Cerdeira_Diiuorio_TP4

2025-05-28

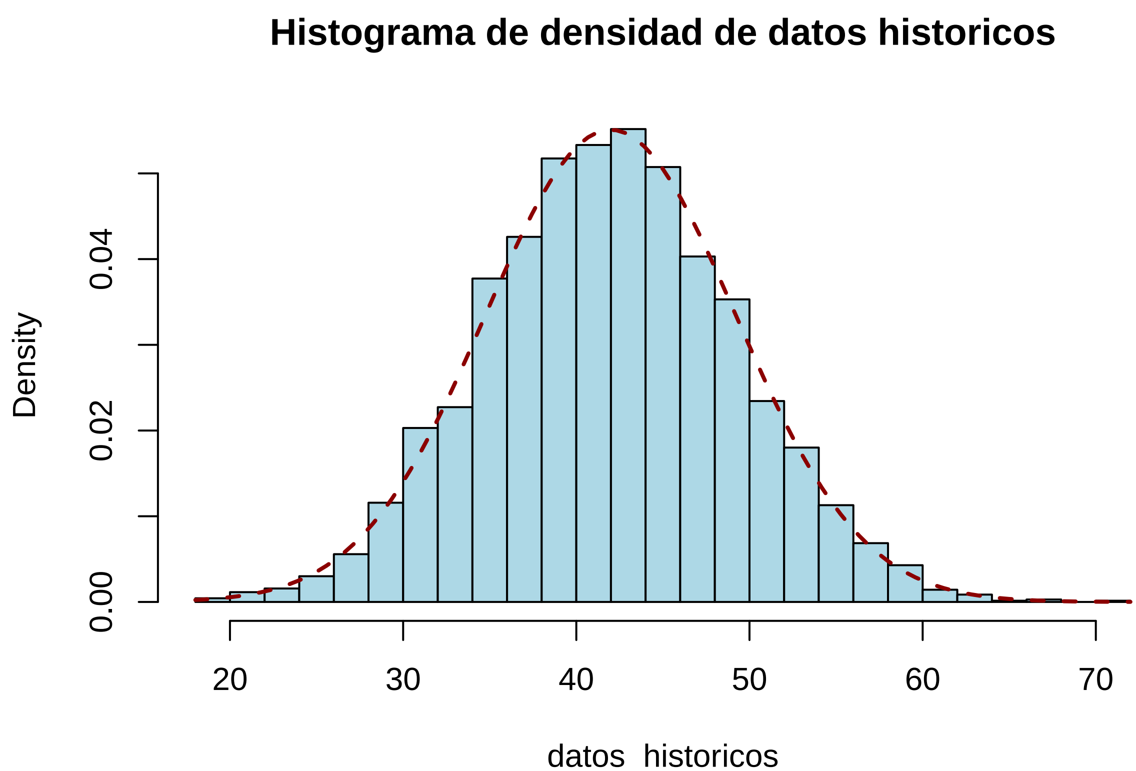
Ejercicio 1

(a)

La **media muestral** de los datos historicos es **41.98**.

La **varianza muestral** de los datos historicos es **52.43**.

(b)



Los datos parecen distribuirse de forma normal.

Ejercicio 2

Primero definimos:

- μ_0 = media del "play-delay" de la versión anterior = 41.9847
- σ_0^2 = varianza del "play-delay" de la versión anterior = 52.4325

Ahora definimos:

$$X_i = \text{El "play-delay" del i-ésimo usuario evaluado con la nueva versión.} \quad 1 \leq i \leq 200$$

Y contamos con la siguiente distribución de nuestra muestra:

$$X_1, ..., X_{200} \sim \mathcal{N}(\mu, 52.43) \text{ iid}$$

Donde:

$$\mu = \text{media del "play-delay"}$$

Para estimar μ vamos calcular la **media muestral** de la muestra con los 200 nuevos usuarios.

