



UNIVERSITÀ DI TRENTO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

A.A. 2019/2020

Idrodinamica

Esercitazione Numerica III

Prof. Dr. Ing. Marco Tubino

Studente: Marco Falda Matricola: 213754

Indice

1	Obiettivi	4
2	Introduzione	5
2.1	I modelli idrodinamici unidimensionali: il modello di corrente	5
2.2	Le equazioni delle correnti di De Saint-Venant	5
2.2.1	Forma conservativa	7
2.2.2	Forma conservativa ridotta	8
2.2.3	Forma quasi lineare	8
2.2.4	Forma caratteristica	9
2.3	Onde di piena	11
2.3.1	PVI	11
2.4	Rottura di una diga	11
2.4.1	Modello 1D	12
2.4.2	PVI	12
3	Metodologia	13
3.1	Metodi numerici adottati	13
3.1.1	Metodi numerici conservativi	13
3.1.2	Metodo ai volumi finiti	13
3.1.3	Metodi centrati	15
3.1.4	Metodo dello splitting	15
3.2	Analisi dei metodi numerici adottati	16
3.2.1	Consistenza e convergenza	16
3.2.2	Stabilità	16
3.3	Condizioni iniziali e al contorno adottate	17
3.3.1	Condizioni al contorno di monte	18
4	Risultati	19
4.1	Crollo della diga	19
4.2	Onda di piena	20
5	Conclusioni	22

Elenco delle figure

1	Condizioni iniziali nel problema di rottura di una diga. Una parete separa due livelli costanti di acqua a riposo.	12
2	Volume di controllo	13
3	Dominio di Calcolo	14
4	Interpretazione geometrica della condizione CFL. La condizione CFL è soddisfatta nel caso di sinistra, è violata nel caso di destra	17
5	Condizione al contorno di monte	18
6	Andamento del tirante in seguito al crollo della diga	19
7	Andamento del tirante in seguito al passaggio di un'onda di piena	20
8	Cappio di piena	21
9	Cappio di piena	21

1 Obiettivi

Scopo dell'esercitazione è lo studio dei processi fluidodinamici di moto vario tramite l'analisi di due fenomeni caratterizzati da scale temporali diverse, in particolare la rottura di una diga (evento rapido) e il passaggio di un'onda di piena (evento lento). L'evoluzione temporale dei fenomeni viene analizzata tramite opportuni schemi numerici di risoluzione, implementati per mezzo di un codice in linguaggio Python. Si considera in partenza l'ipotesi di corrente non stazionaria, cioè con variazioni riscontrabili nel tempo.

2 Introduzione

2.1 I modelli idrodinamici unidimensionali: il modello di corrente

Nello studio dei fenomeni di moto vario, il livello di elaborazione del modello utilizzato dipende dal grado di complessità del fenomeno trattato, sulla base del quale i modelli idrodinamici vengono classificati in:

- Modelli tridimensionali (circolazioni oceaniche, laghi, turbolenza)
- Modelli bidimensionali (confluenze, biforcazioni, dinamiche di esondazione)
- Modelli unidimensionali (propagazione di onde di piena)
- Modelli zero-dimensionali (riempimento e svuotamento di serbatoi).

Nel caso in esame, il modello unidimensionale di corrente offre una descrizione sufficientemente accurata della variazione delle grandezze caratteristiche, ovvero velocità, quantità di moto ed energia, la quale avviene preferibilmente lungo un'unica direzione. Le componenti trasversali sono infatti trascurabili, dal momento che subiscono variazioni di diversi ordini di grandezza minori.

Nel modello di corrente si considera una sola coordinata spaziale oltre a quella temporale. Le variabili indipendenti saranno pertanto ridotte a due: x e t .

Si definiscono sezioni le intersezioni della corrente con i piani ortogonali alla direzione prevalente delle linee di corrente, in generale non rettilinee. La corrente è descritta per mezzo di quantità dinamiche (velocità, quantità di moto) ed energetiche (energia) localmente mediate sulla sezione.

Il modello di corrente può essere applicato qualora sussistano le seguenti ipotesi:

- la curvatura della linea d'asse è sufficientemente piccola ed i moti secondari sono modesti, tali da non contraddire l'esistenza di una direzione prevalente del moto
- le variazioni spazio-temporali della forma della sezione sono sufficientemente lente, tali da non contraddire il vincolo di quasi unidirezionalità del moto
- la velocità verticale è significativamente più piccola rispetto alla velocità orizzontale (condizione verificata nell'ipotesi di bassa profondità)
- la velocità trasversale è significativamente più piccola rispetto a quella nella direzione prevalente del moto
- la superficie libera si può assumere orizzontale nella direzione trasversale (si trascurano le variazioni trasversali del carico piezometrico)

2.2 Le equazioni delle correnti di De Saint-Venant

Le equazioni differenziali che governano il moto delle correnti a superficie libera sono il principio di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ed il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0 p}{\rho} = 0 \quad (2)$$

dove:

- Ω è la sezione dell'alveo [m^2]
- Q è la portata [$m^2 \cdot s^{-1}$]
- β è il coefficiente di ragguaglio della quantità di moto [adm]
- g è l'accelerazione gravitazionale [$m \cdot s^{-2}$]
- h è la quota della superficie libera [m]
- τ_0 è lo sforzo tangenziale al fondo [$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$]
- p è il perimetro bagnato [m]
- ρ è la densità dell'acqua [$kg \cdot m^{-3}$]

Ai fini dell'esercitazione, si assume che l'alveo sia cilindrico ($\beta = 1$):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_0 p}{\rho} = 0 \quad (3)$$

Il problema del moto si traduce quindi nella risoluzione di un sistema a due equazioni, (1) e (3), rispetto a tre incognite, $\Omega(x, t)$, $Q(x, t)$ e $\tau_0(x, t)$. Dal momento che il numero di incognite è sovrabbondante rispetto al numero di equazioni, è necessario introdurre una relazione di chiusura:

$$\tau_0 = \rho \frac{u^2}{C^2} \quad (4)$$

dove:

- u è la velocità mediata sulla profondità [$m \cdot s^{-1}$]
- C è detta conduttanza [adm]

e dove C^2 è uguale a:

$$C^2 = \frac{u^2}{gR_i j} \quad (5)$$

Detta anche formula di Chezy, dove:

- R_i è il raggio idraulico [m]
- j è un termine dissipativo che rappresenta la perdita di carico dovuta all'attrito [adm]

Sostituendo (5) in (4) ricaviamo un'espressione per la tensione al fondo:

$$\tau_0 = \rho g R_i j \quad (6)$$

Sostituendo τ_0 in (3) otteniamo finalmente:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \frac{\partial h}{\partial x} + g\Omega j = 0 \quad (7)$$

