sostituendo l'espressione di Ω_1 appena trovata nell'equazione (2.15) ricordando che $\omega_{r4} = \Omega_1$ e $\omega_{s4} = \omega_{in}$ si ottiene l'equazione (2.17) e, dopo una serie di passaggi matematici, si arriva al rapporto di riduzione della terza marcia:

$$\frac{\omega_{in}}{\Omega_4} \cdot \frac{Z_{s1}}{Z_{r1} + Z_{s1}} = 1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \cdot \frac{\omega_{in}}{\Omega_4} \quad (2.17)$$

$$i_{III} = \frac{(Z_{r4} + Z_{s4})(Z_{r1} + Z_{s1})}{Z_{s1}Z_{r4} + Z_{s4}(Z_{r1} + Z_{s1})} \quad (2.18)$$

2.1.4 Quarta Marcia

La figura 2.6 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in quarta marcia, ovvero il freno B e le frizioni D ed E.

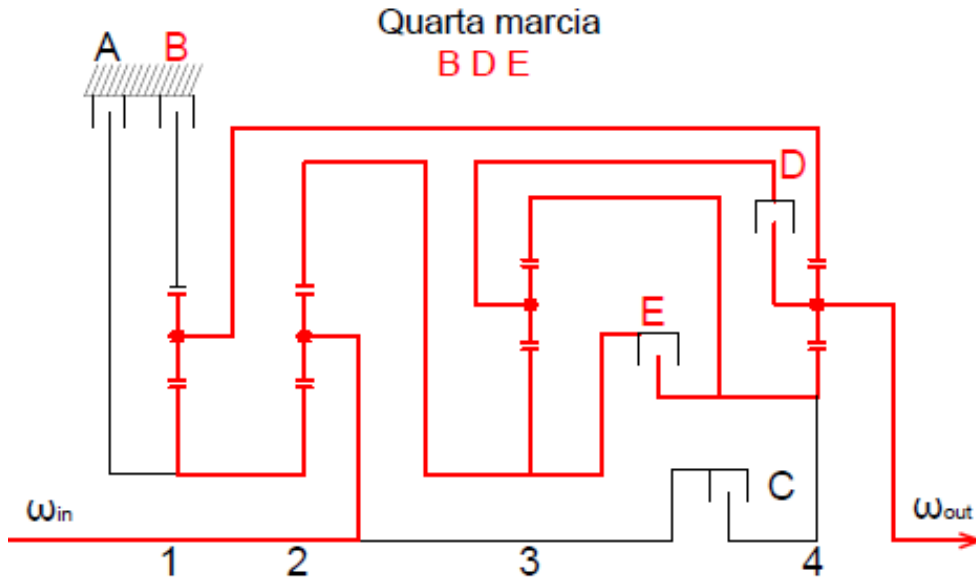


Figura 2.6: Flusso di potenza quarta marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{r1} = 0$, $\omega_{s1} = \omega_{s2}$, $\Omega_1 = \omega_{r4}$;
- 2° rotismo: $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{r2} = \omega_{s3} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \Omega_4 = \omega_{r4} = \Omega_1$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \omega_{r2} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \Omega_4 = \omega_{r4} = \Omega_1$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \omega_{r4} = \Omega_4 = \omega_{s3} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \omega_{r2} = \omega_{r3} = \Omega_1$.

Per il primo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r1} - \Omega_1}{\omega_{s1} - \Omega_1} = -\frac{Z_{s1}}{Z_{r1}} \quad (2.19)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{\omega_{r1}}{\Omega_1} = 1 + \frac{Z_{s1}}{Z_{r1}} - \frac{Z_{s1}}{Z_{r1}} \cdot \frac{\omega_{s1}}{\Omega_1} \quad (2.20)$$

Imponendo $\omega_{r1} = 0$ ed $\Omega_1 = \Omega_4$, si ricava:

$$\omega_{s1} = \Omega_4 \cdot \frac{Z_{r1} + Z_{s1}}{Z_{s1}} \quad (2.21)$$

Scrivendo la formula di Willis per il rotismo n.2, si ottiene:

$$\frac{\omega_{r2}}{\Omega_2} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{s2}}{\Omega_2} \quad (2.22)$$

Imponendo le seguenti relazioni cinematiche: $\omega_{r2} = \Omega_4$, $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{s2} = \omega_{s1}$ e sostituendo l'espressione di ω_{s1} precedentemente ricavata (2.21), si ottiene:

$$\frac{\Omega_4}{\omega_{in}} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{s1}}{\omega_{in}} \quad (2.23)$$

Con una serie di passaggi matematici, si arriva a definire il rapporto di riduzione della quarta marcia:

$$i_{IV} = \frac{Z_{r2}Z_{s1} + Z_{s2}(Z_{r1} + Z_{s1})}{Z_{s1}(Z_{r2} + Z_{s2})} \quad (2.24)$$

2.1.5 Quinta Marcia

La figura 2.7 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in quinta marcia, ovvero il freno B e le frizioni C e D.

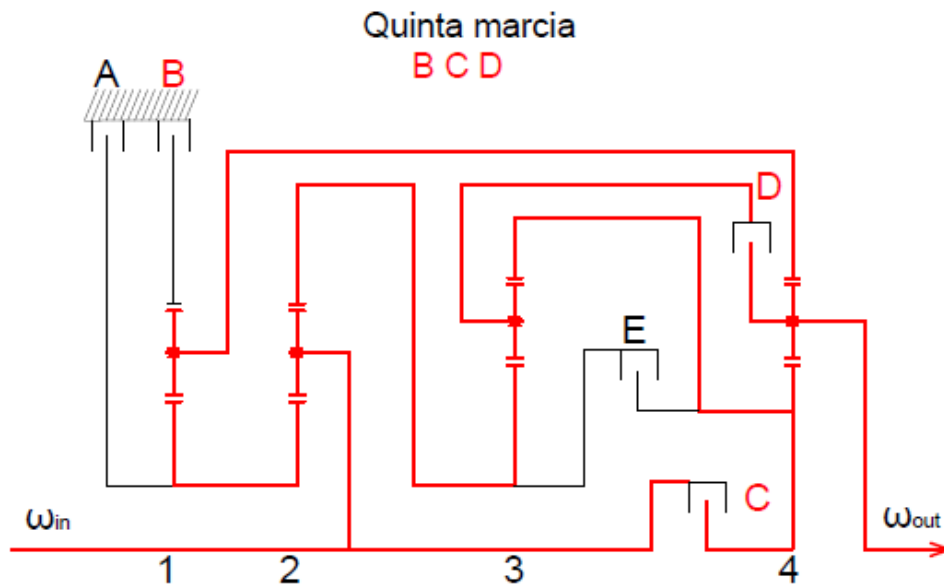


Figura 2.7: Flusso di potenza quinta marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{s1} = \omega_{s2}$, $\Omega_1 = \omega_{r4}$, $\omega_{r1} = 0$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = \omega_{s1}$, $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{r2} = \omega_{s3}$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2}$, $\Omega_3 = \Omega_4$, $\omega_{r3} = \omega_{s4} = \omega_{in}$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \omega_{in}$, $\Omega_4 = \Omega_3$, $\omega_{r4} = \Omega_1$.

Per il primo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis ed imponendo $\omega_{r1} = 0$, si ricava:

$$\omega_{s1} = \Omega_1 \cdot \frac{Z_{r1} + Z_{s1}}{Z_{s1}} \quad (2.25)$$

Per il secondo rotismo, ricorrendo alla Formula di Willis, si può scrivere:

$$\frac{\omega_{r2}}{\Omega_2} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{s2}}{\Omega_2} \quad (2.26)$$

Ricordando che $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\Omega_1 = \omega_{r4}$ e sostituendo ad ω_{s2} nell'equazione appena trovata il valore dell'espressione (2.25), dato che $\omega_{s2} = \omega_{s1}$, si ottiene:

$$\omega_{r2} = \omega_{in} \cdot \left(1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{r4}}{\omega_{in}} \cdot \left(\frac{Z_{r1} + Z_{s1}}{Z_{s1}}\right)\right) \quad (2.27)$$

Per il terzo rotismo, ricorrendo alla Formula di Willis, si può scrivere:

$$\frac{\omega_{r3}}{\Omega_3} = 1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} \cdot \frac{\omega_{s3}}{\Omega_3} \quad (2.28)$$

Imponendo che $\Omega_3 = \Omega_4$, $\omega_{r3} = \omega_{in}$, $\omega_{s3} = \omega_{r2}$, è possibile ricavare ω_{r2} :

$$\omega_{r2} = \left(1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{\omega_{in}}{\Omega_4}\right) \cdot \frac{Z_{r3}}{Z_{s3}} \cdot \Omega_4 \quad (2.29)$$

Eguagliando la (2.29) con la (2.27), si ottiene:

$$\omega_{in} \cdot \left(1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} - \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \cdot \frac{\omega_{r4}}{\omega_{in}} \cdot \left(\frac{Z_{r1} + Z_{s1}}{Z_{s1}}\right)\right) = \left(1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{\omega_{in}}{\Omega_4}\right) \cdot \frac{Z_{r3}}{Z_{s3}} \cdot \Omega_4 \quad (2.30)$$

Per il quarto rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\omega_{r4} = \Omega_4 \cdot \left(1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \cdot \frac{\omega_{in}}{\Omega_4}\right) \quad (2.31)$$

Sostituendo l'espressione di ω_{r4} appena trovata nella (2.30), isolando il rapporto ω_{in}/Ω_4 , ovvero il rapporto di trasmissione, dopo alcuni passaggi algebrici, si arriva a definire il rapporto di riduzione della quinta marcia:

$$i_V = \frac{\frac{Z_{r3}+Z_{s3}}{Z_{s3}} + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \left(\frac{Z_{r4}+Z_{s4}}{Z_{r4}}\right) \left(\frac{Z_{r1}+Z_{s1}}{Z_{s1}}\right)}{1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \left(\frac{Z_{r1}+Z_{s1}}{Z_{s1}}\right) + \frac{Z_{r3}}{Z_{s3}}} \quad (2.32)$$

2.1.6 Sesta Marcia

La sesta marcia rappresenta la presa diretta, ovvero la marcia per cui il rapporto di trasmissione vale 1. Per fare ciò, gli organi di attrito coinvolti sono tutte e tre le frizioni, permettendo così a tutte le ruote dei 4 rotismi di ruotare alla stessa velocità. Il cambio si comporta come un unico blocco che ruota alla velocità di ingresso ω_{in} della trasmissione.

2.1.7 Settima Marcia

La figura 2.8 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in settima marcia, ovvero il freno A e le frizioni C e D.

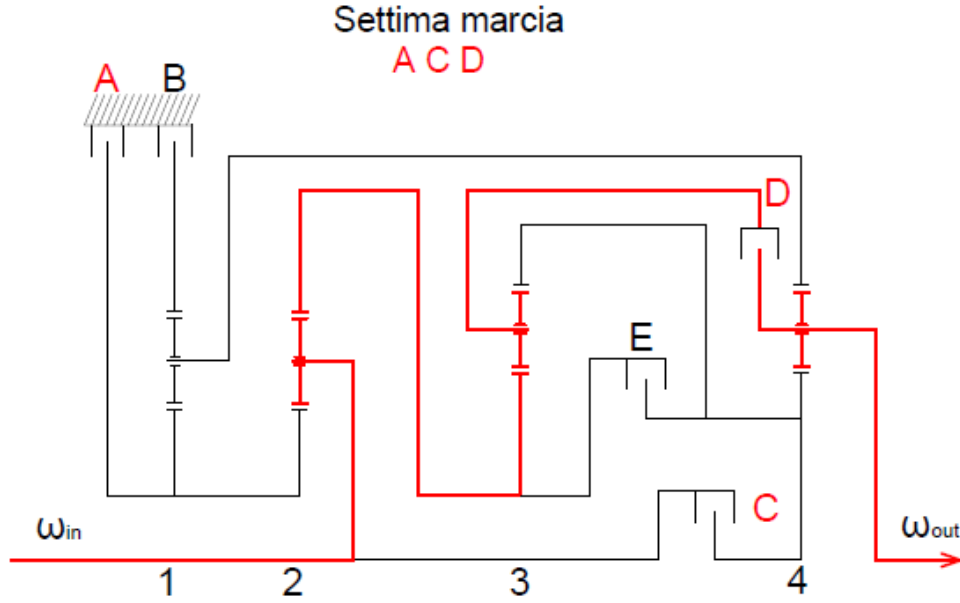


Figura 2.8: Flusso di potenza settima marcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{s1} = \omega_{s2} = 0$, $\Omega_1 = \omega_{r4}$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = \omega_{s1} = 0$, $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{r2} = \omega_{s3}$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2}$, $\Omega_3 = \Omega_4$, $\omega_{r3} = \omega_{in}$;
- 4° rotismo: $\Omega_4 = \Omega_3$, $\omega_{r4} = \Omega_1$, $\omega_{s4} = \omega_{in} = \omega_{r3}$.

Per il terzo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r3}}{\Omega_3} = 1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} \cdot \frac{\omega_{s3}}{\Omega_3} \quad (2.33)$$

Per il secondo rotismo, applicando Willis e ricordando che $\omega_{s2} = 0$, si ottiene:

$$\omega_{r2} = \omega_{in} \cdot \frac{Z_{r2} + Z_{s2}}{Z_{r2}} \quad (2.34)$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella (2.33), tenendo presente che $\omega_{s3} = \omega_{r2}$, $\Omega_3 = \Omega_4$, $\omega_{r3} = \omega_{in}$, si ottiene:

$$\frac{\omega_{in}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} \cdot \frac{\omega_{in}}{\Omega_4} \left(\frac{Z_{r2} + Z_{s2}}{Z_{r2}} \right) \quad (2.35)$$

e dopo alcuni passaggi matematici, si arriva a definire il rapporto di trasmissione della settima marcia:

$$i_{VII} = \frac{Z_{r2}(Z_{r3} + Z_{s3})}{Z_{r3}Z_{r2} + Z_{s3}Z_{r2} + Z_{s3}Z_{s2}} \quad (2.36)$$

2.1.8 Ottava Marcia

La figura 2.9 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in ottava marcia, ovvero il freno A e le frizioni D ed E.

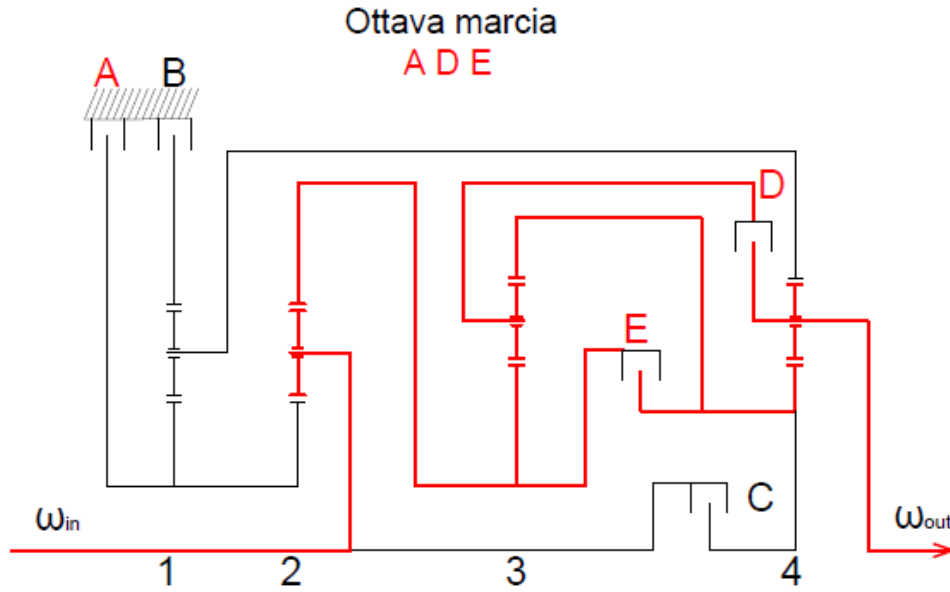


Figura 2.9: Flusso di potenza ottava marcia

Questa configurazione porta pertanto a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{s1} = 0, \Omega_1 = \omega_{r4}$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = \omega_{s1} = 0, \Omega_2 = \omega_{in}, \omega_{r2} = \omega_{s3} = \omega_{s4} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \Omega_4 = \omega_{r4} = \Omega_1$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \omega_{r2} = \omega_{s4} = \Omega_4 = \omega_{r4} = \Omega_1$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \Omega_4 = \omega_{r4} = \Omega_1 = \omega_{s3} = \omega_{r3} = \Omega_3 = \omega_{r2}$.

Per il secondo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis ed imponendo $\omega_{s2} = 0$, è possibile scrivere:

$$\frac{\omega_{r2}}{\Omega_2} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \quad (2.37)$$

Imponendo $\Omega_2 = \omega_{in}, \omega_{r2} = \Omega_4$, si ottiene il rapporto di trasmissione dell'ottava marcia:

$$i_{VIII} = \frac{Z_{r2}}{Z_{r2} + Z_{s2}} \quad (2.38)$$

2.1.9 Retromarcia

La figura 2.10 mostra il flusso di potenza e gli elementi di attrito che agiscono in retromarcia, ovvero i freni A e B e la frizione D.

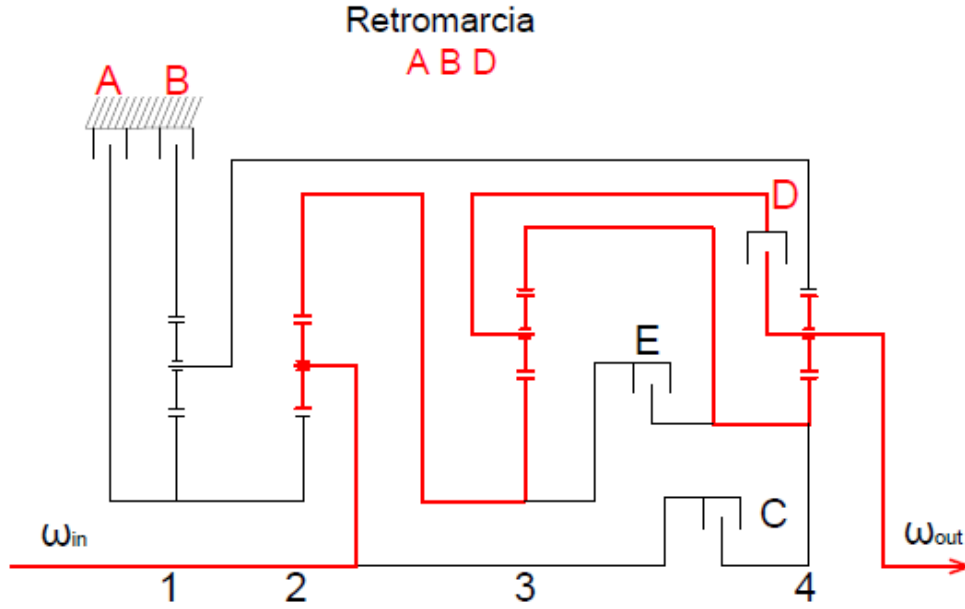


Figura 2.10: Flusso di potenza retromarcia

Questa configurazione porta a definire le seguenti relazioni cinematiche:

- 1° rotismo: $\omega_{r1} = \Omega_1 = \omega_{s1} = 0$;
- 2° rotismo: $\omega_{s2} = \omega_{s1} = 0$, $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{r2} = \omega_{s3}$;
- 3° rotismo: $\omega_{s3} = \omega_{r2}$, $\Omega_3 = \Omega_4$, $\omega_{r3} = \omega_{s4}$;
- 4° rotismo: $\omega_{s4} = \omega_{r3}$, $\Omega_4 = \Omega_3$, $\omega_{r4} = \Omega_1 = 0$.

Per il secondo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis ed imponendo $\omega_{r2} = \omega_{s3}$, $\Omega_2 = \omega_{in}$, $\omega_{s2} = 0$, si ottiene:

$$\frac{\omega_{s3}}{\omega_{in}} = 1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \quad (2.39)$$

ovvero

$$\omega_{s3} = \omega_{in} \left(1 + \frac{Z_{s2}}{Z_{r2}} \right) \quad (2.40)$$

Per il terzo rotismo, ricorrendo alla formula di Willis, si può scrivere:

$$\frac{\omega_{r3}}{\Omega_3} = 1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} \frac{\omega_{s3}}{\Omega_3} \quad (2.41)$$

Imponendo le relazioni $\Omega_3 = \Omega_4$ e sostituendo ω_{s3} con l'espressione (2.40) precedentemente ricavata:

$$\frac{\omega_{r3}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} - \frac{Z_{s3}}{Z_{r3}} \frac{\omega_{in}}{\Omega_4} \left(\frac{Z_{r2} + Z_{s2}}{Z_{r2}} \right) \quad (2.42)$$

Scrivendo la formula di Willis per il rotismo n.4 si ottiene:

$$\frac{\omega_{r4}}{\Omega_4} = 1 + \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} - \frac{Z_{s4}}{Z_{r4}} \frac{\omega_{s4}}{\Omega_4} \quad (2.43)$$

Ricordando che $\omega_{r4} = 0$ e che $\omega_{s4} = \omega_{r3}$, si può ricavare ω_{r3} :

$$\omega_{r3} = \Omega_4 \cdot \left(\frac{Z_{r4} + Z_{s4}}{Z_{s4}} \right) \quad (2.44)$$

e sostituendo l'espressione di ω_{r3} appena ricavata nell'equazione (2.42), dopo alcuni semplici passaggi matematici, si arriva a scrivere il rapporto di trasmissione della retromarcia:

$$i_{retro} = \left(\frac{Z_{s3}Z_{s4} - Z_{r4}Z_{r3}}{Z_{s3}Z_{s4}} \right) \left(\frac{Z_{r2}}{Z_{r2} + Z_{s2}} \right) \quad (2.45)$$

2.2 Riscrittura rapporti di trasmissione

In questa sezione vengono riscritti tutti i rapporti di trasmissione in funzione del rapporto di trasmissione del singolo rotismo reso ordinario. Ciò viene fatto introducendo un nuovo parametro, σ , ovvero il rapporto tra il numero dei denti della corona ed il numero dei denti del solare. $\sigma_n = \frac{Z_{rn}}{Z_{sn}}$, dove n rappresenta l'ennesimo rotismo.

$$i_I = 1 + \sigma_4 \quad (2.46)$$

$$i_{II} = \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \right) (1 + \sigma_4) \quad (2.47)$$

$$i_{III} = \frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{1 + \sigma_1 + \sigma_4} \quad (2.48)$$

$$i_{IV} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 1}{\sigma_2 + 1} \quad (2.49)$$

$$i_V = \frac{\sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_1\sigma_4 + 1 + \sigma_1}{\sigma_2\sigma_4 + \sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4} \quad (2.50)$$

$$i_{VI} = 1 \quad (2.51)$$

$$i_{VII} = \frac{\sigma_2(1 + \sigma_3)}{\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + 1} \quad (2.52)$$

$$i_{VIII} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + 1} \quad (2.53)$$

$$i_{retro} = \frac{\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3\sigma_4}{\sigma_2 + 1} \quad (2.54)$$

2.3 Calcolo delle sigma

Il numero di denti possibili per il cambio in esame sono tuttavia appartenenti ad un insieme infinito di soluzioni, ma con l'introduzione delle sigma si riescono ad estrapolare quattro soluzioni analitiche, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, ovvero si riesce a determinare in maniera univoca quantomeno quale debba essere il rapporto tra i denti dei singoli rotismi resi ordinari per soddisfare i rapporti di trasmissione letti da catalogo.

Dall'equazione (2.46), è possibile estrapolare il valore di σ_4 :

$$\sigma_4 = i_I - 1 = 4.696 - 1 = 3.696 \quad (2.55)$$

Dall'equazione (2.53), si arriva a conoscere il valore di σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{i_{VIII}}{1 - i_{VIII}} = \frac{0.667}{1 - 0.667} = 2 \quad (2.56)$$

Noto σ_2 , è possibile ricavare σ_1 dall'equazione (2.49):

$$\sigma_1 = i_{IV}(\sigma_2 + 1) - \sigma_2 - 1 = 1.667 \cdot (2 + 1) - 2 - 1 = 2 \quad (2.57)$$

Ed infine dalla (2.54) si calcola σ_3 :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_2 - i_{retro}(\sigma_2 + 1)}{\sigma_2 \sigma_4} = \frac{2 + 3.297 \cdot (2 + 1)}{2 \cdot 3.696} = 1.609 \quad (2.58)$$

Quindi riassumendo:

σ_1	2
σ_2	2
σ_3	1.609
σ_4	3.696

Tabella 2.1: Rapporto tra i denti della corona e del solare per ciascun rotismo

2.4 Tipo di rapportatura

2.4.1 Rapportatura Geometrica

In fase di progettazione di un cambio automobilistico, si adotta, come impostazione di riferimento per i primi calcoli, una rapportatura di tipo geometrico, ovvero una rapportatura che prevede un rapporto costante tra due rapporti di trasmissione consecutivi [7].

In questa fase, si mostra di quanto la rapportatura del cambio in esame si discosti da una di tipo geometrico.

Ricorrendo alla formula che descrive i vari rapporti di trasmissione in una soluzione geometrica [3,8], è possibile calcolare il valore ϕ_{th} che rappresenta il rapporto che dovrebbe esistere tra due rapporti di trasmissione consecutivi per avere un cambio di tipo geometrico.

$$i_n = i_z \cdot \phi_{th}^{(z-n)} \quad (2.59)$$

dove n rappresenta la marcia ennesima, mentre z il numero di marce complessive.

Ponendo ad esmpio $n = 1$, è possibile calcolare ϕ_{th} :

$$\phi_{th} = \sqrt[7]{\frac{i_I}{i_{VIII}}} = \sqrt[7]{\frac{4.696}{0.667}} = 1.32 \quad (2.60)$$

Questo vorrebbe dire che, per avere un cambio con rapportatura geometrica, tutti i rapporti tra due rapporti di trasmissione consecutivi dovrebbero valere 1.32, cosa che non accade nel cambio in esame.

Nella tabella 2.2, si mettono in evidenza i reali rapporti tra i rapporti di trasmissione consecutivi e lo scostamento esistente in termini percentuali tra un precedente ed il successivo.

i_I/i_{II}	1.50	scostamento
i_{II}/i_{III}	1.49	0.81%
i_{III}/i_{IV}	1.26	15.16%
i_{IV}/i_V	1.30	2.78%
i_V/i_{VI}	1.29	1.00%
i_{VI}/i_{VII}	1.19	7.23%
i_{VII}/i_{VIII}	1.25	5.63%

Tabella 2.2: Rapporti di trasmissione consecutivi

2.4.2 Rapportatura Progressiva

Per i veicoli passeggeri, soprattutto per questioni di comfort, si cerca di attuare una rapportatura di tipo progressivo, ovvero trasmissioni caratterizzate dall'avere il parametro ϕ , non più costante come nella soluzione geometrica, ma che diminuisce all'aumentare della marcia [7]. Allo stesso tempo, si mantiene costante il rapporto tra due ϕ consecutivi

($K_\phi = \text{cost}$).

Nel seguito, si mostra quanto il cambio in esame si avvicini ad una soluzione di tipo progressivo.

Innanzitutto, si calcola il parametro $\phi_{n/n+1}$ che rappresenta il rapporto tra due rapporti di trasmissione consecutivi, denominato nella figura 2.2 Gear Step. Allo stesso tempo, si verifica che il K_ϕ sia costante.

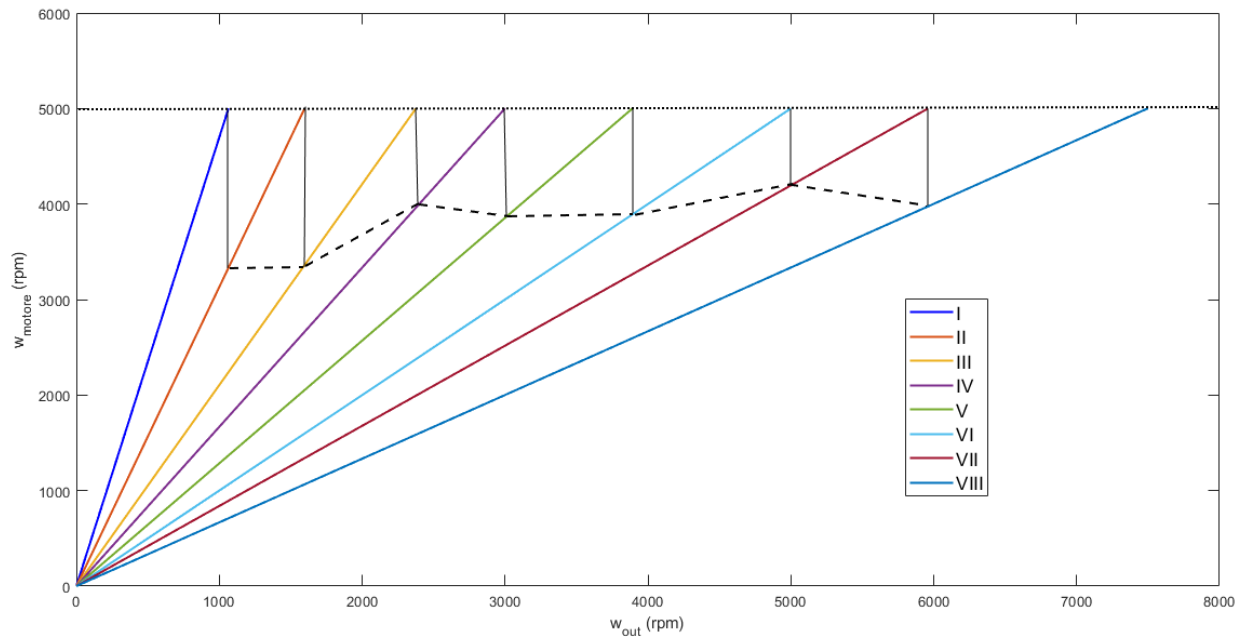
Si riportano i valori dei diversi ϕ ed i relativi K_ϕ nella tabella seguente. (Tab. 3.8)

$\phi_{I/II}$	1.50	K_ϕ
$\phi_{II/III}$	1.49	1.01
$\phi_{III/IV}$	1.26	1.18
$\phi_{IV/V}$	1.30	0.97
$\phi_{V/VI}$	1.29	1.01
$\phi_{VI/VII}$	1.19	1.08
$\phi_{VII/VIII}$	1.25	0.95

Tabella 2.3: Valori ϕ - K_ϕ

Si evince che il cambio in esame ha una rapportatura assimilabile a quella progressiva, ovvero caratterizzato da ϕ che si riducono progressivamente da marce basse a marce alte, fatta eccezione per il $\phi_{IV/V}$ ed il $\phi_{VII/VIII}$. Ciò si traduce in rapporti di quinta ed ottava marcia più lunghi, pensati non per ottimizzare il comfort del passeggero, ma piuttosto per contenere i consumi.

Al fine di avere un'idea grafica sul tipo di rapportatura, si traccia la velocità dell'albero in uscita dal cambio in funzione della velocità del motore. Per una lettura più immediata dei risultati, gli assi sono stati girati. (Figura 2.11)

Figura 2.11: Grafico $\omega_{motore} - \omega_{out, cambio}$

2.5 Rapportatura progressiva rigorosa

2.5.1 Premessa

Per mostrare al meglio i risultati ottenuti da questo studio, si divide la trattazione in due parti.

Nella prima parte si dimensiona una rapportatura progressiva rigorosa senza tener conto dei vincoli imposti dalla componentistica usata in un cambio automatico a rotismi epicicloidali, mentre, nella seconda parte si dimostra come questa rapportatura progressiva rigorosa sia inattuabile nel cambio suddetto, a meno che non si decida di cambiare lo schema di attuazione dei freni e delle frizioni per ogni singola marcia, ma non è detto che questa soluzione porti a dei miglioramenti dal punto di vista dell'implementazione di una progressione rigorosa.

2.5.2 Dimensionamento Rapportatura Progressiva rigorosa

Nel dimensionamento dei rapporti di trasmissione di un cambio, si sceglie il rapporto della marcia più bassa in funzione della massima pendenza da superare, della massima

accelerazione e della minima velocità di avanzamento veicolo. Allo stesso tempo, la marcia più alta è scelta in base ai consumi ed alla velocità massima caratteristica del veicolo [7,8]. Ciò per dire che, nel seguito, si partirà da rapporti di trasmissione assodati per la prima e l'ottava marcia, e si cercherà di dimensionare nel modo opportuno i rapporti intermedi per avere una rapportatura quanto più progressiva possibile.

Si ipotizza di voler dimensionare il cambio con $K_\phi = 1.08$.

Un valore di $K_\phi = 1.1$ non garantirebbe in un primo dimensionamento di massima che tutti gli ϕ siano maggiori di 1, condizione indispensabile affinché i rapporti di trasmissione siano in ordine decrescente dalla prima marcia fino all'ottava. Scrivendo la formula seguente, si calcola il ϕ che intercorre tra due rapporti consecutivi [3,8], ad esempio tra settima ed ottava marcia, e facendone il prodotto con K_ϕ , si calcola il ϕ tra sesta e settima marcia; moltiplicando il $\phi_{VI/VII}$ per il K_ϕ (sempre costante ed uguale a 1.08) si ottiene il $\phi_{V/VI}$ e così via.

$$\phi_{z/z-1} = {}^{z-1}\sqrt{\frac{\phi_{I/z}}{K_\phi^{1/2(z-1)(z-2)}}} = 1.05 \quad (2.61)$$

$$\text{con } \phi_{I/z} = \frac{i_I}{i_{VIII}} = 7.05$$

$$\text{e } K_\phi = 1.08$$

Si ottengono pertanto i seguenti risultati:

$\phi_{I/II}$	1.67	K_ϕ
$\phi_{II/III}$	1.54	1.08
$\phi_{III/IV}$	1.43	1.08
$\phi_{IV/V}$	1.32	1.08
$\phi_{V/VI}$	1.22	1.08
$\phi_{VI/VII}$	1.13	1.08
$\phi_{VII/VIII}$	1.05	1.08

Tabella 2.4: Valori ϕ - K_ϕ , primo dimensionamento

Dalla relazione che lega due ϕ consecutivi [3], si calcolano tutti i rapporti di trasmissione intermedi con la relazione:

$$i_n = \frac{i_{n-1}}{\phi_{n-1/n}} \quad (2.62)$$

i_I	4.696
i_{II}	2.820
i_{III}	1.829
i_{IV}	1.281
i_V	0.969
i_{VI}	0.792
i_{VII}	0.699
i_{VIII}	0.667

Tabella 2.5: Rapporti di trasmissione, primo dimensionamento

Tuttavia, è necessario garantire una marcia che rappresenti la presa diretta, ovvero la condizione in cui tutte e tre le frizioni vengono innestate per garantire l'uguaglianza tra la velocità in ingresso (ω_{motore}) e la velocità in uscita dal cambio (ω_{out}).