La estimación de μ es:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = 42.99$$

Ejercicio 3

(a)

Proponemos las siguientes Hipótesis Nula e Hipótesis Alternativa

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Es decir,

$$H_0 : \mu \leq 41.98 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 41.98$$

Para simplificar el problema, suponemos:

$$H_0 : \mu = 41.98$$

Esto se puede hacer ya que el caso límite de H_0 es cuando $\mu = 41.9847$. Por lo tanto, si puedo rechazar esa H_0 entonces puedo rechazar también todos los valores de

$$\mu \leq 41.98$$

Por ende, las hipótesis quedarían así:

$$H_0 : \mu = 41.98 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 41.98$$

Estadístico:

Para hallar el estadístico partimos del estimador de μ:

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

Asumimos distribución de $\overline{X}$ bajo H_0:

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}(41.98, \frac{52.43}{200}) \quad \text{bajo } H_0$$

Lo estandarizamos:

$$T = \frac{\overline{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{bajo } H_0$$

T es nuestro estadístico. Nos sirve porque es una función de la muestra aleatoria y tiene distribución conocida bajo H_0.

(b)

$$\alpha = 0.05$$

Vamos a rechazar H_0 cuando $\overline{X} > C$ donde C es un número tal que:

$$\alpha = P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = P(\overline{X} > C | H_0 \text{ es V})$$
$$\implies \text{Queremos C tal que } P(\overline{X} > C | H_0 \text{ es V}) = 0.05$$

$$P(\overline{X} > C | H_0 \text{ es V}) = P(\frac{\overline{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} | H_0 \text{ es V })$$

$$como \quad \frac{\overline{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{bajo } H_0$$

Entonces lo llamamos Z ya que

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Por lo tanto,

$$P(\frac{\overline{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} | H_0 \text{ es V }) = P(Z > q)$$

donde

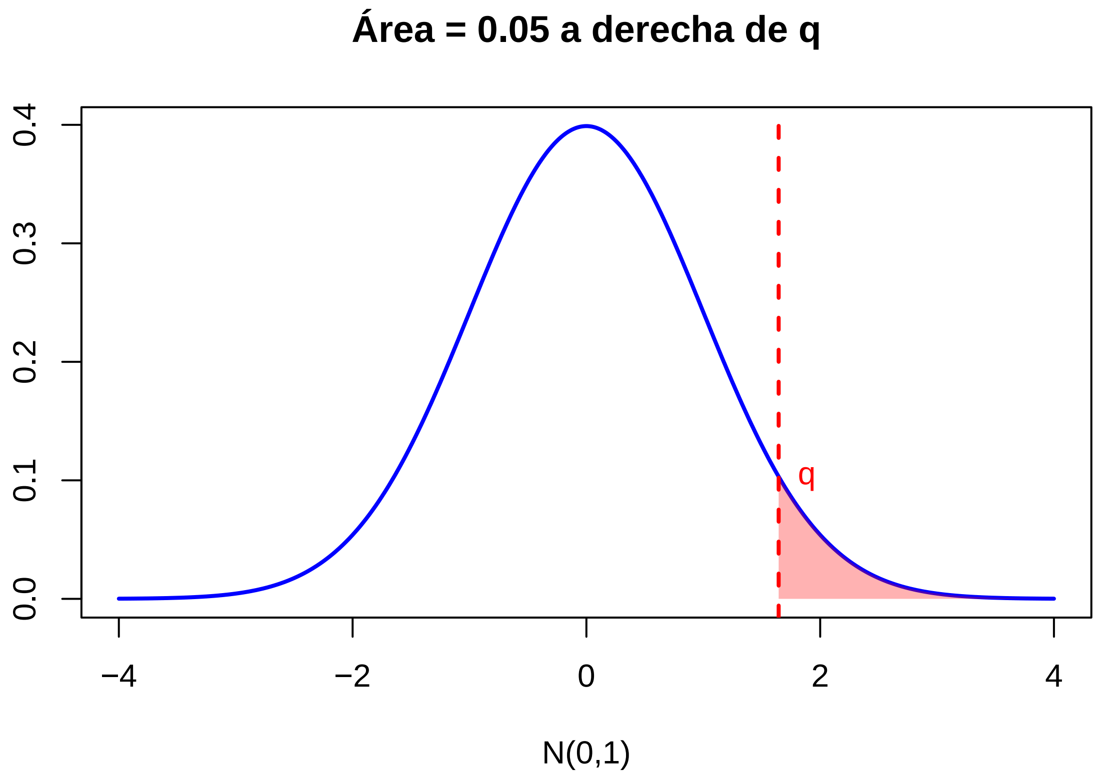
$$q = \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}}$$

