

# Cerdeira\_Diiuorio\_TP4

2025-05-28

## Ejercicio 1

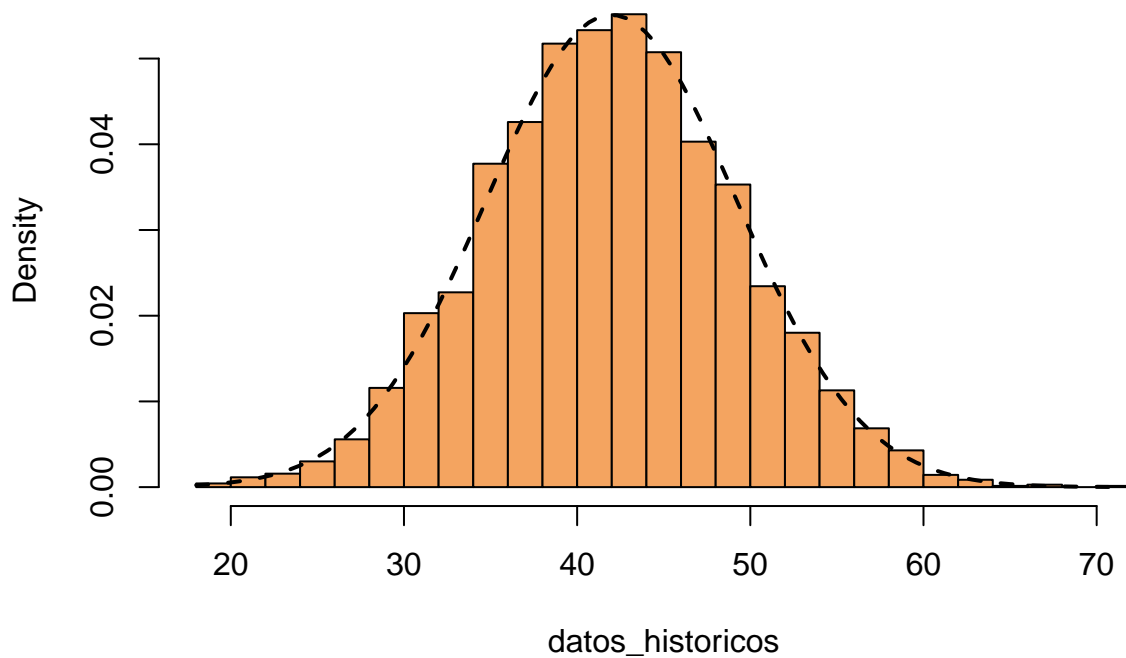
(A)

La **media muestral** de los datos historicos es **41.98**.

La **varianza muestral** de los datos historicos es **52.43**.

(B)

### Histograma de densidad de datos historicos



Los datos parecen distribuirse de forma normal.

## Ejercicio 2

Primero definimos:

- $\mu_0$  = media del “play-delay” de la versión anterior = 41.9847
- $\sigma_0^2$  = varianza del “play-delay” de la versión anterior = 52.4325

Ahora definimos:

$X_i$  = El “play-delay” del i-ésimo usuario evaluado con la nueva versión.  $1 \leq i \leq 200$

Y contamos con la siguiente distribución de nuestra muestra:

$$X_1, \dots, X_{200} \sim \mathcal{N}(\mu, 52.43) \text{ iid}$$

Donde:

$$\mu = \text{media del "play-delay"}$$

Para estimar  $\mu$  vamos a calcular la **media muestral** de la muestra con los 200 nuevos usuarios.

La estimación de  $\mu$  es:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 42.99$$

### Ejercicio 3

(A)

Proponemos las siguientes Hipótesis Nula e Hipótesis Alternativa

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Es decir,

$$H_0 : \mu \leq 41.98 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 41.98$$

Para simplificar el problema, suponemos:

$$H_0 : \mu = 41.98$$

Esto se puede hacer ya que el caso límite de  $H_0$  es cuando  $\mu = 41.9847$ . Por lo tanto, si puedo rechazar esa  $H_0$  entonces puedo rechazar también todos los valores de

$$\mu \leq 41.98$$

Por ende, las hipótesis quedarían así:

$$H_0 : \mu = 41.98 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 41.98$$

#### Estadístico:

Para hallar el estadístico partimos del estimador de  $\mu$ :

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

Asumimos distribución de  $\bar{X}$  bajo  $H_0$ :

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(41.98, \frac{52.43}{200}) \quad \text{bajo } H_0$$

Lo estandarizamos:

$$T = \frac{\bar{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{bajo } H_0$$

T es nuestro estadístico. Nos sirve porque es una función de la muestra aleatoria y tiene distribución conocida bajo  $H_0$ .