La tab.2.5 suggerirebbe di selezionare la quinta marcia come presa diretta per avere come risultato finale una progressione quanto più rigorosa possibile.

N.B. Questa scelta viene fatta senza considerare che ci possano essere dei vincoli legati ai rotismi epicicloidali stessi; questo vuol dire che, mantenendo lo schema di attuazione freni e frizioni come da catalogo, uno spostamento della presa diretta dalla sesta marcia alla quinta marcia è inattuabile.

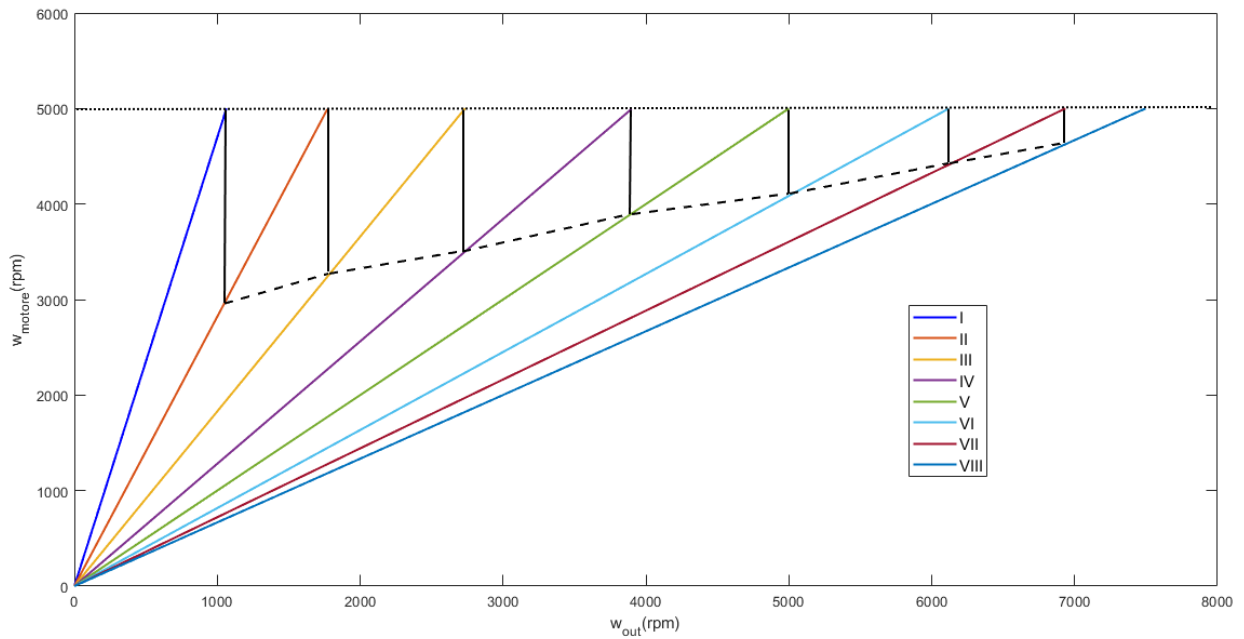
Imponendo che il rapporto di trasmissione della quinta marcia abbia valore unitario, nella tabella seguente (2.6) si mostra come i rapporti di sesta, settima ed ottava marcia vengano modificati, così come gli ϕ ed i K_ϕ dopo l'introduzione della presa diretta. Tuttavia, il risultato ottenuto risulta ancora soddisfacente in termini di rapportatura progressiva rigorosa e non necessita di ulteriori accorgimenti per avvicinarsi al valore di $K_\phi = 1.08$.

E' importante notare sia il trend decrescente degli ϕ , sia l'uguaglianza, anche se con un piccolo scostamento, dei diversi K_ϕ .

i_I	4.696	ϕ	
i_{II}	2.820	1.67	K_ϕ
i_{III}	1.829	1.54	1.08
i_{IV}	1.281	1.43	1.08
i_V	1.000	1.28	1.11
i_{VI}	0.817	1.22	1.05
i_{VII}	0.721	1.13	1.08
i_{VIII}	0.667	1.08	1.05

Tabella 2.6: Rapportatura Progressiva rigorosa

Come nel paragrafo precedente, si traccia la ω_{out} in funzione di ω_{motore} : è evidente che si tratta di una rapportatura progressiva rigorosa, ma che necessita di essere validata dai vincoli imposti dai rotismi epicicloidali, cosa che verrà fatta nella seconda parte dello studio.

Figura 2.12: Grafico $\omega_{motore} - \omega_{out,cambio}$, rapportatura progressiva rigorosa

2.6 Validazione Rapportatura Progressiva rigorosa

In questa sezione, si dimostra come la rapportatura dimensionata non sia attuabile per il cambio in esame per diversi motivi che verranno elencati dettagliatamente.

Innanzitutto bisognerebbe ricalcolare le σ (rapporto tra i denti della corona e del solare) calcolate in precedenza, affinché, mediante le equazioni in cui compaiono, possano descrivere tutti i nuovi rapporti di trasmissione appena calcolati per esaudire una rapportatura progressiva.

Per fornire linearità al discorso, vengono richiamate tutte le equazioni che descrivono i rapporti di trasmissione in funzione delle σ .

$$i_I = 1 + \sigma_4 \quad (2.63)$$

$$i_{II} = \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2}\right)(1 + \sigma_4) \quad (2.64)$$

$$i_{III} = \frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{1 + \sigma_1 + \sigma_4} \quad (2.65)$$

$$i_{IV} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 1}{\sigma_2 + 1} \quad (2.66)$$

$$i_V = \frac{\sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_1\sigma_4 + 1 + \sigma_1}{\sigma_2\sigma_4 + \sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4} \quad (2.67)$$

$$i_{VI} = 1 \quad (2.68)$$

$$i_{VII} = \frac{\sigma_2(1 + \sigma_3)}{\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + 1} \quad (2.69)$$

$$i_{VIII} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + 1} \quad (2.70)$$

$$i_{retro} = \frac{\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3\sigma_4}{\sigma_2 + 1} \quad (2.71)$$

2.6.1 Considerazioni

- Partendo dal presupposto che il rapporto di prima e di ultima marcia sono stati dati per assodato, se si fa riferimento alla prima equazione, ovvero la 2.63, come anche la penultima, ovvero la 2.70, si evince che la σ_4 e la σ_2 sono identiche al dimensionamento originale fatto dalla casa costruttrice. Questo vuol dire che, dato lo schema di attivazione di freni e frizioni richiamato in fig. 2.2 e fissati i rapporti di prima ed ottava marcia, il secondo rotismo ed il quarto rotismo non sono in alcun modo modificabili.

- Il problema presentato nel punto precedente si esplica subito in seconda marcia, ben osservabile dall'equazione 2.64, in cui i_{II} dipende appunto da σ_2 e σ_4 . Questo vuol dire che non è possibile scegliere arbitrariamente i_{II} , cosa che mette già in crisi il modello di rapportatura progressiva rigorosa definito nel paragrafo 2.6. Quindi, i_{II} rimane identica a quella del progetto originale.
- σ_1 dipende da σ_4 (fissato) e da i_{III} (libero).
- σ_3 dipende da σ_1 (libero, ma che dipende dalla scelta di i_{III} , vedi punto precedente), σ_2 (fissato), σ_4 (fissato) e da i_V (libero).
- i_{VII} dipende da σ_2 (fissato) e σ_3 (dipendente dalla scelta di i_{III} e i_V).
- I rapporti di trasmissione i_{III} e i_V rappresentano quindi gli unici rapporti su cui poter giocare per modificare la progressione.
- Risulta impossibile invertire la presa diretta tra quinta e sesta marcia semplicemente facendo affidamento su un dimensionamento diverso del numero di denti dei rotismi e lasciando lo schema di attivazione freni-frizioni così come pensato da progetto.
- Non si è tenuto conto del rapporto di trasmissione della retromarcia, ma lo si è lasciato libero nel dimensionamento della rapportatura progressiva; in caso contrario, questo porterebbe ad un ulteriore vincolo sulla σ_3 .
- Giocando su i_{III} e i_V si arriva ad una scelta della rapportatura praticamente identica a quella letta da catalogo.

Concludendo, si sottolinea come una rapportatura progressiva rigorosa come quella dimensionata nel paragrafo 2.6 è impossibile da attuare in un cambio automatico a rotismi epicicloidali dati i forti vincoli imposti dalla componentistica di cui esso è equipaggiato. Con lo schema di attuazione di freni e frizioni adottato, risulta pertanto impossibile migliorare la progressione della rapportatura rispetto a quella fornita originariamente dalla casa costruttrice.

2.7 Calcolo della coppia in uscita dal cambio

In ottica di implementare una logica di controllo efficiente per i cambi marcia, risulta indispensabile calcolare la coppia in uscita dal cambio in funzione della coppia erogata dal motore e delle coppie trasmesse dalle frizioni attuate durante ciascun cambio marcia [2].

Al fine di scrivere i bilanci delle coppie che agiscono su ciascun rotismo, è utile riferirsi al diagramma seguente (figura 2.13), il quale mette in evidenza le coppie esercitate da freni e frizioni, come anche le coppie interne tra una ruota e l'altra, coppie tra rotismi differenti, ovvero coppie tra rotismi collegati rigidamente, e coppie in ingresso ed uscita dal cambio.

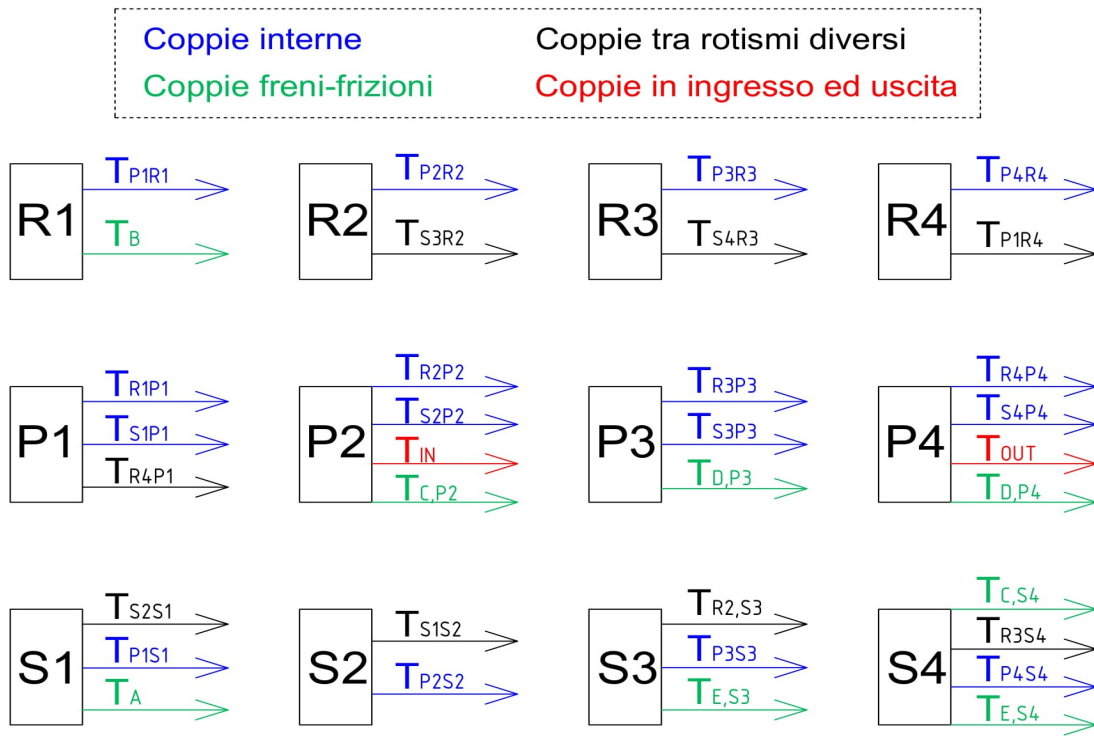


Figura 2.13: Diagramma Coppie

Come più volte richiamato nei paragrafi precedenti, un cambio marcia viene realizzato mediante l'attuazione di freni e frizioni che, combinati in un certo modo, forniscono il rapporto di trasmissione desiderato. Nel prosieguo della trattazione in cui verrà analizzata la dinamica delle coppie durante un cambio marcia, verrà definita “*frizione entrante*”, la frizione che deve iniziare a trasmettere coppia per attuare la marcia successiva, mentre “*frizione uscente*”, la frizione che, a seguito dell'allontanamento dei propri dischi, inizia a perdere coppia fino ad un valore nullo.

Si pone l'attenzione su un power-on upshift, ovvero un cambio marcia da una marcia più bassa ad una più alta con trasferimento di potenza dall'input della trasmissione all'output di questa. Un cambio marcia di un power-on upshift è caratterizzato da due fasi: la prima viene denominata *torque phase*, la seconda *inertia phase* [5].

La *torque phase* ha inizio quando la frizione entrante comincia a trasmettere coppia e contestualmente la coppia della frizione uscente decresce.

L' *inertia phase* ha inizio al termine della *torque phase*, ovvero quando la frizione uscente non è più in grado di trasmettere coppia: si assume che all'inizio di questa fase la coppia della frizione uscente sia nulla. L'unica frizione in gioco resta quella entrante.

Nel seguito, si andranno a scrivere le equazioni che descrivono le coppie in gioco durante un cambio marcia. Allo scopo di non complicare eccessivamente l'analisi, sono state trascurate le inerzie degli ingranaggi.

2.7.1 Cambio marcia Prima-Seconda ($A - B - C \rightarrow A - B - E$)

Dalla figura 2.2, si evince che durante il cambio marcia $1 \rightarrow 2$, la frizione C costituisce la frizione uscente, mentre la frizione E quella entrante. I freni A e B risultano attivi sia in prima che in seconda, mentre la frizione D non risulta chiamata in causa durante questo cambio marcia, motivo per cui nelle equazioni seguenti la sua coppia sarà posta uguale a zero ($T_D = 0$).

Torque Phase

Seguendo come riferimento il diagramma mostrato nella figura 2.13, si scrive il bilancio di coppie del portatreno (P_4):

$$T_{out} + T_{r4p4} + T_{s4p4} = 0 \quad (2.72)$$

Dal solare 4 (S4), si ricava:

$$T_{C,s4} + T_{E,s4} + T_{p4s4} + T_{r3s4} = 0 \quad (2.73)$$

Da R3:

$$T_{p3r3} + T_{s4r3} = 0 \quad (2.74)$$

e tenendo in considerazione che, per il principio di azione e reazione, $T_{ij} = -T_{ji}$, si ha:

$$T_{r3p3} = T_{s4r3} \quad (2.75)$$

Da S3:

$$T_{r2s3} + T_{p3s3} + T_{E,s3} = 0 \quad (2.76)$$

$$T_{r2s3} = T_{s3p3} - T_{E,s3} \quad (2.77)$$

Da P2:

$$T_{r2p2} + T_{s2p2} + T_{in} + T_{C,p2} = 0 \quad (2.78)$$

e tenendo in considerazione che, in un rotismo epicicloidale, è possibile legare la coppia esercitata dal solare sul portatreno con quella esercitata dalla corona sul portatreno, ovvero $T_{rp} = \sigma T_{sp}$, dove σ , come in precedenza, rappresenta il rapporto tra il numero di denti della corona e del solare:

$$T_{r2p2} + T_{s2p2} + T_{in} + T_{C,p2} = 0 \quad (2.79)$$

$$T_{r2p2} \cdot \left(\frac{\sigma_2 + 1}{\sigma_2}\right) + T_{in} + T_{C,p2} = 0 \quad (2.80)$$

ovvero,

$$T_{C,p2} = T_{p2r2} \cdot \left(\frac{\sigma_2 + 1}{\sigma_2}\right) - T_{in} \quad (2.81)$$

Da R2:

$$T_{p2r2} = T_{r2s3} \quad (2.82)$$

Da P3:

$$T_{r3p3} + T_{s3p3} = 0 \quad (2.83)$$

$$T_{s3p3} \cdot (1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.84)$$

$$T_{s3p3} = 0 \quad (2.85)$$

Mettendo insieme le equazioni (2.85), (2.82) ed (2.77), si può riscrivere la (2.81) come:

$$T_{C,p2} = -T_{E,s3} \cdot \left(\frac{\sigma_2 + 1}{\sigma_2}\right) - T_{in} \quad (2.86)$$

Considerando che $T_{C,p2} = -T_{offgoing}$ e $T_{E,s3} = -T_{oncoming}$ (dove $T_{offgoing}$ indica la coppia della frizione uscente, mentre $T_{oncoming}$ la coppia della frizione entrante)

$$\boxed{T_{off} = T_{in} - T_{onc} \cdot \left(\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}\right)} \quad (2.87)$$

Avendo dimostrato che $T_{s3p3} = 0$, vedi equazioni (2.83, 2.84, 2.85), dalle equazioni (2.74) e (2.75) si arriva ad affermare che:

$$T_{r3s4} = 0 \quad (2.88)$$

Considerato che $T_{C,s4} = -T_{C,p2}$ e $T_{E,s3} = -T_{E,s4}$, richiamando l'equazione (2.72) e combinandola con l'equazione (2.86), si ottiene:

$$T_{s4p4} = T_{E,s3} \cdot \left(\frac{\sigma_2 + 1}{\sigma_2} \right) + T_{in} - T_{E,s3} \quad (2.89)$$

L'equazione (2.72) può essere riscritta come:

$$T_{out} + T_{s4p4} \cdot (1 + \sigma_4) = 0 \quad (2.90)$$

Sostituendo l'espressione di T_{s4p4} (vedi equazione 2.89) nell'equazione (2.90), si ottiene:

$$T_{out} + [T_{E,s3} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) + T_{in}] \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.91)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{out} = (-T_{in} + \frac{T_{onc}}{\sigma_2}) \cdot (1 + \sigma_4)} \quad (2.92)$$

Si può notare come per $T_{onc} = 0$ il rapporto tra la coppia uscente e quella entrante sia pari al rapporto di trasmissione di prima marcia.

Questa equazione descrive un sistema a 2 gradi di libertà, rappresentati dalla coppia motrice T_{in} e dalla coppia trasmessa dalla frizione entrante T_{onc} , tarata opportunamente mediante un opportuno profilo di pressione degli attuatori idraulici che agiscono sui dischi della frizione.

Dall'equazione (2.87) si evince che la T_{off} dipende da T_{in} e da T_{onc} .

Inertia Phase

Questa fase del cambio marcia inizia al termine della torque phase e si assume che la T_{off} sia pari a zero ($T_C = 0$).

Ponendo $T_{off} = 0$ nella (2.87), si ottiene:

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \frac{\sigma_2}{(1 + \sigma_2)} \quad (2.93)$$

Sostituendo la (2.93) nella (2.92):

$$\boxed{T_{out} = -T_{in} \cdot \left(\frac{\sigma_2}{1+\sigma_2}\right) \cdot (1 + \sigma_4)} \quad (2.94)$$

Il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della seconda marcia.

In questo caso il sistema è ad un grado di libertà, ovvero la sola coppia motrice definisce la coppia in uscita dal cambio. Questo vuol dire che la coppia in uscita delle terza marcia è già determinata all'inizio dell'inertia phase, ovvero quando la coppia della frizione uscente è praticamente nulla, e quindi questa fase prevede soltanto la variazione del gear speed ratio (rapporto tra le velocità angolari dell'albero di ingresso ed uscita del cambio).

2.7.2 Cambio marcia Seconda - Terza ($A - B - E \rightarrow B - C - E$)

Nel cambio marcia $2 \rightarrow 3$, il freno A rappresenta l'elemento di attrito che perde la capacità di trasferire coppia, mentre la frizione C costituisce la frizione entrante. Anche in questo cambio marcia, la frizione D non entra in gioco.

Torque Phase

Da P4:

$$T_{out} + T_{r4p4} + T_{s4p4} = 0 \quad (2.95)$$

$$T_{out} = -T_{r4p4} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4}\right) \quad (2.96)$$

Da R4:

$$T_{p1r4} = T_{r4p4} \quad (2.97)$$

Da P1:

$$T_{p1r4} = T_{s1p1} \cdot (1 + \sigma_1) \quad (2.98)$$

Da S1:

$$T_A + T_{p1s1} + T_{s2s1} = 0 \quad (2.99)$$

$$T_{s1p1} = T_A + T_{s2s1} \quad (2.100)$$

Da S2:

$$T_{s2s1} = T_{p2s2} \quad (2.101)$$

Da P2:

$$T_{p2s2} = \left(\frac{T_{in} + T_{C,p2}}{1 + \sigma_2} \right) \quad (2.102)$$

Si ottiene quindi:

$$T_{out} = -[T_A + \left(\frac{T_{in} + T_{C,p2}}{1 + \sigma_2} \right)] \cdot (1 + \sigma_1) \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4} \right) \quad (2.103)$$

Allo stesso tempo, è possibile scrivere T_{out} come:

$$T_{out} = -T_{s4p4} \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.104)$$

Considerando che $T_{r3s4} = 0$, da S4 si ricava:

$$T_{s4p4} = T_{C,s4} + T_{E,s4} \quad (2.105)$$

Da S3:

$$T_{E,s3} = T_{s3r2} \quad (2.106)$$

Da R2:

$$T_{s3r2} = T_{r2p2} \quad (2.107)$$

Da P2:

$$T_{r2p2} = -(T_{in} + T_{C,p2}) \cdot \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \right) \quad (2.108)$$

e sostituendo opportunamente nella (2.104):

$$T_{out} = -T_{C,s4} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{1 + \sigma_2} \right) - T_{in} \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{1 + \sigma_2} \right) \quad (2.109)$$

Eguagliando la (2.109) con la (2.103), ed imponendo $T_A = T_{off}$, $T_{C,s4} = -T_{C,p2} = -T_{onc}$, è possibile scrivere un'equazione che descrive la dipendenza della frizione uscente (freno A), in funzione della frizione entrante (T_{onc}) e della coppia in ingresso (T_{in}).

$$\boxed{T_{off} = -T_{onc} \cdot \left[\frac{1 + \sigma_1 + \sigma_4}{(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_1)} \right] + T_{in} \cdot \left[\frac{\sigma_2 \sigma_4 - 1 - \sigma_1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \right]} \quad (2.110)$$

Per il calcolo della coppia in uscita, ricorrendo alla (2.104,5,6,7,8), si ottiene:

$$\boxed{T_{out} = (T_{onc} - T_{in} \cdot \sigma_2) \left(\frac{1 + \sigma_4}{1 + \sigma_2} \right)} \quad (2.111)$$

Per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} costituisce il rapporto di trasmissione della seconda marcia.

Inertia Phase

Al termine della torque phase si ha che $T_{off} = 0$. Da (2.110) si ricava la relazione che lega la coppia della frizione entrante alla coppia in ingresso:

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \frac{(\sigma_2\sigma_4 - 1 - \sigma_1)}{(\sigma_4 + 1 + \sigma_1)} \quad (2.112)$$

e sostituendo nella (2.111), si ricava la coppia in uscita dal cambio in funzione della coppia entrante:

$$\boxed{T_{out} = -T_{in} \cdot \frac{(\sigma_1+1)(\sigma_4+1)}{1+\sigma_4+\sigma_1}} \quad (2.113)$$

E' facilmente osservabile che il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della terza marcia.

2.7.3 Cambio marcia Terza - Quarta ($B - C - E \rightarrow B - D - E$)

Nel cambio marcia $3 \rightarrow 4$, la frizione C rappresenta quella uscente, mentre la frizione D quella entrante. Il freno A non trasmette coppia in questo cambio marcia, pertanto $T_A = 0$.

Torque Phase

Da P4:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - T_{s4p4} \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.114)$$

Da S4:

$$T_{s4p4} = T_{E,s4} + T_{r3s4} + T_{C,s4} \quad (2.115)$$

Da R3:

$$T_{r3s4} = T_{p3r3} \quad (2.116)$$

Da P3:

$$T_{p3r3} = T_{D,p3} \cdot \left(\frac{\sigma_3}{1 + \sigma_3} \right) \quad (2.117)$$

Quindi è possibile scrivere T_{out} come:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - [T_{E,s4} + T_{D,p3} \cdot \left(\frac{\sigma_3}{1 + \sigma_3} \right) + T_{C,s4}] \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.118)$$

A questo punto, si scrive la relazione che lega $T_{E,s3}$ alla $T_{D,p3}$, $T_{C,p2}$ e T_{in} . Da P2:

$$T_{C,p2} = T_{p2r2} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{\sigma_2} \right) - T_{in} \quad (2.119)$$

Da R2:

$$T_{p2r2} = T_{r2s3} \quad (2.120)$$

Da S3:

$$T_{r2s3} = T_{s3p3} - T_{E,s3} \quad (2.121)$$

Da P3:

$$T_{s3p3} = -\frac{T_{D,p3}}{(1 + \sigma_3)} \quad (2.122)$$

Ed infine si ricava $T_{E,s3}$ come:

$$T_{E,s3} = -\frac{T_{D,p3}}{(1 + \sigma_3)} - (T_{in} + T_{C,p2}) \cdot \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \right) \quad (2.123)$$

Considerato che $T_{E,s3} = -T_{E,s4}$, è possibile sostituire l'espressione di $T_{E,s3}$ nella (2.118):

$$T_{out} = -T_{D,p4} - \left[T_{C,s4} + T_{D,p3} + (T_{in} + T_{C,p2}) \cdot \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \right) \right] \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.124)$$

Allo stesso tempo, sempre facendo il bilancio delle coppie su P4, è possibile scrivere T_{out} come:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - T_{r4p4} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4} \right) \quad (2.125)$$

e facendo i vari equilibri su R4, P1, S1, S2 e P2, si arriva a scrivere T_{out} come:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - \left[(T_{in} + T_{C,p2}) \cdot \left(\frac{1 + \sigma_1}{1 + \sigma_2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sigma_4}{\sigma_4} \right) \right] \quad (2.126)$$

Eguagliando la (2.126) con la (2.124), è possibile ricavare la relazione che lega la $T_{C,p2}$ alla $T_{D,p3}$ ed alla T_{in} , ovvero si scrive la T_{off} in funzione di T_{onc} e di T_{in} :

$$T_{C,p2} = T_{D,p3} \cdot \left[\frac{\sigma_4 \cdot (1 + \sigma_2)}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right] - T_{in} \cdot \left[\frac{1 + \sigma_1 - \sigma_2 \sigma_4}{1 + \sigma_1 + \sigma_4} \right] \quad (2.127)$$

ovvero:

$$T_{off} = -T_{onc} \cdot \left[\frac{\sigma_4 \cdot (1 + \sigma_2)}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right] + T_{in} \cdot \left[\frac{\sigma_2 \sigma_4 - 1 - \sigma_1}{1 + \sigma_1 + \sigma_4} \right] \quad (2.128)$$

Per il calcolo della coppia in uscita T_{out} si ricava $T_{C,p2}$ dalla (2.124) e lo si va a sostituire in un secondo momento nella (2.126):

$$T_{C,p2} = T_{D,p3} \cdot \sigma_4 \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{1 + \sigma_4} \right) + T_{in} \cdot \sigma_2 + T_{out} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{1 + \sigma_4} \right) \quad (2.129)$$

$$T_{out} = -T_{D,p3} \cdot \left[\frac{\sigma_1 \sigma_4}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right] - T_{in} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right] \quad (2.130)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{out} = T_{onc} \cdot \left[\frac{\sigma_1 \sigma_4}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right] - T_{in} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{(1 + \sigma_1 + \sigma_4)} \right]} \quad (2.131)$$

Si nota come per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} costituisca il rapporto di trasmissione della terza marcia.

Inertia Phase

Ponendo $T_{off} = 0$ nella (2.128), si ricava la relazione che lega la T_{onc} alla T_{in} durante l'inertia phase.

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \left[\frac{(\sigma_2 \sigma_4 - 1 - \sigma_1)}{\sigma_4 \cdot (1 + \sigma_2)} \right] \quad (2.132)$$

Sostituendo il valore dell'espressione di T_{onc} appena ricavata nella (2.131), si ottiene:

$$\boxed{T_{out} = -T_{in} \cdot \frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_2)}{(1 + \sigma_2)}} \quad (2.133)$$

Il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della quarta marcia.

2.7.4 Cambio marcia Quarta - Quinta ($B - D - E \rightarrow B - C - D$)

Nel cambio marcia $4 \rightarrow 5$, la frizione C rappresenta quella entrante, mentre la frizione E quella uscente. Il freno A non trasmette coppia in questo cambio marcia, pertanto $T_A = 0$.

Torque Phase

Da P4:

$$T_{out} = -T_{D,p4} + T_{p4r4} \cdot \frac{(1 + \sigma_4)}{\sigma_4} \quad (2.134)$$

Facendo gli equilibri delle coppie su R4, P1, S1, S2 e P2, si ottiene:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - (T_{in} + T_{C,p2}) \frac{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_4)}{\sigma_4 \cdot (1 + \sigma_2)} \quad (2.135)$$

Allo stesso tempo, sempre da P4, è possibile scrivere:

$$T_{out} = -T_{D,p4} + T_{p4s4} \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.136)$$

E scrivendo le equazioni di equilibrio su S4, R3, P3, si ottiene:

$$T_{out} = -T_{D,p4} + \left[-T_{E,s4} - T_{C,s4} - T_{D,p3} \cdot \frac{\sigma_3}{(1 + \sigma_3)} \right] \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.137)$$

A questo punto si procede col ricavare $T_{D,p3}$ in funzione di $T_{E,s3}$, $T_{C,p2}$ e T_{in} .

Da P3:

$$T_{D,p3} = T_{p3s3} \cdot (1 + \sigma_3) \quad (2.138)$$

E facendo gli equilibri su S3, R2, P2, si ricava:

$$T_{D,p3} = -T_{E,s3} \cdot (1 + \sigma_3) - (T_{in} + T_{C,p2}) \frac{\sigma_2}{1 + \sigma_2} \cdot (1 + \sigma_3) \quad (2.139)$$

Sostituendo l'espressione di $T_{D,p3}$ appena ricavata nella (2.137) ed eguagliando l'equazione così ottenuta alla (2.135), dopo alcuni passaggi algebrici, è possibile ottenere la relazione che lega la $T_{E,s3}$ alla $T_{C,p2}$ ed alla T_{in} , ovvero la T_{off} alla T_{onc} ed alla T_{in} :

$$T_{E,s3} = -T_{C,p2} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_2\sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3)} \right] - T_{in} \left[\frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3)} \right] \quad (2.140)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{off} = -T_{onc} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_2\sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3)} \right] + T_{in} \left[\frac{(1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3)} \right]} \quad (2.141)$$

Per ottenere la coppia in uscita, effettuando i bilanci delle coppie su P4, S4, R3, P3, si ricava l'equazione che lega la $T_{E,s4}$ alla $T_{C,s4}$, T_{out} e $T_{D,p3-p4}$:

$$T_{E,s4} = -T_{C,s4} - \frac{T_{out}}{(1 + \sigma_4)} - \frac{T_{D,p4}}{(1 + \sigma_4)} - T_{D,p3} \cdot \frac{\sigma_3}{(1 + \sigma_3)} \quad (2.142)$$

E sostituendo l'espressione di $T_{E,s4}$ appena ricavata nella (2.139), si ottiene $T_{D,p3}$ in funzione di $T_{C,s4}$, T_{in} e T_{out} , ovvero:

$$T_{D,p3} = \left[-T_{C,s4} \cdot \frac{(1 + \sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)} - T_{in} \cdot \frac{\sigma_2(1 + \sigma_4)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)} - \frac{T_{out}}{\sigma_4} \right] \quad (2.143)$$

A questo punto, sostituendo l'espressione di $T_{D,p3}$ appena ottenuta nella (2.135), si ottiene T_{out} in funzione di $T_{C,s4}$ e T_{in} , ovvero T_{out} in funzione di T_{onc} e T_{in} :

$$T_{out} = T_{C,s4} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_2)} \right] - T_{in} \cdot \left[\frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{(1 + \sigma_2)} \right] \quad (2.144)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{out} = T_{onc} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_2)} \right] - T_{in} \cdot \left[\frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{(1 + \sigma_2)} \right]} \quad (2.145)$$

Si nota come per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} costituisca il rapporto di trasmissione della quarta marcia.

Inertia Phase

Dalla (2.141), per $T_{off} = 0$, si ottiene:

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \left[\frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_4} \right] \quad (2.146)$$

E sostituendo tale espressione nella (2.145), si ottiene:

$$T_{out} = -T_{in} \cdot \left[\frac{\sigma_2 \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_1 \sigma_4 + 1 + \sigma_1}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_4} \right] \quad (2.147)$$

Il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della quinta marcia.

2.7.5 Cambio marcia Quinta - Sesta ($B - C - D \rightarrow C - D - E$)

Nel cambio marcia $5 \rightarrow 6$, il freno B rappresenta l'elemento di attrito uscente, mentre la frizione E quello entrante. Anche in questo caso, come nel precedente, $T_A = 0$.