Según la Hipótesis Alternativa, decidimos rechazar H_0 cuando:

$$T = \frac{\overline{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > q$$

$$\text{Queremos } q / P(Z > q) = \alpha = 0.05$$

```r
alpha <- 0.05
q <- qnorm(1-alpha, mean = 0, sd = 1)
```



Entonces, q es un cuantil tal que me deja área $\alpha = 0.05$ a derecha o área 1 - $\alpha = 0.95$ a izquierda .

$$\text{Por lo tanto } q = Z_\alpha = Z_{0.05}$$

Nuestra Región de Rechazo quedaría

$$R = \{T > Z_{0.05}\}$$

Por la tabla de una Normal Estándar, podemos ver que

$$q = Z_{0.05} = 1.64$$

Como resultado, la Región de Rechazo para este test es:

$$R = \{T > 1.64\}$$

Ejercicio 4

(a)

Para utilizar el test construido, el primer paso es calcular el promedio de los valores de la muestra "datos nueva versión". Una vez calculado, evaluamos nuestro estadístico observado. Si este pertenece en la Región de Rechazo, rechazamos H_0. En el caso de no pertenecer a la región, no confirmamos que H_0 sea verdadera sino que no tenemos la suficiente evidencia para rechazarla.

Como vimos antes:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = 42.99$$

Ahora, buscamos al estadístico observado de esta muestra.

$$T_{obs} = \frac{\overline{X_{obs}} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}}$$

$$T_{obs} = \frac{42.99 - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} = 1.97$$

Mi estadístico observado es $T_{obs} = 1.97$

Como podemos ver, el estadístico observado pertenece a la región de rechazo. Tenemos suficiente evidencia para rechazar H_0 porque $1.97 > 1.64$

Con esta evidencia rechazamos la actualización ya que aumenta el "play-delay", es decir, la esperanza del "play-delay" con la versión nueva es mayor a la actual, y es por eso que enviamos el código a revisión.

(b)

α=0.01

$$P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = 0.01$$

La Región de Rechazo con $\alpha = 0.01$ será:

$$R = \{T > Z_\alpha\} = \{T > Z_{0.01}\} = \{T > 2.33\}$$

El cuantil $Z_{0.01}$ deja menos área a la derecha que el cuantil $Z_{0.05}$. Esto implica que el primero está gráficamente a derecha del segundo ($Z_{0.05} < Z_{0.01}$).

α=0.1

$$P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = 0.1$$

La Región de Rechazo con $\alpha = 0.1$ será:

$$R = \{T > Z_\alpha\} = \{T > Z_{0.1}\} = \{T > 1.28\}$$

El cuantil $Z_{0.1}$ deja más área a la derecha que el cuantil $Z_{0.05}$. Esto implica que el primero está gráficamente a izquierda del segundo ($Z_{0.1} < Z_{0.05}$).

El α desplaza el punto de corte para la Región de Rechazo. A mayor α, menor es el punto de corte del cual arranca la Región de Rechazo. Aplicado a este test, a mayor α, mando más seguido actualizaciones a auditar, ya que el estadístico observado puede ser menor para rechazar H_0 y decir que el "play-delay" de la nueva versión es mayor al actual.

(C)