(B)

$$\alpha = 0.05$$

Vamos a rechazar  $H_0$  cuando  $\bar{X} > C$  donde  $C$  es un número tal que:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = P(\bar{X} > C | H_0 \text{ es V}) \\ \implies &\text{Queremos } C \text{ tal que } P(\bar{X} > C | H_0 \text{ es V}) = 0.05\end{aligned}$$

$$P(\bar{X} > C | H_0 \text{ es V}) = P\left(\frac{\bar{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} | H_0 \text{ es V} \right)$$

$$\text{como } \frac{\bar{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ bajo } H_0$$

Entonces lo llamamos  $Z$  ya que

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Por lo tanto,

$$P\left(\frac{\bar{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} | H_0 \text{ es V} \right) = P(Z > q)$$

donde

$$q = \frac{C - 41.98}{\sqrt{52.43/200}}$$

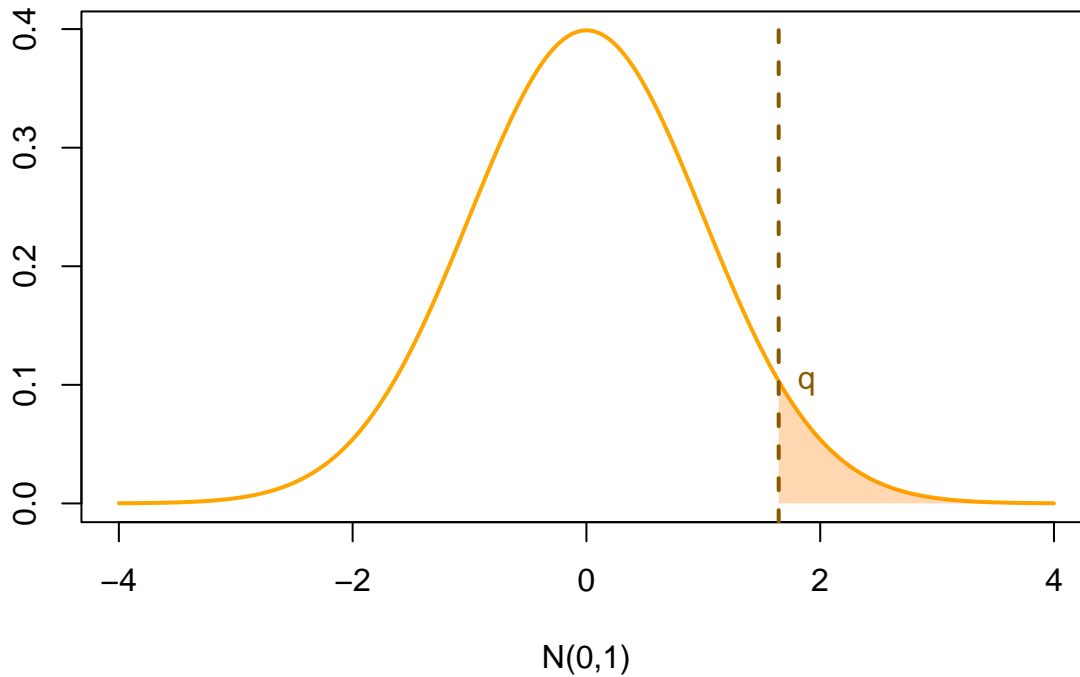
Según la Hipótesis Alternativa, decidimos rechazar  $H_0$  cuando:

$$T = \frac{\bar{X} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} > q$$

$$\text{Queremos } q/P(Z > q) = \alpha = 0.05$$

```
alpha <- 0.05
q <- qnorm(1-alpha, mean = 0, sd = 1)
```

**Área = 0.05 a derecha de q**



Entonces,  $q$  es un cuantil tal que me deja área  $\alpha = 0.05$  a derecha o área  $1 - \alpha = 0.95$  a izquierda .