Torque Phase

Da R1:

$$T_B = T_{r1p1} \quad (2.148)$$

Da P1:

$$T_{r1p1} = T_{p1r4} \cdot \frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_1)} = \sigma_1 \cdot T_{s1p1} \quad (2.149)$$

Da R4:

$$T_{p1r4} = T_{r4p4} \quad (2.150)$$

Da P4:

$$T_{r4p4} = -(T_{out} + T_{D,p4}) \cdot \frac{\sigma_4}{(1 + \sigma_4)} \quad (2.151)$$

Da S1:

$$T_{s1p1} = T_{s2s1} \quad (2.152)$$

Da S2:

$$T_{s2s1} = T_{p2s2} \quad (2.153)$$

Da P2:

$$T_{p2s2} = \left[\frac{T_{in} + T_{C,p2}}{1 + \sigma_2} \right] \quad (2.154)$$

E da (1.148,49,50,51,52,53,54) si ottiene:

$$-(T_{out} + T_{D,p4}) \cdot \frac{\sigma_4}{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)} = \frac{(T_{in} + T_{C,p2})}{(1 + \sigma_2)} \quad (2.155)$$

ovvero:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - T_{in} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)} \right] - T_{C,p2} \cdot \left[\frac{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)}{\sigma_4(1 + \sigma_2)} \right] \quad (2.156)$$

Da P3, R3, S4 e P4, è possibile ricavare T_{out} , questa volta però funzione di $T_{D,p3-4}$, $T_{C,s4}$ e $T_{E,s4}$:

$$T_{out} = -T_{D,p4} - \left[T_{C,s4} + T_{D,p3} \cdot \frac{\sigma_3}{(1 + \sigma_3)} + T_{E,s4} \right] \cdot (1 + \sigma_4) \quad (2.157)$$

Da P2, S3 e P3, è possibile ricavare $T_{C,p2}$ in funzione di T_{in} , $T_{D,p3}$ e $T_{E,s3}$:

$$T_{C,p2} = -T_{in} - \left[\frac{T_{D,p3}}{(1 + \sigma_3)} + T_{E,s3} \right] \cdot \frac{(1 + \sigma_2)}{\sigma_2} \quad (2.158)$$

E sostituendo l'espressione di $T_{C,p2}$ appena ricavata nella (2.156), si ricava $T_{D,p3}$ in funzione di T_{out} e $T_{E,s4}$:

$$T_{D,p3} = \left[\frac{(1 + \sigma_3)}{(\sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_1\sigma_4)} \right] \left[T_{out} \cdot (\sigma_2\sigma_4) + T_{E,s4} \cdot (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_4) \right] \quad (2.159)$$

A questo punto si sostituisce nella (2.157) prima la (2.158) e poi la (2.159), ottenendo così l'equazione che lega T_{out} a T_{in} e $T_{E,s3}$, ovvero T_{out} in funzione di T_{in} e T_{onc} :

$$T_{out} = \frac{1}{(X)} \left[T_{E,s3} \cdot \frac{(\sigma_1\sigma_4) \cdot (1 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_3\sigma_4)}{(1 + \sigma_4)} - T_{in} \cdot (Y) \right] \quad (2.160)$$

con $X = (\sigma_2\sigma_4 + \sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4)$;

e $Y = (\sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_4 + \sigma_1\sigma_4)$ ovvero:

$$\boxed{T_{out} = \frac{1}{(X)} \left[T_{onc} \cdot \frac{(\sigma_1\sigma_4) \cdot (1 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_3\sigma_4)}{(1 + \sigma_4)} - T_{in} \cdot (Y) \right]} \quad (2.161)$$

Si può notare come per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenti il rapporto di trasmissione della quinta marcia.

Per il calcolo dell'equazione che lega la coppia della frizione uscente alla coppia della frizione entrante ed alla coppia in ingresso, si parte dall'equilibrio su R1, P1, S1, R4 e P4:

$$T_B = -(T_{out} + T_{D,p4}) \cdot \frac{\sigma_4\sigma_1}{(1 + \sigma_4)(1 + \sigma_1)} \quad (2.162)$$

Sapendo che $T_{D,p3} = -T_{D,p4}$, è possibile sostituire la (2.159) nella (2.162) ottenendo la T_{out} in funzione di T_B e di $T_{E,s4}$:

$$T_{out} = -T_B \frac{(Y)}{(\sigma_1 \sigma_4)} + T_{E,s4} \cdot (1 + \sigma_3) \quad (2.163)$$

Ed eguagliando la T_{out} appena ricavata alla (2.160), si ricava la T_B in funzione della T_{in} e della $T_{E,s4}$, ovvero la T_{off} in funzione della T_{in} e della T_{onc} :

$$T_B = \left[\frac{(\sigma_1 \sigma_4)}{(X)} \right] \cdot [-T_{E,s3} \cdot (1 + \sigma_3) + T_{in}] \quad (2.164)$$

ovvero:

$$T_{off} = \left[\frac{(\sigma_1 \sigma_4)}{(X)} \right] \cdot [-T_{onc} \cdot (1 + \sigma_3) + T_{in}] \quad (2.165)$$

Inertia Phase

Ponendo nella (2.165) $T_{off} = 0$, si ottiene:

$$T_{onc} = \frac{T_{in}}{(1 + \sigma_3)} \quad (2.166)$$

E sostituendo l'espressione di T_{onc} ottenuta per $T_{off} = 0$ nella (2.161), dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$T_{out} = -T_{in} \quad (2.167)$$

Tale equazione rappresenta la condizione di presa diretta, ovvero l'uguaglianza tra la coppia in ingresso e quella in uscita. Questa situazione si verifica con l'innesto della sesta marcia, cioè la marcia il cui rapporto di trasmissione vale 1.

2.7.6 Cambio marcia Sesta - Settima ($C - D - E \rightarrow A - C - D$)

Nel cambio marcia $6 \rightarrow 7$, il freno A rappresenta l'elemento di attrito entrante, mentre la frizione E quello uscente. In questo caso il freno B non trasmette coppia, pertanto $T_B = 0$.

Torque Phase

Da S4, R3, P3 si ottiene:

$$T_{C,s4} = -T_{D,p3} \cdot \frac{\sigma_3}{(1 + \sigma_3)} - T_{E,s4} \quad (2.168)$$

Da P2, R2, S3, P3 si ottiene:

$$T_{C,p2} = -T_{in} - \left[\frac{T_{D,p3}}{(1 + \sigma_3)} + T_{E,s3} \right] \cdot \frac{(1 + \sigma_2)}{\sigma_2} \quad (2.169)$$

Considerato che $T_{C,p2} = -T_{C,s4}$, eguagliando la (2.169) con la (2.168), è possibile ricavare $T_{D,p3}$ in funzione di T_{in} e $T_{E,s3}$:

$$T_{D,p3} = - \left[\frac{(1 + \sigma_3)}{(\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \cdot [T_{in} \cdot \sigma_2 + T_{E,s3}] \quad (2.170)$$

Da S1, S2, P2:

$$T_A = - \frac{(T_{in} + T_{C,p2})}{(1 + \sigma_2)} \quad (2.171)$$

Sostituendo l'espressione di $T_{D,p3}$ (2.170) nella (2.168) e sostituendo l'equazione così ottenuta nella (2.171), si ottiene la relazione che lega $T_{E,s3}$, T_{in} e T_A , ovvero T_{off} , T_{in} e T_{onc} :

$$T_{E,s3} = \left[\frac{(1 + \sigma_2)}{(\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \cdot [T_A \cdot (\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2) + T_{in}] \quad (2.172)$$

ovvero:

$$T_{E,s3} = \left[\frac{(1 + \sigma_2)}{(\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \cdot [T_A \cdot (\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2) + T_{in}] \quad (2.173)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{off} = \left[\frac{(1 + \sigma_2)}{(\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \cdot [-T_{onc} \cdot (\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2) + T_{in}]} \quad (2.174)$$

Considerato che $T_B = 0$, ne consegue che $T_B = T_{p1r1} = T_{r4p1} = T_{p4r4} = 0$.

Da P4:

$$T_{out} = -T_{D,p4} \quad (2.175)$$

Dalla (2.170), imponendo che $T_{D,p3} = T_{out}$, è possibile ricavare $T_{E,s3}$:

$$T_{E,s3} = -T_{out} \cdot \frac{(\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)}{(1 + \sigma_3)} - T_{in} \cdot \sigma_2 \quad (2.176)$$

Ed eguagliando la (2.176) alla (2.172), si ricava la T_{out} in funzione di T_A e T_{in} , ovvero T_{onc} e T_{in} :

$$T_{out} = -T_A - T_{in} \quad (2.177)$$

ovvero:

$$\boxed{T_{out} = T_{onc} - T_{in}} \quad (2.178)$$

Si nota come per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} valga 1, ovvero condizione di presa diretta in sesta marcia.

Inertia Phase

Dalla (2.174) per $T_{off} = 0$:

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \left[\frac{1}{(\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \quad (2.179)$$

E sostituendo la (2.179) nella (1.178), si ottiene:

$$T_{out} = -T_{in} \cdot \left[\frac{\sigma_2(1 + \sigma_3)}{(\sigma_2 \sigma_3 + 1 + \sigma_2)} \right] \quad (2.180)$$

Il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della settima marcia.

2.7.7 Cambio marcia Settima - Ottava ($A - C - D \rightarrow A - D - E$)

Nel cambio marcia $7 \rightarrow 8$, la frizione C rappresenta la frizione uscente, mentre la frizione E quella entrante. Il freno B non trasmette coppia, quindi $T_B = T_{p1r1} = T_{r4p1} = T_{p4r4} = 0$.

Torque Phase

Da S4:

$$T_{C,s4} + T_{r3s4} + T_{E,s4} = 0 \quad (2.181)$$

Da R3:

$$T_{r3s4} = T_{p3r3} \quad (2.182)$$

Da P3:

$$T_{D,p3} = T_{p3r3} \cdot \frac{(1 + \sigma_3)}{\sigma_3} \quad (2.183)$$

Quindi:

$$T_{C,s4} + T_{D,p3} \cdot \frac{\sigma_3}{(1 + \sigma_3)} + T_{E,s4} = 0 \quad (2.184)$$

Da P3, S3, R2, P2:

$$T_{D,p3} = \left[- (T_{in} + T_{C,p2}) \cdot \frac{\sigma_2}{(1 + \sigma_2)} - T_{E,s3} \right] \cdot (1 + \sigma_3) \quad (2.185)$$

Sostituendo la (2.185) nella (2.184), si ricava la relazione che lega $T_{C,s4}$, T_{in} e $T_{E,s4}$, ovvero T_{off} , T_{in} e T_{onc} :

$$T_{C,s4} = \frac{1}{(1 + \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3)} \cdot [-T_{E,s4} \cdot (1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3) + T_{in} \cdot (\sigma_2 \sigma_3)] \quad (2.186)$$

ovvero:

$$T_{off} = \frac{1}{(1+\sigma_2+\sigma_2\sigma_3)} \cdot [-T_{onc} \cdot (1+\sigma_2)(1+\sigma_3) + T_{in} \cdot (\sigma_2\sigma_3)] \quad (2.187)$$

Da P3, S3, R2, P2 e considerando che $T_{out} = -T_{D,p4} = T_{D,p3}$:

$$T_{C,p2} = -T_{in} - \left[T_{E,s3} + \frac{T_{out}}{(1+\sigma_3)} \right] \cdot \frac{(1+\sigma_2)}{\sigma_2} = -T_{C,s4} \quad (2.188)$$

Dalla (2.184), sostituendo $T_{out} = T_{D,p3}$, si ottiene:

$$T_{C,s4} = -T_{out} \cdot \frac{\sigma_3}{(1+\sigma_3)} - T_{E,s4} \quad (2.189)$$

Eguagliando la (2.189) alla (2.188), si ricava T_{out} in funzione di T_{in} e $T_{E,s4}$, ovvero T_{in} e T_{onc} :

$$T_{out} = \left[\frac{(1+\sigma_3)}{(1+\sigma_2+\sigma_2\sigma_3)} \right] \cdot (T_{E,s4} - T_{in} \cdot \sigma_2) \quad (2.190)$$

ovvero:

$$T_{out} = \left[\frac{(1+\sigma_3)}{(1+\sigma_2+\sigma_2\sigma_3)} \right] \cdot (T_{onc} - T_{in} \cdot \sigma_2) \quad (2.191)$$

Per $T_{onc} = 0$, il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione della settima marcia.

Inertia Phase

Ponendo nella (2.187) $T_{off} = 0$ si ottiene:

$$T_{onc} = T_{in} \cdot \frac{\sigma_2\sigma_3}{(1+\sigma_2)(1+\sigma_3)} \quad (2.192)$$

E sostituendo la (2.192) nella (2.191):

$$T_{out} = -T_{in} \cdot \frac{\sigma_2}{(1+\sigma_2)} \quad (2.193)$$

Il rapporto tra T_{out} e T_{in} rappresenta il rapporto di trasmissione dell'ottava marcia.

2.8 Calcolo della matrice dinamica del cambio

Breve riassunto dei passaggi effettuati:

- creazione dello schema del cambio in cui sono state assegnate le inerzie a ciascun componente (nel cambio in esame sono 8 inerzie distinte), le coordinate angolari θ e le coppie esplicate dai freni e dalle frizioni;
- breve excursus su come agiscono le forze di contatto tra le ruote e come vanno considerate quando vengono scritte le equazioni di equilibrio;
- scrittura delle equazioni di equilibrio (costituiscono le prime otto righe della matrice $[M]$);
- scrittura delle equazioni che descrivono i vincoli rigidi (costituiscono le ultime quattro righe della matrice $[M]$);
- rappresentazione della matrice $[M]$ e dei vettori $[\Omega]$, $[T]$;
- riformulazione della matrice $[M]$ mediante il metodo per sostituzione, procedura eseguita per eliminare i gradi di libertà dipendenti;
- riformulazione del vettore $[\Omega]$;
- riformulazione del vettore $[T]$.

In ottica di un'implementazione del cambio in oggetto sul software Matlab-Simulink, risulta estremamente interessante descrivere il comportamento dinamico del cambio mediante un approccio Newtoniano [5]. A tale scopo, per ciascun elemento contraddistinto da una propria inerzia, si scrive un'equazione di equilibrio di coppie.

Le coppie agenti su ciascun albero saranno coppie di inerzia del tipo " $I \cdot \ddot{\theta}$ ", coppie derivanti dalle forze di contatto tra le ruote dentate del tipo " $F \cdot R$ " e coppie derivanti dalle azioni esplicate da freni e frizioni del tipo " T ".

Per applicare questa metodologia al cambio in esame, si evidenziano nella figura 2.14 le inerzie dei singoli alberi " I ", le coordinate angolari associate a questi " θ " e le coppie in gioco " T ". L'obiettivo ultimo di questa analisi consiste nello scrivere un sistema in

forma matriciale in cui far comparire le equazioni dinamiche in grado di descrivere in modo completo il comportamento del cambio.

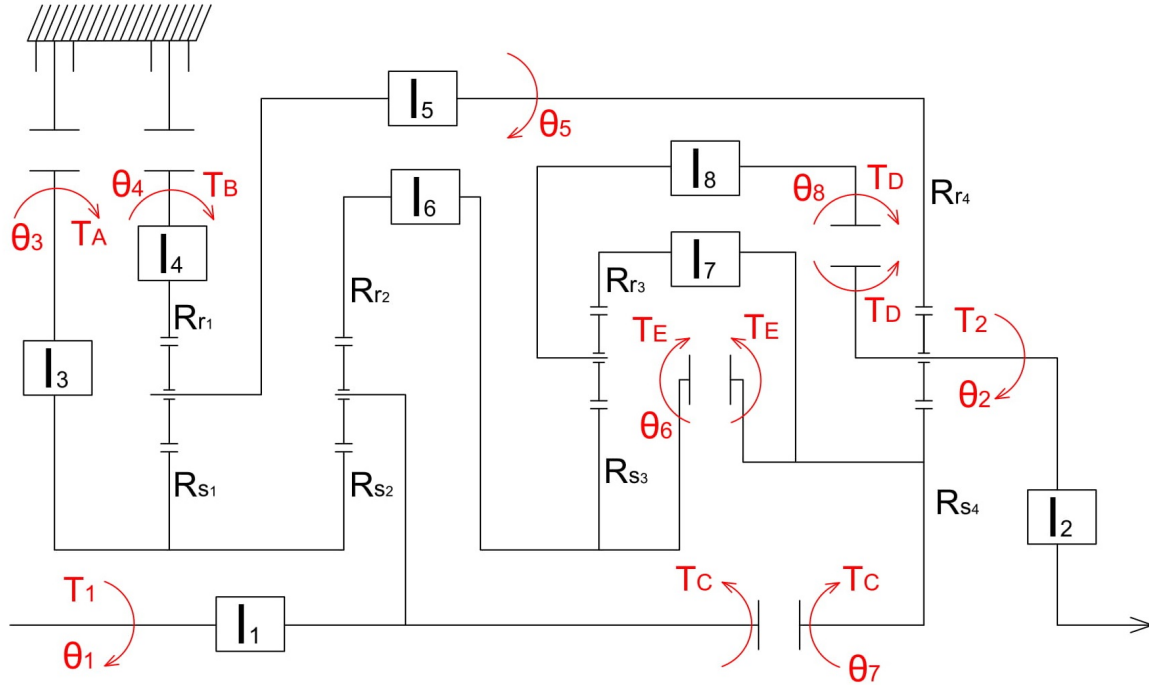


Figura 2.14: 8 speed AT con inerzie, coppie e velocità angolari

Al fine di fare ciò, si introduce:

- una matrice $[M]$ di dimensione "12 x 12", in cui nelle prime otto righe compaiono i termini di inerzia "I" ed i raggi delle ruote del solare o della corona " R_{s-r} " che dovranno essere moltiplicati rispettivamente con le accelerazioni angolari corrispondenti " $\ddot{\theta}$ " e le forze interne "F" richiamate entrambe nel vettore $[\Omega]$.

Poiché un cambio a rotismi epicicloidali, come già visto in precedenza, presenta a livello progettuale delle connessioni rigide tra un rotismo e l'altro, questo fa sì che nella matrice $[M]$, debbano essere aggiunte quattro righe (righe 9-12) in cui far comparire nella posizione opportuna i raggi R_{s-r} che moltiplicati per le velocità angolari (e quindi per le accelerazioni) contenute nel vettore $[\Omega]$ vadano a comporre delle equazioni tra loro indipendenti che vincolino le velocità proprie di un rotismo con quella di una ruota di un altro rotismo;

- un vettore $[\Omega]$ di dimensione "12 x 1", in cui compaiono per i primi 8 elementi le accelerazioni angolari " $\ddot{\theta}$ " e per gli ultimi 4 elementi le forze interne "F" che si esplicano tra una ruota e l'altra di ciascuno dei 4 rotismi complessivi;
- un vettore $[T]$ di dimensione "12 x 1", in cui compaiono le coppie agenti all'interno del cambio: " T_1 " rappresenta la coppia in ingresso, " T_2 " la coppia in uscita, ed infine tutte le coppie che ogni singola frizione esercita sui due alberi con cui essa è collegata. Ad esempio, la coppia " T_C " rappresenta la coppia esercitata dalla frizione "C" sull'albero contrassegnato da un'inerzia " I_1 " ed è uguale in modulo ma opposta in verso alla " T_C ", esercitata sempre dalla frizione "C", questa volta però sull'albero con inerzia " I_7 " (vedi figura 2.14).

Detto ciò, il sistema che ne deriva è il seguente [5]:

$$M \cdot \Omega = T \quad (2.194)$$

Prima di scrivere effettivamente le equazioni di equilibrio delle coppie, per chiarezza espositiva, si mostra come agiscono le forze di contatto all'interno del cambio e come queste vanno considerate quando si vanno a scrivere le equazioni.

2.8.1 Studio delle forze di contatto tra le ruote

In questa sezione si rappresentano le forze scambiate tra i denti delle ruote di cui è costituito il rotismo; in particolare, si dimostrerà che, trascurando l'inerzia delle ruote ed allo stesso tempo le perdite della trasmissione, la forza di contatto tra corona e satellite è uguale a quella tra satellite e solare [1]. In una seconda fase, si valuteranno le azioni in termini di coppia che le forze di contatto agenti sui satelliti esercitano a livello del portatreno.

In prima battuta, si considera un rotismo epicicloidale costituito da un solare, una

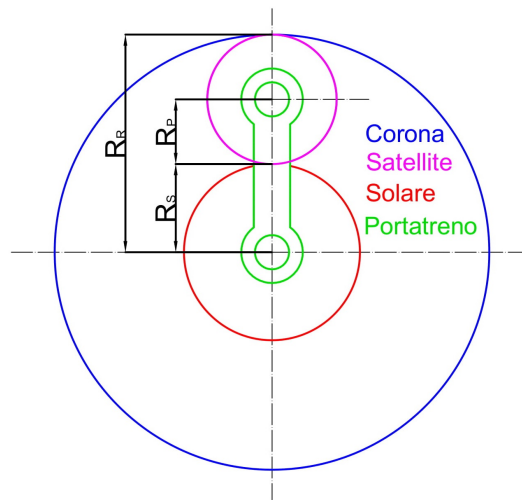


Figura 2.15: Rotismo Epicicloidale

corona ed un solo satellite a cui è collegato il portatreno. (Figura 2.15)

Se si considerano esclusivamente le forze di contatto tangenziali agenti sul satellite, il diagramma di corpo libero che ne consegue è quello in figura 2.16.

Le forze presenti in figura sono così definite:

- F_{rp} : forza che la corona esercita sul satellite;
- F_{sp} : forza che il solare esercita sul satellite;
- $F_{carrier}$: forza complessiva che agisce sul portatreno, conseguente all'applicazione delle due forze F_{rp} e F_{sp} .

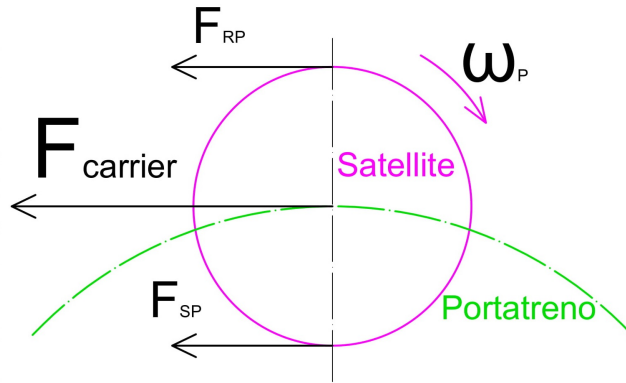


Figura 2.16: Forze di contatto sul satellite

Come detto in precedenza, se si trascurano l'inerzia delle ruote e le perdite all'interno della trasmissione, la forza F_{rp} risulta essere uguale alla forza F_{sp} .

La forza $F_{carrier}$ risulta essere pertanto la somma di F_{rp} e F_{sp} , ovvero:

$$F_{carrier} = F_{rp} + F_{sp} = 2 F_{rp} \quad (2.195)$$

$$F_{carrier} = 2 F \quad (2.196)$$

La coppia generata dalla forza $F_{carrier}$ ha un braccio pari a $R_s + R_p$ (vedi figura 2.15).

Affinché all'interno della matrice $[M]$ appaiano unicamente i raggi della corona e del solare, la coppia esercitata da $F_{carrier}$ sul portatreno può essere riscritta nel seguente modo:

$$F_{carrier} \cdot (R_s + R_p) \quad (2.197)$$

$$2 F \cdot (R_s + R_p) \quad (2.198)$$

Considerando le relazioni geometriche che intercorrono tra i raggi delle ruote del rotismo (vedi figura 2.15), è possibile scrivere:

$$R_s + R_p = R_{carrier} \quad (2.199)$$

$$R_p = R_r - R_{carrier} \quad (2.200)$$

ovvero:

$$R_s + R_r = 2 R_{carrier} \quad (2.201)$$

Sostituendo l'equazione (2.199) nella (2.198), si ottiene:

$$2 F \cdot (R_s + R_p) = F \cdot (2 \cdot R_{carrier}) \quad (2.202)$$

e considerata la relazione ricavata nella (2.201), si ottiene la coppia generata dalla forza di contatto F sul portatreno:

$$F \cdot (R_s + R_r) \quad (2.203)$$

A questo punto, si dimostra come un maggior numero di satelliti non influenzi la coppia esercitata sul portatreno dalle forze di contatto del solare e della corona sui satelliti.

Ad esempio, considerando un rotismo costituito da quattro satelliti, le azioni di contatto del solare e della corona sui satelliti sono mostrate nella figura 2.17.

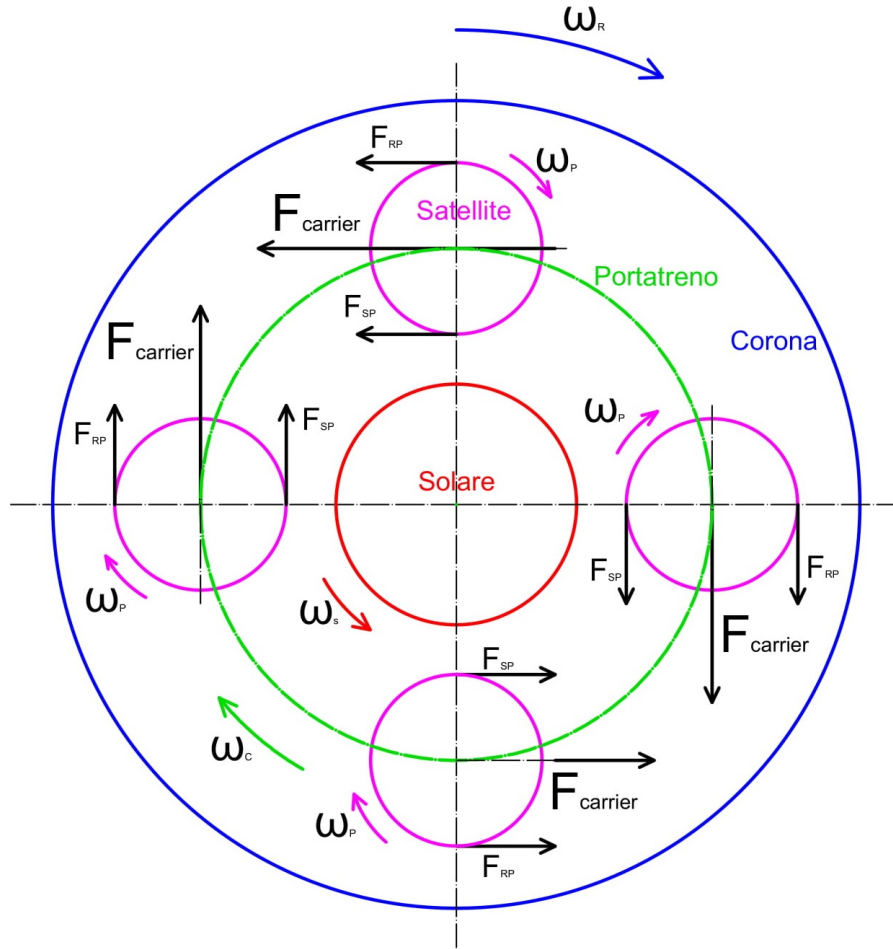


Figura 2.17: Rotismo epicicloidale con 4 satelliti

É fondamentale sottolineare che le forze di contatto che agiscono sui satelliti risultano equiripartite, ovvero ogni singola forza di contatto (F_{rp} e F_{sp}) è pari ad un quarto rispetto al caso in cui sia presente un unico satellite.

La forza $F_{carrier}$ agente sul portatreno a livello di singolo satellite sarà sempre pari alla somma di F_{rp} e F_{sp} (queste 2 forze sono uguali tra loro), ma poiché sono presenti quattro satelliti occorre considerare tutte e 4 le forze $F_{carrier}$. Ogni singola forza $F_{carrier}$ è anch'essa pari ad un quarto rispetto al caso del singolo satellite.

In conclusione si può affermare che, anche considerando quattro satelliti come in questo caso, e quindi le quattro $F_{carrier}$ agenti all'interno del sistema, la coppia agente sul portatreno derivante dalle azioni di contatto che solare e corona scambiano con i satelliti è sempre la medesima ed è pari a: $F \cdot (R_s + R_r)$.

La conseguenza di avere più satelliti all'interno del rotismo è un minore sforzo sul perno che collega il singolo satellite al portatreno.

2.8.2 Equazioni di equilibrio

É possibile scrivere le equazioni di equilibrio delle coppie per ciascun albero del cambio in esame.

Considerando, ad esempio, l'albero con inerzia " I_1 ", con riferimento alla figura 2.18, e tenendo presente che il termine di coppia " $I \cdot \ddot{\theta}$ " agisce in verso opposto rispetto a quello della coordinata angolare " θ ", è possibile scrivere la seguente equazione di bilancio delle coppie agenti.

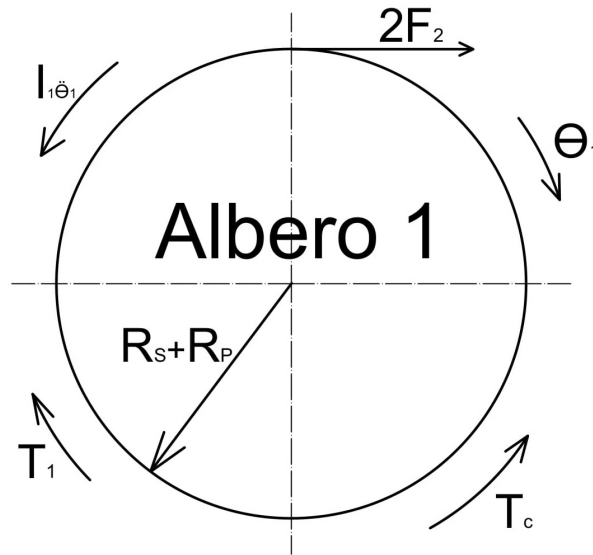


Figura 2.18: Coppie agenti sull'albero 1

N.B. L'albero 1 è costituito ad un'estremità dal portatreno del rotismo n.2 e dall'altra da una faccia della frizione C.

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - 2 F_2 \cdot (R_s + R_p) = T_1 - T_C \quad (2.204)$$

dove:

- I_1 rappresenta l'inerzia caratteristica dell'albero 1;
- $\ddot{\theta}_1$ rappresenta l'accelerazione angolare associata all'albero 1;
- R_{s2} e R_{r2} rappresentano rispettivamente il raggio del solare del rotismo n.2 ed il raggio della corona sempre del rotismo n.2;

- F_2 rappresenta la forza interna scambiata tra le ruote di cui è costituito il rotismo n.2;
- T_1 rappresenta la coppia in ingresso;
- T_C rappresenta la coppia esercitata dalla frizione "C" sull'albero 1.

N.B. Il fatto che in questa equazione, diversamente da altre, compaia la somma tra il raggio del solare e di quello della corona, è dovuto alla particolarità costruttiva del cambio, ovvero l'albero 1 costituisce il portatreno del rotismo n.2.

Allo stesso tempo, il segno negativo che precede la somma dei due raggi che moltiplica la forza F_2 (vedi 2.204) è frutto della convenzione adottata per l'intero sistema, ovvero coppie discordi al verso di " $\ddot{\theta}$ " per quelle coppie che il solare o la corona esercitano sul portatreno, concordi a " $\ddot{\theta}$ " invece per quelle esercitate dal portatreno sulla corona o sul solare.

La relazione che lega F_2 a F_{rp} e F_{sp} è la seguente:

$$F_2 = F_{rp} = F_{sp} \quad (2.205)$$

Richiamando le relazioni (2.199, 1.200, 1.201, 1.202, 1.203), è possibile riscrivere l'equazione (2.204) come:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - F_2 \cdot (R_{s2} + R_{r2}) = T_1 - T_C \quad (2.206)$$

Per quanto riguarda gli equilibri delle coppie per gli alberi che inglobano al loro interno un solare o una corona, solamente una forza di contatto " F " entra in gioco, e la coppia che ne deriva sarà pari a $F \cdot R_s$ oppure $F \cdot R_r$.

Si riporta a titolo di esempio il diagramma di corpo libero dell'albero 3 e la sua equazione di equilibrio. (vedi figura 2.19)

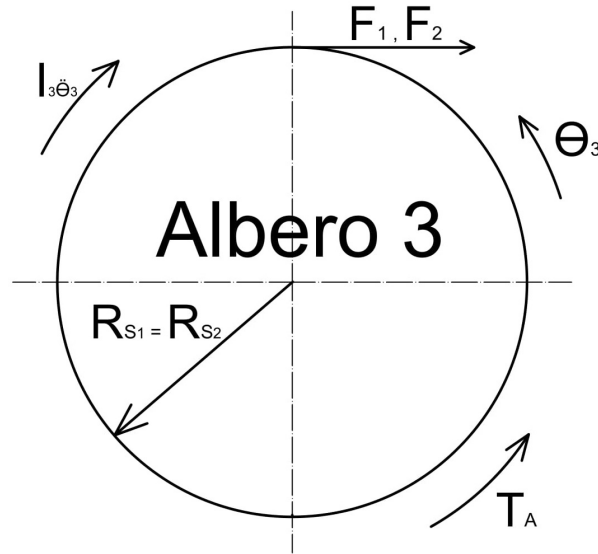


Figura 2.19: Coppie agenti sull'albero 3

$$I_3 \cdot \ddot{\theta}_3 + R_{s1} \cdot F_1 + R_{s2} \cdot F_2 = T_A \quad (2.207)$$

N.B. In figura 2.19, si può notare che $R_{s1} = R_{s2}$ in quanto, nella prima parte della trattazione, si è dimostrato che il rotismo n.1 e n.2 sono uguali e quindi che il solare n.1 ed il solare n.2 hanno lo stesso raggio.

I termini che compongono l'equazione (2.207) seguono la stessa logica dell'equazione (2.206), con la differenza che in questo caso, a livello progettuale, l'albero 3 costituisce il solare dell'albero 1 ed allo stesso tempo il solare dell'albero 2. Per tale ragione, compare il prodotto tra la forza " F_1 " ed il raggio " R_{s1} " ed il prodotto tra la forza " F_2 " ed il raggio " R_{s2} ".