2.2.1 Forma conservativa

Assumendo ancora, ai fini dell'esercizio, che l'alveo sia rettangolare, le equazioni delle correnti possono essere anche espresse nella forma conservativa come:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} + g \frac{\Omega^2}{2B} \right) = g\Omega (i_F - j) \quad (9)$$

dove:

- i_F è la pendenza del fondo [adm]
- B è la larghezza dell'alveo [m]

Infatti, ricordando che:

$$h = Y + z_F \quad (10)$$

dove:

- Y è il tirante idraulico [m]
- z_F è la quota del fondo [m]

da cui:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (Y + z_F) = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - i_F \right) \quad (11)$$

possiamo riscrivere (7) come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - i_F \right) + g\Omega j &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \frac{\partial Y}{\partial x} &= g\Omega (i_F - j) \end{aligned} \quad (12)$$

Inoltre, essendo per ipotesi l'alveo rettangolare:

$$\Omega = BY \quad (13)$$

ed essendo B costante (alveo prismatico, $\Omega = \Omega(Y)$):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (BY) = B \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (14)$$

ne consegue che:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\Omega^2}{2B} \right) = g \frac{\Omega}{B} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = g\Omega \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (15)$$

Sostituendo (15) in (12) otteniamo (9), come volevasi dimostrare.

In notazione vettoriale, il sistema formato dalle equazioni (8) e (9) assume la seguente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S(U) \quad (16)$$

dove:

$$U = \begin{bmatrix} \Omega \\ Q \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\Omega} + g \frac{\Omega^2}{2B} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ g\Omega(i_F - j) \end{bmatrix}$$

dove U è il vettore delle incognite, $F(U)$ è il vettore dei flussi e $S(U)$ è il vettore delle sorgenti (Toro, 2009).

2.2.2 Forma conservativa ridotta

Trovandoci nelle condizioni di alveo cilindrico e rettangolare, possiamo semplificare il sistema (8), (9) dividendo entrambe le equazioni per la larghezza della superficie libera B , che è una costante. Otterremo perciò:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{Y} + g \frac{Y^2}{2} \right) = gY (i_F - j) \quad (18)$$

dove:

- q è la portata per unità di larghezza [$m^2 \cdot s^{-1}$]

In notazione vettoriale:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S(U) \quad (19)$$

dove:

$$U = \begin{vmatrix} Y \\ q \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} q \\ \frac{q^2}{Y} + g \frac{Y^2}{2} \end{vmatrix} \quad S = \begin{vmatrix} 0 \\ gY(i_F - j) \end{vmatrix}$$

2.2.3 Forma quasi lineare

Esplicitando la derivata rispetto ad x in (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{2q}{Y} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q^2}{Y^2} \frac{\partial Y}{\partial x} + gY \frac{\partial Y}{\partial x} \right) &= gY (i_F - j) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \left(gY - \frac{q^2}{Y^2} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{2q}{Y} \frac{\partial q}{\partial x} &= gY (i_F - j) \end{aligned} \quad (20)$$

In notazione vettoriale:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J_F(U) \frac{\partial U}{\partial x} = S(U) \quad (21)$$

dove:

$$J_F(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial Y} & \frac{\partial q}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{q^2}{Y} + g \frac{Y^2}{2} \right) & \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q^2}{Y} + g \frac{Y^2}{2} \right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{Y^2} + gY & \frac{2q}{Y} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Risultato che avremmo anche potuto ottenere applicando direttamente la regola della catena a (19):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = S(U) \quad (22)$$

Le equazioni (17) e (20) sono purtroppo equazioni differenziali non lineari (sono presenti infatti prodotti fra le incognite Y e q), ma fortunatamente quasi-lineari (sono lineari rispetto alle derivate di Y e q di ordine massimo (Salsa S. 2016)).

2.2.4 Forma caratteristica

Come abbiamo visto, in alcuni casi specifici le equazioni del flusso si riducono a sistemi di equazioni differenziali parziali del primo ordine quasi-lineari per due variabili indipendenti. Per tali sistemi può essere sviluppata una pressoché completa trattazione matematica, a patto che siano di natura iperbolica. Questa trattazione diventa particolarmente semplice quando il numero di funzioni ed equazioni è uguale a due (Courant & Friedrichs, 1977).

Sistemi di equazioni di questo tipo si presentano nella forma:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + J_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x} - S_i = 0 \quad (23)$$

dove i rappresenta l'indice non ripetuto e k rappresenta l'indice ripetuto.

Il problema più comune associato a tali sistemi è il seguente problema di valore iniziale (PVI): dati i valori della funzione sconosciuta al tempo $t = 0$ $U(x, 0)$, usare le equazioni per determinare l'evoluzione nel tempo della funzione $U(x, t)$ (Ben-Artzi & Falcovitz, 2003).

Al fine di conoscere il valore della funzione incognita nel punto (x, t) , possiamo provare a connettere il punto (x, t) con il punto $(x_0, 0)$ sull'asse x , portante il dato iniziale, mediante una curva $x = x(t)$ lungo la quale U sia costante. Una curva di questo tipo prende il nome di curva caratteristica. Se poi il procedimento si può ripetere per ogni punto (x, t) con $x \in D \subseteq \mathbb{R}, t > 0$, possiamo calcolare U in ogni punto ed il problema è risolto. Questo metodo è detto metodo delle caratteristiche (Salsa S. 2016).

L'idea è quella di assumere un atteggiamento lagrangiano. Si definisce innanzitutto la cosiddetta derivata materiale:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \quad (24)$$

dove:

- v è il vettore velocità del sistema di riferimento lagrangiano [$m \cdot s^{-1}$]

In una dimensione spaziale:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \quad (25)$$

dove:

- $\lambda = \frac{dx}{dt}$ rappresenta la velocità o celerità di propagazione di un fenomeno ondulatorio [$m \cdot s^{-1}$]

Ora, dal momento che moltiplicare per uno scalare ambo i membri di (23) non invalida l'uguaglianza, possiamo chiederci se esistano degli scalari l_i tali che:

$$l_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + J_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x} - S_i \right) = l_i \left(\frac{dU_i}{dt} - S_i \right) = 0 \quad (26)$$

In altre parole, possiamo chiederci se esistano degli scalari che ci permettano di trasformare un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali rispetto a due variabili indipendenti (x e t) in un sistema di equazioni differenziali ordinarie, a patto che ci si muova lungo una traiettoria caratteristica ad una velocità λ .

Sviluppando infatti la derivata materiale:

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial U_i}{\partial x} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U_i}{\partial x} \quad (27)$$

sostituendo in (26):

$$l_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + J_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x} - S_i \right) = l_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U_i}{\partial x} - S_i \right) \quad (28)$$

e semplificando:

$$l_i \left(J_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x} \right) = l_i \left(\lambda \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \quad (29)$$

otteniamo effettivamente un sistema di equazioni differenziali ordinarie rispetto alla sola variabile x (sempre che esista l_i).