Por lo tanto  $q = Z_{\alpha} = Z_{0.05}$

Nuestra Región de Rechazo quedaría

$$R = \{T > Z_{0.05}\}$$

Por la tabla de una Normal Estándar, podemos ver que

$$q = Z_{0.05} = 1.64$$

Como resultado, la Región de Rechazo para este test es:

$$R = \{T > 1.64\}$$

## Ejercicio 4

(A)

Para utilizar el test construido, el primer paso es calcular el promedio de los valores de la muestra “datos nueva versión”. Una vez calculado, evaluamos nuestro estadístico observado. Si este pertenece en la Región de Rechazo, rechazamos  $H_0$ . En el caso de no pertenecer a la región, no confirmamos que  $H_0$  sea verdadera sino que no tenemos la suficiente evidencia para rechazarla.

Como vimos antes:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 42.99$$

Ahora, busquemos al estadístico observado de esta muestra.

$$T_{obs} = \frac{\bar{X}_{obs} - 41.98}{\sqrt{52.43/200}}$$

$$T_{obs} = \frac{42.99 - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} = 1.97$$

Mi estadístico observado es  $T_{obs} = 1.97$

Como podemos ver, el estadístico observado pertenece a la región de rechazo. Tenemos suficiente evidencia para rechazar  $H_0$  porque  $1.97 > 1.64$

Con esta evidencia rechazamos la actualización ya que aumenta el “play-delay”, es decir, la esperanza del “play-delay” con la versión nueva es mayor a la actual, y es por eso que enviamos el código a revisión.

**(B)**

$\alpha=0.01$

$$P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = 0.01$$

La Región de Rechazo con  $\alpha = 0.01$  será:

$$R = \{T > Z_\alpha\} = \{T > Z_{0.01}\} = \{T > 2.33\}$$

El cuantil  $Z_{0.01}$  deja menos área a la derecha que el cuantil  $Z_{0.05}$ . Esto implica que el primero está gráficamente a derecha del segundo ( $Z_{0.05} < Z_{0.01}$ ).

$\alpha=0.1$

$$P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es V}) = 0.1$$

La Región de Rechazo con  $\alpha = 0.1$  será:

$$R = \{T > Z_\alpha\} = \{T > Z_{0.1}\} = \{T > 1.28\}$$

El cuantil  $Z_{0.1}$  deja más área a la derecha que el cuantil  $Z_{0.05}$ . Esto implica que el primero está gráficamente a izquierda del segundo ( $Z_{0.1} < Z_{0.05}$ ).

El  $\alpha$  desplaza el punto de corte para la Región de Rechazo. A mayor  $\alpha$ , menor es el punto de corte del cual arranca la Región de Rechazo. Aplicado a este test, a mayor  $\alpha$ , mando más seguido actualizaciones a auditar, ya que el estadístico observado puede ser menor para rechazar  $H_0$  y decir que el “play-delay” de la nueva versión es mayor al actual.

**(C)**

Para cada  $\alpha$ , calculamos el  $Z_\alpha$ : el punto que marca el comienzo de la región de rechazo.