2.8.3 Matrice [M] e vettori [Ω], [T]

Seguendo la logica adottata per scrivere le equazioni (1.206 e 1.207), procedendo con il bilancio delle coppie per i restanti alberi, prendendo in considerazione termini quali inerzie e raggi, si procede con la compilazione delle prime otto righe della matrice [M]. (vedi 2.212)

A questo punto, come accennato in precedenza, a causa delle connessioni rigide tra una

ruota di un rotismo ed una ruota di rotismo differente, si scrivono 4 equazioni che vincolano le velocità dei diversi rotismi [5]:

$$R_{s1} \cdot \dot{\theta}_3 + R_{r1} \cdot \dot{\theta}_4 = (R_{s1} + R_{r1}) \cdot \dot{\theta}_5 \quad (2.208)$$

$$R_{s2} \cdot \dot{\theta}_3 + R_{r2} \cdot \dot{\theta}_6 = (R_{s2} + R_{r2}) \cdot \dot{\theta}_1 \quad (2.209)$$

$$R_{s3} \cdot \dot{\theta}_6 + R_{r3} \cdot \dot{\theta}_7 = (R_{s3} + R_{r3}) \cdot \dot{\theta}_8 \quad (2.210)$$

$$R_{s4} \cdot \dot{\theta}_7 + R_{r4} \cdot \dot{\theta}_5 = (R_{s4} + R_{r4}) \cdot \dot{\theta}_2 \quad (2.211)$$

l'equazione (2.208) tradotta vuol dire che la velocità tangenziale al raggio del solare S_1 è data dal raggio R_{s1} che moltiplica la differenza tra le velocità angolari dell'albero 3 e dell'albero 5; la velocità così ottenuta risulta uguale alla velocità tangenziale al raggio della corona R_1 , data dal raggio R_{r1} che moltiplica la differenza tra le velocità angolari dell'albero 5 e dell'albero 4.

Analogamente si sono ricavate le equazioni (2.209,10,11).

Derivando rispetto al tempo le equazioni (2.208,9,10,11), si ricavano le relazioni di vincolo tra le accelerazioni angolari riportate nell'espressione matriciale. Si introducono quindi i diversi raggi all'interno della matrice [M], andando ad occupare le posizioni opportune, a partire dalla nona riga fino alla dodicesima.

Si può notare come gli ultimi quattro elementi del vettore [T] (vedi 2.214) siano uguali a zero, dato che le ultime quattro righe della matrice [M] sono costituite da termini che non derivano da equazioni di bilancio delle coppie, bensì equazioni che descrivono la cinematica del sistema conseguente alle connessioni rigide a livello progettuale.

Infine, è possibile mostrare la matrice $[M]$ così ottenuta, come anche i vettori $[\Omega]$ e $[T]$:

$$M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{s2} - R_{r2} & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{s4} - R_{r4} \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{r4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{r2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_8 & 0 & 0 & 0 & R_{r3} & R_{s4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{s3} - R_{r3} & 0 \\ 0 & 0 & R_{s1} & R_{r1} & -R_{s1} - R_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{s2} - R_{r2} & 0 & R_{s2} & 0 & 0 & R_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_{s4} - R_{r4} & 0 & 0 & R_{r4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.212)$$

$$\Omega = [\ddot{\theta}_1; \ddot{\theta}_2; \ddot{\theta}_3; \ddot{\theta}_4; \ddot{\theta}_5; \ddot{\theta}_6; \ddot{\theta}_7; \ddot{\theta}_8; F_1; F_2; F_3; F_4]^T \quad (2.213)$$

$$T = [T_1 - T_C; \quad T_2 - T_D; \quad T_A; \quad T_B; \quad 0; \quad T_E; \quad T_C - T_E; \quad T_D; \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad 0]^T \quad (2.214)$$

2.8.4 Risoluzione Sistema Matriciale

In questa sezione, si procede alla risoluzione del sistema matriciale scritto in precedenza, ovvero:

$$[\Omega^*] = [M^*]^{-1} \cdot [T^*] \quad (2.215)$$

Per completezza di trattazione si riscrivono le 8 equazioni che sono state ottenute dal diagramma di equilibrio delle coppie per ciascun albero presente all'interno del cambio:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - F_2 \cdot (R_{s2} + R_{r2}) = T_1 - T_C \quad (2.216)$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 - F_4 \cdot (R_{s4} + R_{r4}) = T_2 - T_D \quad (2.217)$$

$$I_3 \cdot \ddot{\theta}_3 + F_1 \cdot R_{s1} + F_2 \cdot R_{s2} = T_A \quad (2.218)$$

$$I_4 \cdot \ddot{\theta}_4 + F_1 \cdot R_{r1} = T_B \quad (2.219)$$

$$I_5 \cdot \ddot{\theta}_5 - F_1 \cdot (R_{s1} + R_{r1}) + F_4 \cdot R_{r4} = 0 \quad (2.220)$$

$$I_6 \cdot \ddot{\theta}_6 + F_2 \cdot R_{r2} + F_3 \cdot R_{s3} = T_E \quad (2.221)$$

$$I_7 \cdot \ddot{\theta}_7 + F_3 \cdot R_{r3} + F_4 \cdot R_{s4} = T_C - T_E \quad (2.222)$$

$$I_8 \cdot \ddot{\theta}_8 - F_3 \cdot (R_{s3} + R_{r3}) = T_D \quad (2.223)$$

La procedura adottata in questa fase consiste nel ricavare l'espressione di ogni singola forza di contatto (F_1, F_2, F_3, F_4) a partire da un'equazione corrispondente ad un albero cinematicamente dipendente da altri (alberi 1,2,4,8 ovvero equazioni 2.216, 2.217, 2.219, 2.223) e la conseguente sostituzione di questa all'interno delle equazioni corrispondenti ai gradi di libertà definiti linearmente indipendenti, ovvero quelle equazioni che contengono $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7$ (equazioni 2.218, 2.220, 2.221, 2.222).

L'iter per ottenere un sistema di 4 equazioni è il seguente:

- si ricava F_2 dalla (2.216) e lo si sostituisce nella (2.218) e (2.221);
- si ricava F_4 dalla (2.217) e lo si sostituisce nella (2.220) e (2.222);
- si ricava F_1 dalla (2.219) e lo si sostituisce nella (2.218) e (2.220);
- si ricava F_3 dalla (2.223) e lo si sostituisce nella (2.221) e (2.222);

- nei passaggi successivi, occorre scrivere le accelerazioni angolari linearmente dipendenti che compaiono all'interno delle equazioni sinora ottenute ($\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4, \ddot{\theta}_8$) in funzione di quelle che sono linearmente indipendenti ($\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7$).

A tale scopo, si richiamano le equazioni che esprimono i vincoli cinematici all'interno di ciascuno dei 4 rotismi e le corrispondenti espressioni di $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4, \ddot{\theta}_8$:

$$R_{s1} \cdot \ddot{\theta}_3 + R_{r1} \cdot \ddot{\theta}_4 = (R_{s1} + R_{r1}) \cdot \ddot{\theta}_5 \quad (2.224)$$

$$R_{s2} \cdot \ddot{\theta}_3 + R_{r2} \cdot \ddot{\theta}_6 = (R_{s2} + R_{r2}) \cdot \ddot{\theta}_1 \quad (2.225)$$

$$R_{s3} \cdot \ddot{\theta}_6 + R_{r3} \cdot \ddot{\theta}_7 = (R_{s3} + R_{r3}) \cdot \ddot{\theta}_8 \quad (2.226)$$

$$R_{s4} \cdot \ddot{\theta}_7 + R_{r4} \cdot \ddot{\theta}_5 = (R_{s4} + R_{r4}) \cdot \ddot{\theta}_2 \quad (2.227)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{R_{s2} \cdot \ddot{\theta}_3 + R_{r2} \cdot \ddot{\theta}_6}{(R_{s2} + R_{r2})} \quad (2.228)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{R_{s4} \cdot \ddot{\theta}_7 + R_{r4} \cdot \ddot{\theta}_5}{(R_{s4} + R_{r4})} \quad (2.229)$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{(R_{s1} + R_{r1}) \cdot \ddot{\theta}_5 - R_{s1} \cdot \ddot{\theta}_3}{R_{r1}} \quad (2.230)$$

$$\ddot{\theta}_8 = \frac{R_{s3} \cdot \ddot{\theta}_6 + R_{r3} \cdot \ddot{\theta}_7}{(R_{s3} + R_{r3})} \quad (2.231)$$

- a questo punto, raccogliendo opportunamente i termini che compongono le equazioni ottenute, è possibile scrivere un sistema matriciale nella forma:

$$[M^*] \cdot [\Omega^*] = [T^*] \quad (2.232)$$

da cui è possibile ricavare le 4 accelerazioni angolari $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6$ e $\ddot{\theta}_7$ invertendo la matrice $[M^*]$, ovvero scrivendo il seguente sistema:

$$[\Omega^*] = [M^*]^{-1} \cdot [T^*] \quad (2.233)$$

Nel prosieguo della trattazione vengono mostrati i passaggi algebrici effettuati per giungere alla formulazione della matrice $[M^*]$.

Definizione Matrice $[M^*]$

Si ricava F_1 dalla (2.219), F_2 dalla (2.216), F_3 dalla (2.223) e F_4 dalla (2.217):

$$F_1 = \frac{T_B - I_4 \cdot \ddot{\theta}_4}{R_{r1}} \quad (2.234)$$

$$F_2 = \frac{I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - T_1 + T_C}{R_{s2} + R_{r2}} \quad (2.235)$$

$$F_3 = \frac{I_8 \cdot \ddot{\theta}_8 - T_D}{R_{s3} + R_{r3}} \quad (2.236)$$

$$F_4 = \frac{I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 - T_2 + T_D}{R_{s4} + R_{r4}} \quad (2.237)$$

Sostituendo le espressioni di F_1 e F_2 nella (2.218) e sostituendo in un secondo momento le espressioni di $\ddot{\theta}_1$ (2.228) e $\ddot{\theta}_4$ (2.230), dopo alcuni passaggi matematici, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[I_3 + I_4 \cdot \left(\frac{R_{s1}}{R_{r1}} \right)^2 + I_1 \cdot \left(\frac{R_{s2}}{R_{s2} + R_{r2}} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\theta}_3 - \left[I_4 \cdot \frac{R_{s1} \cdot (R_{s1} + R_{r1})}{R_{r1}^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_5 + \\ & + \left[I_1 \cdot \frac{R_{s2} \cdot R_{r2}}{(R_{s2} + R_{r2})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_6 = T_A + T_1 \cdot \frac{R_{s2}}{R_{s2} + R_{r2}} - T_C \cdot \frac{R_{s2}}{R_{s2} + R_{r2}} - T_B \cdot \frac{R_{s1}}{R_{r1}} \end{aligned} \quad (2.238)$$

Sostituendo le espressioni di F_1 e F_4 nella (2.220) e sostituendo in un secondo momento le espressioni di $\ddot{\theta}_2$ (2.229) e $\ddot{\theta}_4$ (2.230), dopo alcuni passaggi matematici, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[I_5 + I_2 \cdot \left(\frac{R_{r4}}{R_{s4} + R_{r4}} \right)^2 + I_4 \cdot \left(\frac{R_{s1} + R_{r1}}{R_{r1}} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\theta}_5 - \left[I_4 \cdot \frac{R_{s1} \cdot (R_{s1} + R_{r1})}{R_{r1}^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_3 + \\ & + \left[I_2 \cdot \frac{R_{s4} \cdot R_{r4}}{(R_{s4} + R_{r4})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_7 = T_B \cdot \frac{R_{s1} + R_{r1}}{R_{r1}} + T_2 \cdot \frac{R_{r4}}{R_{s4} + R_{r4}} - T_D \cdot \frac{R_{r4}}{R_{s4} + R_{r4}} \end{aligned} \quad (2.239)$$

Sostituendo le espressioni di F_2 e F_3 nella (2.221) e sostituendo in un secondo momento le espressioni di $\ddot{\theta}_1$ (2.228) e $\ddot{\theta}_8$ (2.231), dopo alcuni passaggi matematici, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[I_1 \cdot \frac{R_{s2} \cdot R_{r2}}{(R_{s2} + R_{r2})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_3 + \left[I_6 + I_1 \cdot \left(\frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} \right)^2 + I_8 \cdot \left(\frac{R_{s3}}{R_{s3} + R_{r3}} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\theta}_6 \\ & + \left[I_8 \cdot \frac{R_{s3} \cdot R_{r3}}{(R_{s3} + R_{r3})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_7 = T_E + T_1 \cdot \frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} - T_C \cdot \frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} + T_D \cdot \frac{R_{s3}}{R_{s3} + R_{r3}} \end{aligned} \quad (2.240)$$

Sostituendo le espressioni di F_3 e F_4 nella (2.222) e sostituendo in un secondo momento le espressioni di $\ddot{\theta}_2$ (2.229) e $\ddot{\theta}_8$ (2.231) , dopo alcuni passaggi matematici, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[I_7 + I_2 \cdot \left(\frac{R_{s4}}{R_{s4} + R_{r4}} \right)^2 + I_8 \cdot \left(\frac{R_{r3}}{R_{s3} + R_{r3}} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\theta}_7 + \left[I_2 \cdot \frac{R_{s4} \cdot R_{r4}}{(R_{s4} + R_{r4})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_5 + \\ & \left[I_8 \cdot \frac{R_{s3} \cdot R_{r3}}{(R_{s3} + R_{r3})^2} \right] \cdot \ddot{\theta}_6 = T_C - T_E + T_2 \cdot \frac{R_{s4}}{R_{s4} + R_{r4}} + T_D \cdot \frac{R_{r3} \cdot (R_{s4} + R_{r4}) - R_{s4} \cdot (R_{s3} + R_{r3})}{(R_{s3} + R_{r3}) \cdot (R_{s4} + R_{r4})} \end{aligned} \quad (2.241)$$

Raccogliendo opportunamente i termini che moltiplicano le accelerazioni angolari, è possibile ricavare la matrice $[M^*]$:

$$\begin{bmatrix} I_3 + I_4 \cdot \left(\frac{R_{s1}}{R_{r1}} \right)^2 + I_1 \cdot \left(\frac{R_{s2}}{R_{s2} + R_{r2}} \right)^2 & -I_4 \cdot \frac{R_{s1} \cdot (R_{s1} + R_{r1})}{R_{r1}^2} & -I_4 \cdot \left(\frac{R_{r4}}{R_{s4} + R_{r4}} \right)^2 + I_4 \cdot \left(\frac{R_{s1} + R_{r1}}{R_{r1}} \right)^2 & 0 & 0 \\ -I_4 \cdot \frac{R_{s1} \cdot (R_{s1} + R_{r1})}{R_{r1}^2} & I_5 + I_2 \cdot \left(\frac{R_{r4}}{R_{s4} + R_{r4}} \right)^2 + I_4 \cdot \left(\frac{R_{s1} + R_{r1}}{R_{r1}} \right)^2 & 0 & I_1 \cdot \left(\frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} \right)^2 + I_8 \cdot \left(\frac{R_{s3}}{R_{s3} + R_{r3}} \right)^2 & I_2 \cdot \frac{R_{s4} \cdot R_{r4}}{(R_{s4} + R_{r4})^2} \\ I_1 \cdot \frac{R_{s2} \cdot R_{r2}}{(R_{s2} + R_{r2})^2} & 0 & 0 & I_6 + I_1 \cdot \left(\frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} \right)^2 + I_8 \cdot \left(\frac{R_{s3}}{R_{s3} + R_{r3}} \right)^2 & I_7 + I_2 \cdot \left(\frac{R_{s4}}{R_{s4} + R_{r4}} \right)^2 + I_8 \cdot \left(\frac{R_{r3}}{R_{s3} + R_{r3}} \right)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al fine di ricavare le accelerazioni angolari $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7$, il sistema che ne deriva è il seguente:

$$[\Omega^*] = [M^*]^{-1} \cdot [T^*] \quad (2.243)$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} = [M^*]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} T_A + T_1 \cdot \frac{R_{s2}}{R_{s2}+R_{r2}} - T_C \cdot \frac{R_{s2}}{R_{s2}+R_{r2}} - T_B \cdot \frac{R_{s1}}{R_{r1}} \\ T_B \cdot \frac{R_{s1}+R_{r1}}{R_{r1}} + T_2 \cdot \frac{R_{r4}}{R_{s4}+R_{r4}} - T_D \cdot \frac{R_{r4}}{R_{s4}+R_{r4}} \\ T_E + T_1 \cdot \frac{R_{r2}}{R_{s2}+R_{r2}} - T_C \cdot \frac{R_{r2}}{R_{s2}+R_{r2}} + T_D \cdot \frac{R_{s3}}{R_{s3}+R_{r3}} \\ T_C - T_E + T_2 \cdot \frac{R_{s4}}{R_{s4}+R_{r4}} + T_D \cdot \frac{R_{r3} \cdot (R_{s4}+R_{r4}) - R_{s4} \cdot (R_{s3}+R_{r3})}{(R_{s3}+R_{r3}) \cdot (R_{s4}+R_{r4})} \end{bmatrix} \quad (2.244)$$

che può essere riscritto facendo comparire i rapporti tra i denti della corona e del solare dei diversi rotismi che compongono il sistema:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} = [M^*]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} T_A + T_1 \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_B \cdot \frac{1}{\sigma_1} \\ T_B \cdot \frac{1+\sigma_1}{\sigma_1} + T_2 \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} - T_D \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} \\ T_E + T_1 \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} + T_D \cdot \frac{1}{1+\sigma_3} \\ T_C - T_E + T_2 \cdot \frac{1}{1+\sigma_4} + T_D \cdot \frac{\sigma_3 \cdot \sigma_4 - 1}{(1+\sigma_3) \cdot (1+\sigma_4)} \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

Per velocizzare l'implementazione in Simulink, il vettore in cui compaiono le somme delle diverse coppie può essere ottenuto come il prodotto tra una matrice $[T_{matrix}]$ ed un vettore colonna in cui compaiono le coppie nell'ordine " $T_1, T_2, T_A, T_B, T_C, T_D, T_E$ ", ovvero:

$$\begin{bmatrix} T_A + T_1 \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_B \cdot \frac{1}{\sigma_1} \\ T_B \cdot \frac{1+\sigma_1}{\sigma_1} + T_2 \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} - T_D \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} \\ T_E + T_1 \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} + T_D \cdot \frac{1}{1+\sigma_3} \\ T_C - T_E + T_2 \cdot \frac{1}{1+\sigma_4} + T_D \cdot \frac{\sigma_3 \cdot \sigma_4 - 1}{(1+\sigma_3) \cdot (1+\sigma_4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\sigma_2} & 0 & 1 & -\frac{1}{\sigma_1} & -\frac{1}{1+\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} & 0 & \frac{1+\sigma_1}{\sigma_1} & 0 & -\frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} & 0 \\ \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} & \frac{1}{1+\sigma_3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+\sigma_4} & 0 & 0 & 1 & \frac{\sigma_3 \sigma_4 - 1}{(1+\sigma_3)(1+\sigma_4)} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ T_E \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} T_A + T_1 \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{1}{1+\sigma_2} - T_B \cdot \frac{1}{\sigma_1} \\ T_B \cdot \frac{1+\sigma_1}{\sigma_1} + T_2 \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} - T_D \cdot \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} \\ T_E + T_1 \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} - T_C \cdot \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} + T_D \cdot \frac{1}{1+\sigma_3} \\ T_C - T_E + T_2 \cdot \frac{1}{1+\sigma_4} + T_D \cdot \frac{\sigma_3 \cdot \sigma_4 - 1}{(1+\sigma_3) \cdot (1+\sigma_4)} \end{bmatrix} = [T_{matrix}] \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ T_E \end{bmatrix} \quad (2.247)$$

Riassumendo, il vettore delle accelerazioni angolari $[\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7]$ può essere calcolato come:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} = [M^*]^{-1} \cdot [T_{matrix}] \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ T_E \end{bmatrix} \quad (2.248)$$

A questo punto, per invertire la matrice $[M^*]$, si assegna un valore pari a $0.01 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ a tutte le inerzie del sistema ($I_1 \dots I_8$) mentre i raggi dei solari e delle corone sono calcolabili mediante la formule:

$$R_s = \frac{m \cdot Z_s}{2} \quad (2.249)$$

$$R_r = \frac{m \cdot Z_r}{2} \quad (2.250)$$

dove:

- "m" rappresenta il modulo delle ruote, assunto pari a 2 mm;
- "Z_s" rappresenta il numero di denti del solare;
- "Z_r" rappresenta il numero di denti della corona.

R_{s1}	48 mm
R_{r1}	96 mm
R_{s2}	48 mm
R_{r2}	96 mm
R_{s3}	69 mm
R_{r3}	111 mm
R_{s4}	23 mm
R_{r4}	85 mm

Tabella 2.7: Raggi ruote dentate

La matrice M^* è simmetrica, il suo rango è pari a 4 ed un determinante uguale a $1.0091e - 07$, pertanto risulta possibile invertirla.

La matrice $[M^*]^{-1}$ che ne deriva sarà così composta:

$$M^{*-1} = \begin{bmatrix} 84.4089 & 16.3594 & -11.7916 & 0.0319 \\ 16.3594 & 29.1499 & -1.8202 & -3.1253 \\ -11.7916 & -1.8202 & 66.0806 & -10.7431 \\ 0.0319 & -3.1253 & -10.7431 & 72.2932 \end{bmatrix} \quad (2.251)$$

Le accelerazioni angolari sono state completamente definite come prodotto della matrice $[M^*]^{-1}$, una matrice di coefficienti in cui compaiono le σ dei singoli rotismi, ed un vettore di coppie che rappresentano gli ingressi del sistema.

Per determinare in maniera completa la cinematica del sistema, occorre ricavare anche le accelerazioni $[\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4, \ddot{\theta}_8]^T$. A tale scopo, viene definita la matrice K_{matrix} che va a premoltiplicare il vettore delle accelerazioni angolari indipendenti $[\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7]^T$.

Si ottiene così:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} \quad (2.252)$$

dove:

$$\begin{bmatrix} K_{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\sigma_2} & 0 & \frac{\sigma_2}{1+\sigma_2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_4}{1+\sigma_4} & 0 & \frac{1}{1+\sigma_4} \\ -\frac{1}{\sigma_1} & \frac{1+\sigma_1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\sigma_3} & \frac{\sigma_3}{1+\sigma_3} \end{bmatrix} \quad (2.253)$$

Riassumendo i risultati ottenuti, si mettono in evidenza le 2 equazioni matriciali fondamentali per il calcolo di tutte le accelerazioni angolari che caratterizzano il sistema. In particolare, la relazione (2.254) permette di calcolare le accelerazioni che sono state definite indipendenti, la seconda (2.255), invece, le accelerazioni rimanenti:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \end{bmatrix}_{indipendenti} = [M^*]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} T_{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ T_E \end{bmatrix} \quad (2.254)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \end{bmatrix}_{dipendenti} = \begin{bmatrix} K_{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \end{bmatrix}_{indipendenti} \quad (2.255)$$

La cinematica del sistema risulta pertanto completamente determinata ed è possibile, dunque, procedere all'implementazione in Simulink di tutte le relazioni ricavate nel corso della trattazione.

Capitolo 3

Implementazione in Simulink e Simscape

Si procede con l'implementazione in Simulink di tutte le relazioni cinematiche appena calcolate, con lo scopo di descrivere in maniera completa la cinematica del cambio, come ad esempio la velocità che il veicolo raggiunge in determinate condizioni operative, l'attivazione e la disattivazione delle frizioni durante un cambio marcia, l'accelerazione che il veicolo possiede sempre durante un cambio marcia e molti altri aspetti che verranno messi in evidenza nel seguito.

Una volta definito completamente il modello Simulink, si procede ad una validazione dei risultati ottenuti mediante un modello Simscape, ovvero un modello in cui vengono rappresentati fisicamente tutti i rotismi, le frizioni e le inerzie caratterizzanti gli alberi del sistema cambio.

Si vuole sottolineare che nel modello Simulink sono stati concentrati gran parte degli sforzi, in quanto questo tipo di modello richiede la scrittura completa di tutte le equazioni che governano il moto dei cinematismi del cambio, la loro conseguente scrittura in forma matriciale in modo tale da fornire al software, in maniera più leggibile, i dati di input ed allo stesso tempo garantire una lettura più veloce degli output.

L'approccio Simulink risulta molto valido qualora in una realtà aziendale non si disponga del pacchetto Simscape o a livello accademico per avere una visione molto dettagliata delle dinamiche che governano un sistema complesso come un cambio automatico, costituendo una soluzione senz'altro più economica, tuttavia richiede tempistiche sicuramente più lunghe ma soprattutto risorse con competenze specifiche al fine di sviluppare un modello

che, per certi versi, può risultare complesso da impostare e da risolvere dal punto di vista analitico.

D'altro canto, il modello Simscape risulta piuttosto facile da implementare, non presentando particolari difficoltà nella definizione del suo layout poiché, dopo aver collegato fisicamente tutti gli elementi che costituiscono il cambio, occorre semplicemente inserire i parametri caratteristici all'interno di apposite mascherine. Questo tipo di approccio, pertanto, risulta essere "più operativo", ovvero soddisfare meglio quelle che sono le esigenze di una realtà aziendale: una buona velocità nell'ottenimento dei risultati ed un'interfaccia quanto più intuitiva possibile.

3.1 Modello Simulink

3.1.1 Inerzia Equivalente e Carico Resistente del Veicolo

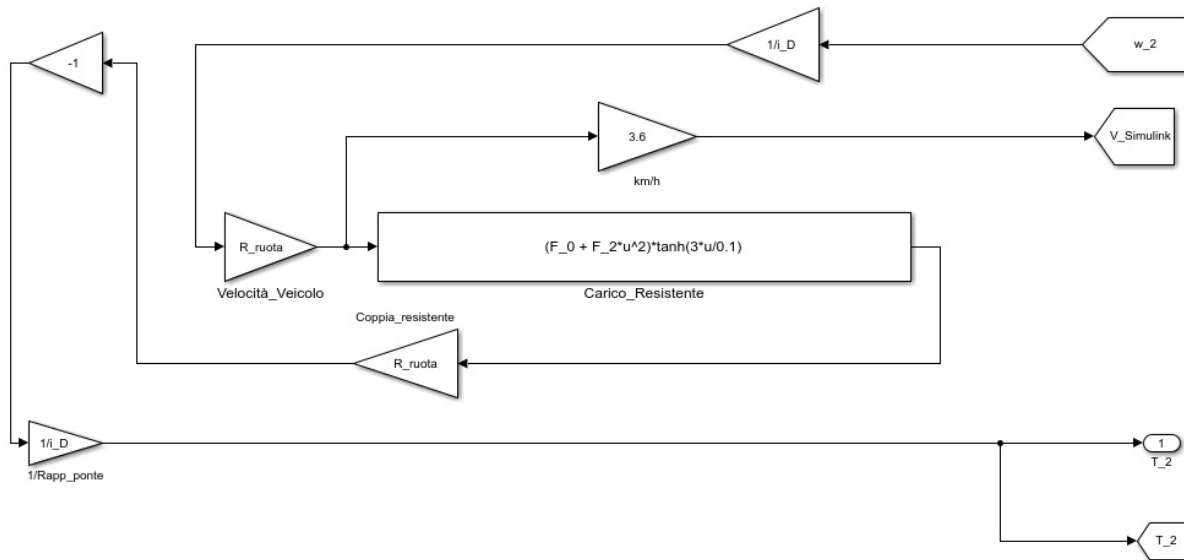
L'ultimo aspetto da trattare per giungere ad una rappresentazione completa della trasmissione è la definizione del carico resistente all'uscita della trasmissione, ovvero quel carico che si genera quando un veicolo è in movimento a seguito di azioni aerodinamiche, di attriti all'interno della trasmissione e resistenze al rotolamento degli pneumatici [7,8]. Da notare che questo carico dipende dalla velocità che il veicolo possiede in una particolare condizione di marcia, pertanto è un carico che muta continuamente durante, ad esempio, una manovra di accelerazione.

Allo stesso tempo, con lo scopo di semplificare la definizione del modello, l'inerzia dovuta alla massa del veicolo e l'inerzia delle ruote vengono entrambe riportate, tramite un'inerzia equivalente, all'albero di uscita della trasmissione [7]. Pertanto, quest'inerzia equivalente dovrà essere sommata all'inerzia I_2 caratteristica dell'albero di uscita.

Nella figura 3.1, si mostra come si giunge alla definizione della coppia resistente a partire dalla velocità angolare ω_2 , ovvero:

- si divide ω_2 per il rapporto al ponte (pari a 3), ottenendo così la velocità angolare a valle del differenziale;

- si moltiplica la velocità così ottenuta per il raggio ruota (pari a 0.3 m), ottenendo così la velocità del veicolo;
- si inserisce la velocità ottenuta all'interno della formula che descrive la forza resistente;
- si moltiplica questa forza per il raggio ruota e le si cambia di segno, ottenendo una coppia resistente;
- a questo punto, dividendo per il rapporto al ponte, la si riporta a monte del differenziale, e la si può utilizzare come ingresso del sistema insieme alle altre coppie $[T_1, \dots, T_E]$.

Figura 3.1: Definizione del carico resistente T_2

N.B. La forza resistente può essere schematizzata mediante l'equazione:

$$F_{res} = F_0 + F_1 \cdot V + F_2 \cdot V^2 \quad (3.1)$$

Risultando il termine $F_1 \cdot V$ trascurabile rispetto agli altri due, si avrà pertanto:

$$F_{res} = F_0 + F_2 \cdot V^2 \quad (3.2)$$

Da questa equazione, si nota facilmente come occorra conoscere la velocità del veicolo al fine di calcolare la forza resistente agente in una particolare condizione di marcia.

La formula completa prevede, in aggiunta, anche un termine di tangente iperbolica, molto

utile per conservare il segno dell'espressione, per definire un valore di soglia e per avere un raccordo nell'intorno dell'origine:

$$F_{res} = (F_0 + F_2 \cdot V^2) \cdot \tanh \frac{3 \cdot V}{0.1} \quad (3.3)$$

I valori di riferimento per i parametri F_0 e F_2 sono i seguenti:

- $F_0 = 120 \text{ N}$
- $F_2 = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m/s}^2}$

Per quanto riguarda l'inerzia equivalente del veicolo, come appena accennato, per questioni di semplificazione viene riportata sull'albero di uscita della trasmissione.

A tale scopo, si ricorre alla seguente formula:

$$I_{eq,veic,Tout} = \frac{M \cdot R_{ruota}^2 + I_{ruota}}{i_D^2} \quad (3.4)$$

dove:

- M : massa del veicolo (assunta pari a 1000 kg);
- R_{ruota} : raggio ruota (pari a 0.3 m);
- I_{ruota} : inerzia della ruota (assunta pari a $0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$);
- i_D : rapporto al ponte (assunto pari a 3).

Per concludere il discorso sulle inerzie, occorre aggiungere all'inerzia propria dell'albero 1 anche quella del motore, assunta in questo studio pari a $0.2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$.

3.1.2 Coppie come ingressi del sistema

Le coppie $[T_1, T_2, T_A, T_B, T_C, T_D, T_E]$ rappresentano gli ingressi del sistema.

La coppia T_1 rappresenta la coppia che proviene dal motore.

La coppia T_2 rappresenta la coppia resistente riportata all'uscita della trasmissione, come appena descritto.

Le coppie T_A, \dots, T_E sono quelle che le frizioni trasmettono quando esiste uno slittamento relativo tra le due facce della frizione stessa, pertanto, vengono calcolate portando in retroazione le velocità angolari di ciascun albero. (Figura 3.2)

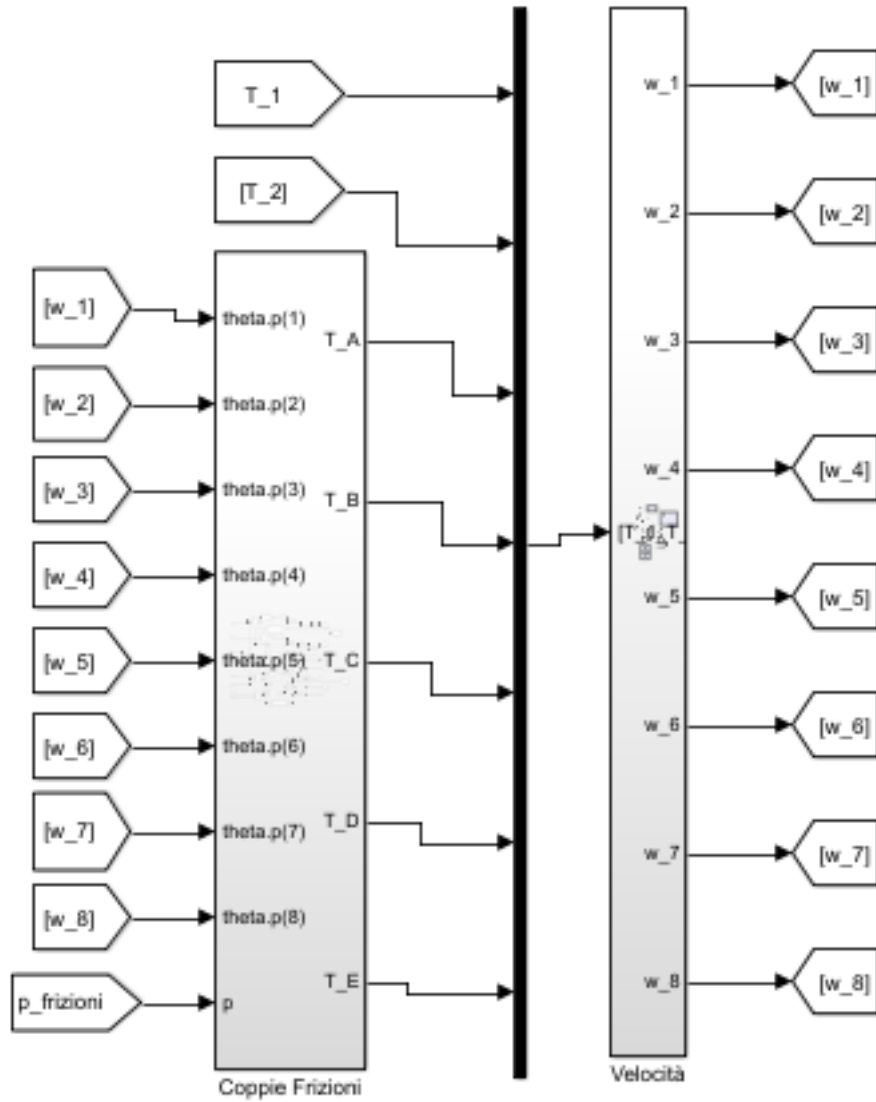


Figura 3.2: Coppie come ingressi del sistema

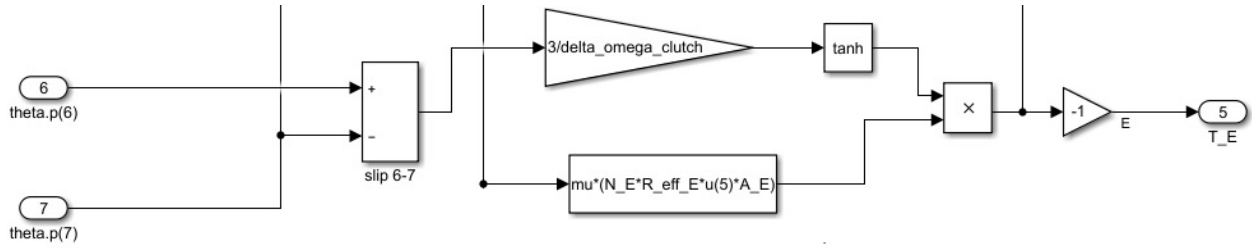
Si riporta in figura 3.3, un esempio di calcolo della coppia T_E . La formulazione utilizzata per il calcolo della coppia trasmessa dalla frizione è la seguente:

$$T_E = (\mu \cdot N_E \cdot R_{effE} \cdot p_E \cdot A_E) \cdot \tanh\left(\frac{3 \cdot \Delta\omega}{\Delta\omega_{clutch}}\right) \quad (3.5)$$

dove:

- μ : coefficiente di attrito statico (pari a 0.1);
- N_E : numero di dischi che la frizione presenta ;
- R_{effE} : raggio effettivo a cui si sviluppa la coppia;
- p_E : pressione di attuazione sui dischi della frizione (assunta pari a 40 bar per tutte e cinque le frizioni);

- A_E : superficie su cui la pressione di attuazione va ad agire;
- $\Delta\omega$: scorrimento relativo che esiste tra le due facce della frizione;
- $\Delta\omega_{clutch}$: valore di soglia per quanto riguarda lo scorrimento (assunto pari a 0.1 rad/s)

Figura 3.3: Calcolo della coppia T_E

Per completezza di trattazione, si mettono in evidenza nelle tabelle seguenti (tabella 3.1, 3.2, 3.3) tutti i valori assegnati alle grandezze che entrano in gioco per il calcolo delle coppie:

N_A	6
N_B	5
N_C	7
N_D	5
N_E	6

Tabella 3.1: Numero dischi di ciascuna frizione

R_{effA}	0.08 m
R_{effB}	0.08 m
R_{effC}	0.06 m
R_{effD}	0.06 m
R_{effE}	0.06 m

Tabella 3.2: Raggi effettivi a cui si genera la coppia

A_A	0.00510 m^2
A_B	0.00510 m^2
A_C	0.00389 m^2
A_D	0.00389 m^2
A_E	0.00389 m^2

Tabella 3.3: Superfici su cui agisce la pressione di attuazione

3.1.3 Attivazione Frizioni

Le frizioni vengono attivate seguendo una ben precisa mappa a seconda della marcia che si vuole innestare. Queste vengono attivate mediante un comando di pressione idraulico, grazie al quale avviene l'accostamento dei dischi della frizione stessa ed inizia così ad essere trasmessa la coppia.