Esplicitando le due equazioni:

$$l_1 \left(J_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x} + J_{12} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) = l_1 \left(\lambda \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \quad (30)$$

$$l_2 \left(J_{21} \frac{\partial U_1}{\partial x} + J_{22} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) = l_2 \left(\lambda \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \quad (31)$$

e sommando ambo i membri a destra e sinistra dell'uguale di (30) e (31):

$$l_1 \left(J_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x} + J_{12} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + l_2 \left(J_{21} \frac{\partial U_1}{\partial x} + J_{22} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) = \lambda \left(l_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + l_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \quad (32)$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

in forma compatta:

$$l \cdot (J \cdot U) = \lambda (l \cdot U) \quad (34)$$

Dal momento che uno scalare trasposto è uguale a se stesso:

$$l \cdot (J \cdot U) = (l \cdot J \cdot U)^T = U \cdot J^T \cdot l \quad (35)$$

$$\lambda (l \cdot U) = \lambda (l \cdot U)^T = \lambda (U \cdot l) \quad (36)$$

la (33) può essere riscritta come:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Semplificando ambo i membri per U perveniamo infine a:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

che è un problema agli autovalori. L'autovalore λ può essere individuato ponendo:

$$\det(J^T - \lambda I) = 0 \quad (39)$$

L'equazione caratteristica assume la forma:

$$J_{11}J_{22} - \lambda(J_{11} + J_{22}) + \lambda^2 - J_{21}J_{12} \quad (40)$$

equazione di secondo grado in λ , dove:

$$J_{11} = 0 \quad J_{12} = 1 \quad J_{21} = \frac{q^2}{Y^2} + gY \quad J_{22} = \frac{2q}{Y}$$

Sostituendo:

$$\lambda^2 - \frac{2q}{Y}\lambda - \left(gY - \frac{q^2}{Y^2} \right) = 0 \quad (41)$$

$$\pm \lambda = \frac{q}{Y} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{Y}\right)^2 + \left(gY - \frac{q^2}{Y^2}\right)} = \frac{q}{Y} \pm \sqrt{gY} = u \pm \sqrt{gY} \quad (42)$$

per qualsiasi alveo rettangolare cilindrico.

Lungo le traiettorie λ , dette curve caratteristiche, il sistema (23) si trasforma in un sistema alle derivate totali. Ponendo ad esempio $l_2 = 1$ nella seconda riga di (38):

$$J_{12}l_1 + J_{22} = \lambda \quad (43)$$

$$l_1 = \frac{\lambda - J_{22}}{J_{12}} = \frac{(u \pm \sqrt{gY}) - 2u}{1} = -u \pm \sqrt{gY} \quad (44)$$

e sostituendo i valori di l_1 e l_2 così trovati nel termine di destra dell'equazione (26) si ottiene:

$$\left(-u \pm \sqrt{gY}\right) \frac{dY}{dt} + \frac{dq}{dt} - gY (i_F - j) = 0 \quad (45)$$

2.3 Onde di piena

Le onde di piena fanno parte della categoria dei fenomeni lenti, agenti su scale spaziali e temporali molto ampie, caratterizzate nella loro trattazione matematica da un termine frizionale dominante e un termine inerziali poco influente.

2.3.1 PVI

Consideriamo ora il PVI costituito da un'equazione differenziale dalla forma (20) definita su di un dominio $D = [0, L] \times [0, t^{fin}]$ soggetta ad una condizione iniziale del tipo:

$$U(x, 0) = U^o(x) \quad x \in [0, L] \quad (46)$$

dove $U^o(x)$ rappresenta lo stato iniziale di tirante e portata su tutto il dominio di calcolo.

Siano inoltre note le seguenti condizioni al contorno:

$$U(0, t) = U_L(t) \quad t \in [0, t^{fin}] \quad (47)$$

$$U(L, t) = U_R(t) \quad t \in [0, t^{fin}] \quad (48)$$

dove:

- $U_L(t)$ rappresenta la condizione al contorno imposta all'estremità sinistra del dominio D
- $U_R(t)$ rappresenta la condizione al contorno imposta all'estremità destra del dominio D

La definizione del vettore delle incognite U agli estremi del dominio di integrazione per $t \geq 0$ assicura la possibilità di risolvere la (19) su tutto il dominio spaziale e per ciascun istante temporale $t \geq 0$.

2.4 Rottura di una diga

Le dighe sono serbatoi artificiali che immagazzinano grandi volumi di acqua confinata da elevazioni naturali del terreno, come un canyon o una valle, e pareti artificiali. Tuttavia, sebbene abbiano comportato numerosi benefici per la società, come fonti di acqua per il consumo umano e per l'irrigazione, generazione di energia idroelettrica e controllo di piene, lungo gli anni le dighe sono state anche al centro di numerosi eventi catastrofici. Questi eventi possono essere la conseguenza diretta del crollo improvviso delle pareti della diga. Tali crolli possono a loro volta indurre un flusso d'acqua che causa devastazione lungo il suo cammino nelle valli, con danni considerevoli alle proprietà e perdita di vite umane. I processi che portano al collasso di una diga sono vari e estremamente complessi. Come

parte dell'analisi del rischio per la protezione civile, devono essere prodotte mappe di inondazione. Queste sono attualmente basate sulla simulazione numerica delle onde di propagazione. Le equazioni su acqua bassa dipendenti dal tempo, a una o due dimensioni spaziali, sono normalmente accettate come modello matematico base per studiare i fenomeni di propagazione delle onde indotti da eventi di collasso di una diga (Toro, 2001).

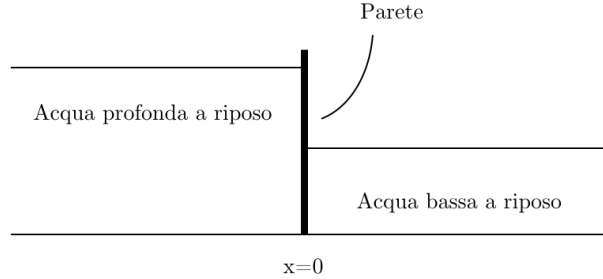


Figura 1: Condizioni iniziali nel problema di rottura di una diga. Una parete separa due livelli costanti di acqua a riposo.

2.4.1 Modello 1D

Si immagini un canale orizzontale di sezione rettangolare uniforme. Si supponga inoltre che il canale presenti due livelli costanti di pelo libero, entrambi a riposo, separati da un muro alla posizione $x = 0$ (Figura 1). Se la parete che separa i due livelli costanti collassa, due caratteristiche dominanti emergono dal processo nella forma di onde. Un'onda rivolta verso destra viaggia nella porzione poco profonda del fluido, aumentando la profondità *ex abrupto*. L'onda rivolta verso sinistra viaggia nella regione di acqua profonda e ha l'effetto di ridurre l'altezza del pelo libero. Se la parete collassa in un tempo sufficientemente piccolo, il modello ondulatorio che emerge è quasi quello di un sistema ondulatorio centrato con un'onda di rarefazione a sinistra ed un'onda di shock a destra; tali sistemi ondulatori possono essere approssimati dalle equazioni su acqua bassa (Toro, 2001).