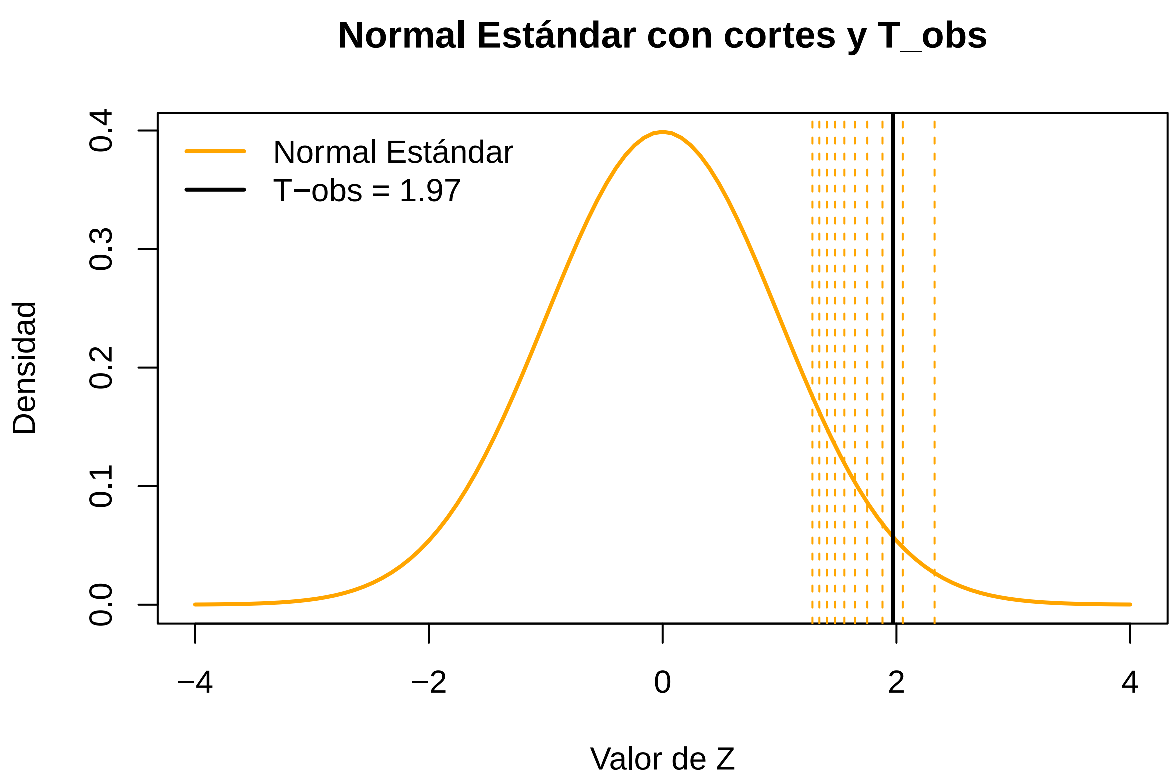
Para cada alfa, calculamos el Z critico: el punto que marca el comienzo de la región de rechazo.

$$R = \{T > Z_{\text{crit}}\}$$

Si el **T observado (1.97)** es mayor al Z critico para un alfa dado, entonces tendremos evidencia suficiente a nivel alfa para rechazar H_0.

```
##    alpha z_crit      decision
## 1   0.01  2.326 No Rechazo H0
## 2   0.02  2.054 No Rechazo H0
## 3   0.03  1.881    Rechazo H0
## 4   0.04  1.751    Rechazo H0
## 5   0.05  1.645    Rechazo H0
## 6   0.06  1.555    Rechazo H0
## 7   0.07  1.476    Rechazo H0
## 8   0.08  1.405    Rechazo H0
## 9   0.09  1.341    Rechazo H0
## 10  0.10  1.282    Rechazo H0
```

Se puede ver que para un α **igual o mayor a 0.3** ya puedo rechazar H_0. Es útil ver estos resultados de forma grafica:



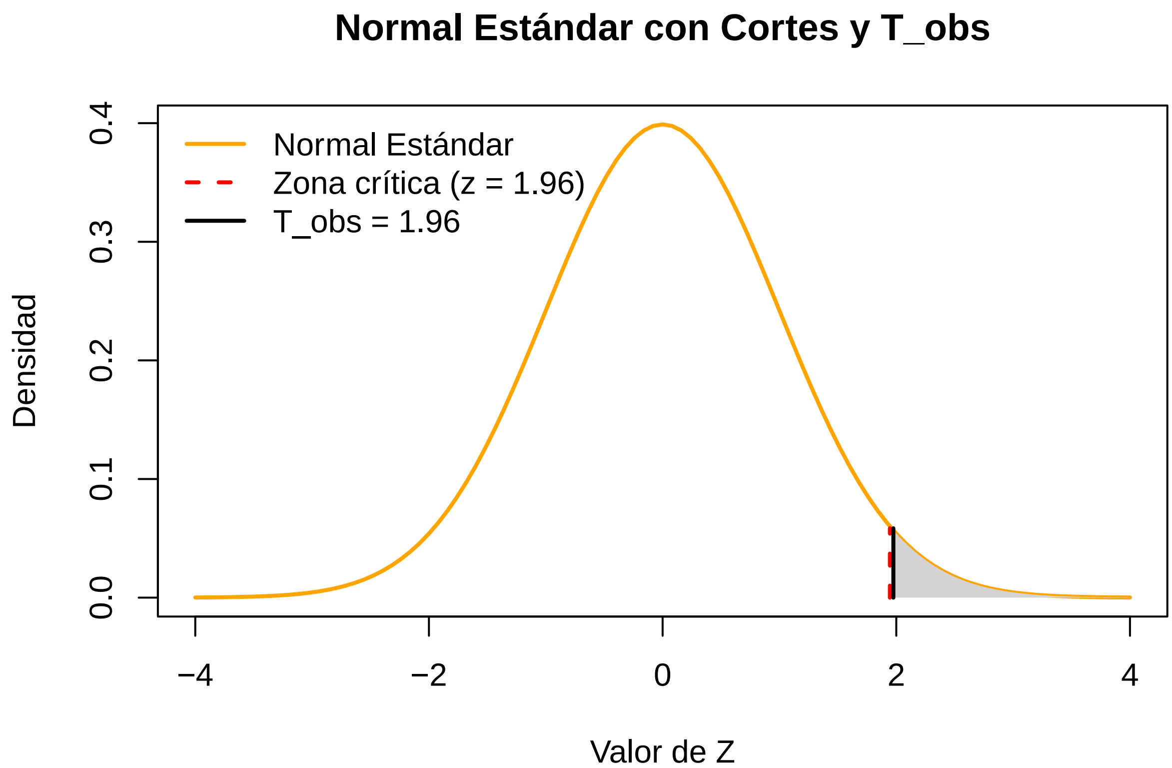
Estos resultados tienen sentido: cuánto más chico es el nivel de significancia α más difícil es rechazar H_0. Esto se puede apreciar en el grafico: los “Z criticos” de los niveles de significancia más chicos (0.01 y 0.02) son las lineas punteadas a la derecha del T-observado. Esto quiere decir que el valor que observamos no es "tan extremo" cómo para darnos suficiente evidencia que nos permita rechazar H_0 en niveles de significancia 0.01 o 0.02.

(D)

Ahora queremos encontrar el valor minimo de α para el cuál podriamos rechazar H_0 con los datos observados. Del inciso anterior, sabemos que éste valor minimo tiene que estar entre $\alpha = 0.02$ y $\alpha = 0.03$. Vamos a armar un for-loop que vaya probando todos los numeros decimales entre 0.02 y 0.03 con 3 digitos decimales y mostrar los resultados en una tabla:

```
##    alpha z_crit      decision
## 1  0.020  2.054 No Rechazo H0
## 2  0.021  2.034 No Rechazo H0
## 3  0.022  2.014 No Rechazo H0
## 4  0.023  1.995 No Rechazo H0
## 5  0.024  1.977 No Rechazo H0
## 6  0.025  1.960    Rechazo H0
## 7  0.026  1.943    Rechazo H0
## 8  0.027  1.927    Rechazo H0
## 9  0.028  1.911    Rechazo H0
## 10 0.029  1.896    Rechazo H0
## 11 0.030  1.881    Rechazo H0
```

Vemos que el valor minimo de α para el cuál podemos rechazar H_0 es **0.025**. Esto tiene sentido sí vemos que el "Z Critico" para éste nivel de significancia es igual a nuestro T-observado: **1.96**. Esto no podria ser de otra forma: el nivel minimo de α para el cuál puedo rechazar H_0 tiene que ser igual al T-observado ya que sí es más grande no podriamos rechazar H_0, y sí fuera más chico no seria el valor minimo.


Normal Estándar con Cortes y T_obs
Normal Estándar
Zona crítica (z = 1.96)
T_obs = 1.96
Densidad
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
Valor de Z