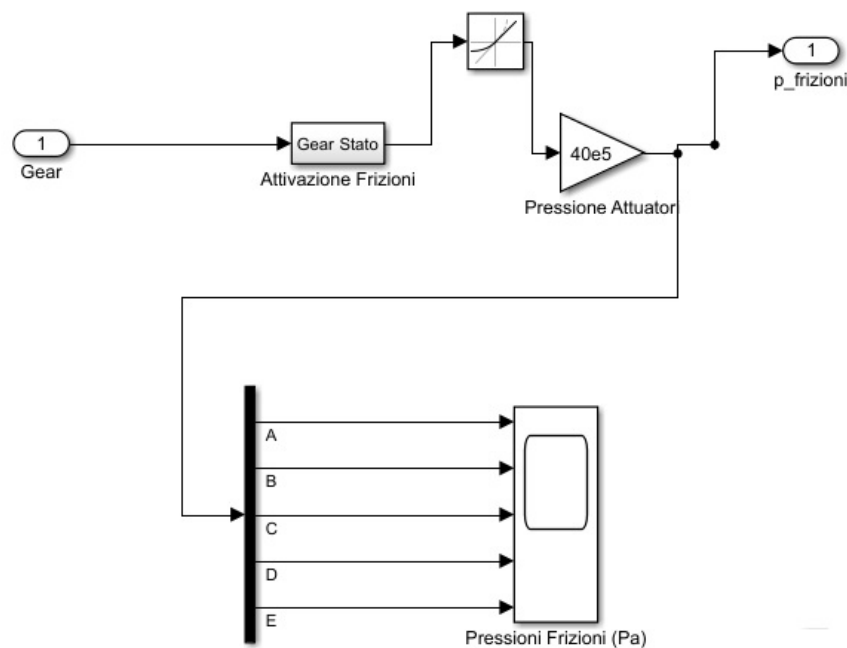


Figura 3.4: Attivazione delle frizioni

Nella figura 3.4, si mostra il modello creato per definire il processo di attivazione delle singole frizioni per ogni marcia che va ad innestarsi. Il blocco "rate limiter" permette di definire un ben preciso profilo di pressioni, ovvero la gradualità con la quale aumenta la pressione sulla frizione in ingresso ed allo stesso tempo diminuisce la pressione sulla

frizione in uscita. Il blocco "gain" con valore pari a $40e5$, costituisce il valore di pressione che va ad agire sul blocco frizione, ovvero 40 bar.

Entrando nel blocco "Attivazione Frizioni" con la marcia come input, si definisce lo schema di attuazione delle frizioni, ovvero si stabilisce su quali attuatori, quindi su quali frizioni, va inviata la pressione per far avvenire l'innesto. (Figure 3.5 e 3.6)

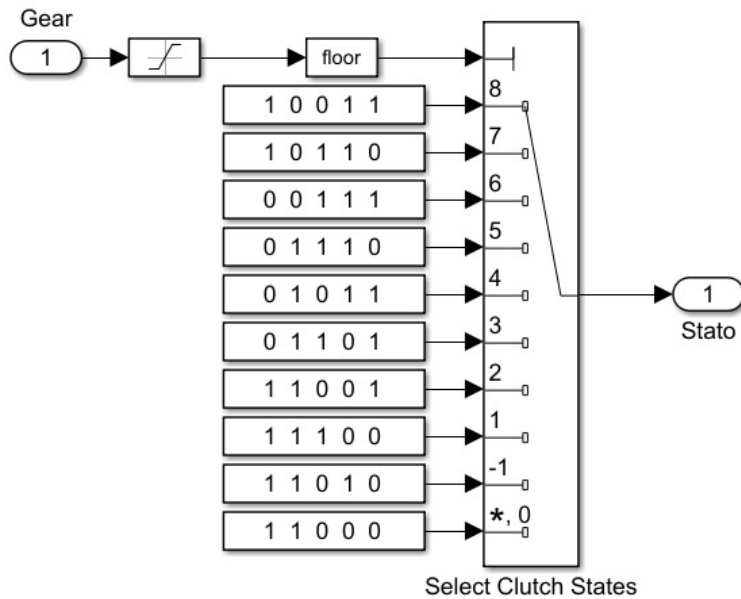


Figura 3.5: Schema di attuazione frizioni

Gear	Brake		Clutch			Ratio i	Gear step
	A	B	C	D	E		
1	●	●	●			4,696	1,50
2	●	●			●	3,130	
3		●	●		●	2,104	1,49
4		●			●	1,667	1,26
5		●	●	●		1,285	1,30
6			●	●	●	1,000	1,29
7	●		●	●		0,839	1,19
8	●			●	●	0,667	1,25
R	●	●		●		-3,297	Total 7,05

Figura 3.6: Frizioni e freni attivati

3.1.4 Dimensionamento Frizioni

In questa sezione si calcola la coppia che ciascuna frizione deve essere in grado di trasmettere per ciascun rapporto di trasmissione, ovvero per ciascuna marcia inserita.

Questo calcolo permette di dimensionare opportunamente tutto il blocco frizione, come ad esempio il numero di dischi, la dimensione del disco e la pressione esercitata dall'attuatore sul disco.

N.B. Il calcolo delle coppie è stato fatto in funzione della coppia in ingresso, ovvero della coppia motrice. Inoltre, questo tipo di dimensionamento viene effettuato trascurando il carico resistente del veicolo, ovvero la coppia in uscita T_2 sarà pari al prodotto tra la coppia in ingresso T_1 ed il rapporto di trasmissione "i" corrispondente alla marcia inserita.

A titolo di esempio, si mostra il procedimento adottato per calcolare le coppie in gioco su ogni frizione in una condizione di prima marcia innestata, quindi con le frizioni A, B e C attive.

Ricorrendo alla relazione (2.248) ed ipotizzando una situazione stazionaria in cui le accelerazioni angolari sono nulle, è possibile calcolare le coppie agenti su ciascuna frizione ponendo uguale a zero il prodotto tra la matrice T_{matrix} ed il vettore $[T_1, T_2, T_A, T_B, T_C, T_D, T_E]$. (vedi relazione 2.247)

Poiché le frizioni D ed E non sono attive, queste non trasmettono coppia: $T_D = 0, T_E = 0$. La coppia in uscita sarà pari alla coppia in ingresso per il rapporto di trasmissione, ovvero:

$$T_2 = -T_1 \cdot (1 + \sigma_4) \quad (3.6)$$

Dalla (2.247), ponendo uguale a zero l'ultima componente del vettore, si ottiene:

$$T_C + T_2 \cdot \frac{1}{1 + \sigma_4} = 0 \quad (3.7)$$

ovvero:

$$T_C - T_{in} \cdot \frac{1 + \sigma_4}{1 + \sigma_4} = 0 \quad (3.8)$$

$$T_C = T_{in} \quad (3.9)$$

Per calcolare T_B , si ricorre alla seconda componente del vettore che compare nella relazione (2.247) e la si pone uguale a zero, ottenendo:

$$T_B \cdot \frac{1 + \sigma_1}{\sigma_1} - T_1 \cdot \frac{\sigma_4 \cdot (1 + \sigma_4)}{(1 + \sigma_4)} = 0 \quad (3.10)$$

$$T_B = T_1 \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_4}{1 + \sigma_1} \quad (3.11)$$

Per calcolare T_A , si ricorre alla prima componente del vettore che compare nella relazione (2.247) e la si pone uguale a zero, ottenendo:

$$T_A = T_B \cdot \frac{1}{\sigma_1} - T_1 \cdot \frac{1}{1 + \sigma_2} + T_C \cdot \frac{1}{1 + \sigma_2} \quad (3.12)$$

e sostituendo opportunamente:

$$T_A = T_1 \cdot \frac{\sigma_4}{1 + \sigma_1} \quad (3.13)$$

Ragionando in modo analogo per le restanti marce, si ottengono i diversi valori di coppia che ogni frizione deve essere in grado di generare:

	T_A/T_1	T_B/T_1	T_C/T_1	T_D/T_1	T_E/T_1
I	$\frac{\sigma_4}{1+\sigma_1}$	$\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_4}{1+\sigma_1}$	1	0	0
II	$\frac{\sigma_2 \cdot \sigma_4 - 1 - \sigma_1}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}$	$\frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_4}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}$	0	0	$-\frac{\sigma_2}{1+\sigma_2}$
III	0	$\frac{\sigma_1 \sigma_4}{(1+\sigma_1+\sigma_4)}$	$\frac{1+\sigma_1-\sigma_2 \sigma_4}{(1+\sigma_1+\sigma_4)}$	0	$-\frac{\sigma_2 \sigma_4}{(1+\sigma_1+\sigma_4)}$
IV	0	$\frac{\sigma_1}{1+\sigma_2}$	0	$\frac{1+\sigma_1-\sigma_2 \sigma_4}{\sigma_4 \cdot (1+\sigma_2)}$	$-\frac{1+\sigma_1+\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{\sigma_4(1+\sigma_2)(1+\sigma_3)}$
V	0	$\frac{\sigma_1 \sigma_4}{X}$	$\frac{1+\sigma_1+\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{X}$	$-\frac{\sigma_2 \sigma_4(1+\sigma_3)}{X}$	0
VI	0	0	1	-1	$\frac{1}{1+\sigma_3}$
VII	$-\frac{1}{1+\sigma_2+\sigma_2 \sigma_3}$	0	$\frac{\sigma_2 \sigma_3}{1+\sigma_2+\sigma_2 \sigma_3}$	$-\frac{\sigma_2(1+\sigma_3)}{1+\sigma_2+\sigma_2 \sigma_3}$	0
VIII	$-\frac{1}{1+\sigma_2}$	0	0	$-\frac{\sigma_2}{\sigma_2+1}$	$-\frac{\sigma_2 \sigma_3}{(1+\sigma_2)(1+\sigma_3)}$
R	$-\frac{1+\sigma_1+\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}$	$-\frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}$	0	$-\frac{\sigma_2(1+\sigma_3)}{1+\sigma_2}$	0

Tabella 3.4: Coppie agenti sulle frizioni per ciascuna marcia (forma letterale)

Dove X vale: $(\sigma_2 \sigma_4 + \sigma_4 + 1 + \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)$.

Sostituendo i valori di σ_1 , σ_2 , σ_3 e σ_4 ricavati mediante le relazioni (2.55, 2.56, 2.57, 2.58),

la tabella (3.4) può essere riscritta come:

	T_A/T_1	T_B/T_1	T_C/T_1	T_D/T_1	T_E/T_1
I	1.23	2.46	1	0	0
II	0.49	1.6	0	0	-0.7
III	0	1.1	-0.7	0	-1.1
IV	0	0.7	0	-0.4	-0.5
V	0	0.28	0.57	-0.74	0
VI	0	0	1	-1	0.4
VII	-0.2	0	0.5	-0.8	0
VIII	-0.3	0	0	-0.7	-0.4
R	-1.7	-2.64	0	-1.7	-0

Tabella 3.5: Coppie agenti sulle frizioni per ciascuna marcia

A questo punto, dando per assodato i parametri scelti da catalogo già elencati nelle tabelle (3.1, 3.2, 3.3), ovvero numero di dischi, raggi effettivi e superfici su cui agisce la pressione di attuazione, per avere un corretto dimensionamento del sistema di attuazione delle frizioni, non resta che scegliere una pressione di attuazione tale da garantire per ogni

singola frizione, nella condizione più gravosa, la generazione della coppia necessaria.

Dalla tabella 3.2, ipotizzando una coppia in ingresso T_1 pari a $220 \text{ N} \cdot \text{m}$, ovvero la massima coppia che il motore è in grado di erogare, si genera una tabella in cui si mostra quale valore di coppia ogni frizione deve essere in grado di generare per ciascuna marcia. Da questa, si estrapola un'ulteriore tabella, in cui si mettono in evidenza i massimi valori di coppia che ogni frizione deve essere in grado di trasmettere.

$(N \cdot m)$	T_A	T_B	T_C	T_D	T_E
I	271	542	220	0	0
II	107.4	361.4	0	0	-146.7
III	0	242.9	-144.3	0	-242.9
IV	0	146.7	0	-87.1	-113.3
V	0	62.59	126.1	-163.3	0
VI	0	0	220	-220	84.3
VII	-35.4	0	113.9	-184.6	0
VIII	-73.3	0	0	-146.7	-90.5
R	-165.5	-264.3	0	-173.9	0

Tabella 3.6: Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $220 \text{ N} \cdot \text{m}$

$(N \cdot m)$	Massima Coppia
T_A	271
T_B	542
T_C	220
T_D	220
T_E	242.9

Tabella 3.7: Massime coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $220 \text{ N} \cdot \text{m}$

Ricorrendo alla formula (3.5), ovvero $T = \mu \cdot N \cdot R_{eff} \cdot p \cdot A$, ponendo pari ad 1 tutto il termine della tangente iperbolica, si evince che la pressione richiesta in condizioni di coppia motrice massima ($220 \text{ N} \cdot \text{m}$), considerando anche un'extra-coppia del 20% che potrebbe agire sulle frizioni in condizioni di transitorio, risulta essere di 30 bar .

3.1.5 Accelerazioni e Velocità angolari

Nella figura 3.7, si mette in evidenza il calcolo delle accelerazioni, quindi delle velocità angolari caratteristiche delle ruote che costituiscono il cambio in esame.

Come già detto in precedenza, le coppie $[T_1, \dots, T_E]^T$ rappresentano gli ingressi del sistema. Per il calcolo delle accelerazioni angolari, si ricorre alla formulazione descritta in precedenza, ovvero alla relazione (2.248), che pone in relazione le accelerazioni angolari alle coppie, tramite l'inversa della matrice $[M^*]$ (nella figura 3.7 viene definita M_1) e la matrice $[T_{matrix}]$.

N.B. Per poter calcolare le velocità, all'interno del blocco di integrazione, è necessario definire le condizioni iniziali del sistema, ovvero, a seconda della marcia innestata, vanno calcolate le velocità iniziali di ogni singola ruota in funzione della velocità di rotazione del motore. Questo studio verrà effettuato nella sezione successiva.

Per conoscere i valori delle restanti velocità angolari, ovvero $[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_8]^T$, occorre premoltiplicare la matrice K_{matrix} (vedi relazione 2.252) al vettore delle velocità $[\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7]^T$.

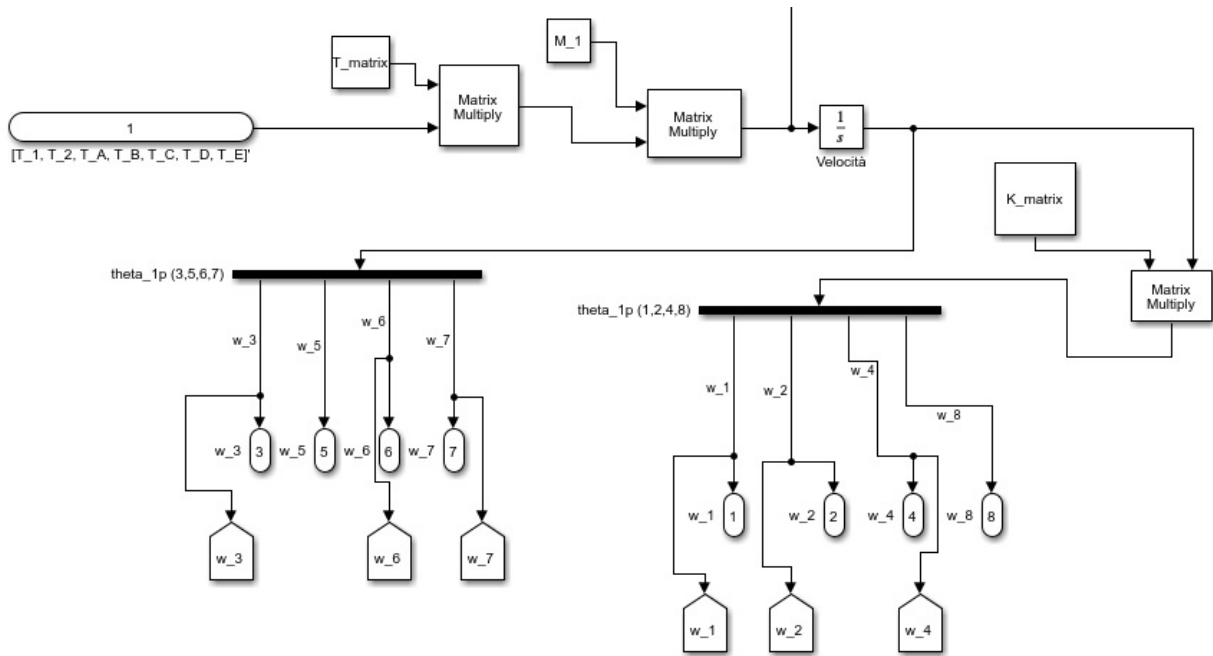


Figura 3.7: Calcolo delle accelerazioni angolari

3.1.6 Calcolo delle velocità iniziali per ciascuna marcia

L'obiettivo in questa sezione è ricavare le 4 velocità angolari $\omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$ quando un ben preciso rapporto di trasmissione risulta inserito, in modo tale da fornire le giuste condizioni iniziali in fase di lancio di una simulazione in Simulink in condizioni stazionarie, ovvero una condizione in cui il motore eroga una coppia costante ad un ben preciso numero di giri, escludendo quindi un cambio marcia.

Facendo fede alle equazioni (2.228-2.231) e tenendo presente le relazioni tra le velocità delle ruote dei singoli rotismi per ogni marcia, scritte nella primissima parte dello studio (paragrafo 2.1), è possibile ricavare le 4 velocità angolari in funzione di quella del motore ω_1 .

N.B. Gli input necessari per il calcolo delle velocità angolari iniziali sono due:

- ω_1 : velocità iniziale del motore;
- marcia iniziale: marcia alla quale ci si trova quando si lancia la simulazione.

Si riporta, a titolo di esempio, il procedimento adottato per ricavare le velocità angolari iniziali in prima marcia.

Occorre ricordare che le frizioni attive in prima marcia sono A, B e C. Con questa particolare configurazione, è possibile scrivere le seguenti relazioni:

- $\omega_{r1} = 0, \omega_{s1} = 0, \Omega_1 = 0$;
- $\omega_{s2} = 0, \omega_{r2} = \omega_{s3}, \Omega_2 = \omega_1$;
- $\omega_{s3} = \omega_{r2}, \omega_{r3} = \omega_{s4}$;
- $\omega_{s4} = \omega_{r3} = \omega_1, \omega_{r4} = \Omega_1 = 0, \Omega_4 = \omega_2$.

Quindi:

$$\omega_{30} = \omega_{s1} = 0; \quad (3.14)$$

$$\omega_{50} = \omega_{r4} = 0; \quad (3.15)$$

$$\omega_{70} = \omega_{s4} = \omega_1; \quad (3.16)$$

Dalla relazione (2.228), è possibile scrivere:

$$\omega_1 = \omega_6 \cdot \frac{R_{r2}}{R_{s2} + R_{r2}} \quad (3.17)$$

ovvero:

$$\omega_{60} = \omega_1 \cdot \frac{1 + \sigma_2}{\sigma_2} \quad (3.18)$$

Adottando la stessa logica per le restanti marce, si ottiene così:

	ω_{30}/ω_1	ω_{50}/ω_1	ω_{60}/ω_1	ω_{70}/ω_1
I	0	0	$\frac{\sigma_2+1}{\sigma_2}$	1
II	0	0	$\frac{\sigma_2+1}{\sigma_2}$	$\frac{\sigma_2+1}{\sigma_2}$
III	1	$\frac{1}{\sigma_1}$	1	1
IV	$\frac{(1+\sigma_1) \cdot (1+\sigma_2)}{(1+\sigma_1+\sigma_2)}$	$\frac{(1+\sigma_2)}{(1+\sigma_1+\sigma_2)}$	$\frac{(1+\sigma_2)}{(1+\sigma_1+\sigma_2)}$	$\frac{(1+\sigma_2)}{(1+\sigma_1+\sigma_2)}$
V	$\frac{(1+\sigma_4-X)(1+\sigma_1)}{\sigma_4(X)}$	$\frac{(1+\sigma_4-X)}{\sigma_4(X)}$	$\frac{(1+\sigma_2)\sigma_4X - (1+\sigma_1)(1+\sigma_4-X)}{\sigma_2\sigma_4X}$	1
VI	1	1	1	1
VII	0	$1 + \frac{1+\sigma_4}{\sigma_2 \cdot \sigma_4 \cdot (1+\sigma_3)}$	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$	1
VIII	0	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$
R	0	0	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$	$\frac{1+\sigma_2}{\sigma_2}$

Tabella 3.8: Velocità iniziali $\omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$

Dove X vale: $\frac{(\sigma_2\sigma_4+\sigma_4+1+\sigma_1+\sigma_2\sigma_3\sigma_4+\sigma_1\sigma_4)}{(\sigma_2\sigma_4+\sigma_4+1+\sigma_1+\sigma_2\sigma_3\sigma_4)}$.

Le velocità iniziali appena ottenute $[\omega_{30}, \omega_{50}, \omega_{60}, \omega_{70}]^T$ devono essere inserite all'interno del blocco "integrator" della figura 3.7, in modo tale da fornire un'adeguata condizione iniziale al modello nel momento in cui si lancia la simulazione.

3.2 Modello Simscape

La definizione del modello Simscape del cambio in esame (figura 3.9) risulta essere piuttosto intuitiva in quanto il layout prevede l'inserimento fisico di tutti i rotismi epicicloidali e la loro interconnessione, l'assegnazione delle inerzie a tutti i componenti del cambio e l'inserimento di tutte e cinque le frizioni. Due di queste, frizioni A e B, vengono collegate a terra in quanto sono dei freni, mentre le frizioni C, D ed E, quando attivate, mettono in collegamento due diversi alberi del cambio.

Il blocco "from - $p_{frizioni}$ " è lo stesso del modello Simulink, già descritto in precedenza, mentre nel sottosistema "routing" è presente un blocco demux, il quale separa i cinque segnali di pressione e li invia alle diverse frizioni a seconda della marcia inserita. (Figura 3.8)

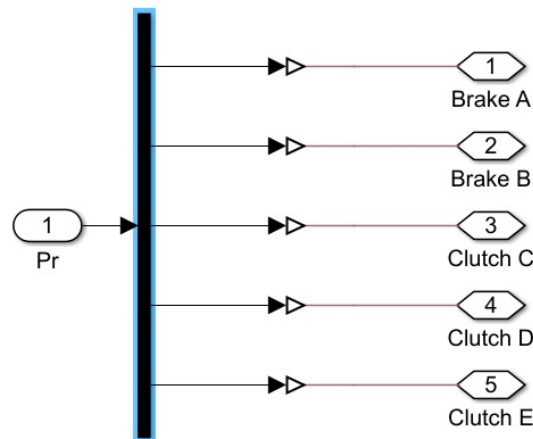


Figura 3.8: Blocco Demux per invio segnali di pressione

Le inerzie I_1 ed I_2 prevedono, in aggiunta all'inerzia degli alberi 1 e 2, anche rispettivamente l'inerzia del motore e l'inerzia equivalente del veicolo.

La coppia motrice T_1 è riportata sull'albero 1 con un segnale sorgente di coppia, così come la coppia resistente T_2 sull'albero 2 di uscita.

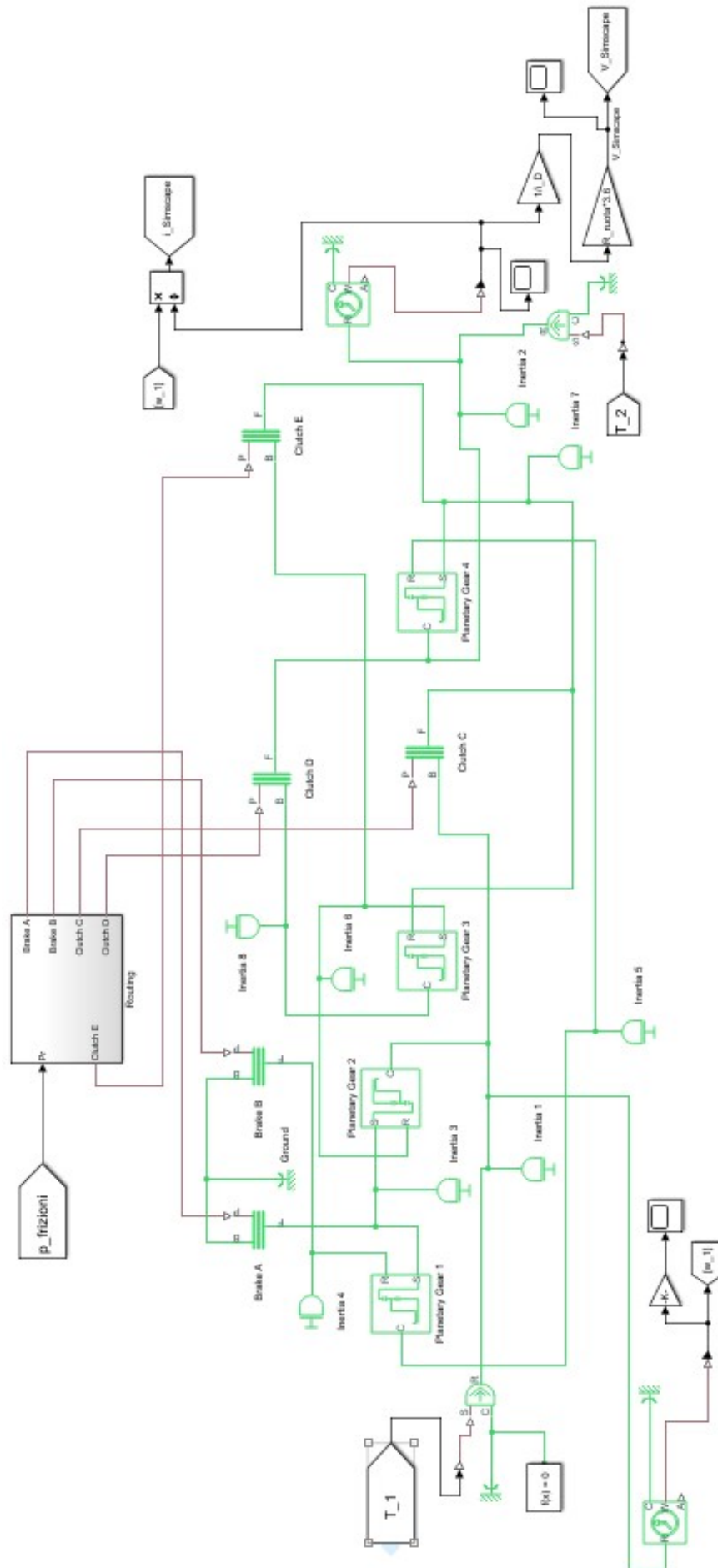


Figura 3.9: Modello Simscape

Capitolo 4

Validazione dei risultati

In questa sezione si procede alla validazione dei risultati ottenuti con il modello Simulink attraverso un confronto con i risultati generati dal modello Simscape.

La validazione viene effettuata confrontando le seguenti grandezze ottenute come output dai due modelli:

- rapporti di trasmissione per ciascuna marcia;
- scorrimento dischi frizione in prima marcia;
- coppie agenti sulle frizioni in prima marcia.

4.1 Validazione rapporti di trasmissione

Per questo tipo di validazione, si traccia, per entrambi i modelli, il rapporto tra la velocità ω_1 ed ω_2 , ovvero la velocità di ingresso ed uscita del cambio in esame e lo si confronta con il rapporto di trasmissione atteso.

Nelle figure che seguono, si mostra come per entrambi i modelli si sia ottenuto un buon risultato, ovvero un'ottima corrispondenza dei rapporti di trasmissione ricavati in Simulink e Simscape rispetto al rapporto di trasmissione dichiarato dalla casa costruttrice.

N.B. Si mostrano le diverse figure in ordine di marcia, ovvero a partire dalla prima fino all'ottava.

Le grandezze ed i relativi valori passati al codice Matlab sono le seguenti:

- marcia;

- velocità motore: 1500 rpm;
- coppia motore: 100 Nm.

Per quanto riguarda il modello in Simscape, occorre ricordarsi di inizializzare le frizioni realmente innestate ogni qualvolta si fa girare il codice per ciascuna marcia: questo evita di incorrere in un transitorio iniziale in cui, a seguito dello slittamento dei dischi della frizione, non si riuscirebbe a rispettare il rapporto di trasmissione atteso per qualche frazione di secondo.