2.4.2 PVI

Una generalizzazione per le equazioni su acqua bassa del problema della rottura di una diga è il cosiddetto problema di Riemann. Formalmente, il problema di Riemann è definito come il seguente problema ai valori iniziali (Toro, 2001):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (50)$$

dove U_L e U_R sono vettori costanti e rappresentano le condizioni iniziali al tempo $t = 0$, rispettivamente a sinistra e a destra della coordinata $x = 0$.

3 Metodologia

3.1 Metodi numerici adottati

3.1.1 Metodi numerici conservativi

Si consideri il sistema unidimensionale di leggi di conservazione (49). Questa è chiamata forma differenziale delle leggi di conservazione ed è valida soltanto per il caso in cui la soluzione è regolare su tutto il dominio. Nella presenza di discontinuità, dev'essere usata la formulazione integrale (Toro, 2001). Applichiamo ora il Teorema di Green (Pagani & Salsa, 2016)

$$\oint f(x, t)dx + g(x, t)dt = \iint \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} \right) dxdt \quad (51)$$

a (49), con $f(x, t) = -U(x, t)$ e $g(x, t) = F(x, t)$:

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dxdt = \oint F(x, t)dt - U(x, t)dx = 0 \quad (52)$$

dove l'integrale di linea è calcolato lungo il contorno del dominio in senso antiorario. La risoluzione del sistema omogeneo (49) si riassume quindi nella determinazione del valore che assume l'integrale di due funzioni vettoriali, $F(x, t)$ e $U(x, t)$, quando calcolato lungo una qualsiasi linea chiusa.

3.1.2 Metodo ai volumi finiti

Si consideri a questo proposito un generico volume di controllo V_n^i nel piano (x, t) di forma rettangolare (Figura 2), definito come:

$$V_i^n = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}] \quad (53)$$

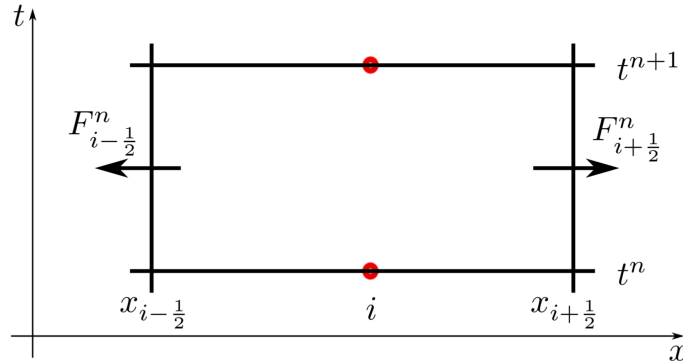


Figura 2: Volume di controllo

L'integrale di linea in (52) calcolato lungo il contorno di questo dominio diviene:

$$\begin{aligned} \oint F(x, t)dt - U(x, t)dx &= \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt + \int_{t^{n+1}}^{t^n} F(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx - \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx = 0 \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx = 0 \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

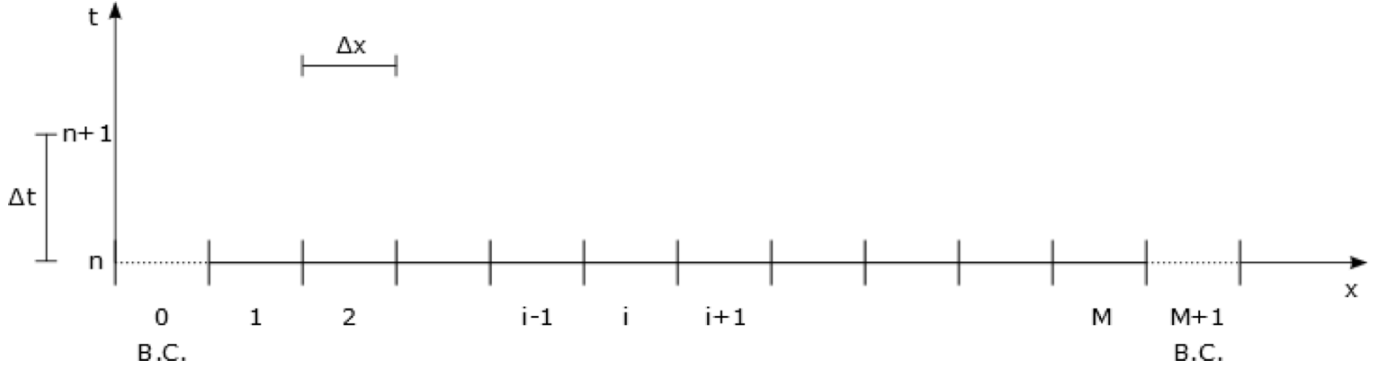


Figura 3: Dominio di Calcolo

ovvero:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx &= - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx \\ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx - \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Il dominio $x \in [0, L], t \in [0, \infty)$ è discretizzato in M volumi finiti V_n^i , di area $\Delta x \times \Delta t$ (Figura 3). Dividendo (55) per Δx :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx &= \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Moltiplicando e dividendo per Δt :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx &= \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (57)$$

Possiamo notare che i termini dell'uguaglianza rappresentano nientemeno che le approssimazioni di U ed F :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial}{\partial x} \int U dx \approx \frac{\Delta \int U dx}{\Delta x} \\ F &= \frac{\partial}{\partial t} \int F dt \approx \frac{\Delta \int F dt}{\Delta t} \end{aligned} \quad (58)$$

Considerato l' i -esimo volume di controllo rettangolare $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, la discretizzazione di (55) risulta:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (59)$$

dove:

$$\begin{aligned} U_i^n &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx & U_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx \\ F_{i+\frac{1}{2}}^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt & F_{i-\frac{1}{2}}^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \end{aligned}$$

3.1.3 Metodi centrati

L'idea alla base della costruzione di soluzioni approssimate per il PVI (49), (50) è quella della discretizzazione temporale. Si definisce una sequenza di tempi $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ con un passo fisso $\Delta t > 0$ tale che $t_n = n\Delta t$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. L'equazione discreta (59) è usata per determinare $U^{n+1}(x)$, a patto che sia già conosciuta $U^n(x)$. Consideriamo ora una sequenza di punti spaziali equamente distanti $x_i = i\Delta x$, con $-\infty \leq i \leq +\infty$. La funzione $U^n(x)$ può essere rappresentata dai valori che assume nei punti della griglia computazionale $U_i^n = U(x_i, t_n)$. Essendo tuttavia la funzione $U(x, t)$ sconosciuta per $x > x_i$, è necessario interpolare $U(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)$ e $U(x_i, t_n)$ al fine di stimare $U(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$. La maniera in cui i valori di $U^n(x_{i-\frac{1}{2}})$ e $U^n(x_i)$ sono interpolati per determinare $U^n(x_{i+\frac{1}{2}})$ definisce la classe di metodi numerici di risoluzione che possono essere costruiti:

- Metodo di Lax-Friedrichs

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \frac{1}{2} [F(U_{i-1}^n) + F(U_i^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (60)$$

- Metodo di Lax-Wendroff

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^{LW} &= F(U_{i+\frac{1}{2}}^{LW}) \\ U_{i+\frac{1}{2}}^{LW} &= \frac{1}{2} (U_i^n + U_{i+1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(U_i^n) - F(U_{i+1}^n)) \end{aligned} \quad (61)$$

- Metodo FORCE (First Order Centered)(Toro, 2001)

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{TO} = \frac{1}{2} [F_{i+\frac{1}{2}}^{LF} + F_{i+\frac{1}{2}}^{LW}] \quad (62)$$

3.1.4 Metodo dello splitting

Un approccio per costruire metodi numerici per risolvere sistemi non lineari di leggi di conservazione iperboliche come (16):

$$U_t + F(U)_x = S(U) \quad (63)$$

è quello di dividere (inglese *to split*) il problema non omogeneo, per un tempo Δt , nel problema iperbolico di avvezione pura:

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (64)$$

e nel problema sorgente:

$$\frac{d}{dt} U = S(U) \quad (65)$$

che è un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (Toro, 2009). Siamo interessati a costruire metodi numerici per il PVI:

$$\begin{cases} EDP : & U_t + F(U)_x = S(U); \quad 0 \leq x \leq L \\ CI : & U(x, t^n) = U^n \end{cases} \quad (66)$$

Vogliamo evolvere la soluzione dal suo valore iniziale U^n al tempo t^n di un passo temporale di dimensione Δt , sino ad un valore U^{n+1} al tempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Assumiamo che il dominio spaziale $[0, L]$ sia stato discretizzato in un numero M finito di celle (approccio ai volumi finiti, Figura 3). Lo schema di splitting è:

$$\begin{cases} EDP : & U_t + F(U)_x = 0 \\ CI : & U(x, t^n) = U^n \end{cases} \implies \tilde{U}^{n+1} \quad (67)$$

$$\begin{cases} EDO : & \frac{d}{dt}U = S(U) \\ CI : & U(x, t^n) = \tilde{U}^{n+1} \end{cases} \implies U^{n+1} \quad (68)$$

La soluzione iniziale per il problema avvertivo (67) è la soluzione iniziale per il problema completo (66). La soluzione di (67) dopo un tempo Δt si denota con \tilde{U}^{n+1} ed è usata come condizione iniziale per il secondo PVI. Il secondo PVI tiene conto della presenza del termine sorgente $S(U)$ ed è anch'esso risolto per un passo temporale completo Δt ; questa soluzione è poi considerata come un'approssimazione per la soluzione U^{n+1} del problema completo (66) ad un tempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Un modo per costruire metodi numerici per risolvere il PVI (68) è quello di integrare (65) tra t^n e t^{n+1} per ottenere

$$U(t^{n+1}) = U(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} S(U) dt \quad (69)$$

Dipendendo dalla maniera in cui l'integrale è calcolato, vari metodi numerici possono essere ottenuti. Un metodo di Runge-Kutta di secondo ordine a due passi (esplicito) è il seguente:

$$\begin{cases} K1 &= \Delta t S(t^n, U^n) \\ K2 &= \Delta t S(t^n + \Delta t, U^n + K1) \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}[K1 + K2] \end{cases} \quad (70)$$

3.2 Analisi dei metodi numerici adottati

3.2.1 Consistenza e convergenza

Per un dato schema numerico, l'errore di troncamento locale τ è l'errore che si genera pretendendo che la soluzione esatta verifichi lo schema numerico stesso. Per uno schema unidimensionale, τ è funzione del passo di discretizzazione temporale Δt e dell'intervallo di discretizzazione spaziale Δx . Lo schema numerico si dirà consistente se l'errore di troncamento $\tau(\Delta t, \Delta x)$ tende a zero quando Δt e Δx tendono a zero (Quarteroni, 2006).

3.2.2 Stabilità

Molto spesso nel contesto di problemi iperbolici si cercano soluzioni per tempi lunghi (cioè per $T \gg 1$). In questi casi è richiesta la forte stabilità dello schema, in quanto essa garantisce che la soluzione numerica sia limitata per ogni valore di T . In uno schema alle differenze finite come (59), il valore di U_i^{n+1} dipende, in generale, soltanto dai valori di $U_{i-\frac{1}{2}}^n$, U_i^n e $U_{i+\frac{1}{2}}^n$. Procedendo all'indietro si desume che la soluzione U_i^{n+1} dipenderà solo dai dati iniziali nei punti $x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i e $x_{i+\frac{1}{2}}$, vale a dire $x_i \pm$ un certo Δx . Fissato un tempo t , il luogo dei punti che giacciono sull'asse delle x che influenzano la soluzione al tempo $t + \Delta t$ è chiamato dominio di dipendenza numerico. Condizione necessaria affinché uno schema numerico esplicito della forma (59) sia stabile, è che $U_{i-\frac{1}{2}}^n$, U_i^n e $U_{i+\frac{1}{2}}^n$ non cadano mai al di fuori del dominio di dipendenza numerico di U_i^{n+1} (Figura 4). In altre parole, la velocità $\lambda = \frac{dx}{dt}$ con cui ci si sposta lungo una curva caratteristica da t a $t + \Delta t$ deve essere sempre minore della "velocità della griglia di calcolo" $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. In formule:

$$\frac{\lambda}{\Delta x / \Delta t} \leq 1 \quad (71)$$

dove:

- λ è il maggiore autovalore soluzione dell'equazione (39).