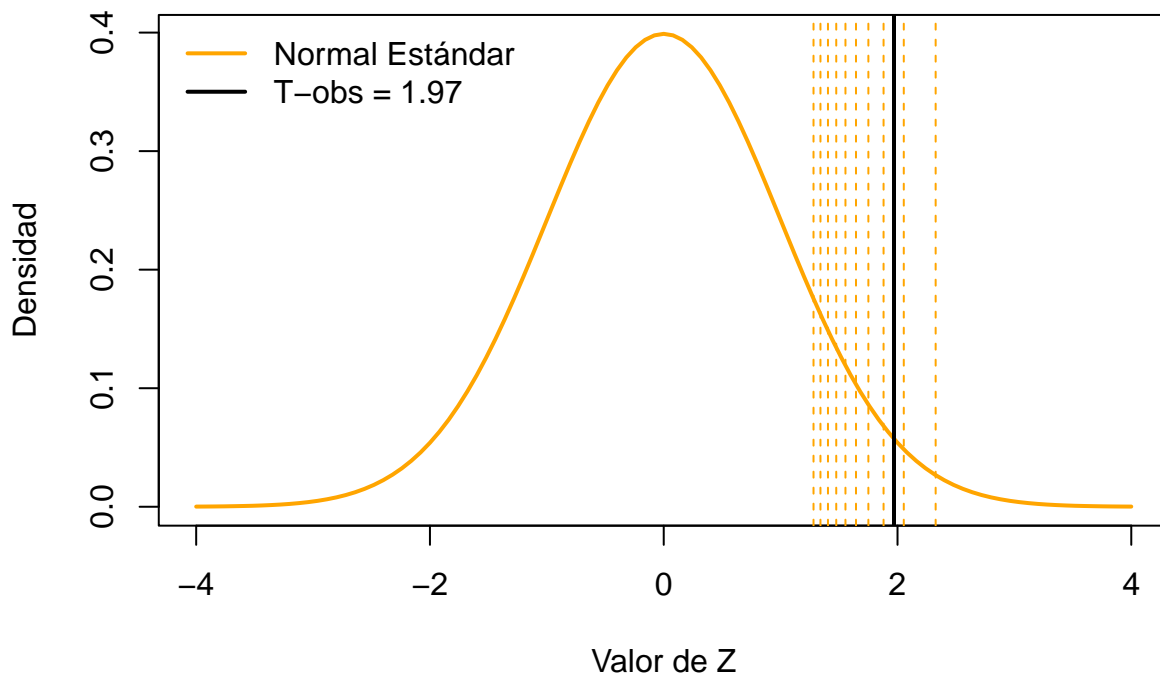
$$R = \{T > Z_\alpha\}$$

Si el **T observado (1.97)** es mayor al  $Z_\alpha$  para un  $\alpha$  dado, entonces tendremos evidencia suficiente a nivel  $\alpha$  para rechazar  $H_0$ .

##	alpha	z_alpha	decision
## 1	0.01	2.326	No Rechazo $H_0$
## 2	0.02	2.054	No Rechazo $H_0$
## 3	0.03	1.881	Rechazo $H_0$
## 4	0.04	1.751	Rechazo $H_0$
## 5	0.05	1.645	Rechazo $H_0$
## 6	0.06	1.555	Rechazo $H_0$
## 7	0.07	1.476	Rechazo $H_0$
## 8	0.08	1.405	Rechazo $H_0$
## 9	0.09	1.341	Rechazo $H_0$
## 10	0.10	1.282	Rechazo $H_0$

Se puede ver que para un  $\alpha$  **igual o mayor a 0.03** ya puedo rechazar  $H_0$ . Es útil ver estos resultados de forma grafica:

### Normal Estándar con cortes y T\_obs



Estos resultados tienen sentido: cuánto más chico es el nivel de significancia  $\alpha$  más difícil es rechazar  $H_0$ . Esto se puede apreciar en el gráfico: los “Z críticos” ( $Z_\alpha$ ) de los niveles de significancia más chicos (0.01 y 0.02) son las líneas punteadas a la derecha del T-observado. Esto quiere decir que el valor que observamos no es “tan extremo” cómo para darnos suficiente evidencia que nos permita rechazar  $H_0$  en niveles de significancia 0.01 o 0.02.

#### (D)

Ahora queremos encontrar el valor mínimo de  $\alpha$  para el cuál podríamos rechazar  $H_0$  con los datos observados. Del inciso anterior, sabemos que éste valor mínimo tiene que estar entre  $\alpha = 0.02$  y  $\alpha = 0.03$ . Vamos a armar un for-loop que vaya probando todos los numeros decimales entre 0.02 y 0.03 con 3 digitos decimales y mostrar los resultados en una tabla:

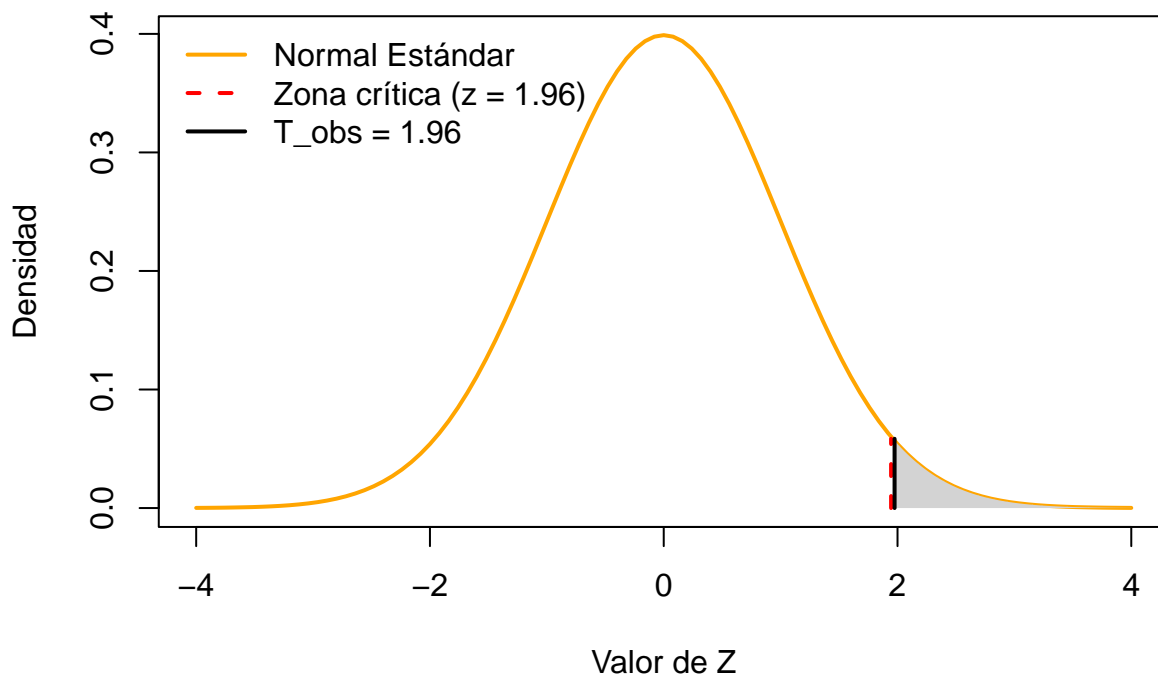
##	alpha	z_alpha	decision
## 1	0.020	2.054	No Rechazo $H_0$
## 2	0.021	2.034	No Rechazo $H_0$

## 3	0.022	2.014	No Rechazo $H_0$
## 4	0.023	1.995	No Rechazo $H_0$
## 5	0.024	1.977	No Rechazo $H_0$
## 6	0.025	1.960	Rechazo $H_0$
## 7	0.026	1.943	Rechazo $H_0$
## 8	0.027	1.927	Rechazo $H_0$
## 9	0.028	1.911	Rechazo $H_0$
## 10	0.029	1.896	Rechazo $H_0$
## 11	0.030	1.881	Rechazo $H_0$

Vemos que el valor mínimo de  $\alpha$  para el cuál podemos rechazar  $H_0$  es **0.025**. Esto tiene sentido si vemos que el “Z Crítico” para éste nivel de significancia ( $Z_{0.025}$ ) es igual a nuestro T-observado: **1.96**. Esto no podría ser de otra forma: el nivel mínimo de  $\alpha$  para el cuál puedo rechazar  $H_0$  tiene que ser igual al T-observado ya que si fuese más grande no podríamos rechazar  $H_0$ , y si fuese más chico no sería el valor mínimo.

0.025 será lo que mida el área a la derecha del T-observado (área sombreada en el gráfico):

### Normal Estándar con Cortes y T\_obs



Es muy importante notar que el área sombreada es el p-valor. Esto tiene sentido si recordamos que el p-valor es la “probabilidad de observar valores iguales o más extremos a lo observados (en dirección a  $H_1$ ), asumiendo que  $H_0$  es verdadera”. Gráficamente, el p-valor es el área a derecha del T-obs (en éste caso donde  $H_1 : \mu > \mu_0$ ), en otros casos podría ser el área a la izquierda, o el área en ambos extremos).

Entonces, podemos ver que existe otra manera de pensar al p-valor: “el p-valor es el nivel de significancia del  $\alpha$  mínimo, para el cual puedo rechazar  $H_0$  con los datos observados”.

## Ejercicio 5

(A)

En este ejercicio vamos a **simular** una muestra de tamaño  $n = 200$  asumiendo que la hipótesis nula  $H_0 : \mu = \mu_0$  es verdadera, es decir, que la nueva versión **no** modificó la media de Play-Delay con respecto a los datos históricos.

Los datos de nuestra muestra tendrán la siguiente distribución:

$$X_1, \dots, X_{200} \sim N(41.98, 52.48)$$

Simulamos la muestra en R:

```
set.seed(1234)
muestra_sim <- rnorm(200, mean=media_muestral, sd= sd0)
```

Calculamos la media muestral:

```
xbar_sim = mean(muestra_sim)
print(xbar_sim)
```

```
## [1] 41.56182
```

$$\bar{X} = 41.56$$

Calculamos el T-Observado:

```
Tobs_sim <- (xbar_sim - media_muestral) / (sd0/sqrt(200))
print(Tobs_sim)
```

```
## [1] -0.8168396
```

$$T = \frac{41.56 - 41.98}{\sqrt{52.43/200}} = -0.81$$

En el punto 3.b vimos que la región de rechazo para éste test con un nivel  $\alpha = 0.05$  es:

$$R = \{T > 1.64\}$$

Entonces, cómo el T-observado (**-0.81**) es menor que 1.64, **NO tenemos evidencia suficiente para rechazar  $H_0$**  con los datos observados.

Esta es la decisión correcta ya que estamos asumiendo que  $H_0$  es verdadera. Si, por casualidad, el T-Observado hubiera sido mayor que 1.64, habríamos cometido un **Error de Tipo 1** al rechazar  $H_0$ .

## (B)

Ahora vamos a repetir el procedimiento anterior **10000 veces**. Vamos a calcular la proporción de veces que no rechazamos  $H_0$  y la proporción de veces que sí lo rechazamos (proporción de veces que cometo un Error de Tipo 1).

Como el test que estamos usando tiene un nivel  $\alpha = 0.05$ , esperamos equivocarnos (rechazar  $H_0$ ) sólo el **5%** de las veces y acertar el **95%** de las veces.

Armamos la simulación con R e imprimimos los resultados:

```
## De 10000 simulaciones:
##   • Porcentaje de veces que RECHAZO H0: 4.74 %
##   • Porcentaje de veces que NO RECHAZO H0: 95.26 %
```

Vemos que los resultados que obtuvimos son lo que esperábamos: nos equivocamos casi un 5% por ciento de las veces y acertamos el 95% de las veces.



(C)

El nivel de significancia  $\alpha$  es la probabilidad de cometer un Error de Tipo 1. Es decir,  $\alpha$  se define como:

$$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ Verdadera})$$

Al construir un test de hipótesis, uno de los pasos fundamentales es establecer un nivel de significancia  $\alpha$ , que debe elegirse en función del contexto del problema. Este nivel representa la probabilidad máxima tolerada de cometer un Error de Tipo 1, es decir, de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando en realidad es verdadera. Un valor de  $\alpha$  más bajo implica que somos más conservadores: disminuye la chance de falsos positivos, pero al mismo tiempo aumenta la dificultad para rechazar  $H_0$ , lo cual puede reducir el poder del test.

En nuestro caso particular, estamos asumiendo que  $H_0$  es verdadera: es decir, la nueva versión de la plataforma no modificó el valor promedio del Play-Delay. Por lo tanto, si el test rechaza  $H_0$  bajo esta suposición, estaríamos cometiendo un Error de Tipo 1.

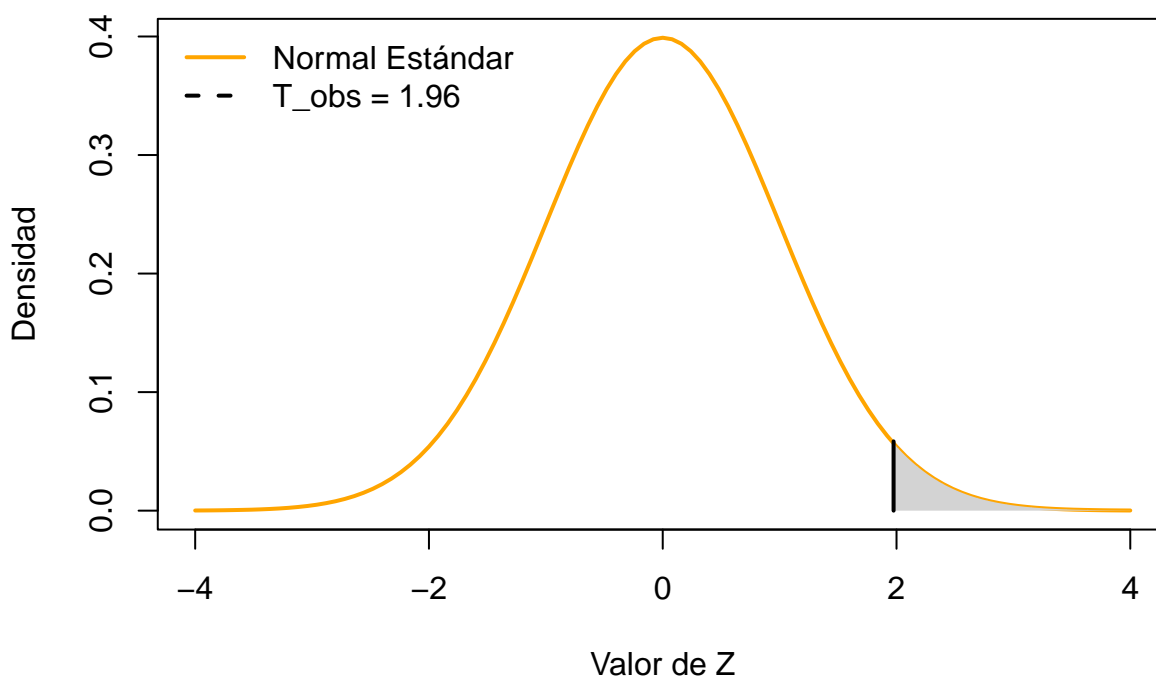
El test que usamos fue diseñado con un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ , lo cual significa que, en promedio, esperamos que el 5% de los tests conduzcan a un rechazo incorrecto de  $H_0$  cuando esta es cierta (que es lo que observamos en el punto anterior).

## Ejercicio 6

(A)

Si asumimos que  $H_0$  es verdadera, podemos calcular la probabilidad de observar un resultado cómo el observado o más extremo midiendo el área a la derecha del T-observado.

### Normal Estándar con Cortes y T\_obs



```
p_valor <- 1 - pnorm(1.96)
print(p_valor)
```

```
## [1] 0.0249979
```

$$p\text{-valor} = 0.25$$

(B)

Vemos que el p-valor que calculamos es el mismo que habíamos obtenido en el punto 4.d. Como explicamos en ése punto, esto se debe a que el p-valor es el mínimo nivel de significancia  $\alpha$  para el que rechazamos  $H_0$  con los datos observados.

### Ejercicio 7

(A)

$H_0$ : “Los datos provienen de una distribución normal”.

$H_1$ : “Los datos *no* provienen de una distribución normal”.

$$H_0 : X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \forall i : 1 \leq i \leq 200$$

$$vs.$$

$$H_1 : X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{para al menos un } i$$

(B)

```
print(shapiro.test(datos_historicos))

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_historicos
## W = 0.99958, p-value = 0.6934

print(shapiro.test(datos_nueva_version))

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_nueva_version
## W = 0.99587, p-value = 0.867
```

Como no se especifica el valor de  $\alpha$  para estos test, se asume que  $\alpha = 0.05$ .

- Si el p-valor  $< 0.05 \implies$  Rechazo  $H_0 \implies$  los datos no son normales.
- Si el p-valor  $\geq 0.05 \implies$  No rechazo  $H_0 \implies$  los datos son compatibles con una normal.

El p-valor en los datos históricos es 0.6934.<

El p-valor en los datos de la nueva versión es 0.867.

En ambos casos el p-valor  $\geq \alpha = 0.05$ . Por lo tanto no rechazamos  $H_0$  ni para los datos históricos ni para los datos de la nueva versión. Ambos datos son compatibles con una normal.