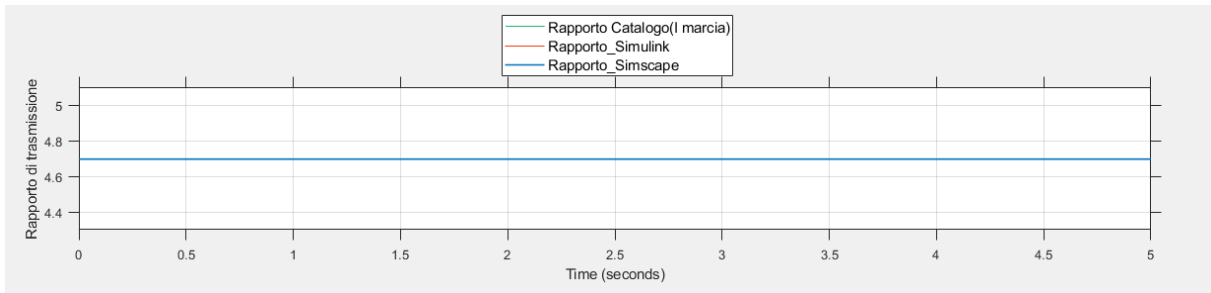


Figura 4.1: Rapporto di trasmissione Prima Marcia $i_I = 4.696$

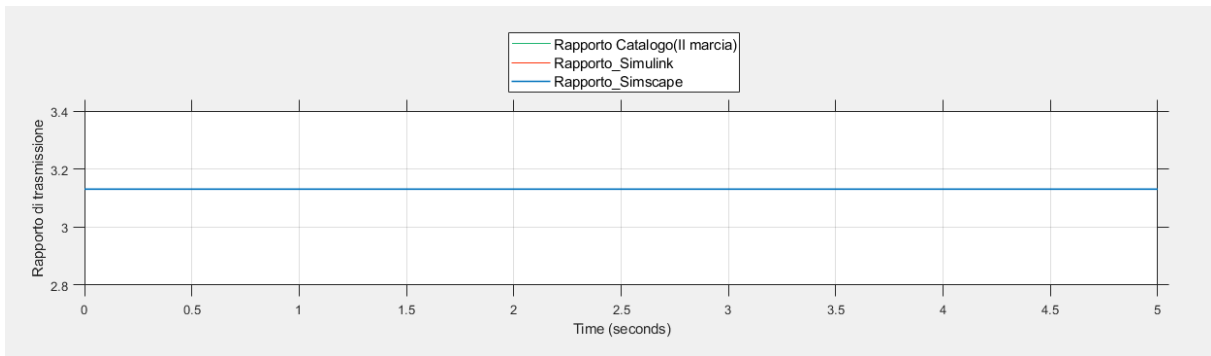


Figura 4.2: Rapporto di trasmissione Seconda Marcia $i_{II} = 3.130$

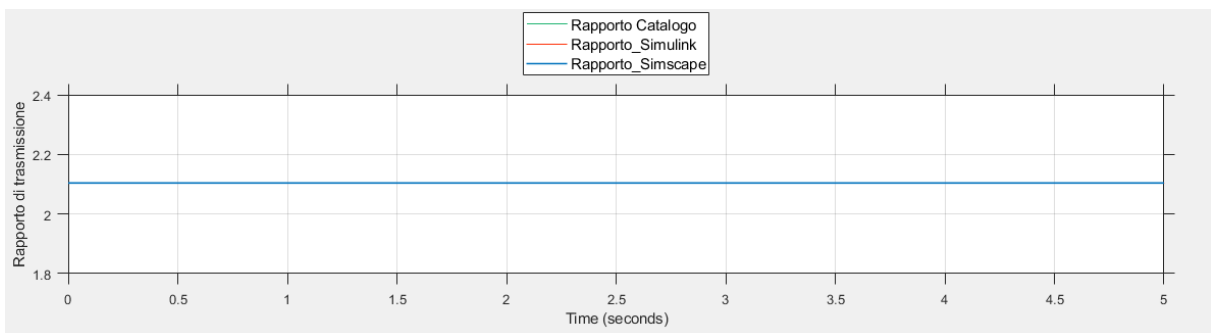
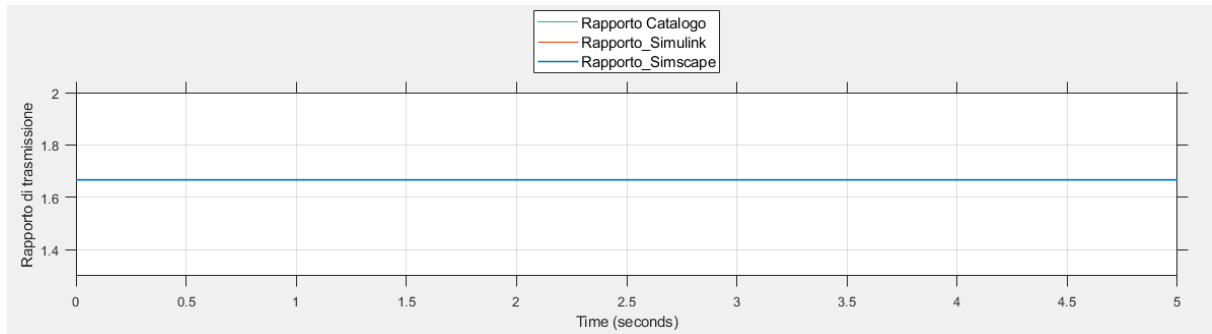
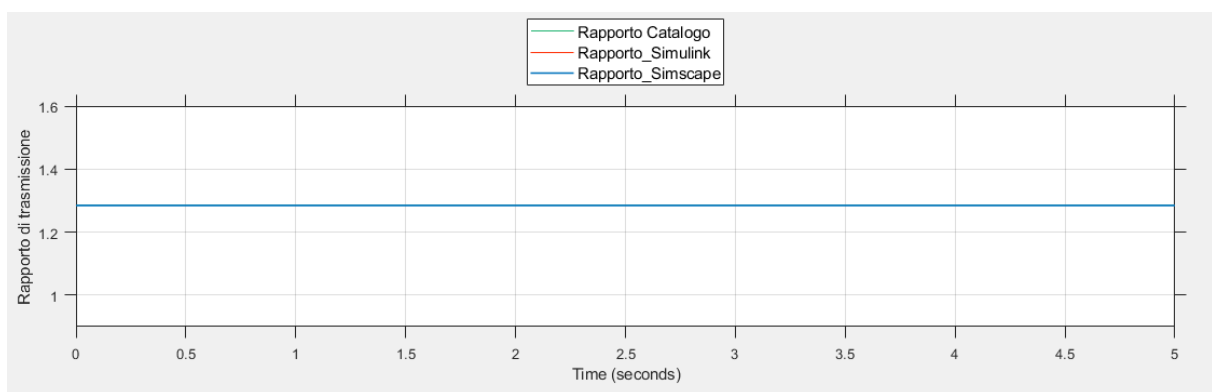
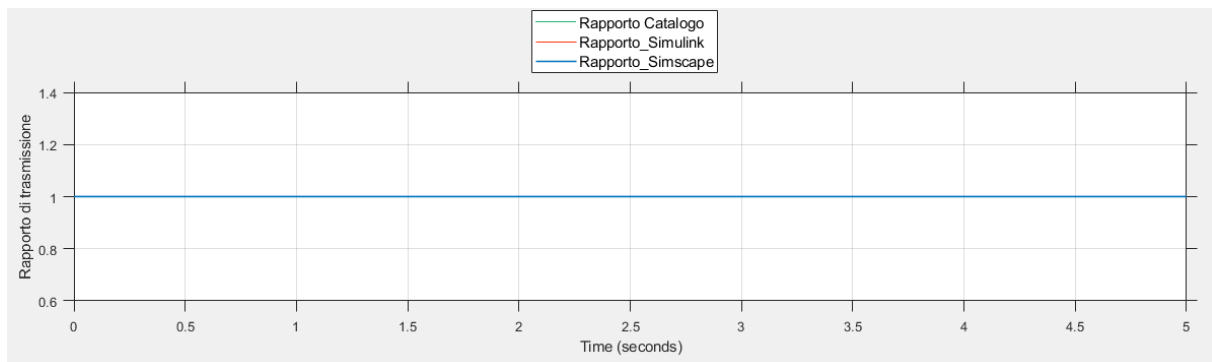


Figura 4.3: Rapporto di trasmissione Terza Marcia $i_{III} = 2.104$

Figura 4.4: Rapporto di trasmissione Quarta Marcia $i_{IV} = 1.667$ Figura 4.5: Rapporto di trasmissione Quinta Marcia $i_V = 1.285$ Figura 4.6: Rapporto di trasmissione Sesta Marcia $i_{VI} = 1$

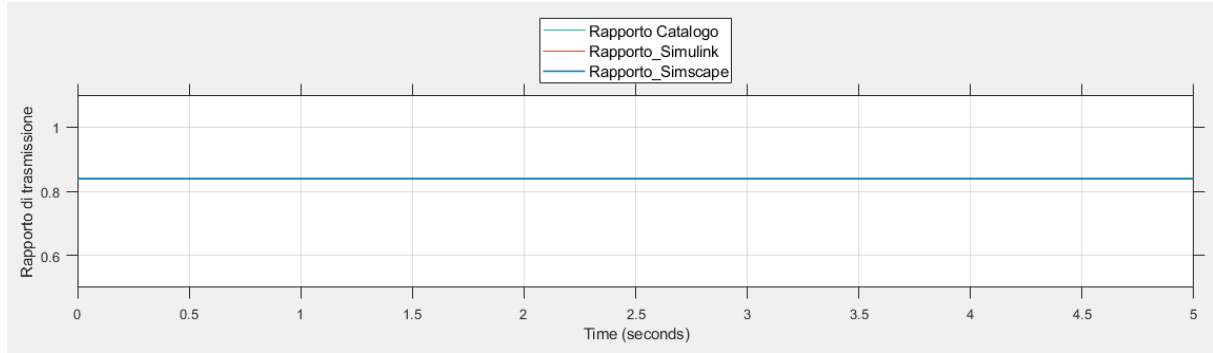


Figura 4.7: Rapporto di trasmissione Settima Marcia $i_{VII} = 0.839$

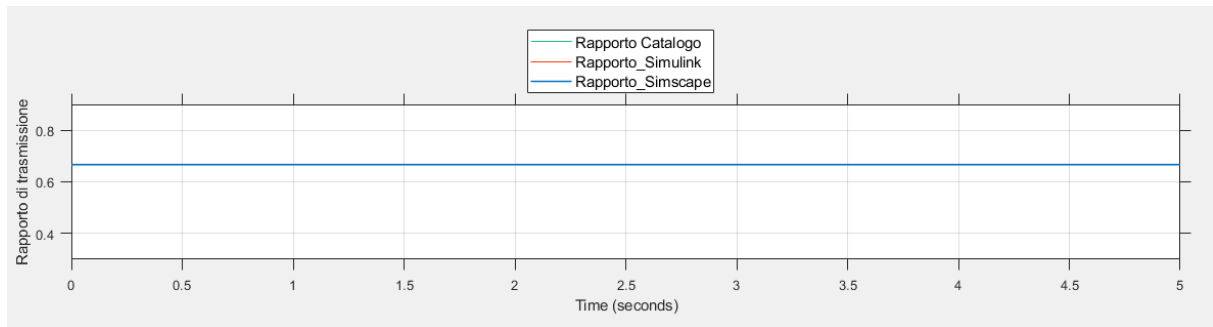


Figura 4.8: Rapporto di trasmissione Ottava Marcia $i_{VIII} = 0.667$

4.2 Verifica scorrimento dischi frizione

Le figure mostrate in questa sezione permettono di verificare il dimensionamento delle frizioni presenti all'interno del cambio in esame, in particolare se le grandezze quali la pressione all'attuatore, il raggio effettivo attraverso il quale viene trasmessa la coppia, l'area di contatto ed il numero di dischi siano dimensionate nel modo giusto affinché la coppia per ogni singola marcia venga trasmessa senza che vi sia slittamento relativo tra i dischi della frizione.

Nelle figure seguenti si mostrano, per ogni frizione innestata, le velocità viste dalle sue due facce: ad esempio, in prima marcia, per la frizione A, poiché si tratta di un freno, si traccia unicamente la velocità ω_3 , per la frizione B, la velocità ω_4 , per la frizione C, le velocità ω_1 ed ω_7 .

N.B. Per il freno A e B, le 2 velocità tracciate devono essere uguali a zero: questo vuol dire che il freno è stato dimensionato nel modo corretto.

Per la frizione C, invece, le 2 velocità devono coincidere.

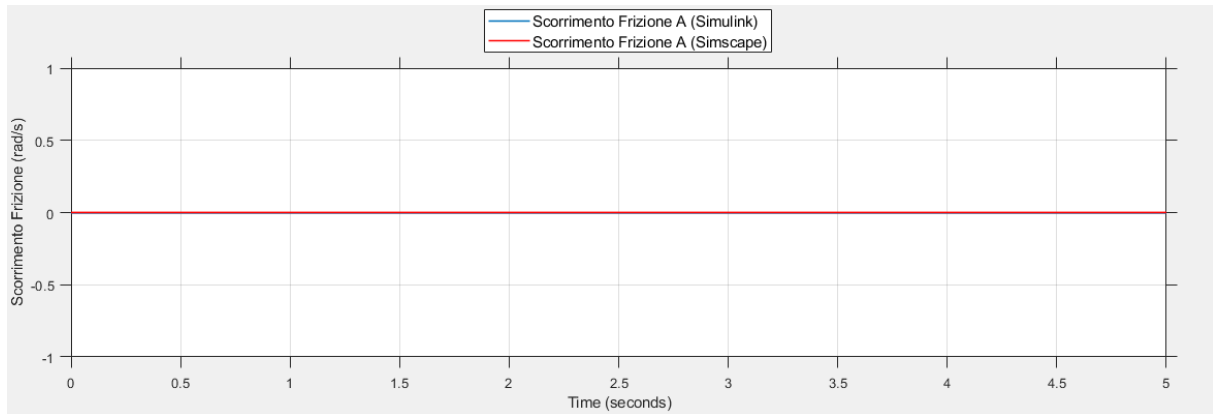


Figura 4.9: Scorrimento dischi frizione A

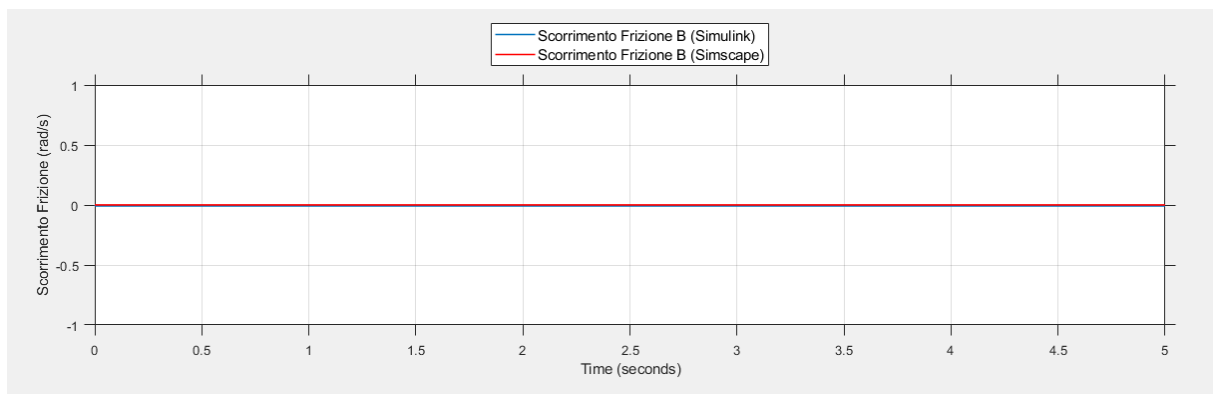
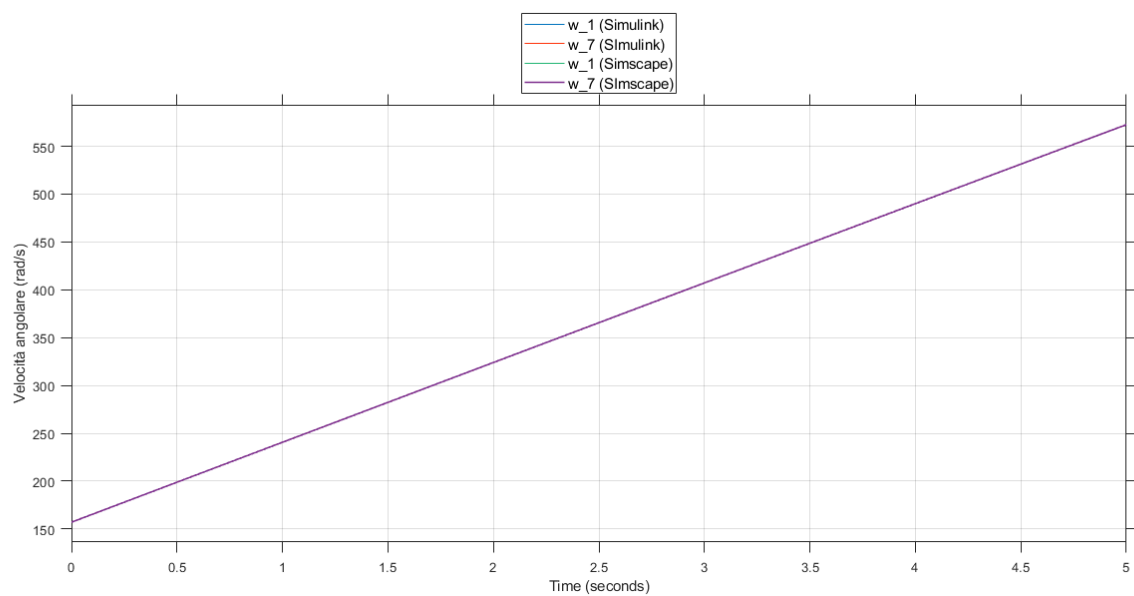


Figura 4.10: Scorrimento dischi frizione B

Figura 4.11: Velocità ω_1 e ω_7

4.3 Verifica coppie agenti sulle frizioni in prima marcia

In questa sezione, si testa la validità delle coppie agenti sulle frizioni attive ponendosi in una condizione di stazionarietà, ovvero una situazione tale da fornire una coppia motrice esattamente uguale a quella necessaria per mantenere il veicolo ad una velocità costante. Questo permette di escludere azioni inerziali all'interno della trasmissione dato che non sono presenti transitori di accelerazione, e di valutare quindi unicamente la bontà dei valori elencati all'interno della tabella 3.5.

Questo tipo di studio viene effettuato in prima marcia e, nella tabella seguente 4.1, si mostrano tutti i passaggi effettuati per ricavare la coppia che il motore deve erogare per mantenere il veicolo ad una velocità costante di $10 km/h$. In un secondo momento, si tracciano i valori di coppia agenti sulle frizioni attive (A, B, C) sia per il modello Simulink, sia per quello Simscape.

$V \text{ (km/h)}$	10
$V \text{ (m/s)}$	2.8
$F_0 \text{ (N)}$	120
$F_2 \text{ (N/(m/s)}^2\text{)}$	0.5
$F_{res} \text{ (N)}$	123.9
$T_{res} \text{ (N} \cdot \text{m)}$	37.2
$T_{mot} \text{ (N} \cdot \text{m)}$	2.64
$R_{ruota} \text{ (m)}$	0.3
i_I	4.696
i_D	3

Tabella 4.1: Calcolo della coppia motrice per avere velocità costante

Commentando la tabella, fissato un valore di velocità plausibile per il tipo di marcia innestata, nel caso in esame $10 km/h$, si calcola la forza resistente e moltiplicando questo valore per il raggio ruota si calcola la coppia resistente che agisce a valle del differenziale. Risalendo sia il differenziale sia il cambio, ovvero dividendo la coppia resistente appena calcolata per il rapporto al ponte e per il rapporto di prima marcia, si ottiene la coppia che il motore, in questa particolare condizione di stazionarietà, deve erogare.

Con una coppia motrice erogata di $2.64 \text{ N} \cdot \text{m}$, le coppie agenti sulle singole frizioni in prima marcia sono elencate nella tabella seguente 4.2.

$(\text{N} \cdot \text{m})$	Coppia motrice: $2.64 \text{ N} \cdot \text{m}$
T_A	3.25
T_B	6.50
T_C	2.64
T_D	0
T_E	0

Tabella 4.2: Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $2.64 \text{ N} \cdot \text{m}$

Nelle figure seguenti, si riportano i valori di coppia agenti sulle frizioni A, B e C, sia per il modello Simulink sia per quello Simscape.

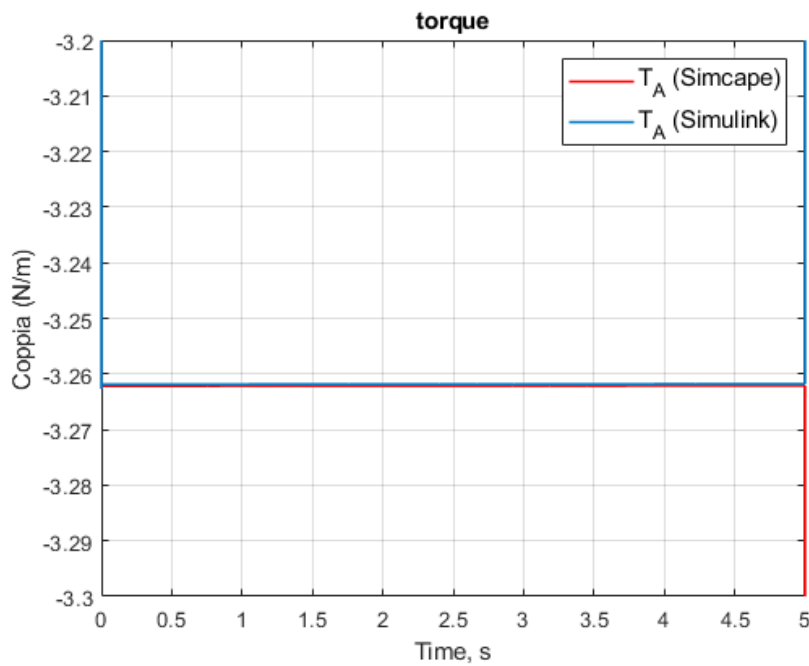
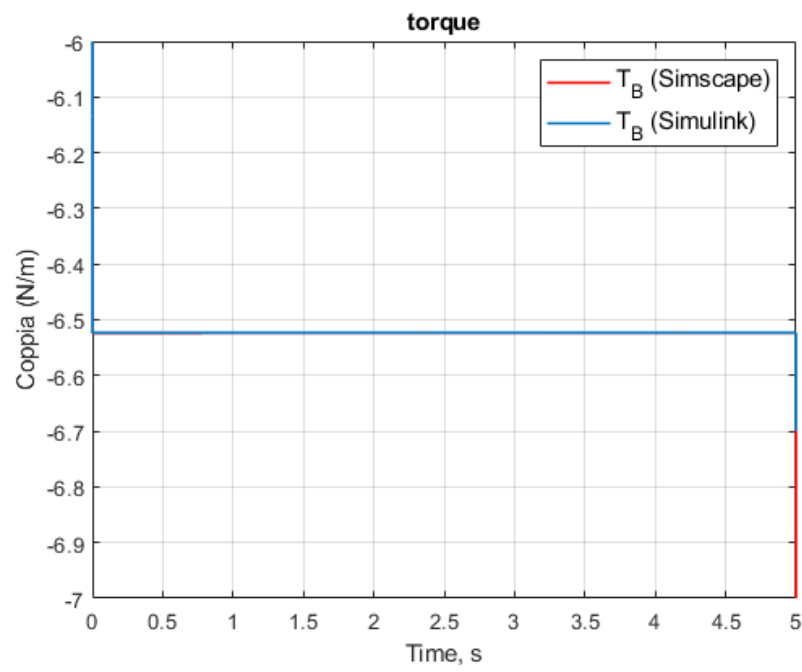
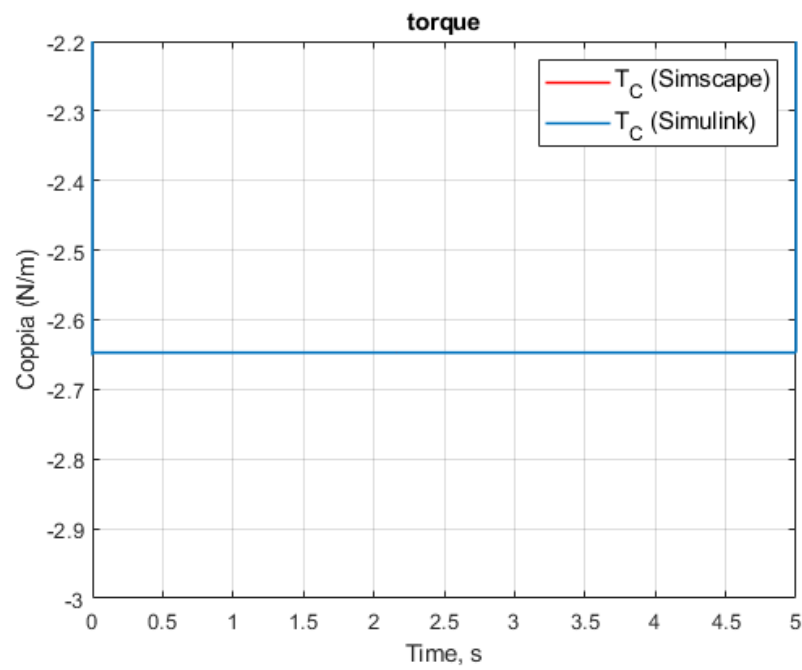


Figura 4.12: Verifica coppia T_A

Figura 4.13: Verifica coppia T_B Figura 4.14: Verifica coppia T_C

Capitolo 5

Cambio marcia Prima-Seconda

Nella parte conclusiva dello studio, si focalizza l'attenzione su un cambio marcia prima-seconda.

In un primo momento, il cambio marcia viene effettuato senza prestare particolare attenzione alla logica di attuazione delle frizioni, mentre in una seconda fase, con qualche piccolo accorgimento, sono stati perseguiti obiettivi quali il comfort, conseguenza del profilo di accelerazione durante la manovra, ed il risparmio di energia, conseguenza delle coppie messe in gioco dalle frizioni nel momento in cui avviene l'innesto di una frizione ed il disinnesto dell'altra.

Le grandezze principali su cui si può intervenire per azionare un cambio marcia e per migliorarne l'efficienza sono due:

- pressione agente sugli attuatori delle frizioni;
- coppia del motore.

Una volta definiti i profili di queste due grandezze, è possibile osservare le grandezze derivate, quali le coppie agenti sulle frizioni ed il profilo di accelerazione del veicolo.

5.1 Cambio marcia con variazione lineare delle pressioni di comando delle frizioni

In questa sezione, ci si limita a mostrare i risultati che si ottengono in un cambio marcia prima-seconda, in cui il valore di pressione che agisce sulle frizioni attive è uguale per tutti, ovvero 40 *bar*, ed allo stesso tempo, il profilo di pressione seguito dalla frizione

entrante è esattamente uguale a quello della pressione uscente, con valori di pendenze rispettivamente di 1 e -1 .

Questo si traduce in un profilo crescente della frizione entrante che, partendo da zero, arriva alla pressione nominale di attuazione, ovvero 40 *bar*. Viceversa, nello stesso istante in cui la frizione entrante inizia a ricevere pressione, quella uscente inizia a perderla, seguendo un profilo lineare di discesa che raggiunge lo zero solo quando la pressione sulla frizione entrante ha raggiunto i 40 *bar*.

N.B. Il cambio marcia viene simulato con un blocco "ramp", in cui "l'output iniziale" viene fornito da tastiera e costituisce la marcia di partenza con la quale la simulazione ha inizio, la pendenza è pari a 0.2, e la simulazione ha una durata di 9 *secondi*, pertanto il cambio marcia ha luogo dopo 5 *secondi* dall'inizio della simulazione.

Quindi, le grandezze fornite da tastiera al modello quando viene lanciata la simulazione sono le seguenti:

- marcia iniziale: prima;
- giri motore: 1500 *rpm*;
- coppia motore: 100 $N \cdot m$.

Nelle figure seguenti, si mostrano gli andamenti di tutte le grandezze più significative che vengono prese in considerazione per una valutazione delle performance del cambio durante un cambio marcia.

In particolare:

- figura 5.1: profilo delle pressioni agenti sulla frizione entrante (E) ed uscente (C) in un cambio marcia prima seconda. Sulle frizioni A e B la pressione permane a 40 *bar*, mentre la frizione D non viene attivata (0 *bar*);

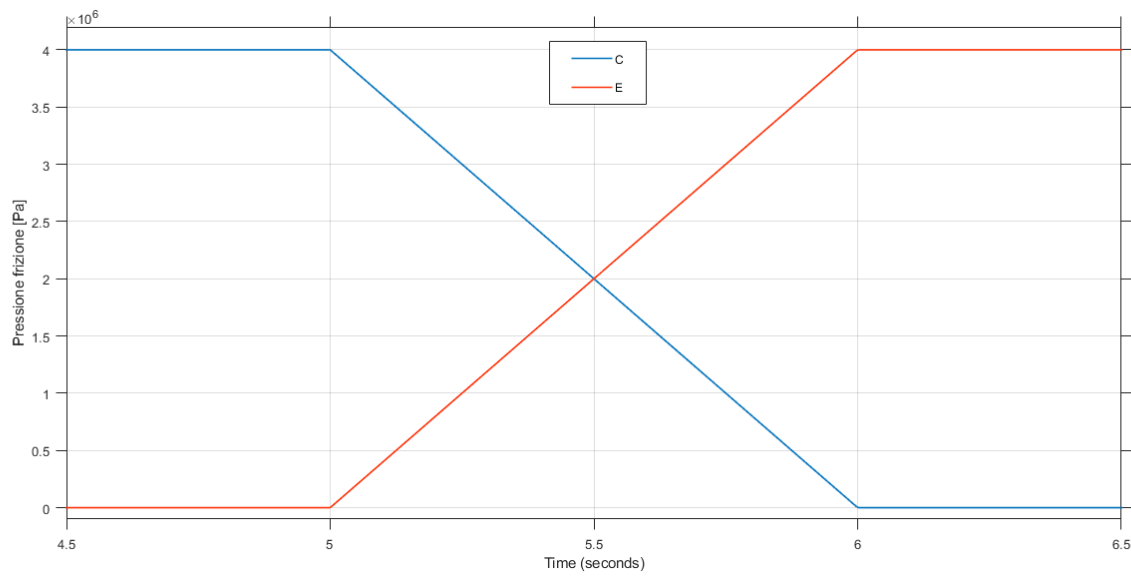


Figura 5.1: Profilo delle pressioni agenti sulle frizioni (Prima-Seconda)

- figura 5.2: slittamento delle frizioni C ed E, utile per verificare che lo slittamento arrivi ad essere zero, dopo un certo transitorio, per quanto riguarda la frizione resa attiva durante la manovra (frizione E);

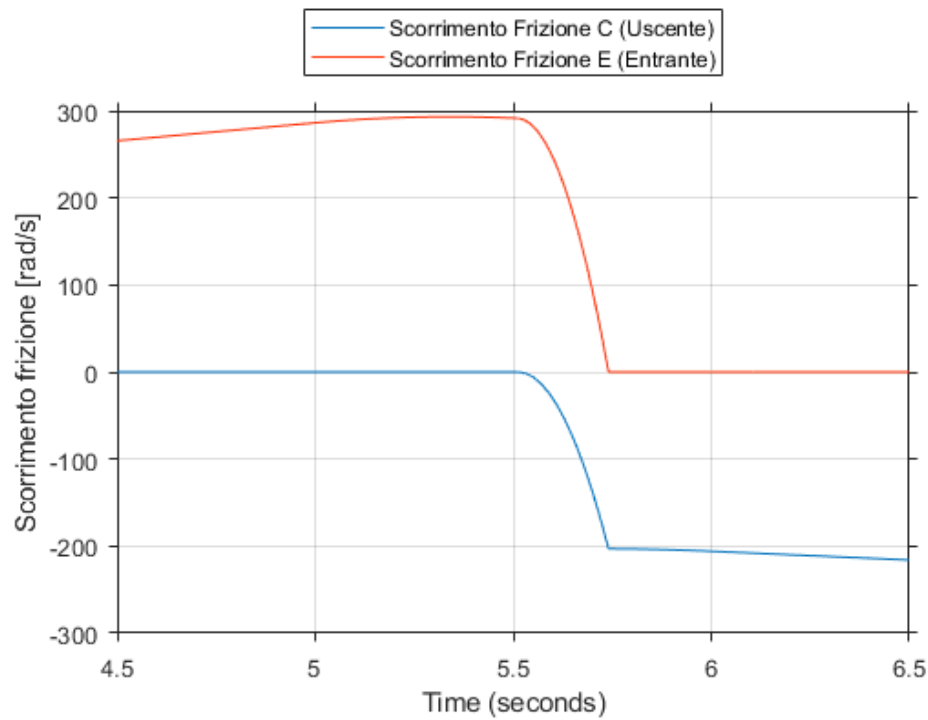


Figura 5.2: Scorrimento frizioni C ed E (Prima-Seconda)

- figura 5.3: andamento delle coppie agenti su ciascuna frizione. Allo stesso tempo, viene tracciata anche la coppia del motore che, in questa prima soluzione del cambio marcia prima-seconda, viene considerata costante.

N.B. I profili di coppia così ottenuti non garantiscono una buona efficienza in termini energetici in quanto, poiché la frizione uscente da un certo punto in poi esercita un'azione frenante (la coppia diventa negativa), occorre che la frizione entrante, per vincere questa resistenza, vada a generare una coppia più elevata del dovuto in questo transitorio, per poi riportarsi ad un valore più basso, una volta che il cambio marcia è avvenuto. Questo si traduce in un ricircolo di potenza all'interno della trasmissione, causando un'eccessiva sollecitazione sugli ingranaggi stessi.

È possibile descrivere questo fenomeno anche dal punto di vista matematico, ricorrendo alla formula che descrive la relazione che intercorre, in prima marcia, tra la coppia della frizione uscente, la coppia motrice e la coppia della frizione entrante, ottenuta nel paragrafo (2.7.1), qui richiamata per comodità:

$$T_{off} = T_{in} - T_{onc} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{\sigma_2} \right) \quad (5.1)$$

che può essere riscritta come:

$$T_{off} + T_{onc} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{\sigma_2} \right) = T_{in} \quad (5.2)$$

L'ultima equazione descrive perfettamente il comportamento delle coppie delle due frizioni rispetto alla coppia motrice, ovvero, la somma pesata tra le coppie della frizione entrante ed uscente deve essere uguale alla coppia motrice che rimane costante durante tutta la manovra.

Questo vuol dire che, qualora la coppia della frizione entrante aumenti in modo eccessivo, la coppia della frizione uscente deve necessariamente cambiare di segno, diventando quindi una coppia resistente.

Osservando questo fenomeno da un'altra prospettiva, si può dire che, invece di fermare l'incremento di pressione sulla frizione entrante quando la coppia sulla frizione uscente diventa nulla, si continua ad innalzare la pressione fino a quando la frizione entrante non porta a termine la sincronizzazione dei giri sul nuovo rapporto di

trasmissione. (Figura 5.3). La conseguenza di ciò consiste in un sovraccarico meccanico del sistema che richiederebbe sicuramente un dimensionamento diverso della trasmissione.

In questa figura (5.3), si inserisce anche l'andamento delle coppie trasmissibili per sottolineare che, in teoria, si andrebbe a trasmettere una coppia di segno positivo, ma le condizioni cinematiche, ovvero il segno della velocità relativa, provocano un'inversione di coppia trasmessa dalla frizione uscente, con conseguente ricircolo di potenza.

Quest'ultimo aspetto può essere spiegato in modo efficace ricorrendo alle figure 2.3 e 2.4, e dividendo la manovra in 4 fasi, ovvero:

- fase 1: condizione di prima marcia inserita;
- fase 2: incremento di pressione sulla frizione entrante e decremento sulla frizione uscente, entrambe le coppie sono di segno positivo (frizione C in aderenza, frizione E in scorrimento);
- fase 3: ricircolo di potenza, la coppia della frizione uscente è negativa mentre la coppia della frizione entrante deve aumentare in modo eccessivo per sincronizzare i giri del nuovo rapporto di trasmissione (frizione C in aderenza, frizione E in scorrimento);
- fase 4: inizia la sincronizzazione delle velocità. L'inversione di pendenza da parte della coppia trasmessa dalla frizione C è dovuta alla nascita di una coppia di inerzia che va ad aggiungersi all'equilibrio delle coppie in condizioni stazionarie, espresso dalla relazione (5.2) (frizione C in scorrimento, frizione E in scorrimento) ;
- fase 5: la frizione E entra in una condizione di aderenza, ma esiste ancora un ricircolo di potenza, in quanto la pressione inviata alla frizione uscente possiede ancora un valore positivo;
- fase 6: condizione di seconda marcia inserita (frizione C disattivata, frizione E in aderenza).