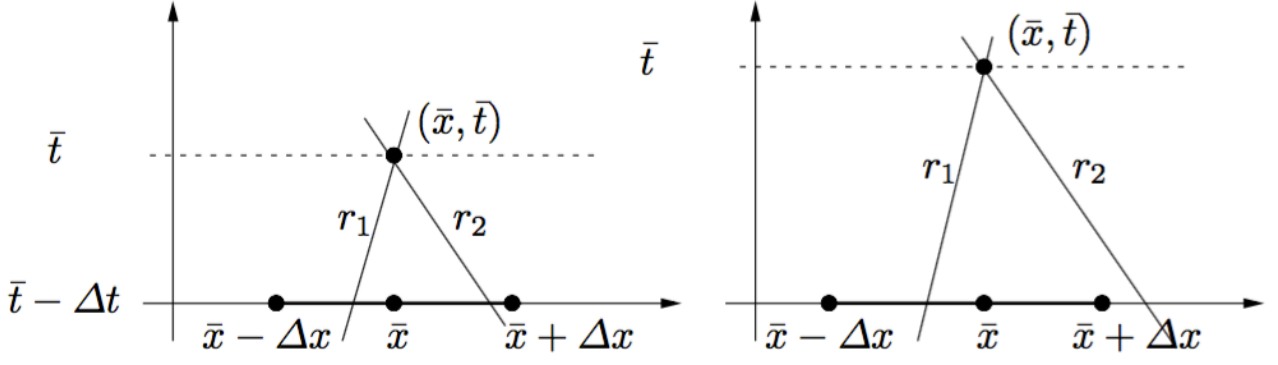


Figura 4: Interpretazione geometrica della condizione CFL. La condizione CFL è soddisfatta nel caso di sinistra, è violata nel caso di destra

Il rapporto $\frac{\lambda}{\Delta t / \Delta x}$ rappresenta una quantità adimensionale detta numero di CFL (da Courant, Friedrichs e Lewy) o numero di Courant. La relazione (71) si riassume quindi a:

$$CFL \leq 1 \quad (72)$$

dove:

- CFL è il numero di Courant [adm]

che viene detta condizione CFL. Nella pratica, il numero di CFL viene fissato a 0.9. Imporre $CFL = 0.9$ ci permette di determinare il passo temporale secondo la seguente relazione:

$$\Delta t = 0.9 \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (73)$$

che deriva direttamente dalla definizione di numero di CFL.

3.3 Condizioni iniziali e al contorno adottate

- Condizioni al contorno di valle

- Condizione trasmissiva

$$\begin{cases} Y(M+1, t) = Y(M, t) \\ q(M+1, t) = q(M, t) \end{cases} \quad (74)$$

- Condizione riflessiva

$$\begin{cases} Y(M+1, t) = Y(M, t) \\ q(M+1, t) = -q(M, t) \end{cases} \quad (75)$$

- Condizioni al contorno di monte

- Condizione trasmissiva

$$\begin{cases} Y(0, t) = Y(1, t) \\ q(0, t) = q(1, t) \end{cases} \quad (76)$$

- Condizione riflessiva

$$\begin{cases} Y(0, t) = Y(1, t) \\ q(0, t) = -q(1, t) \end{cases} \quad (77)$$

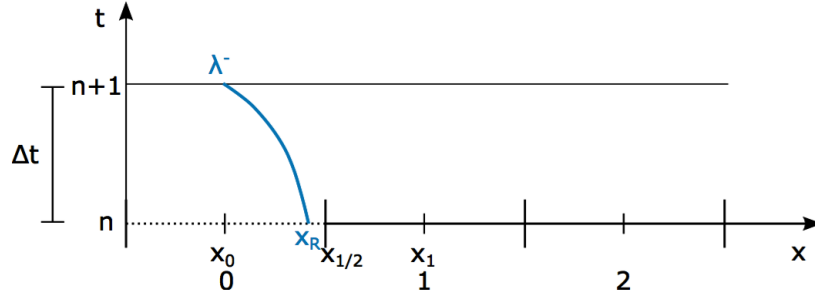


Figura 5: Condizione al contorno di monte

3.3.1 Condizioni al contorno di monte

Note le caratteristiche geometriche ed idrauliche del corso d'acqua, nel caso di corrente localmente veloce si impone:

$$Y(0, t) = Y(q_0(t)) \quad (78)$$

dove:

- $Y(q_0(t))$ è il tirante Y [m] calcolato a partire dalla portata attraverso l'equazione del moto uniforme
- $q_0(t)$ è l'idrogramma di piena [$m^2 \cdot s^{-1}$]

Nel caso di corrente localmente lenta, invece, $Y(0, t)$ è calcolato ricorrendo al sistema di equazioni di governo scritto in forma caratteristica (45) nella seguente maniera:

- $q(0, t^{n+1})$ è assegnato (idrogramma di piena)
- $Y(0, t^{n+1})$ viene imposto utilizzando l'equazione (45) associata a λ^- :

$$\left(-u - \sqrt{gY}\right) \frac{dY}{dt} + \frac{dq}{dt} - gY (i_F - j) = 0 \quad (79)$$

4 Risultati

La rappresentazione dei casi studio precedentemente analizzati è stata condotta tramite implementazione di un codice Python che acquisisca i dati di input (geometrie, condizioni iniziali e al contorno, ecc.), rielabori le equazioni indicate e fornisca in output le immagini riportate nel seguente paragrafo.

4.1 Crollo della diga

Graficamente la simulazione del crollo improvviso della diga ci riporta un'immagine in cui viene riprodotto il livello di tirante sviluppatosi all'interno del dominio spaziale in seguito alla rimozione della parete di contenimento. In seguito al fenomeno di crollo, la condizione riflessiva posta a valle del serbatoio, in cui il tirante è costante, viene meno. Dal momento di rottura della diga, l'acqua contenuta dalla diga si riversa nello spazio restante, con un aumento progressivo del livello di tirante verso valle e una diminuzione altrettanto progressiva verso monte. Osservando i singoli profili di corrente generatisi per ogni istante di simulazione, si nota che essi intersecano la quota di tirante critica, posta in corrispondenza della diga, il quale valore è:

$$Y_c = \frac{4}{9}Y_0 \quad (80)$$

con Y_0 livello di tirante a monte della diga. Questo ci indica come il moto della corrente passi da natura subcritica a supercritica sempre in corrispondenza della parete di diga, per qualsiasi onda generatasi nel tempo.

I profili di tirante del flusso d'acqua in propagazione si descrivono analiticamente, punto per punto, tramite le curve caratteristiche della corrente, le quali, all'interno di un piano orario $x - t$, descrivono un ventaglio di soluzioni che assumono valori negativi verso monte e positivi verso valle. Perciò i profili di corrente a valle della diga vengono descritti da curve caratteristiche positive, dette *onde di sommersione*, mentre quelle a monte da curve caratteristiche negative, dette *onde di rarefazione*. Di seguito si riportano le formule generali delle due onde, rispettivamente di sommersione e di rarefazione:

$$c^- = 2\sqrt{gY_0}$$

$$c^- = -\sqrt{gY_0}$$

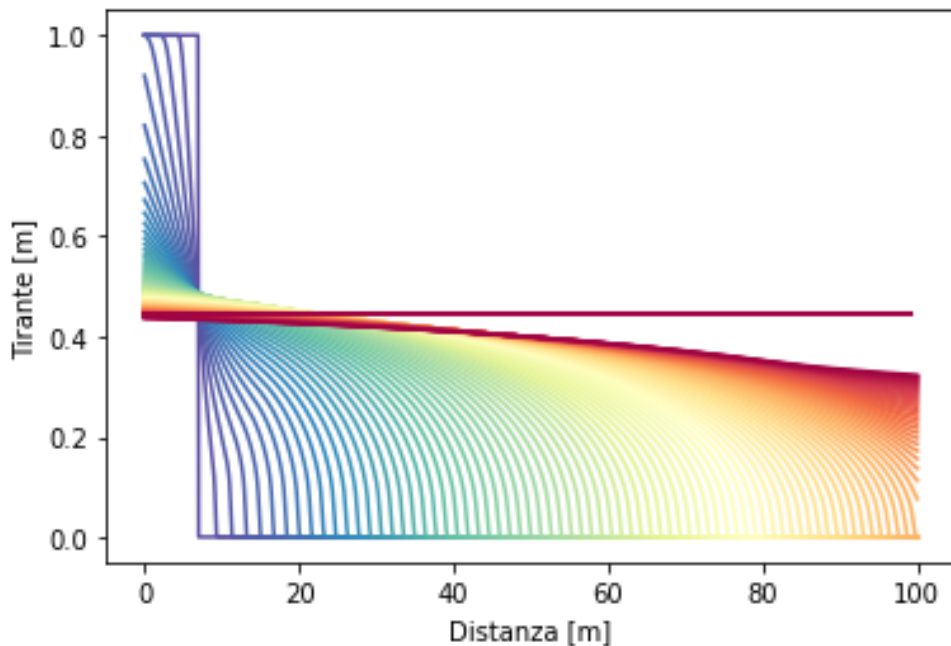


Figura 6: Andamento del tirante in seguito al crollo della diga

4.2 Onda di piena

Nel caso seguente il grafico riporta l'onda di piena simulata lungo l'ipotetica asta fluviale di lunghezza preimpostata. Il dominio spaziale risulta di diversi ordini di grandezza maggiore rispetto al caso del crollo della diga, per via delle grandi distanze di cui necessita il fenomeno per manifestarsi in maniera apprezzabile.

Dal grafico è possibile osservare la conformazione dell'onda di piena all'ultimo istante, con la presenza di un picco asimmetrico e un fronte molto più ripido della coda. Tale proprietà sono riscontrabili in un'onda già progredita nello spazio, e sono dovute al differente sviluppo temporale delle caratteristiche nel caso si tratti di onda positiva ($\frac{\partial Y}{\partial x} < 0$) o negativa ($\frac{\partial Y}{\partial x} > 0$): nel primo caso le traiettorie delle caratteristiche tendono a convergere, collocando punti con diversi tiranti e velocità sempre più vicini nello spazio, viceversa per le caratteristiche negative che tendono a divergere. Tuttavia, nel caso analizzato, la forma dell'onda perde progressivamente ripidità per via dell'effetto attenuatorio esercitato dall'attrito lungo il percorso, che riduce il picco e la pendenza dei tratti ascendente/discendente.

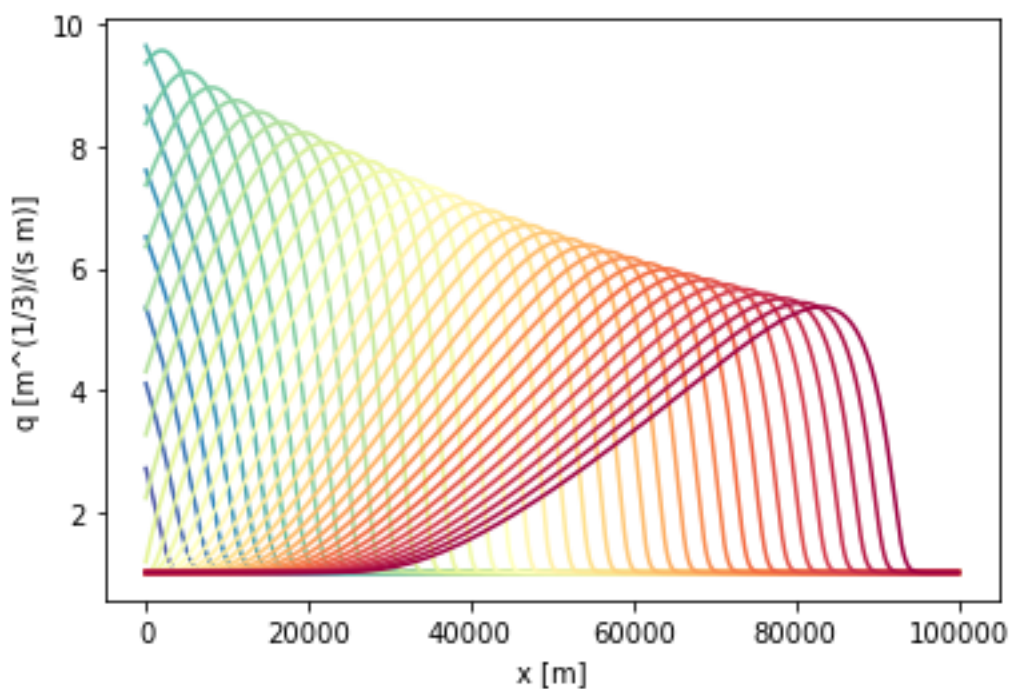


Figura 7: Andamento del tirante in seguito al passaggio di un'onda di piena

La variazione progressiva della portata al passaggio dell'onda, in virtù della natura non stazionaria del fenomeno, trova riscontro grafico nel cosiddetto *cappio di piena* (figura 9).

L'andamento della figura, se letta in senso antiorario, ci indica che la fase ascendente dell'onda di piena corrisponde ad un aumento della portata transitante, mentre la fase discendente si accompagna ad un aumento del tirante, in riferimento alla scala di moto uniforme (vedi fig.8). In particolare, l'andamento del valore delle proprietà della corrente è caratterizzato dai seguenti passaggi, descritti in ordine temporale:

1. punto di massimo locale della velocità, tangente alla retta $U = cost$ ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$)
2. punto di massimo della portata ($\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$)
3. punto di colmo della piena ($\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$)
4. punto di massimo locale della profondità, tangente alla scala di deflusso ($\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$)

Dalla forma del cappio di piena, in particolare dalla sua eccentricità che regola la distanza dei punti caratteristici dalla scala di deflusso dell'alveo, si può dedurre se la figura si riferisca ad un'onda di piena più o meno accentuata. Un'analisi qualitativa del grafico ci mostra come i cappi delle onde più brevi abbiano una maggiore apertura, segno del fatto che le variazioni di portata e di tirante rispetto alla scala di deflusso sono maggiori. Questo è indice di come le onde tendano ad attenuarsi progressivamente con il loro sviluppo e ad appiattirsi lungo l'alveo fluviale.