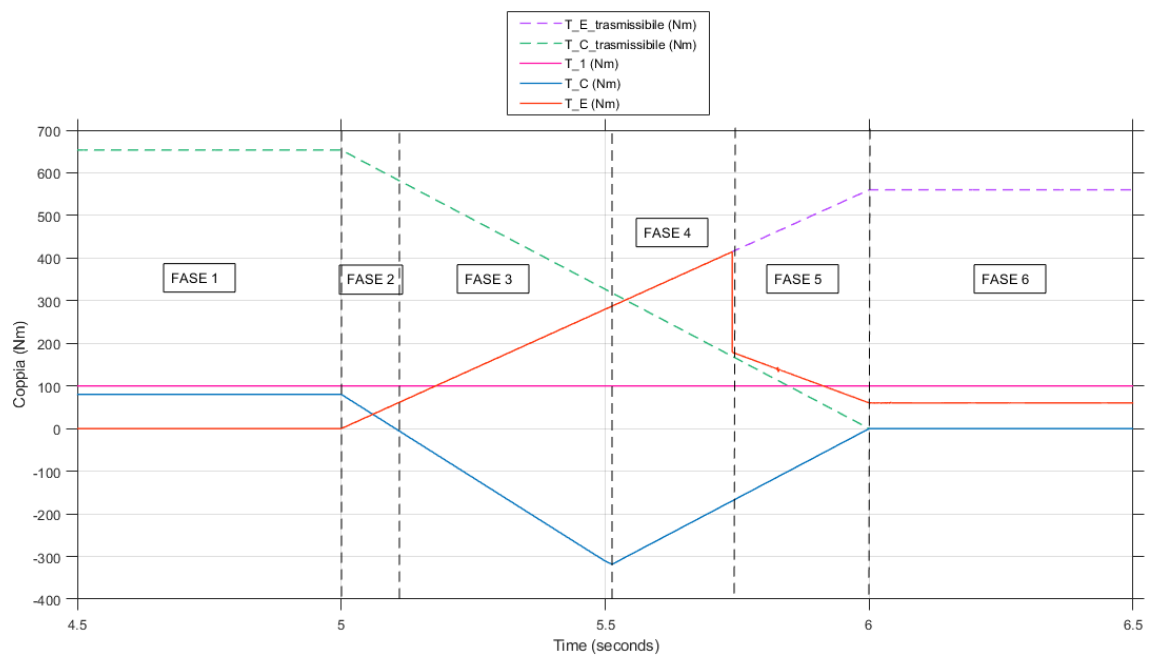


Figura 5.3: Coppie agenti sulle frizioni C ed E (Prima-Seconda) + coppia motore T_1

- figura 5.4: rapporto di trasmissione nel passaggio dalla prima alla seconda marcia.

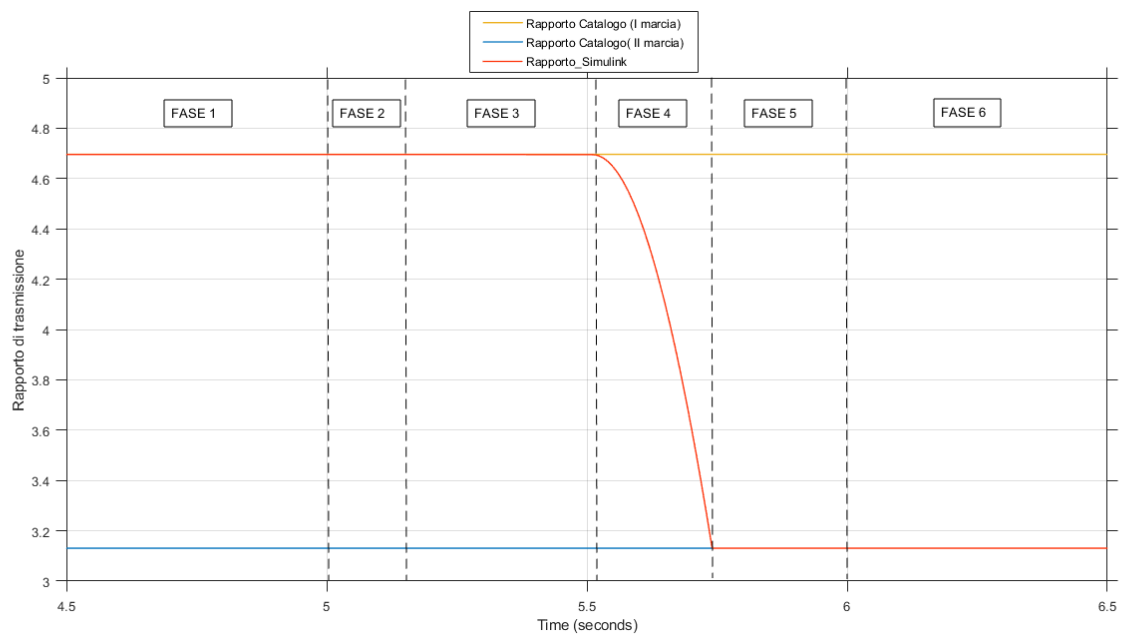


Figura 5.4: Rapporto di trasmissione Prima-Seconda

La figura 5.4 risulta estremamente interessante in quanto permette di capire che non è scontato avere una manovra di cambio marcia in cui la *torque phase* è seguita

dall'*inertia phase*. In questa circostanza, le due fasi sono sovrapposte per un certo intervallo temporale, ovvero l'*inertia phase* ha inizio quando la *torque phase* è ancora in atto.

Per tale ragione non è stata definita una *torque ed un'inertia phase*, bensì una fase 1, fase 2, fase 3, fase 4, fase 5 e fase 6.

La manovra di cambio marcia con variazione lineare delle pressioni di comando delle frizioni porta con sé, in ultima analisi, un problema di ricircolo di potenza, rendendo la manovra sicuramente non efficiente dal punto di vista energetico.

La figure seguenti 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 mostrano il flusso di potenza esistente in ciascuna delle 6 fasi ed allo stesso tempo si indica l'aderenza o lo scorrimento della frizione entrante (E) ed uscente (C).

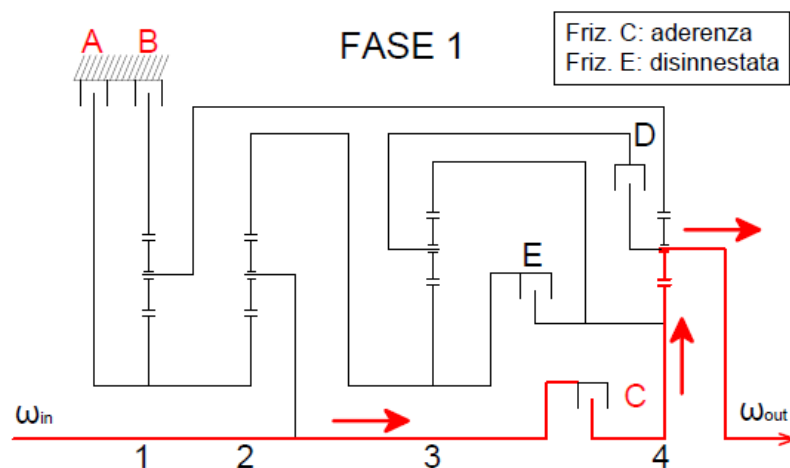


Figura 5.5: Flusso di potenza - fase 1

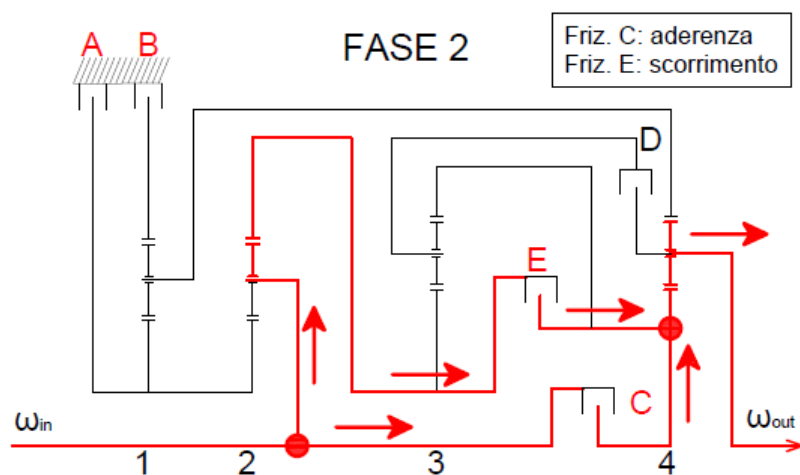


Figura 5.6: Flusso di potenza - fase 2

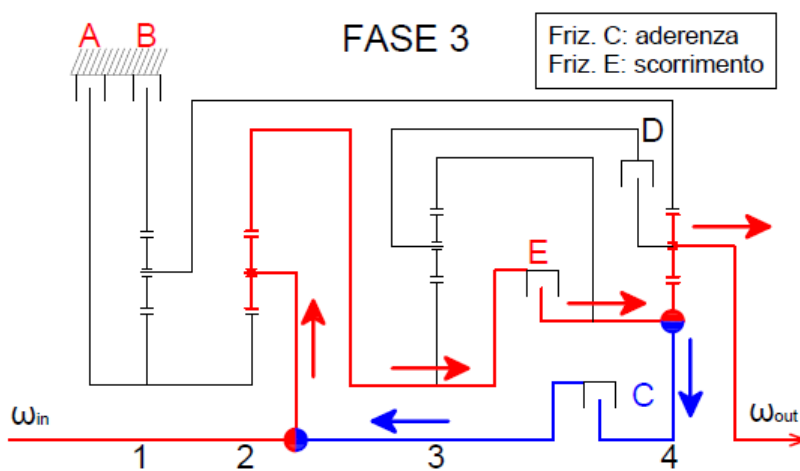


Figura 5.7: Flusso di potenza - fase 3

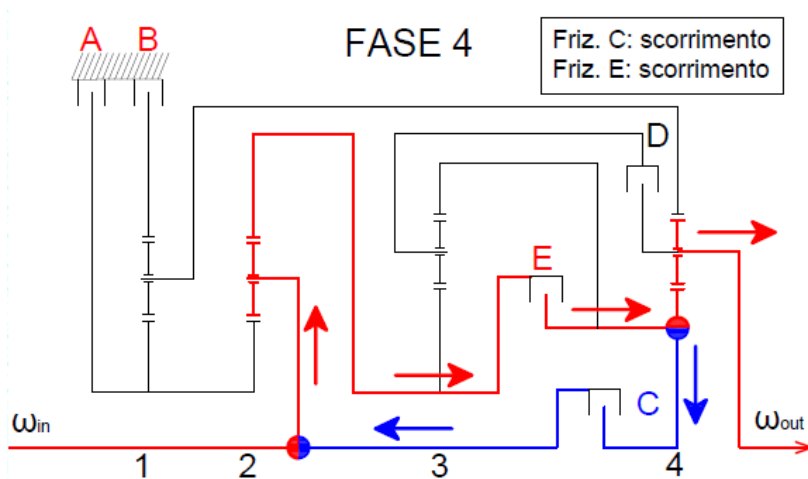


Figura 5.8: Flusso di potenza - fase 4

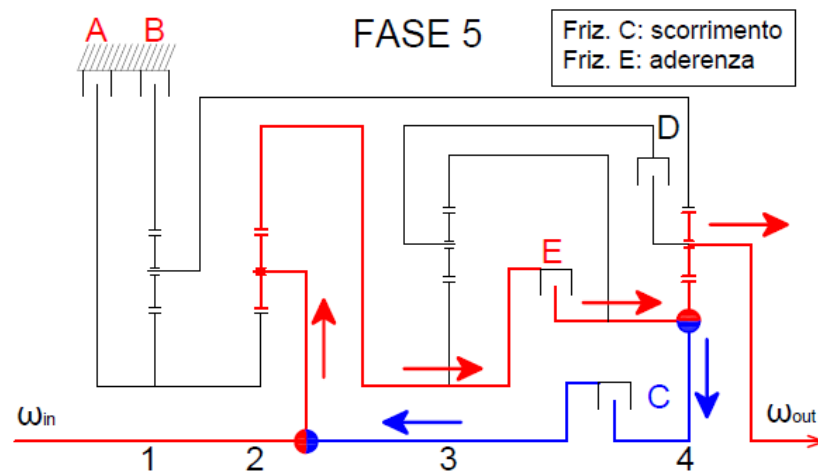


Figura 5.9: Flusso di potenza - fase 5

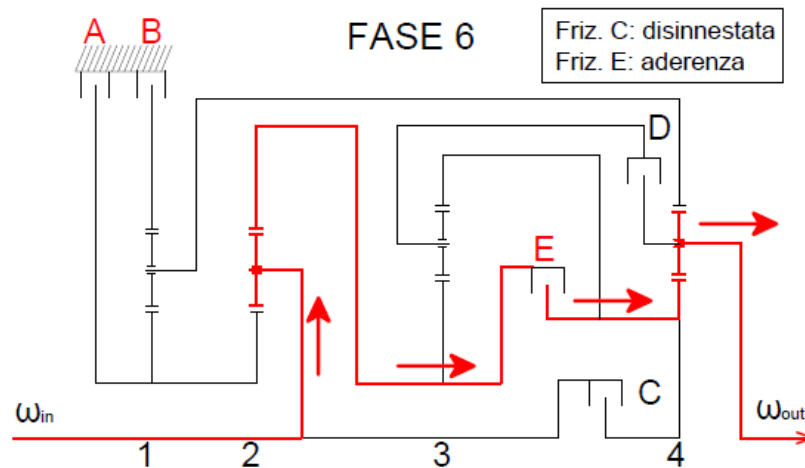


Figura 5.10: Flusso di potenza - fase 6

Nel seguito della trattazione, si dimostra che, con una logica di controllo specifica per la manovra di cambio marcia, è possibile eliminare totalmente le fasi in cui si verifica il ricircolo di potenza e quindi passare dalla fase 1 alla fase 6 attraverso la fase 2, in cui il flusso di potenza viaggia su 2 percorsi paralleli con coppie trasmesse dalle frizioni C ed E entrambe positive e che quindi forniscono uno sforzo di trazione alla trasmissione.

- figura 5.11: andamento giri motore durante la manovra prima-seconda;

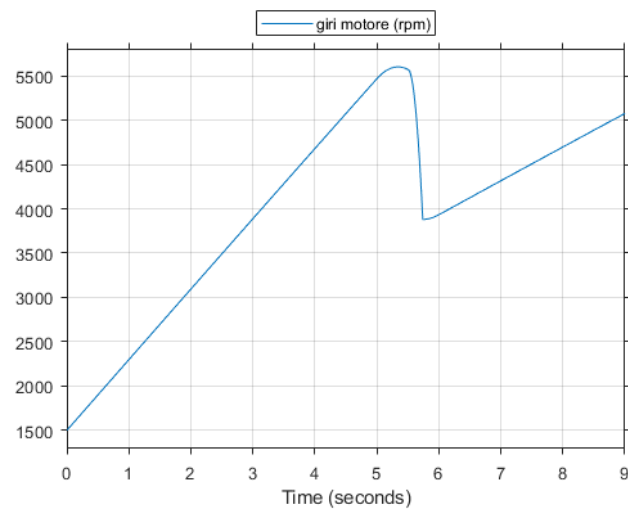


Figura 5.11: Andamento giri motore (Prima-Seconda)

- figura 5.12: andamento velocità veicolo durante la manovra prima-seconda;

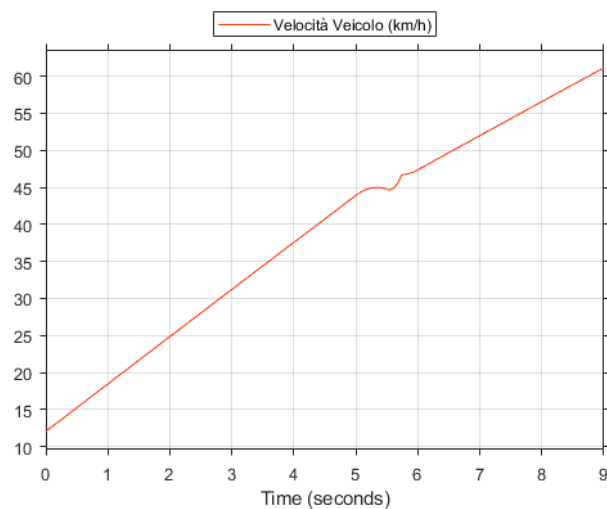


Figura 5.12: Andamento velocità veicolo (Prima-Seconda)

- figura 5.13: andamento dell'accelerazione che caratterizza il veicolo durante un cambio marcia prima-seconda.

Questa figura (figura 5.13) mostra che il cambio marcia così effettuato non garantisce buoni risultati in termini di comfort ai passeggeri, in quanto, dai picchi di accelerazione e decelerazione che il veicolo raggiunge durante la manovra, si evince che il passeggero è soggetto a bruschi scuotimenti.

In particolare, dopo una decelerazione lineare da 5 secondi a circa 5.5 secondi, si

verifica una brusca accelerazione fino a circa 6 m/s^2 a causa dell'inizio della sincronizzazione delle velocità e quindi della nascita di una coppia di inerzia all'interno del sistema. Raggiunto questo picco di accelerazione, non appena la frizione entrante si porta in una condizione di aderenza, l'accelerazione cala repentinamente e ha inizio la fase 5, in cui la frizione E si trova in aderenza mentre la frizione C scorre ancora.

Questo andamento di accelerazione mostrato in figura 5.13 rappresenta il risultato ultimo di un cambio marcia con variazione lineare delle pressioni di comando delle frizioni. Pertanto, al fine di evitare discomfort al passeggero, appare ben evidente quanto sia necessario prevedere un'attuazione delle frizioni diversa mediante una logica di controllo ben pensata.

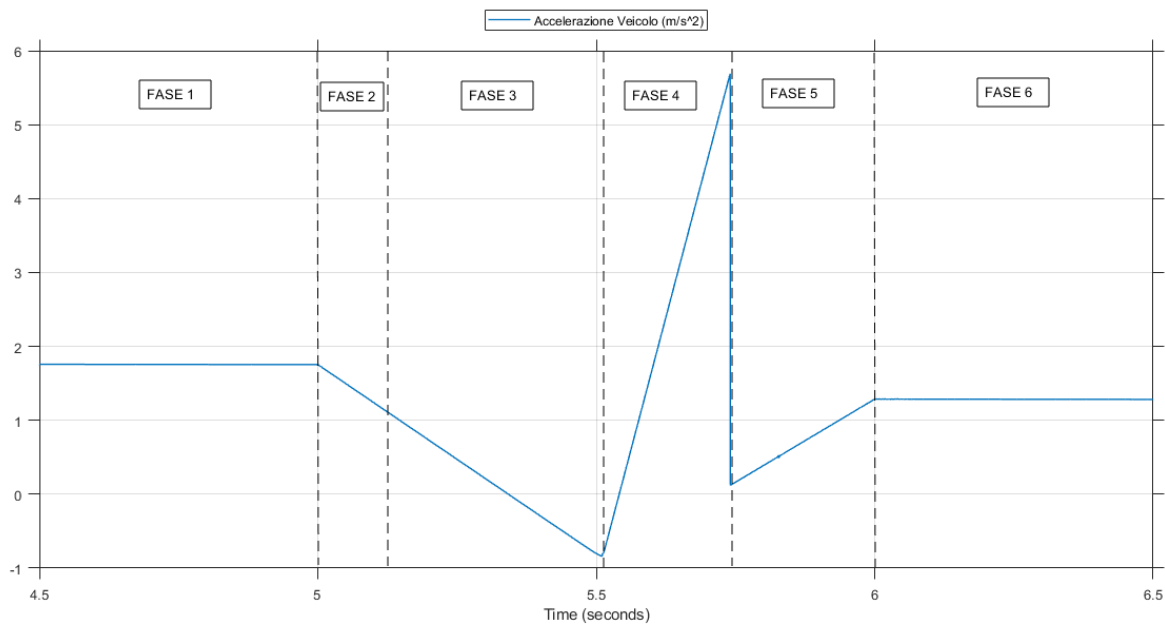


Figura 5.13: Andamento accelerazione (Prima-Seconda)

5.2 Cambio marcia con logica di controllo

Nell'ultima parte dello studio, si pone l'attenzione su particolari accorgimenti da adottare per rendere il cambio marcia prima-seconda più efficiente possibile dal punto di vista energetico, ed allo stesso tempo, perseguire un buon risultato per quanto riguarda il comfort del passeggero durante la manovra.

Come accennato in precedenza, osservando le coppie agenti sulle frizioni, in particolare sulla frizione entrante e quella uscente, occorre modificare gli andamenti che queste assumono durante la manovra, ovvero si cerca di ottenere una decrescita fino a zero della coppia corrispondente alla frizione uscente, e per quanto riguarda la frizione entrante una crescita fino al valore corrispondente a quello che questa frizione deve sviluppare in condizioni stazionarie in seconda marcia [2,5].

Per operare questa modifica in merito ai profili delle coppie agenti, si opta per una differenziazione delle pressioni agenti su ciascuna frizione, in particolare le frizioni entrante ed uscente saranno attuate seguendo la logica esposta nel seguito.

Innanzitutto, vengono riportati i valori di coppia agenti sulle singole frizioni, sia in prima che in seconda marcia, nel caso in cui il motore eroghi una coppia di $100 \text{ N} \cdot \text{m}$.

$(N \cdot m)$	Coppia motrice ($100 \text{ N} \cdot \text{m}$) Prima Marcia
T_A	123.2
T_B	246.4
T_C	100
T_D	0
T_E	0

Tabella 5.1: Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, prima marcia

$(N \cdot m)$	Coppia motrice ($100 \text{ N} \cdot \text{m}$) Seconda Marcia
T_A	48.8
T_B	164.3
T_C	0
T_D	0
T_E	66.7

Tabella 5.2: Coppie agenti sulle frizioni con coppia in ingresso pari a $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, seconda marcia

Dalle tue tabelle precedenti, si deduce che il valore di coppia della frizione C (uscente) deve passare da un valore di $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ad un valore nullo, mentre la frizione E (entrante)

deve passare da un valore nullo a $66.7 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Le pressioni che occorre garantire per avere queste coppie sulla frizione entrante ed uscente sono calcolate nelle tabelle seguenti.

	Frizione C (uscente)
N_C	7
R_C	0.6 m
A_C	0.00389 m ²
μ	0.1
T_C	100 N · m
p_C	6.12 bar

Tabella 5.3: Calcolo della pressione necessaria sulla frizione C per generare una coppia di $100 \text{ N} \cdot \text{m}$

	Frizione E (entrante)
N_E	6
R_E	0.6 m
A_E	0.00389 m ²
μ	0.1
T_E	66.7 N · m
p_E	4.76 bar

Tabella 5.4: Calcolo della pressione necessaria sulla frizione E per generare una coppia di $66.7 \text{ N} \cdot \text{m}$

I due valori di pressione p_C e p_E così calcolati, però, non tengono conto dell'inerzia I_1 , ovvero l'inerzia a cui è soggetto il motore. Quest'inerzia moltiplicata per l'accelerazione angolare dell'albero 1 fornisce una coppia resistente che si oppone a quella motrice. La differenza tra la coppia T_1 e la coppia resistente appena descritta viene definita $T_{1,real}$ e costituisce l'input per tutti i parametri che occorre calcolare per implementare la logica di controllo del cambio marcia.

Nella figura 5.14, si può osservare come ricavare $T_{1,real}$, ovvero, all'interno del modello descritto in precedenza in cui si ricavano le accelerazioni angolari, è possibile ricavare

l'accelerazione $\ddot{\theta}_1$ tramite la matrice K_{matrix} , moltiplicarla per I_1 e sottrarre la coppia resistente così ottenuta alla T_1 .

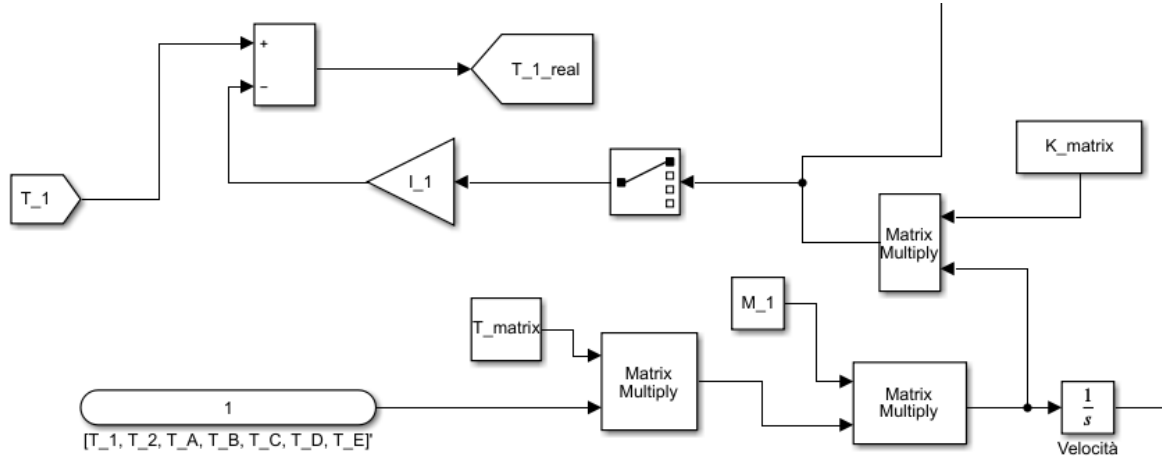


Figura 5.14: Calcolo di $T_{1,real}$

Così facendo, è possibile ricavare in modo preciso il punto di inizio della torque phase e quindi la pressione che occorre raggiungere sulla frizione uscente per passare da una condizione di aderenza ad una di scorrimento, o meglio per raggiungere una coincidenza tra la coppia trasmissibile e quella trasmessa, condizione che permette di controllare la coppia trasmessa attraverso il profilo di pressione.

Per fare ciò, si richiama la relazione (2.88) che descrive la relazione che intercorre, in condizioni stazionarie, tra la coppia della frizione uscente, la coppia della frizione entrante e la coppia motrice.

$$T_{off} = T_{in} - T_{onc} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_2}{\sigma_2} \right) \quad (5.3)$$

Implementando tale relazione in Simulink e considerando che all'inizio della torque phase la $T_{onc} = 0$, si ricava il valore di pressione $p_{C,inizio-torque}$ a cui può avere inizio la torque phase. (Figura 5.15)

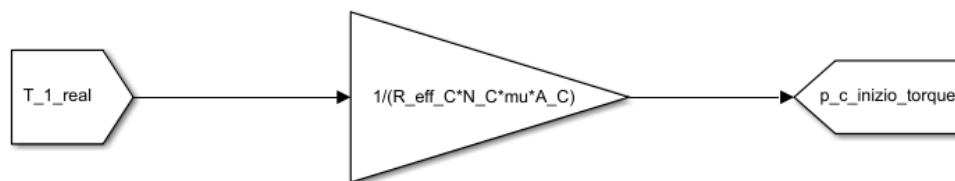


Figura 5.15: Calcolo della pressione p_C all'inizio della torque phase

Allo stesso modo, si calcola il valore di pressione sulla frizione entrante $p_{E, fine-torque}$ al termine della torque phase, considerando però che in questa circostanza T_{off} sia uguale a zero. (Figura 5.16)

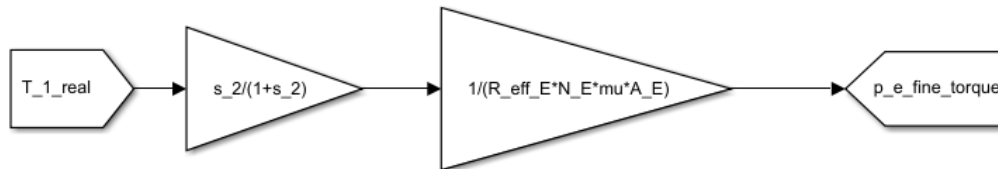


Figura 5.16: Calcolo della pressione p_E alla fine della torque phase

In questo modo, tramite la logica di controllo "State Flow" di Simulink, si impongono le condizioni che occorre verificare per passare da una fase all'altra durante il cambio marcia.

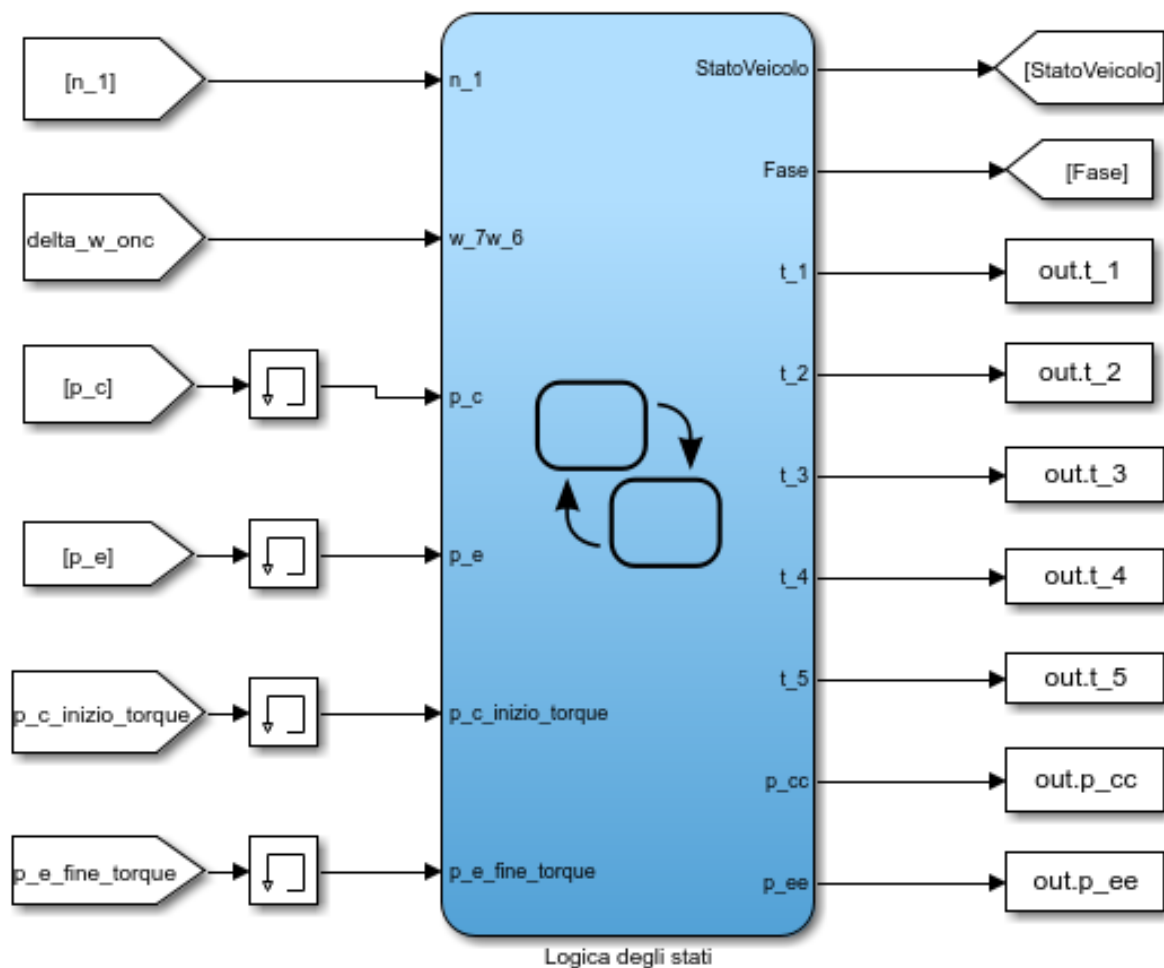


Figura 5.17: Input ed Output della logica a stati

Procedendo per gradi si descrivono gli input ed output della logica di controllo.

Input:

- n_1 : la velocità del motore permette di stabilire quando far avvenire il cambio marcia (2500 rpm);
- p_C : la pressione in tempo reale agente sulla frizione C, confrontata con il valore precedentemente calcolato $p_{C,inizio-torque}$, permette di stabilire quando può iniziare la torque phase, ovvero quando la frizione si trova in incipiente scorrimento;;
- p_E : la pressione agente sulla frizione E permette di stabilire quando può terminare la torque phase, ovvero quando p_E raggiunge il valore di $p_{E,fine-torque}$;
- $\Delta\omega_{onc}$: lo scorrimento presente tra le due facce della frizione entrante permette di stabilire una soglia al di sotto della quale il motore, precedentemente fatto decelerare, deve ricominciare ad erogare la coppia nominale per consentire di raccordare più dolcemente le due velocità;
- $p_{C,inizio-torque}$: costituisce come già detto un valore di soglia;
- $p_{E,fine-torque}$: anch'esso è un valore di soglia.

Output:

- $stato\ veicolo = 1$, il veicolo si trova in una condizione di marcia fissa, pertanto la simulazione viene eseguita mantenendo costante sia la pressione agente sulle frizioni attive in prima marcia (40 bar) sia la coppia motrice (100 Nm);
- $stato\ veicolo = 2$, si verifica quando la velocità del motore supera i 2500 rpm, entrando in una condizione di cambio marcia. Una volta in questo stato, la manovra viene suddivisa in 4 fasi, ognuna delle quali fornisce come output la coppia motrice ed i profili di pressione degli attuatori.

N.B. Questi due parametri costituiscono le due grandezze fondamentali che, a basso livello, consentono di eseguire e controllare un cambio marcia.

La coppia motrice ed i profili di pressione degli attuatori costituiscono gli input del modello descritto nel paragrafo 3.1 e variano a seconda della fase in cui si trova il processo di simulazione.

Le 4 fasi del cambio marcia sono così definite:

- fase 1: riduzione di pressione sulla frizione uscente, in modo da arrivare ad una condizione di incipiente scorrimento;
 - fase 2: torque phase, ovvero salita di pressione agente sulla frizione entrante mentre avviene una caduta sulla frizione uscente;
 - fase 3: inertia phase - rilascio motore, viene ridotta la coppia motrice al fine di velocizzare la sincronizzazione delle velocità dei due alberi appartenenti alla frizione che si sta innestando [2,5];
 - fase 4: inertia phase - innesto frizione, vengono raccordate in modo più graduale possibile le velocità angolari delle due facce della frizione entrante per non incorrere in un botto di accelerazione che andrebbe ad agire sulla trasmissione;
 - fase 5: risalita della pressione al valore nominale sulla frizione entrante, oramai in aderenza.
- $out.t_1$: istante temporale di inizio della fase 1, consente di impostare correttamente i profili di salita e discesa delle pressioni mediante l'utilizzo di blocchi "ramp" (vedi "Start time" nelle figure 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25).
 - $out.t_2$: istante temporale di inizio della fase 2;
 - $out.t_3$: istante temporale di inizio della fase 3;
 - $out.t_4$: istante temporale di inizio della fase 4;
 - $out.t_5$: istante temporale di inizio della fase 5;
 - p_{CC} : valore di pressione sulla frizione C all'inizio della rampa di discesa nella torque phase;
 - p_{EE} : valore di pressione sulla frizione E alla fine della rampa di salita nella torque phase.

Nella figura seguente 5.18, si mostra come è stata implementata la logica di controllo, ovvero quali condizioni debbono verificarsi per passare da uno stato all'altro o da una fase all'altra.

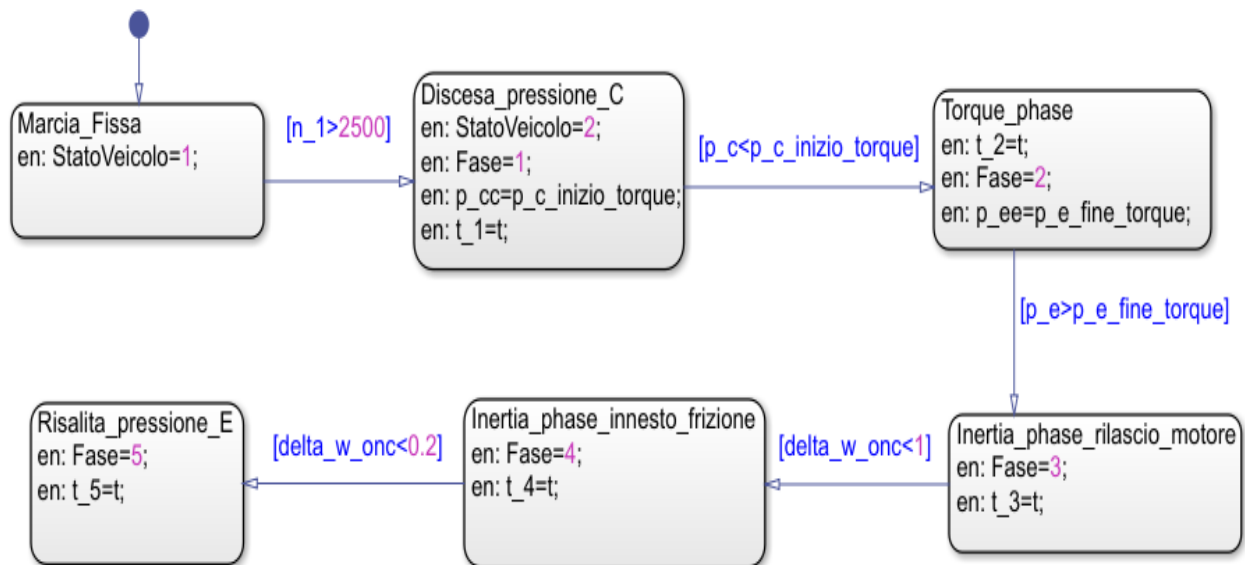


Figura 5.18: Sequenza degli stati e delle fasi all'interno della logica di controllo

Si ribadisce che, per ogni stato e per ogni fase, si hanno come output la coppia motrice ed il profilo delle pressioni che vanno ad agire sulle frizioni. (Figura 5.19) Gli output della logica di controllo, quindi, costituiscono gli input del modello precedentemente sviluppato in cui vengono calcolate tutte le grandezze di interesse, quali accelerazioni, coppie trasmesse, scorrimenti delle frizioni, ecc.

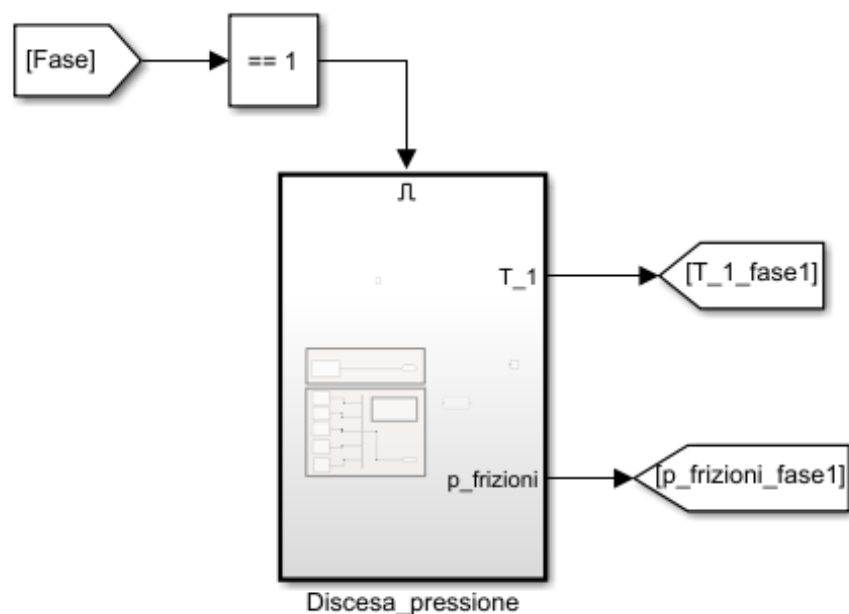


Figura 5.19: Output dello Stato Veicolo=2, fase=1

Nello Stato Veicolo uguale ad 1, ovvero in una condizione di prima marcia innestata, si riportano nella figura seguente gli output.

Motore	100 Nm
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C	40 bar
Frizione D	0 bar
Frizione E	0 bar

Figura 5.20: Valori di coppia motrice e profili di pressione in prima marcia

Nello Stato Veicolo uguale a 2, nella fase 1, 2, 3, 4 e 5 si avranno i seguenti output. N.B. Nei blocchi ramp della fase 2, ovvero nella torque phase, in cui compare il valore 0.5 nel calcolo della pendenza, esso corrisponde alla durata temporale di questa fase, imposta a 0.5 secondi.

Motore	100 Nm
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C RAMP	Slope: -1e8 Start time: out.t_1(end) Initial output: 40e5
Frizione D	0 bar
Frizione E	0 bar

Figura 5.21: Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 1

Motore	100 Nm
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C RAMP	Slope: $-\text{out.p_cc}(\text{end})/0.5$ Start time: $\text{out.t_2}(\text{end})$ Initial output: $\text{out.p_cc}(\text{end})$
Frizione D	0 bar
Frizione E RAMP	Slope: $\text{out.p_ee}(\text{end})/0.5$ Start time: $\text{out.t_2}(\text{end})$ Initial output: 0

Figura 5.22: Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 2

	RAMP Slope: $-1e5$ Start time: $\text{out.t_3}(\text{end})$ Initial output: 100
Motore	SATURATION Upper limit: 100 Lower limit: -20
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C	0 bar
Frizione D	0 bar
Frizione E	$\text{out.p_ee}(\text{end})+0.5e5$

Figura 5.23: Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 3

RAMP Slope: 1e5 Start time: out.t_4(end) Initial output: -20	
Motore	
SATURATION Upper limit: 100 Lower limit: -20	
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C	0 bar
Frizione D	0 bar
Frizione E	out.p_ee(end)+0.7e5

Figura 5.24: Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 4

Motore	100 Nm
Frizione A	40 bar
Frizione B	40 bar
Frizione C	0 bar
Frizione D	0 bar
Frizione E	RAMP Slope: 50e6 Start time: out.t_5(end) Initial output: out.p_ee(end)+0.7e5 SATURATION Upper limit: 40e5 Lower limit: out.p_ee(end)+0.7e5

Figura 5.25: Valori di coppia motrice e profili di pressione nella fase 5

N.B. Nelle figure 5.23, 5.24 e 5.25 si può notare come sia stato aggiunto un certo quantitativo di pressione sulla frizione E ($0.6 - 0.7$ bar) nelle fasi di inertia phase - rilascio motore, innesto frizione e risalita pressione per compensare gli effetti inerziali trascurati in questo studio.

Nella figura seguente 5.26, si mostrano graficamente tutte le fasi seguite dai due profili di pressione.

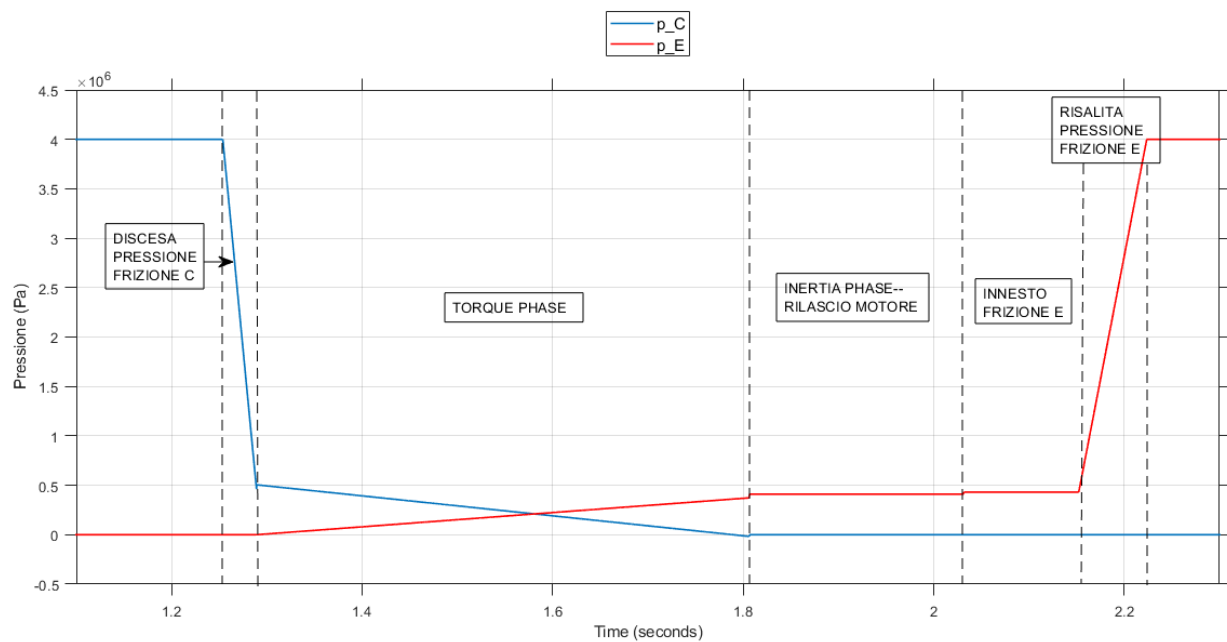


Figura 5.26: Profili delle pressioni agenti sulle frizioni C ed E

Con questi profili di pressione così tracciati per la frizione C ed E, e lasciando inalterati i 40 bar sulle altre frizioni, si ottengono i seguenti andamenti delle coppie trasmesse e trasmissibili. In aggiunta, si rappresenta anche l'andamento della coppia motrice durante tutta la manovra.

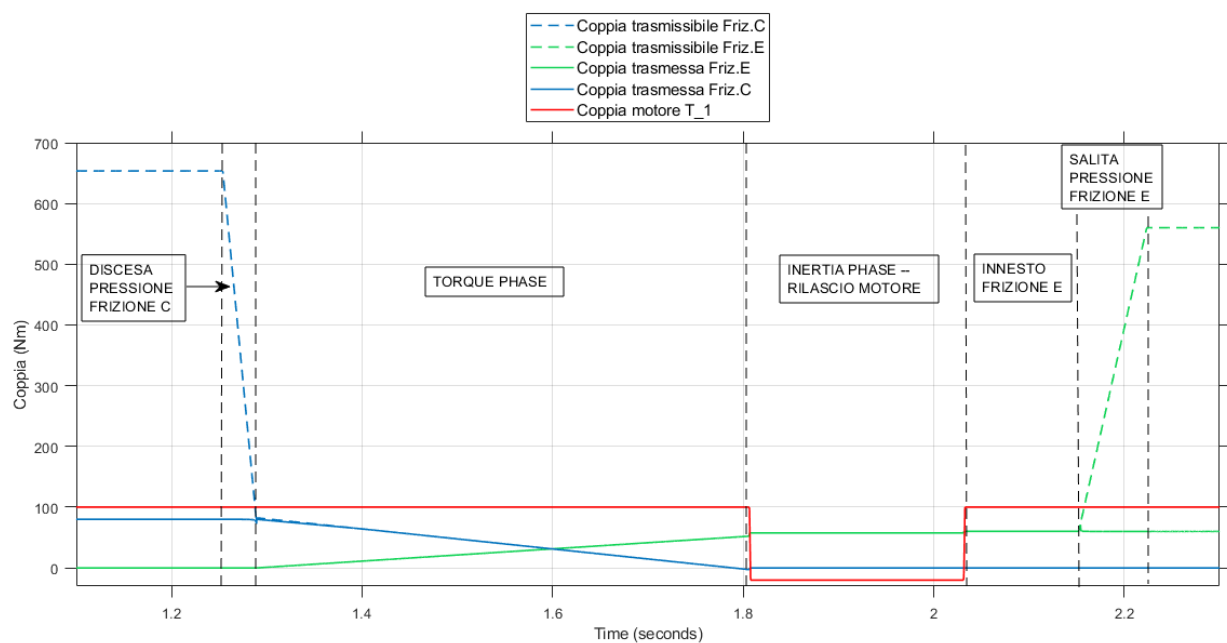


Figura 5.27: Andamento delle coppie con profili di pressione ad hoc

Una volta terminata la torque phase, ha inizio l'inertia phase in cui gli alberi della trasmissione cambiano la loro velocità angolare per realizzare il rapporto di trasmissione di seconda marcia.

L'inertia phase si conclude quando la frizione entrante annulla il suo scorrimento.

Il grafico delle coppie mostrato in figura 5.27 va letto insieme a quello che mostra l'andamento del rapporto di trasmissione prima-seconda (figura 5.28), il quale permette di capire effettivamente qual è l'inizio e la fine dell'inertia phase e constatare che, qualora il controllo delle frizioni durante la manovra sia stato eseguito correttamente, esiste una totale corrispondenza con il grafico delle coppie e quindi essere certi che l'inertia phase abbia inizio soltanto dopo il termine della torque phase.

Questo aspetto costituisce la sostanziale differenza rispetto al caso in cui la manovra di cambio marcia venga effettuata secondo una variazione lineare delle pressioni di comando delle frizioni, ovvero la suddivisione in torque phase ed inertia phase non è immediata, bensì va ricercata mediante un controllo ad hoc dei profili delle pressioni.

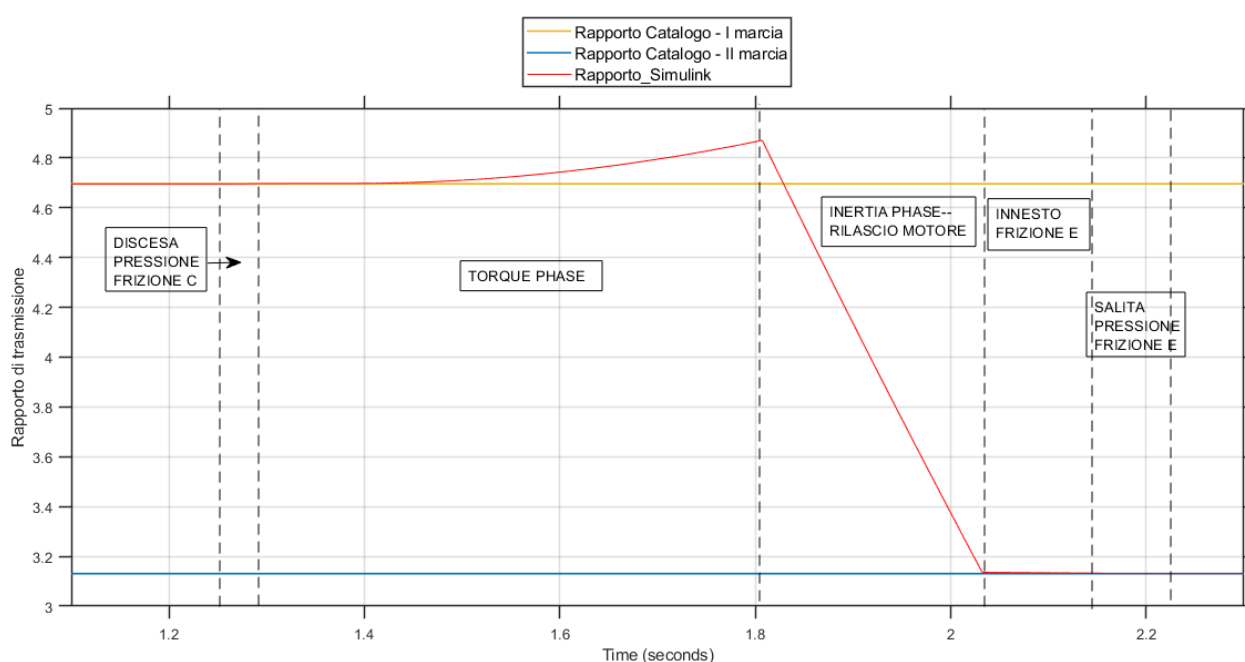


Figura 5.28: Andamento rapporto di trasmissione prima-seconda

Per ridurre la durata dell'inertia phase, si riduce la coppia motrice e la si mantiene ad un valore minimo fino a quando lo scorrimento della frizione entrante non scende al di sotto di una certa soglia, dopodiché occorre farla risalire rapidamente per accordare

correttamente le velocità delle due facce della frizione entrante. (Figura 5.27).

Quest'ultimo aspetto è da tenere in particolare considerazione in quanto, durante l'innesto di una frizione, l'albero più veloce tende ad accelerare l'albero più lento e l'albero più lento tende a decelerare l'albero più veloce; se le velocità di questi due alberi arrivano a coincidere mediante l'intersezione di due rette con pendenze molto diverse tra di loro, questo provoca un botto di accelerazione agente sulla trasmissione e quindi, infine, risentito dal passeggero durante il cambio marcia. (Figura 5.29).

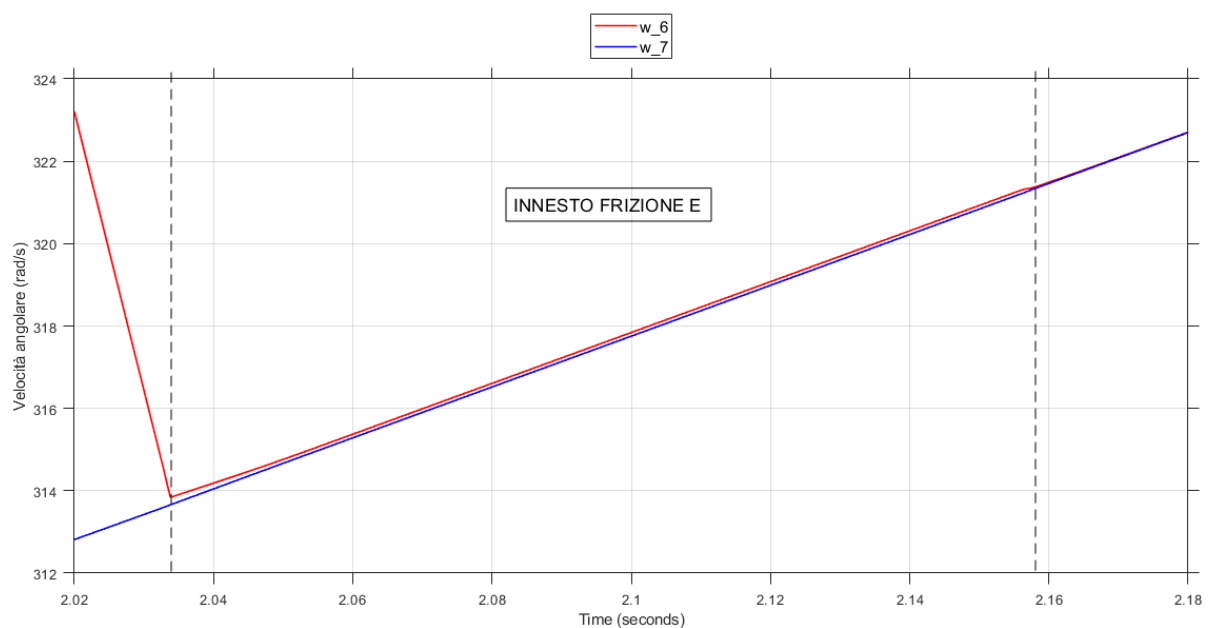


Figura 5.29: Raccordo delle velocità ω_6 e ω_7

Nella figura seguente 5.30, si mostra l'andamento del profilo di accelerazione del veicolo durante la manovra.

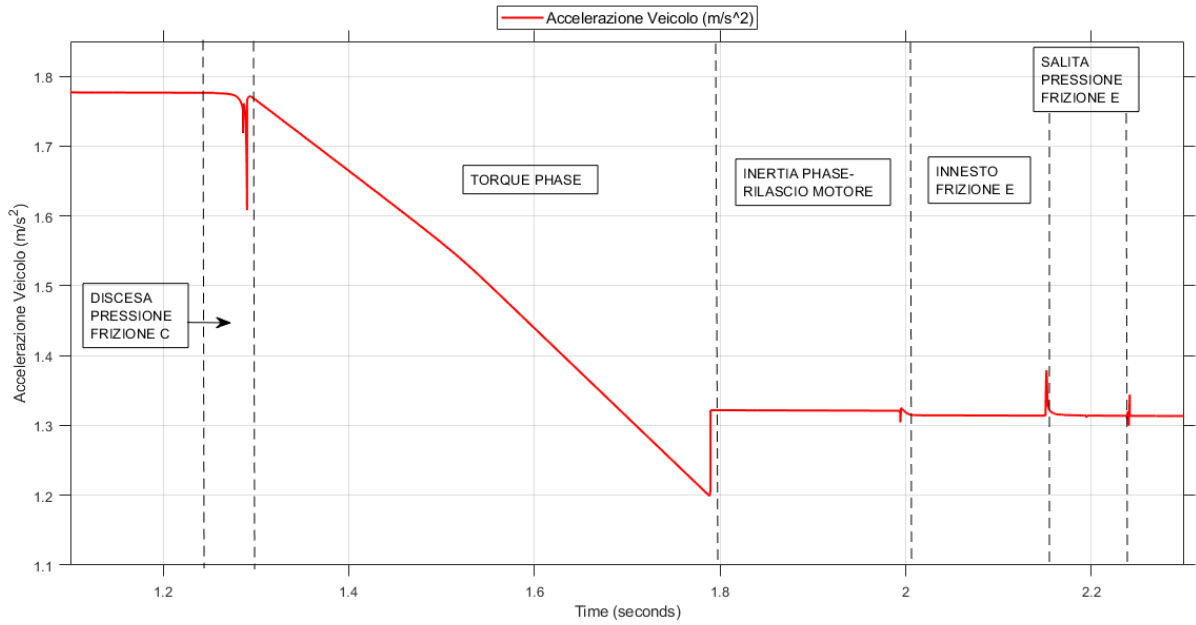


Figura 5.30: Accelerazione veicolo durante cambio marcia prima-seconda

5.2.1 Errore sulla stima di un parametro all'interno della logica di controllo

Il ragionamento di fondo adottato in questa logica di controllo prevede un pieno controllo della coppia trasmissibile mediante il profilo di pressioni. Nella realtà questa assunzione rimane valida ma presenta un'incertezza, dato che la coppia trasmissibile è frutto di costanti geometriche quali numero di dischi, superfici di attuazione, ecc, ma anche del coefficiente di attrito che dipende senz'altro dalla temperatura.

Nel seguito, si descrive cosa accadrebbe qualora si presentasse un'incertezza sulle coppie trasmissibili, ovvero qualora si sbagliasse a stimare il coefficiente d'attrito.

Nelle sezioni precedenti, è stato adottato un coefficiente d'attrito pari a 0.1. In questa circostanza, si mostrano gli andamenti delle coppie trasmesse e trasmissibili e dell'accelerazione del veicolo risultante qualora la logica di controllo commettesse un errore di stima del 20%, ovvero adottasse per il coefficiente d'attrito un valore di 0.08.

Nella figura 5.31 si può notare come si instauri un ricircolo di potenza negli istanti finali della torque phase. Il valore di coppia resistente generatasi sulla frizione uscente è di circa -12 Nm , ritenuto ancora accettabile per un buon funzionamento della trasmissione.

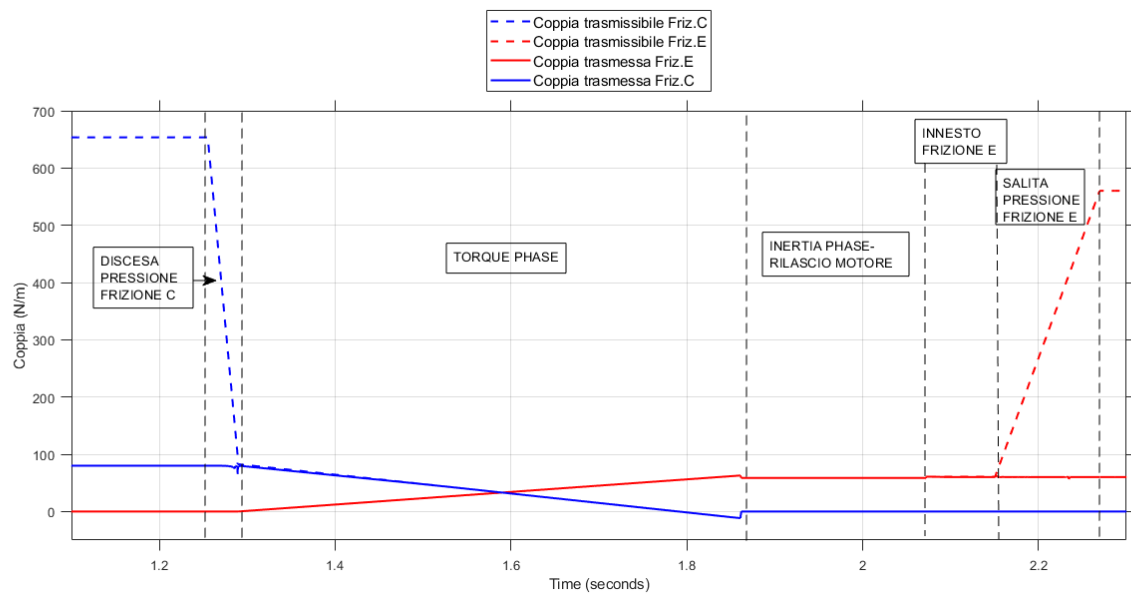


Figura 5.31: Andamento delle coppie con errore di stima del coefficiente d'attrito

Allo stesso tempo, si mostra anche la variazione che si genera in termini di accelerazione del veicolo. (Figura 5.32)

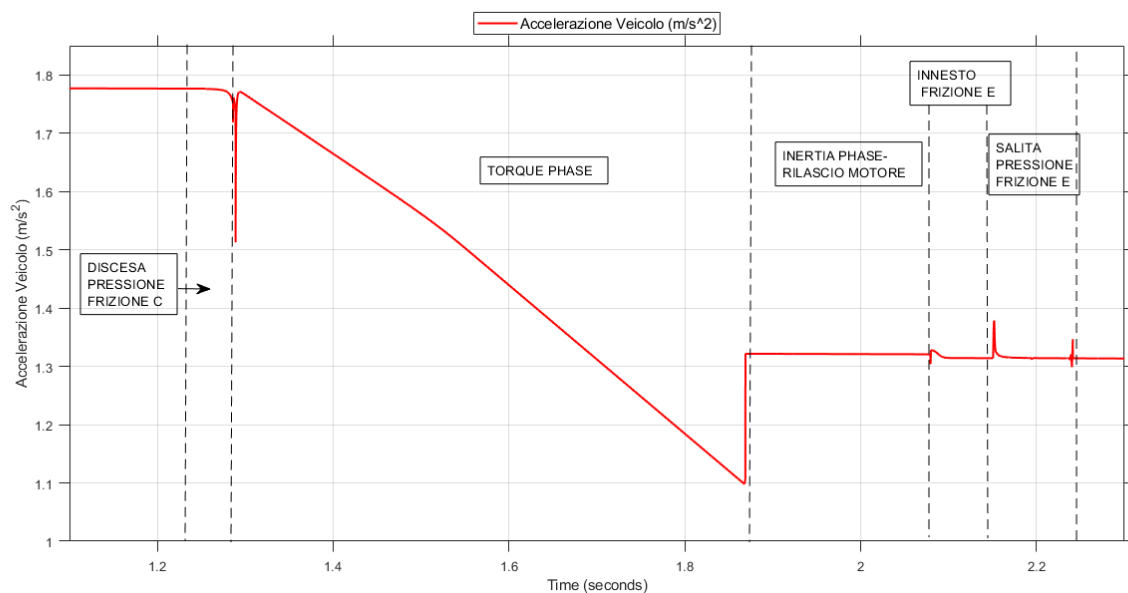


Figura 5.32: Accelerazione veicolo con errore di stima del coefficiente d'attrito

Lo scostamento che esiste al termine della torque phase, tra il grafico di accelerazione con coefficiente d'attrito nominale e quello con errore di stima, è di circa 0.1 m/s^2 , variazione impercettibile a bordo veicolo dal passeggero.

Capitolo 6

Conclusioni e Sviluppi futuri

La scrittura di tutte le equazioni cinematiche e di equilibrio ha permesso di comprendere fino in fondo quali sono le dinamiche che governano un cambio automatico. La loro implementazione in Simulink e la visualizzazione a livello grafico dei risultati ottenuti nel corso di una simulazione di cambio marcia prima-seconda hanno fornito utili indicazioni su quali grandezze intervenire per modificare le risposte di un sistema cambio.

La potenzialità di un cambio automatico di questo genere è quella di effettuare un power-on shift, ovvero un cambio marcia in cui non si ha un'interruzione di trasmissione della coppia. Come si è visto nella parte conclusiva dello studio, questo sicuramente necessita di particolari accorgimenti in quanto, facendo variare linearmente i profili di pressione per l'attuazione delle frizioni, si incorrerebbe in picchi di decelerazione ed accelerazione molto sgradevoli per il comfort del passeggero, come anche un ricircolo di potenza con conseguente sovraccarico meccanico del sistema.

La logica di controllo dell'estensione "State Flow" di Simulink ha portato al raggiungimento di buoni risultati ed ha fornito utili indicazioni su come gestire eventualmente una centralina a bordo veicolo.

Allo stesso tempo, si sottolinea che i risultati ottenuti possono incorrere in una certa variabilità a causa di cattive stime di alcuni parametri. Si è visto che, anche in questa circostanza, il modello continua a fornire risultati accettabili sia in termini di comfort, sia in termini di sovraccarichi meccanici che potrebbero insorgere.

Le equazioni utilizzate per impostare la logica di controllo sono state ottenute in condizioni stazionarie escludendo, quindi, le azioni inerziali che inevitabilmente entrano in gioco durante un cambio marcia. Questo porta ad una piccola percentuale di errore nei risultati

ottenuti e sicuramente non un controllo totale e preciso nell'attuazione delle frizioni ma, nonostante ciò, il modello creato con la relativa logica continua a rimanere valido ed in grado di fornire una descrizione completa di tutte le grandezze durante la manovra di cambio marcia.

Lo studio si è focalizzato sul cambio marcia prima - seconda fornendo al sistema la coppia motrice come costante e senza considerare la presenza di un convertitore di coppia. In una simulazione più completa e più realistica, occorrerebbe creare delle tabelle di riferimento (look-up table - mappe motore) che, a seconda dell'inclinazione del pedale dell'acceleratore, forniscano in uscita la coppia che il motore deve erogare in tale circostanza. A questo punto, sempre tramite delle tabelle, con la coppia motrice in output dalla tabella precedente, occorre calcolare tutte le coppie che le frizioni devono essere in grado di sviluppare con questa coppia motrice, quindi i profili di pressione degli attuatori delle frizioni.

Eventualmente, l'invio del segnale di cambio marcia, potrebbe essere a sua volta calcolato all'interno di una tabella, confrontando la velocità del veicolo con la richiesta di coppia da parte del driver (inclinazione pedale).

L'impostazione del cambio marcia potrebbe essere ulteriormente rimodulata a seconda che la mappatura del motore sia impostata in modalità sport, normale o economy.

Bibliografia

- [1] Quaderno di formazione. *Elementi di meccanica delle trasmissioni*. SKF - Visionato il 25/05/2020. URL: www.skf.com.
- [2] Yijing Zhang - Hiral Haria - Rohit Hippalgaonkar - Gregory Pietron - Yuji Fujii. «Automatic Transmission Shift Control for Canceling Inertia Torque». In: *SAE INTERNATIONAL* 2018-01-1167 (2018).
- [3] Enrico Galvagno. *Appunti di Impostazione Progettuale dell'Autoveicolo*. Torino, 2018.
- [4] Heribert Scherer - Manfred Bek - Stefan Kilian. «ZF New 8-speed Automatic Transmission 8HP70 - Basic Design and Hybridization-». In: *SAE INTERNATIONAL* 2009-01-0510 (2009).
- [5] Yunjiang Cheng - Xiangyang Xu - Shuhan Wang - Yang Liu. «Generic Control Flow for the four types of clutch-to-clutch shifts». In: *SAGE* Vol. 8(5) 1–16 (2016).
- [6] Carlo Ferraresi - Terenziano Raparelli. *Meccanica Applicata alle Macchine*. Torino: CLUT, 2007.
- [7] Mauro Velardocchia. *Appunti di Meccanica del Veicolo*. Torino, 2018.
- [8] Alessandro Vigliani. *Appunti di Impostazione Progettuale dell'Autoveicolo*. Torino, 2017.
- [9] Catalogo ZF. *ZF Transmission Technology*. Visionato il 10/04/2020. URL: www.zf.com.