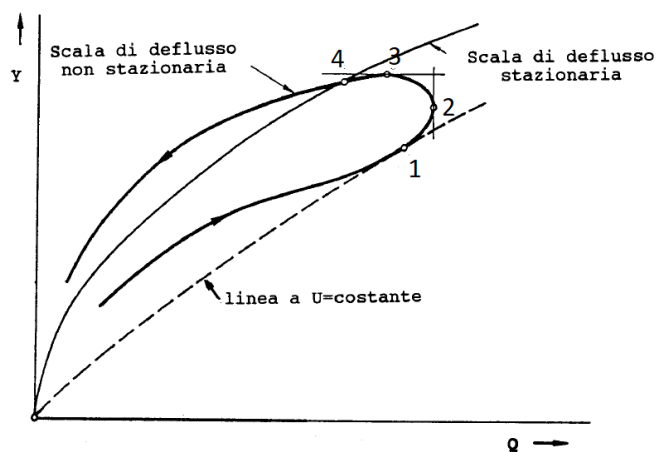


Figura 8: Cappio di piena

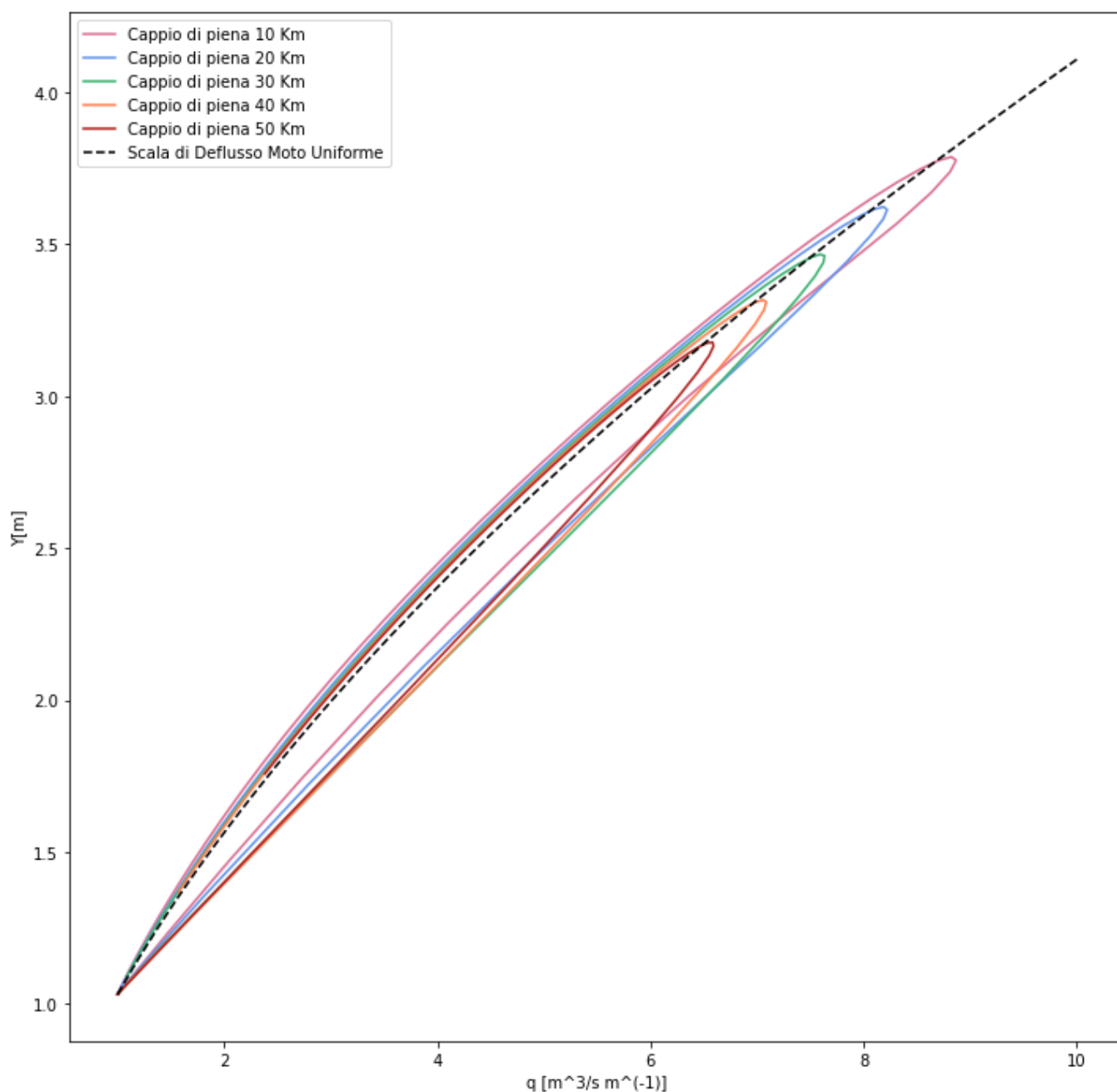


Figura 9: Cappio di piena

5 Conclusioni

L'esperienza di laboratorio appena affrontata fornisce qualche esempio di come si manifestano i fenomeni di moto non stazionario e in quali occasioni è possibile osservarli. Nel caso della rottura della diga si è osservato un fenomeno di moto vario rapido, caratterizzato dal movimento di due onde che si propagano nello spazio in direzioni opposte con diverse velocità, fino a raggiungere le condizioni di stabilità. La progressione nel tempo dell'onda di sommersione è ben raffigurata dalla figura 6.

Lo studio dell'onda di piena, invece, ci permette di analizzare un fenomeno non stazionario lento, il quale può essere soggetto a duplice natura, in base alla componente prevalente nel moto: **inerziale**, se prevale la velocità, o **frizionale**, se prevale l'attrito e l'interazione con l'alveo. Nel nostro caso, dalla figura 7 è possibile notare la lenta attenuazione dell'onda nello spazio, la diminuzione dell'ampiezza e l'abbassamento del colmo di piena. Da questo si deduce come non ci sia un termine prevalente tra i due descritti, in quanto la dissipazione è molto graduale nel tempo, come ci si aspetta da un fenomeno di piena all'interno di un corso d'acqua.

Riferimenti bibliografici

- [1] Ben-Artzi, M. & Falcovitz, J. (2003) *Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press
- [2] Courant, R. & Friedrichs, K. O. (1977) *Supersonic Flow and Shock Waves*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin
- [3] Pagani, C. D. & Salsa, S. (2016) *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, Bologna
- [4] Quarteroni, A. (2006) *Modellistica numerica per problemi differenziali*. Springer-Verlag Italia, Milano
- [5] Salsa, S. (2016) *Equazioni a Derivate Parziali. Metodi, Modelli e Applicazioni*. Springer-Verlag Italia, Milano
- [6] Toro, E. F. (2001) *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester New York Weinheim Brisbane Singapore Toronto
- [7] Toro, E. F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg