



# UNIVERSITÀ DI TRENTO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

A.A. 2019/2020

## **Idrodinamica**

Esercitazione numerica I

Prof. Dr. Marco Tubino

Studenti: Marco Falda, Francesco Ghizzo

# Indice

<b>1</b>	<b>Obiettivi</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
2.1	Scala di deflusso . . . . .	5
2.2	Coefficienti di Ragguaglio $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	6
2.3	Carico Specifico e Profondità Critica . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>9</b>
3.1	Metodo di Englund . . . . .	9
3.2	Calcolo della portata . . . . .	9
3.3	Coefficiente di ragguaglio dell'Energia Cinetica $\alpha$ . . . . .	11
3.4	Coefficiente di ragguaglio della Quantità di Moto $\beta$ . . . . .	11
3.5	Metodo dei trapezi . . . . .	11
3.6	Metodo della quadratura di Gauss . . . . .	12
3.7	Metodo della bisezione . . . . .	14
3.8	Implementazione . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>15</b>
4.1	Sezione triangolare . . . . .	15
4.2	Sezione rettangolare . . . . .	16
4.3	1° sezione reale: Adige . . . . .	17
4.4	2° sezione reale: Tanaro . . . . .	19
4.5	3° sezione reale: Vara . . . . .	20

## Elenco delle figure

1	Raggio idraulico locale . . . . .	10
2	$\cos\phi_{i,i+1}$ per un generico intervallo $i, i + 1$ . . . . .	12
3	Metodo della bisezione . . . . .	14
4	Sezione triangolare . . . . .	15
5	Rapporto area/altezza . . . . .	15
6	Andamento coefficiente $\alpha$ . . . . .	15
7	Andamento coefficiente $\beta$ . . . . .	15
8	Scala di deflusso per una sezione triangolare . . . . .	16
9	Sezione rettangolare . . . . .	16
10	Rapporto portata/altezza . . . . .	16
11	Andamento coefficiente $\alpha$ . . . . .	17
12	Andamento coefficiente $\beta$ . . . . .	17
13	Scala di deflusso per una sezione rettangolare . . . . .	17
14	Sezione Adige . . . . .	18
15	Rapporto area/altezza . . . . .	18
16	Andamento coefficiente $\alpha$ . . . . .	18
17	Andamento coefficiente $\beta$ . . . . .	18
18	Scala di deflusso dell'Adige . . . . .	18
19	Sezione Tanaro . . . . .	19
20	Rapporto area/altezza . . . . .	19
21	Andamento coefficiente $\alpha$ . . . . .	19
22	Andamento coefficiente $\beta$ . . . . .	19
23	Scala di deflusso del Tanaro . . . . .	20
24	Sezione Vara . . . . .	20
25	Rapporto area/altezza . . . . .	20
26	Andamento coefficiente $\alpha$ . . . . .	21
27	Andamento coefficiente $\beta$ . . . . .	21
28	Scala di deflusso del Vara . . . . .	21

# 1 Obiettivi

Sviluppare un algoritmo per generare una stima della scala di deflusso a partire dalla geometria della sezione di un alveo, avvalendosi delle ipotesi del modello tridimensionale su bassa profondità e di moto stazionario e uniforme (equazione di Gauckler-Strickler) e utilizzando il metodo di Engelund. Individuare inoltre la profondità critica nella medesima sezione dell'alveo attraverso un metodo iterativo. Implementare l'algoritmo prodotto per mezzo di uno *script* nel linguaggio Python e collaudare successivamente lo *script* con i dati di geometria di sezioni complesse di alvei reali.

## 2 Introduzione

### 2.1 Scala di deflusso

Nel contesto dello studio dei corsi d'acqua naturali vi è la necessità di reperire serie storiche di portata. La misura diretta, per mezzo, ad esempio, dell'integrazione spaziale del campo di velocità o di metodi globali, è purtroppo un processo caro, che richiede la presenza di un'equipe di tecnici qualificati e l'impiego di apparecchiature costose; è inoltre pericolosa nel caso di eventi estremi. Per queste ragioni si è storicamente fatto ricorso alla misura del pelo libero come *proxy* della portata d'acqua, essendo gli idrometri strumenti economici e di facile lettura (Collischonn, 2013). Al fine di poter mettere in relazione la lettura idrometrica con una stima di portata, si è creata la necessità della costruzione di scale di deflusso, ovvero curve empiriche, diverse da alveo ad alveo e da sezione a sezione, che assumono la forma di una legge di potenza:

$$Q = kY^m \quad (1)$$

Dove  $Q [m^3 \cdot s^{-1}]$  rappresenta la portata,  $Y [m]$  il tirante idraulico, ossia la differenza fra la quota della superficie libera e la quota del fondo, e  $k$  ed  $m [adm]$  due coefficienti da stimare;  $k$  ed  $m$ , tuttavia, non sono delle costanti. È possibile esplicitare  $m$  derivando nell'equazione della scala di deflusso la portata per il tirante, ricavando così:

$$\frac{dQ}{dY} = mkY^{m-1} \quad (2)$$

Osservando che:

$$kY^{m-1} = \frac{Q}{Y} \quad (3)$$

otteniamo:

$$\frac{dQ}{dY} = m \frac{Q}{Y} \quad (4)$$

da cui si deduce che:

$$m = \frac{dQ/dY}{Q/Y} \quad (5)$$

Sostituendo alla portata  $Q$  l'equazione del moto uniforme di Gauckler-Strickler,

$$U = ks\sqrt{iF}Rh^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

$$Q = U\Omega = ks\sqrt{iF}Rh^{\frac{2}{3}}\Omega = ks\sqrt{iF}\Omega^{\frac{5}{3}}p^{-\frac{2}{3}} \quad (7)$$

(dove  $U [m \cdot s^{-1}]$  è la velocità media della corrente,  $\Omega [m^2]$  è l'area della sezione bagnata,  $ks [adm]$  è un parametro, detto coefficiente di scabrezza di Strickler, che è inversamente proporzionale alla scabrezza del fondo,  $R_h [m]$  è il raggio idraulico e  $p [m]$  il perimetro bagnato) ricaviamo:

$$m = \frac{dQ/dY}{Q/Y} = \frac{5}{3} \frac{d\Omega/dY}{\Omega/Y} - \frac{2}{3} \frac{dp/dY}{p/Y} \quad (8)$$

$m$  è pertanto funzione della geometria della sezione e del tirante idraulico. Il valore di  $k$  racchiude invece la correlazione del flusso, oltre che con il raggio idraulico, con la pendenza e la scabrezza del fondo (Adami, 2019).

## 2.2 Coefficienti di Raggiungimento $\alpha$ e $\beta$

La potenza meccanica totale  $W$  [ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ ] di una corrente a superficie libera è data da un contributo fornito dall'energia potenziale:

$$\int_{\Omega} (\rho g h) u d\Omega \quad (9)$$

(dove  $\rho$  [ $kg \cdot m^{-3}$ ] è la densità del fluido,  $g$  [ $m \cdot s^{-2}$ ] è l'accelerazione di gravità,  $h$  [ $m$ ] è la coordinata verticale della superficie libera e  $u$  [ $m \cdot s^{-1}$ ] è la velocità puntuale) e un contributo fornito dall'energia cinetica:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u d\Omega \quad (10)$$

Sommando entrambi i contributi:

$$W = \int_{\Omega} (\rho g h + \frac{1}{2} \rho u^2) u d\Omega = \rho g h \int_{\Omega} u d\Omega + \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} u^3 d\Omega = \rho g h Q + \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} u^3 d\Omega \quad (11)$$

Il termine cinetico può inoltre essere riscritto come:

$$\frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} u^3 d\Omega = \frac{1}{2} \rho \alpha U^3 \Omega \quad (12)$$

dove  $\alpha$  [ $adm$ ] è un coefficiente correttivo, detto coefficiente di raggiungimento dell'energia cinetica, ed esprime il rapporto fra l'energia cinetica di una corrente reale e l'energia che una corrente possederebbe se scorresse in un alveo di uguale sezione, ma con velocità uniforme e pari alla velocità media:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} u^3 d\Omega}{\frac{1}{2} \rho \alpha U^3 \Omega} = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} = \frac{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3} \quad (13)$$

In altre parole, il coefficiente  $\alpha$  ci informa su quanto la velocità media di una corrente al cubo sia una buona approssimazione della media del campo di velocità reale elevato al cubo in ogni punto e integrato su tutta l'area.

La spinta meccanica totale di una corrente è anch'essa determinata da due componenti: una componente statica,

$$\int_{\Omega} P d\Omega \quad (14)$$

che nasce dalla pressione  $P$  [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ] che agisce sulla sezione bagnata  $\Omega$ , e una componente dinamica, che rappresenta l'azione dinamica della quantità di moto:

$$\int_{\Omega} \rho u^2 d\Omega \quad (15)$$

Sommando entrambe le componenti:

$$S = \int_{\Omega} P d\Omega + \int_{\Omega} \rho u^2 d\Omega = P_G \Omega + \rho \int_{\Omega} u^2 d\Omega \quad (16)$$

La componente dinamica può essere anche resa nella forma:

$$\rho \int_{\Omega} u^2 d\Omega = \rho \beta U^2 \Omega \quad (17)$$

dove  $\beta$  [ $adm$ ] è un coefficiente correttivo, detto coefficiente di raggiungimento della quantità di moto, e rappresenta il rapporto fra la quantità di moto effettiva della corrente e la quantità di moto di una corrente equivalente che attraversa la stessa sezione  $\Omega$  e presenta velocità uniforme e pari alla velocità media della corrente  $U$ :

$$\beta = \frac{\rho \int_{\Omega} u^2 d\Omega}{\rho U^2 \Omega} = \frac{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} = \frac{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u^2 d\Omega}{U^2} \quad (18)$$

In altre parole, il coefficiente  $\beta$  ci informa su quanto la velocità media di una corrente al quadrato sia una buona approssimazione della media del campo di velocità effettivo elevato al quadrato in ogni punto e integrato su tutta l'area.

### 2.3 Carico Specifico e Profondità Critica

Il carico specifico o energia specifica di una corrente in una sezione è definito come:

$$E = H - z_F = h + \alpha \frac{U^2}{2g} - z_F = Y + \alpha \frac{U^2}{2g} = Y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad (19)$$

dove  $E$  [m] è un'energia per unità di peso,  $H$  [m] è l'altezza della linea dell'energia e  $z_F$  [m] è la coordinata verticale del fondo. Considerato che  $\Omega$  e  $\alpha$  sono funzioni di  $Y$  ed essendo  $g$  costante, possiamo trattare  $E$  come funzione delle sole variabili  $Y$  e  $Q$ :  $E = E(Y, Q)$ .

Inoltre, poiché  $\Omega$  è una funzione crescente con  $Y$ :

$$\lim_{Y \rightarrow 0} E|_Q = \lim_{Y \rightarrow 0} \left( Y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \Big|_Q = \lim_{Y \rightarrow 0} \left( \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) = +\infty \quad (20)$$

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} E|_Q = \lim_{Y \rightarrow \infty} \left( Y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \Big|_Q = \lim_{Y \rightarrow \infty} (Y) = +\infty \quad (21)$$

Ne consegue che, imposto un valore di  $Q$ , deve esistere almeno un valore di tirante  $Y$ , detto critico ( $Y_c$ ) che corrisponde ad un minimo assoluto dell'energia specifica  $E$ . Analiticamente, il minimo di  $E$  a portata assegnata si ottiene imponendo:

$$\frac{\partial E}{\partial Y} \Big|_Q = 0 \quad (22)$$

da cui:

$$\frac{\partial E}{\partial Y} \Big|_Q = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{\Omega^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0 \quad (23)$$

Notando che la derivata della sezione per il tirante è, per definizione, la larghezza  $B$ ,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = B(Y) \quad (24)$$

l'uguaglianza (23) diventa:

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g\Omega^3} \Big|_{Y=Y_C} = 1 \quad (25)$$

Infine, ricordando che il numero di Froude è definito come:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY}} = \frac{U}{\sqrt{g\frac{\Omega}{B}}} = \frac{Q}{\Omega \sqrt{g\frac{\Omega}{B}}} \quad (26)$$

possiamo riscrivere (25) come:

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g\Omega^3} \Big|_{Y=Y_C} = \alpha \frac{Q^2}{\Omega^2} \left( \frac{B}{g\Omega} \right) \Big|_{Y=Y_C} = \alpha \frac{Q^2}{\Omega^2 \left( g\frac{\Omega}{B} \right)} \Big|_{Y=Y_C} = \alpha Fr^2 \Big|_{Y=Y_C} = 1 \quad (27)$$

Assegnata quindi una portata  $Q$ , al fine di ottenere il tirante critico, dato che  $\alpha$ ,  $\Omega$  e  $B$  sono funzioni di  $Y$ , basterà risolvere un'equazione implicita nella variabile  $Y$ :

$$1 - \alpha(Y) \frac{Q^2(Y)B(Y)}{g\Omega^3(Y)} = 0 \quad (28)$$

Data l'impossibilità di esplicitare  $Y$ , il suo valore potrà essere determinato soltanto mediante una soluzione numerica.



### 3 Metodologia

La portata di generici corsi d'acqua può essere stimata assumendo valide le ipotesi: del modello tridimensionale su bassa profondità (ovvero moto planimetrico e con una direzione preferenziale), di stazionarietà e di uniformità. L'equazione analitica che si ricava a partire da queste ipotesi, come abbiamo visto, presenta la forma (7), detta formula di Gauckler-Strickler. In (7), sia il valore del raggio idraulico  $Rh$  che l'area della sezione  $\Omega$  sono funzioni del tirante idraulico  $Y$ . Al fine di poter risolvere l'equazione è pertanto imprescindibile conoscere, per ogni  $Y$ , sia la forma che la dimensione della sezione bagnata. In contesti reali è tuttavia impossibile trovare un'espressione analitica che possa relazionare la geometria della sezione bagnata con il tirante della superficie libera  $Y$ , dal momento che il letto del fiume presenta una forma irregolare. L'eterogeneità nella composizione della sezione rende inoltre il valore della scabrezza del fondo non uniforme, con conseguente difficoltà nel quantificare il valore di  $ks$ . È evidente che l'unica strada possibile sia quella di ricorrere a metodi numerici.

#### 3.1 Metodo di Engelund

Il metodo di Engelund è un metodo per la stima della portata d'acqua passante in una determinata sezione che presuppone, oltre alle ipotesi di bassa profondità e moto localmente uniforme previamente menzionate, tre ipotesi ulteriori, vale a dire:

- La superficie libera rimane sempre orizzontale sulla sezione (la pendenza motrice non varia trasversalmente);
- La pendenza del fondo è costante sulla sezione;
- Il profilo di velocità che si sviluppa è logaritmico sulla verticale, ovvero, il tratto considerato ha una pendenza sufficientemente bassa da permettere di approssimare la normale al fondo con la verticale.

#### 3.2 Calcolo della portata

Analiticamente, la portata passante per una sezione generica, se sono valide le premesse del modello su bassa profondità, è data dall'integrale della distribuzione della velocità  $U$  sulla sezione  $y = [0, B]$ :

$$Q = \int_{\Omega} u d\Omega = \int_0^B U Y dy = \sqrt{iF} \int_0^B ks Rh^{\frac{2}{3}} Y dy \quad (29)$$

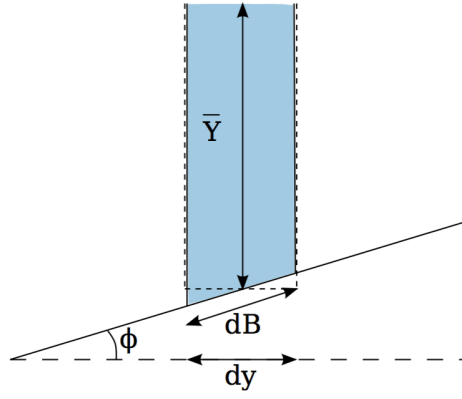
dove  $B$  è la larghezza della sezione  $[m]$  e dove la velocità  $U$  è una funzione puramente della coordinata orizzontale  $y$  (la velocità è infatti mediata sulla verticale). Dal momento che l'operatore integrale gode della proprietà additiva, la portata nell'equazione (29) può essere espressa come:

$$Q = \sum_i^n Q_i \quad (30)$$

dove  $Q_i$  è uguale a:

$$Q_i = \sqrt{iF} \int_0^h ks(y) Rh^{\frac{2}{3}}(y) Y(y) dy \quad (31)$$

In altre parole, il metodo di Engelund si basa sul semplice presupposto che la portata totale è equivalente alla sommatoria della portata passante per la sezione di ciascuno degli  $n$  sotto-intervalli di larghezza  $h$ . La procedura prevede quindi innanzitutto la suddivisione trasversale dell'alveo in intervalli regolari, ai quali si assegnano ciascuno un valore di tirante e di scabrezza e per ognuno dei quali sarà necessario risolvere, attraverso opportuni metodi numerici, l'integrale dell'equazione (31).



**Figura 1:** Raggio idraulico locale

Poiché la geometria degli intervalli è conosciuta, essendo quella di un trapezio, possiamo cercare un'espressione analitica per il raggio idraulico. Il raggio idraulico è dato dal rapporto:

$$R_h = \frac{\Omega}{p} \quad (32)$$

che per un trapezio infinitesimo di altezza  $dy$  e base minore e maggiore di lunghezza rispettivamente  $Y$  e  $Y + dY$  (Figura 1) vale:

$$R_h = \frac{d\Omega}{dp} \quad (33)$$

dove l'area infinitesima  $d\Omega$  è uguale a:

$$d\Omega = \frac{(Y + (Y + dY))dy}{2} \quad (34)$$

e il perimetro bagnato  $dp$  vale a sua volta:

$$dp = \frac{dy}{\cos\phi} \quad (35)$$

dove  $\phi$  rappresenta l'angolo tra l'orizzontale e il fondo dell'alveo. Sostituendo  $d\Omega$  (34) e  $dp$  (35) nella definizione di  $R_h$  (33) e sviluppando otteniamo:

$$R_h = \frac{d\Omega}{dp} = \frac{(2Ydy + dYdy)/2}{dy/\cos\phi} \quad (36)$$

e a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$R_h = \frac{d\Omega}{dp} = \frac{2Ydy/2}{dy/\cos\phi} = \frac{Ydy}{dy/\cos\phi} = Y\cos\phi \quad (37)$$

Ci è dunque possibile rielaborare l'equazione (31) esprimendo l'integrale come funzione soltanto del coefficiente di Strickler  $ks$ , del coseno di  $\phi$  e del tirante idraulico  $Y$ :

$$Q_i = \sqrt{iF} \int_0^h ks(y) \cos\phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy \quad (38)$$

$$Q = \sum_i^n Q_i = \sqrt{iF} \int_0^B ks(y) \cos\phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy \quad (39)$$

### 3.3 Coefficiente di ragguglio dell'Energia Cinetica $\alpha$

Mediando la definizione di  $\alpha$  (13) sulla verticale:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} = \frac{\int_0^B u^3(y) Y(y) dy}{U^2 Q} = \frac{\Omega^2}{Q^3} \int_0^B u^3(y) Y(y) dy \quad (40)$$

Sostituendo alla velocità  $u$  la formula di Gauckler-Strickler per il moto uniforme (6) e alla portata  $Q$  l'espressione a cui siamo pervenuti mediando sulla profondità (39) e avvalendoci della stessa formulazione del raggio idraulico ricavata in (37):

$$\begin{aligned} \alpha &= \Omega^2 \frac{\int_0^B \left( ks \sqrt{iF} Rh^{\frac{2}{3}} \right)^3 Y(y) dy}{[\sqrt{iF} \int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^3} \\ \alpha &= \Omega^2 \frac{\int_0^B \left( ks(Y \cos \phi)^{\frac{2}{3}} \right)^3 Y(y) dy}{[\int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^3} \\ \alpha &= \Omega^2 \frac{\int_0^B ks^3(y) \cos \phi^2(y) Y^3(y) dy}{[\int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^3} \end{aligned} \quad (41)$$

### 3.4 Coefficiente di ragguglio della Quantità di Moto $\beta$

Mediando la definizione di beta (18) sulla verticale:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} = \frac{\int_0^B u^3(y) Y(y) dy}{U Q} = \frac{\Omega \int_0^B u^3(y) Y(y) dy}{Q^2} \quad (42)$$

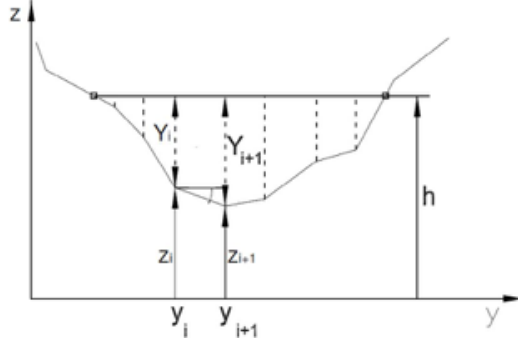
Sostituendo alla velocità  $u$  la formula di Gauckler-Strickler per il moto uniforme (6) e alla portata  $Q$  l'espressione a cui siamo pervenuti mediando sulla profondità (39) e avvalendoci della stessa formulazione del raggio idraulico ricavata in (37):

$$\begin{aligned} \beta &= \Omega^2 \frac{\int_0^B (ks \sqrt{iF} Rh^{\frac{2}{3}})^2 Y(y) dy}{[\sqrt{iF} \int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^2} \\ \beta &= \Omega^2 \frac{\int_0^B (ks(Y \cos \phi)^{\frac{2}{3}})^2 Y(y) dy}{[\int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^2} \\ \beta &= \Omega^2 \frac{\int_0^B ks^2(y) \cos \phi^{\frac{4}{3}}(y) Y^{\frac{7}{3}}(y) dy}{[\int_0^B ks(y) \cos \phi^{\frac{2}{3}}(y) Y^{\frac{5}{3}}(y) dy]^2} \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.5 Metodo dei trapezi

Il metodo dei trapezi è una tecnica per la risoluzione di integrali definiti tramite la discretizzazione del dominio della funzione integranda in intervalli di larghezza costante. Il metodo si basa sull'ipotesi che la media dei valori che la funzione assume agli estremi di un intervallo sia una buona approssimazione del valor medio di tutti i valori che la funzione assume dentro l'intervallo; in altre parole, si presume che, in ogni tratto in cui si è suddiviso il dominio, se il numero dei tratti è sufficientemente alto, la funzione sia rappresentabile per mezzo di una retta. La procedura prevede il calcolo delle aree dei trapezi contenuti in ogni intervallo, la somma delle quali fornisce un valore approssimato dell'integrale totale; l'accuratezza di questa approssimazione dipende dal numero di intervalli di discretizzazione. In formule:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} (x_2 - x_1) \quad (44)$$



**Figura 2:**  $\cos\phi_{i,i+1}$  per un generico intervallo  $i, i + 1$

Applicando il metodo dei trapezi a (38), possiamo ottenere una formula operativa per il calcolo della portata grazie al metodo di Englund:

$$Q_i \approx \sqrt{iF} \cos\phi_{i,i+1}^{\frac{2}{3}} \frac{(ks_i Y_i^{\frac{5}{3}} + ks_{i+1} Y_{i+1}^{\frac{5}{3}})}{2} (y_{i+1} - y_i) \quad (45)$$

La (39) diventa pertanto:

$$Q \approx \sqrt{iF} \sum_{i=1}^n \cos\phi_{i,i+1}^{\frac{2}{3}} \frac{(ks_i Y_i^{\frac{5}{3}} + ks_{i+1} Y_{i+1}^{\frac{5}{3}})}{2} (y_{i+1} - y_i) \quad (46)$$

dove  $\cos\phi_{i,i+1}$  è uguale a (Figura 2):

$$\cos\phi_{i,i+1} = \frac{dy}{dB} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}} \quad (47)$$

### 3.6 Metodo della quadratura di Gauss

Il metodo dei trapezi è intuitivo e di facile comprensione; ciononostante, non è molto efficiente e può richiedere una fitta discretizzazione e, di conseguenza, un grande numero di cicli da parte del calcolatore per ottenere risultati di precisione accettabile. Il metodo dei trapezi è, d'altronde, soltanto un caso specifico, in cui gli intervalli sono imposti regolari ed equidistanti tra loro, in una famiglia di metodi di integrazione numerica, detti di quadratura. I metodi di quadratura stimano il valore dell'integrale di una funzione come la sommatoria del valore che la funzione assume in determinati punti discreti, detti nodi, moltiplicato per un peso  $\omega_j$  (Quarteroni et al., 2014):

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n f(x_j) \omega_j \quad (48)$$

Il metodo della quadratura di Gauss, in particolare, si prefigge l'obiettivo, dato un numero di nodi  $n$ , di ottimizzare sia la posizione dei nodi che il valore dei pesi, affinché l'accuratezza sia la maggiore possibile, ovvero affinché sia minimizzato lo scarto fra il valore analitico e numerico dell'integrale definito. Per ragioni che esulano dallo scopo di questo studio, è possibile dimostrare che la posizione ottimale dei nodi si ha in prossimità delle radici di un polinomio ortogonale. La formula generale della quadratura di Gauss, definita nell'intervallo  $[-1, 1]$ , è la seguente:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^{n_G} f(\xi_j) \omega_j \quad (49)$$

dove  $n_G$  è il numeri di nodi adottati, le ascisse  $\xi_j$  sono le radici del polinomio di Legendre di ordine  $n_G$  (quadratura di Gauss-Legendre) e i pesi  $\omega_j$  sono calcolati risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\sum_{j=1}^{n_G} \omega_j L_i(\xi_j) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (50)$$

In notazione matriciale:

$$\begin{vmatrix} L_0(\xi_j) \\ L_1(\xi_j) \\ \vdots \\ L_{n-1}(\xi_j) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (51)$$

Gli zeri  $\xi_j$  dei polinomi di Legendre di ordine  $n$  ( $L_n$ ) e i corrispettivi pesi  $\omega_j$  calcolati risolvendo il sistema (51) sono presentati in Tabella (1) sino ad  $n = 4$ .

$n$	$\xi_j$	$\omega_j$	$L_n$
0	—	—	1
1	0	2	$x$
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$x^2 - \frac{1}{3}$
3	0	$\frac{8}{9}$	$x^3 - \frac{3}{5}x$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	

**Tabella 1:** Polinomi di Legendre di ordine  $n$  ( $L_n$ ), i rispettivi zeri  $\xi_j$  e i pesi  $\omega_j$

Estendendo la formula (49) ad un generico intervallo  $[x_1, x_2]$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \left( \frac{x_2 - x_1}{2} \right) \sum_{j=1}^{n_G} \omega_j f \left( \frac{x_2 - x_1}{2} x_{G,j} + \frac{x_2 + x_1}{2} \right) \quad (52)$$

che applicata a (38) diventa:

$$Q_i \approx \sqrt{iF} \cos \phi^{\frac{2}{3}}_{i,i+1} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \right) \sum_{j=1}^{n_G} \omega_j \hat{k}s_j \hat{Y}_j^{\frac{5}{3}} \quad (53)$$

dove  $\hat{k}s_j$  e  $\hat{Y}_j$  sono i valori che le funzioni  $ks(y)$  e  $Y(y)$  assumono nelle coordinate suggerite dal metodo della quadratura di Gauss esteso ad un intervallo generico  $[y_i, y_{i+1}]$ :

$$\hat{k}s_j = ks \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{2} x_{G,j} + \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \right) \quad (54)$$

$$\hat{Y}_j = Y \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{2} x_{G,j} + \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \right) \quad (55)$$

Ammettendo che le funzioni  $ks(y)$  e  $Y(y)$  possano essere approssimate linearmente nell'intervallo  $[y_i, y_{i+1}]$ :

$$\hat{k}s_j = ks \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{2} x_{G,i} + \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \right) \approx \frac{ks_{i+1} - ks_i}{2} x_{G,j} + \frac{ks_{i+1} + ks_i}{2} \quad (56)$$

$$\hat{Y}_j = Y \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{2} x_{G,i} + \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \right) \approx \frac{Y_{i+1} - Y_i}{2} x_{G,j} + \frac{Y_{i+1} + Y_i}{2} \quad (57)$$

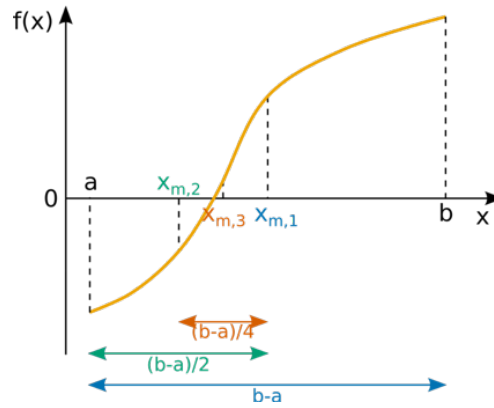
Sommando tutti i contributi otteniamo finalmente:

$$Q \approx \sqrt{i_F} \sum_{i=1}^n \left( \cos \phi_{i,i+1}^{\frac{2}{3}} \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \sum_{j=1}^{n_G} \omega_j \hat{k} s_j \hat{Y}_j^{\frac{3}{5}} \right) \quad (58)$$

### 3.7 Metodo della bisezione

Il metodo della bisezione si basa su una proprietà delle funzioni continue, detta teorema degli zeri per le funzioni continue (Quarteroni et al., 2014):

“data una funzione  $f$  definita e continua in un intervallo  $[a, b] \in D$ , se  $f(a)f(b) < 0$ , ovvero se  $f(a)$  ed  $f(b)$  hanno segni discordi, allora esisterà sempre un punto  $c \in ]a, b[$  tale che  $f(c) = 0$ ; in altre parole, esisterà sempre almeno un punto in cui la funzione si annulla dentro l'intervallo.”



**Figura 3:** Metodo della bisezione

Operativamente, una volta individuato un intervallo  $[a, b]$  i cui estremi  $a$  e  $b$  soddisfino le condizioni imposte dal teorema degli zeri per le funzioni continue, possiamo ulteriormente suddividerlo in due sotto-intervalli  $[a, x_m]$  e  $[x_m, b]$  (dove  $x_m$  rappresenta la coordinata del punto medio dell'intervallo  $[a, b]$ ) e controllare quale dei due continui a rispettare le condizioni del teorema. Questa strategia, detta di bisezione (Figura 3), si ripete iterativamente e si arresta al passo in corrispondenza del quale si abbia  $|x_m - c| \leq \epsilon$ , dove  $\epsilon$  rappresenta una precisione scelta a piacere.

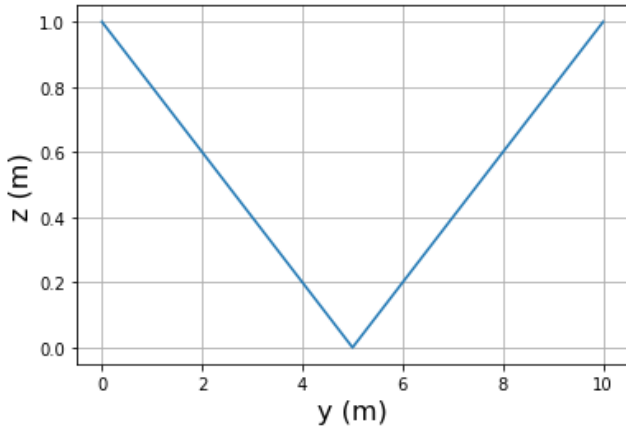
### 3.8 Implementazione

L'algoritmo è stato tradotto nel linguaggio di programmazione Python. All'interno del programma, i parametri forniti dall'utente sono il file contenente i dati di geometria dell'alveo, il numero di punti di discretizzazione verticale e il numero massimo di iterazioni nel calcolo della profondità critica, oltre alla pendenza del fondo  $i_F$ . L'algoritmo simula tanti valori di superficie libera quanti sono i punti di discretizzazione verticale. Ad ogni iterazione, stabilita una quota  $h$ , a partire dai dati di geometria dell'alveo viene calcolata l'area della sezione  $\Omega$ , la larghezza del profilo di corrente  $B$ , la portata defluente in condizioni di moto uniforme  $Q$  e i coefficienti di ragguaglio  $\alpha$  e  $\beta$ . Innanzitutto è identificata la sezione bagnata: sottraendo punto a punto, lungo la direzione orizzontale, la quota del fondo  $z_F(y)$  alla quota del pelo libero  $h(y)$  è prodotto un array dei valori di tirante  $Y(y)$ . È possibile in questo modo individuare quali siano i punti interessati dalla corrente e quali siano i punti ad una quota maggiore del pelo libero, che possono essere perciò esclusi dall'analisi, e valutare così facilmente  $\Omega$  e  $B$ . In seguito vengono chiamate delle apposite funzioni che calcolano la portata passante  $Q$  (39) e i coefficienti di ragguaglio  $\alpha$  (41) e  $\beta$  (43), avvalendosi sia del metodo dei trapezi (46), che della quadratura gaussiana (58) con 2, 3 e 4 nodi. Come ultimo passaggio, la profondità critica  $Y_c$  è individuata utilizzando il metodo della bisezione, dove la funzione da annullare sarà (28).

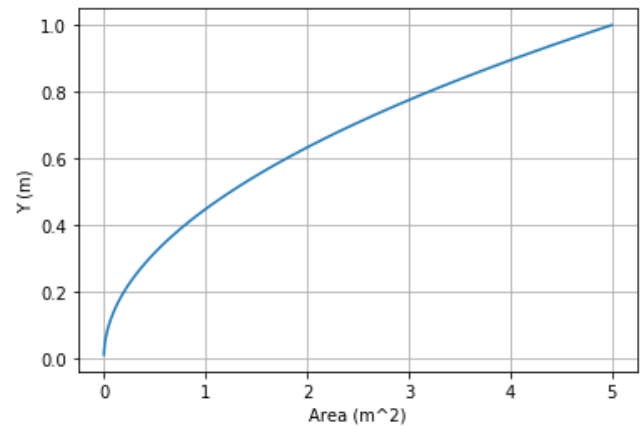
## 4 Risultati

### 4.1 Sezione triangolare

La sezione di seguito analizzata presenta una generica forma triangolare. Il rapporto tra l'area della sezione bagnata e l'altezza del tirante assume un andamento logaritmico all'aumentare del primo parametro, segno che l'incremento dell'area di sezione è più significativo per bassi valori di tirante.

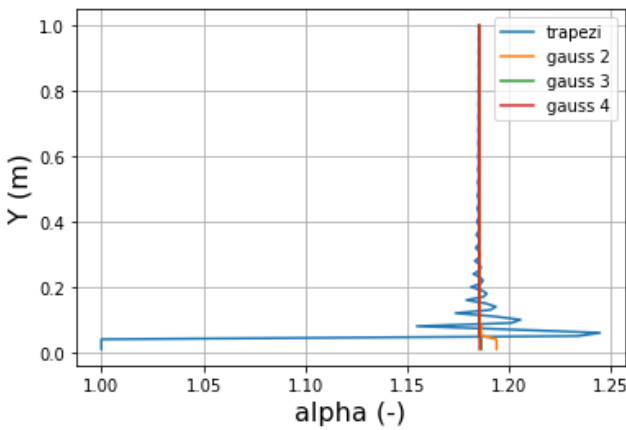


**Figura 4:** Sezione triangolare

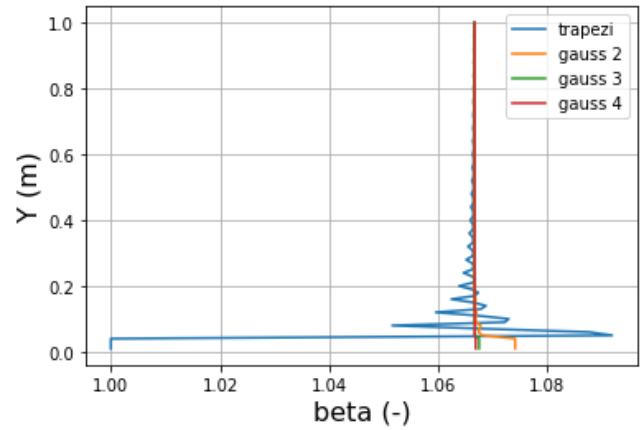


**Figura 5:** Rapporto area/altezza

L'andamento dei coefficienti di ragguglio  $\alpha$  e  $\beta$  ha comportamenti differenti in base al metodo di calcolo utilizzato: con il metodo dei trapezi i valori oscillano ampiamente per tiranti bassi e si stabilizzano attorno ad un valore costante all'aumentare dell'altezza della superficie libera, mentre con il metodo di Gauss il risultato è costante anche per bassi valori di tirante.

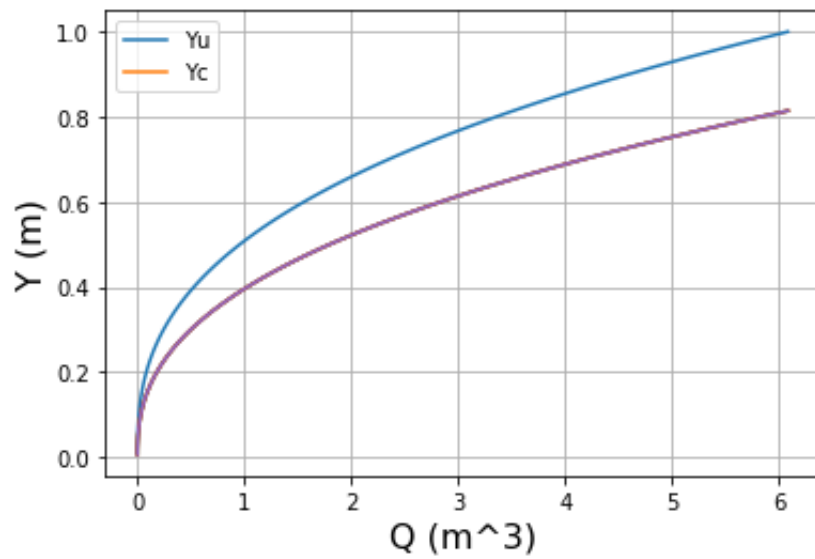


**Figura 6:** Andamento coefficiente  $\alpha$



**Figura 7:** Andamento coefficiente  $\beta$

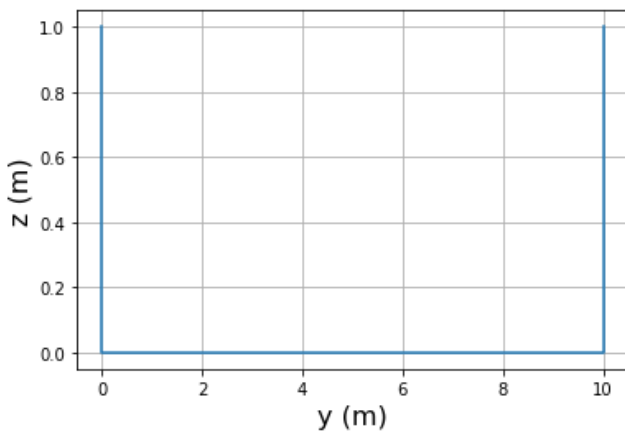
La scala di deflusso descritta dal grafico risulta appartenente a un moto uniforme a corrente lenta.



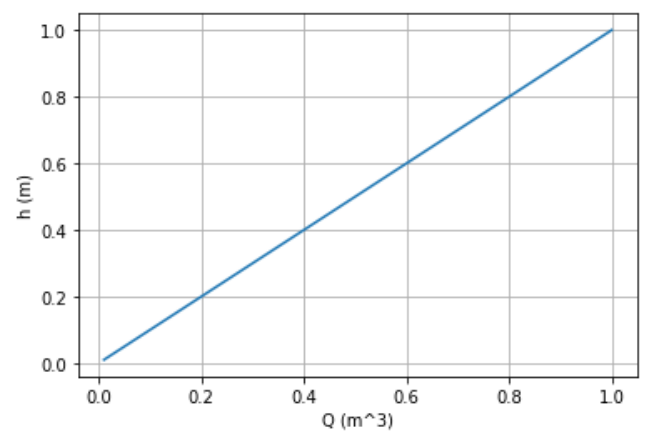
**Figura 8:** Scala di deflusso per una sezione triangolare

## 4.2 Sezione rettangolare

La sezione di seguito analizzata presenta una generica forma rettangolare. Il rapporto tra l'area della sezione bagnata e l'altezza del tirante risulta lineare per qualsiasi valore assunto.



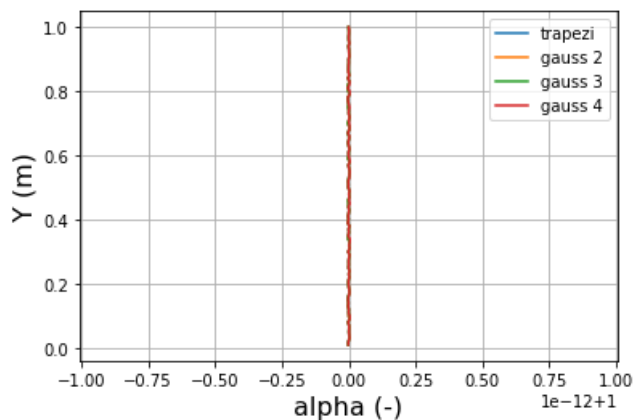
**Figura 9:** Sezione rettangolare



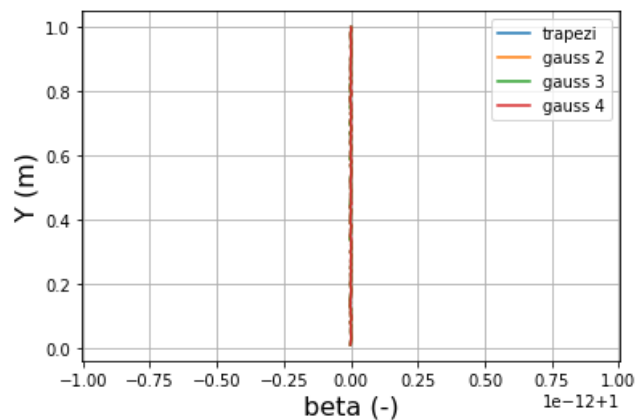
**Figura 10:** Rapporto portata/altezza

La regolarità della geometria della sezione si rispecchia nell'andamento dei coefficienti di ragguglio  $\alpha$  e  $\beta$ , i quali sono costantemente nulli all'aumentare della quota del pelo libero.



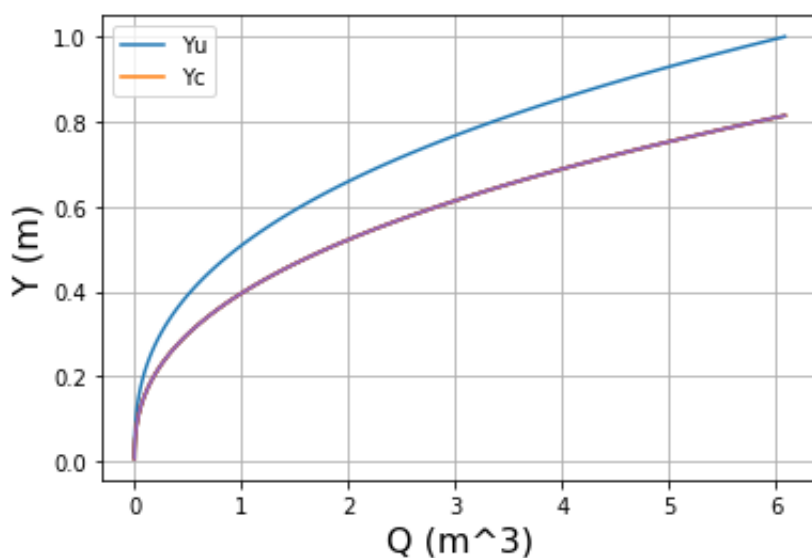


**Figura 11:** Andamento coefficiente  $\alpha$



**Figura 12:** Andamento coefficiente  $\beta$

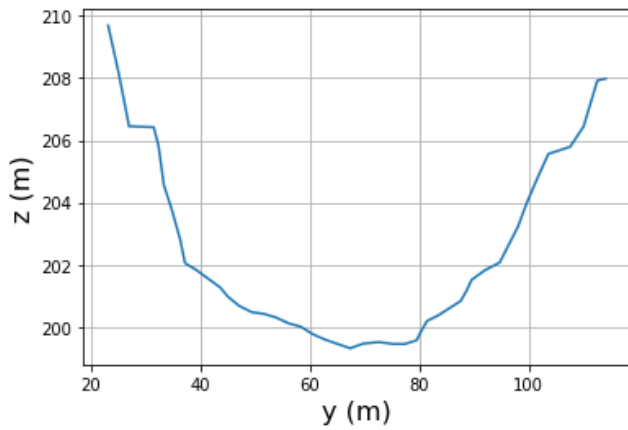
La scala di deflusso caratteristica di un canale rettangolare riporta l'andamento tipico di un alveo fluviale.



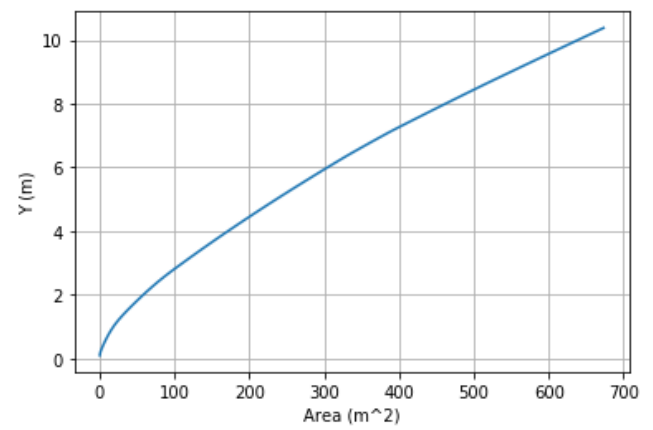
**Figura 13:** Scala di deflusso per una sezione rettangolare

### 4.3 1° sezione reale: Adige

La sezione presa in esame nel caso attuale appartiene al secondo fiume più lungo in Italia, l'Adige, il quale presenta un alveo fortemente antropizzato, più volte soggetto ad opere di sistemazione fluviale. L'asta fluviale che solca la Val d'Adige è stata deviata e regolarizzata in numerosi tratti per permettere lo sfruttamento intensivo del terreno, soprattutto a scopo agricolo. Dal grafico, infatti, si può notare una certa regolarità lungo la coordinata trasversale nella forma della sezione, tipica di un letto antropizzato. Il rapporto tra l'area bagnata e il tirante appare leggermente logaritmico, a conferma del fatto che la forma della sezione risulta essere intermedia tra una triangolare e una rettangolare.

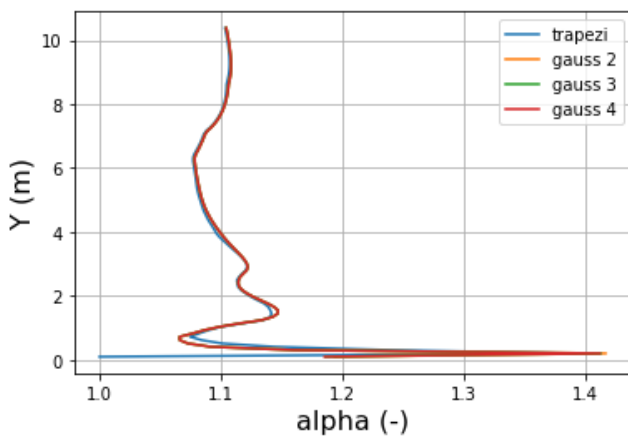


**Figura 14:** Sezione Adige

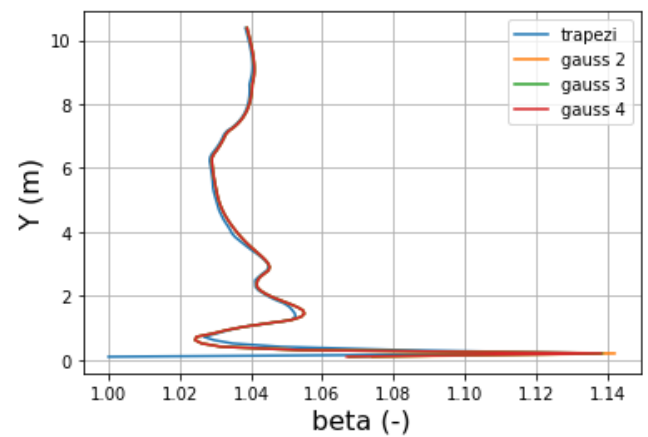


**Figura 15:** Rapporto area/altezza

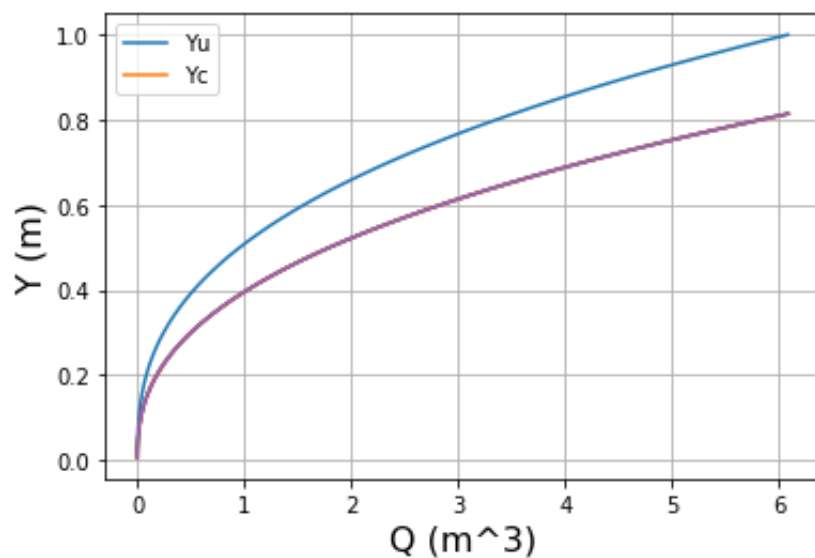
La regolarità della sezione proposta trova riscontro anche nell'andamento simile dei coefficienti di ragguglio  $\alpha$  e  $\beta$  al variare del pelo libero. A bassi valori di tirante corrispondono coefficienti con alta variabilità all'interno di un range numerico limitato, i quali però tendono a stabilizzarsi attorno a un valore costante all'aumentare della quota di pelo libero.



**Figura 16:** Andamento coefficiente  $\alpha$



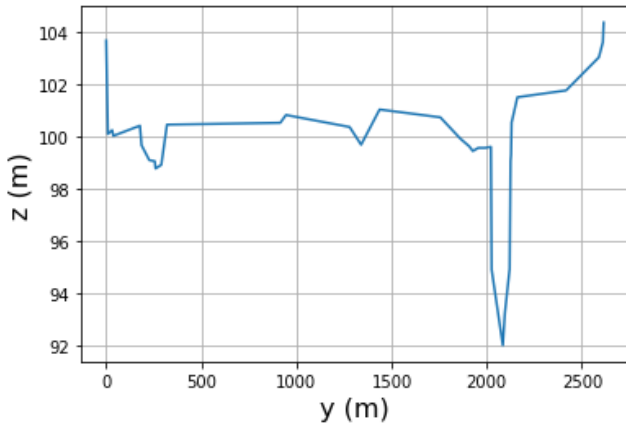
**Figura 17:** Andamento coefficiente  $\beta$



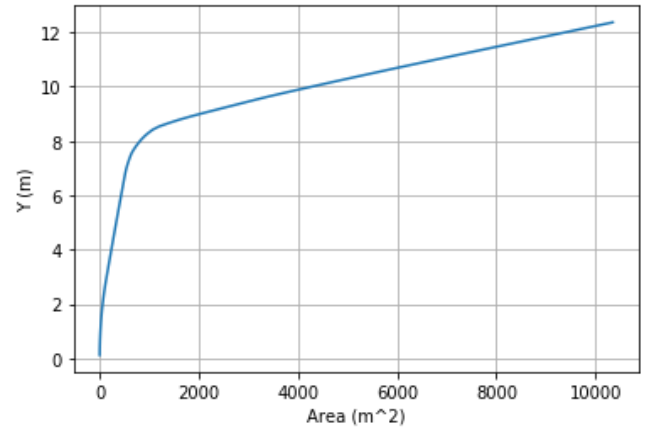
**Figura 18:** Scala di deflusso dell'Adige

#### 4.4 2° sezione reale: Tanaro

A differenza del caso precedente, la sezione di seguito analizzata appartiene al fiume Tanaro, corso d'acqua tra i maggiori in termini di rilevanza a livello nazionale, caratterizzato da uno sviluppo nel territorio non regolarizzato da opere antropiche. L'estensione e l'irregolarità dell'alveo del fiume si notano chiaramente dal grafico, dove elemento rilevante per l'analisi di portata della sezione risulta essere lo scavo generatosi sul fondo del corso d'acqua. Tale particolarità altera l'andamento ipoteticamente lineare del rapporto tra area bagnata e tirante, di fatto dividendolo in due tratti con coefficiente angolare diverso: il primo tratto, più ripido, legato al riempimento della fossa, e il secondo, meno ripido, legato al riempimento totale dell'alveo.

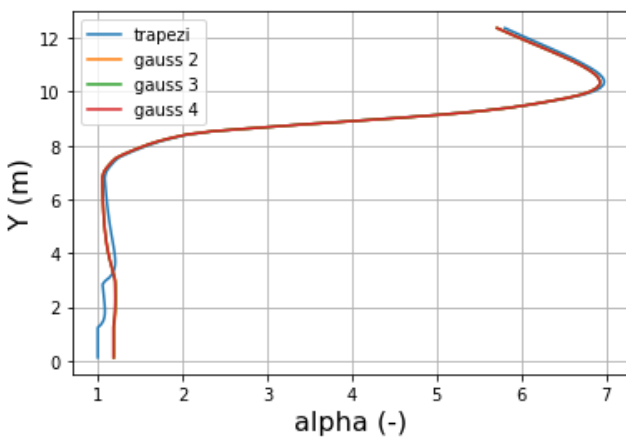


**Figura 19:** Sezione Tanaro

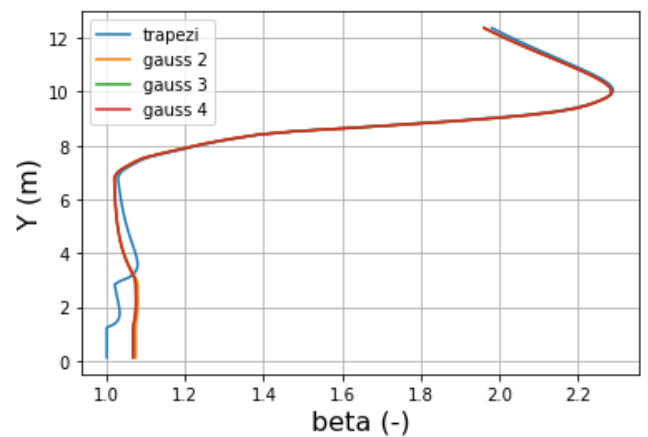


**Figura 20:** Rapporto area/altezza

I coefficienti di ragguglio seguono un andamento influenzato dal medesimo elemento: una convergenza dei parametri attorno ad un valore costante nella zona dello scavo, seguita da un brusco aumento leggermente contenuto soltanto nel tratto di riempimento finale.

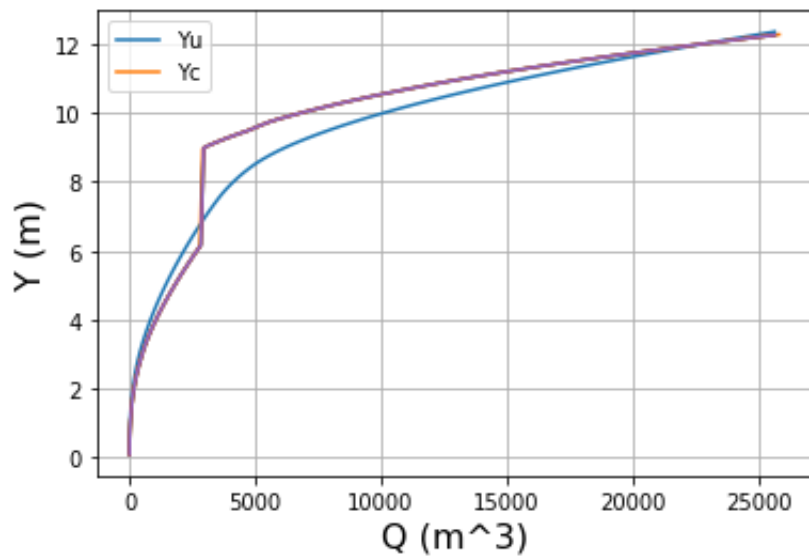


**Figura 21:** Andamento coefficiente  $\alpha$



**Figura 22:** Andamento coefficiente  $\beta$

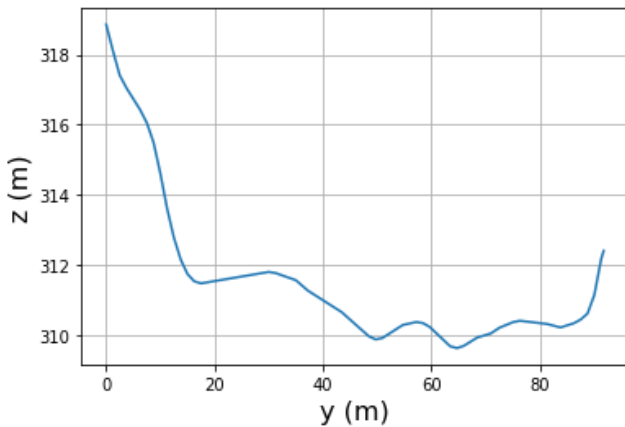
Anche la scala di deflusso del fiume risente della peculiare forma dell'alveo, presentando un tratto iniziale di rapido innalzamento del pelo libero seguito da un tratto di curva più dolce nel momento in cui il riempimento interessa la totalità della sezione. Il confronto tra la scala di deflusso critica e quella analitica ci consente di distinguere due diversi comportamenti della corrente: un carattere fluviale in corrispondenza dello scavo sostituito da un carattere torrentizio nel resto dell'alveo.



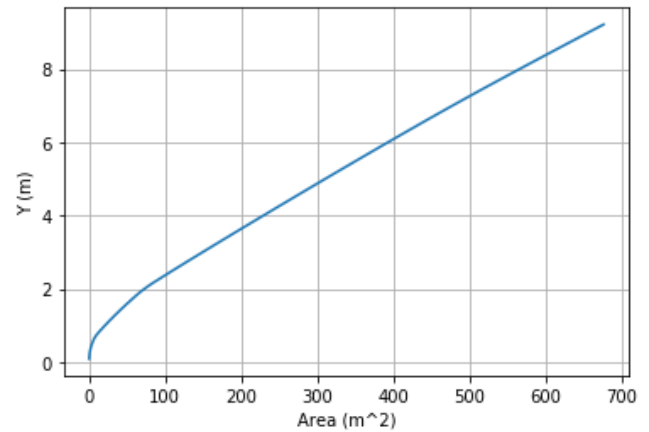
**Figura 23:** Scala di deflusso del Tanaro

#### 4.5 3° sezione reale: Vara

La terza sezione analizzata appartiene al fiume Vara, il maggior corso d'acqua della Liguria. La forma della sezione presenta un contorno fortemente irregolare, caratterizzato da piccoli avvallamenti e sponde di lunghezza irregolare.

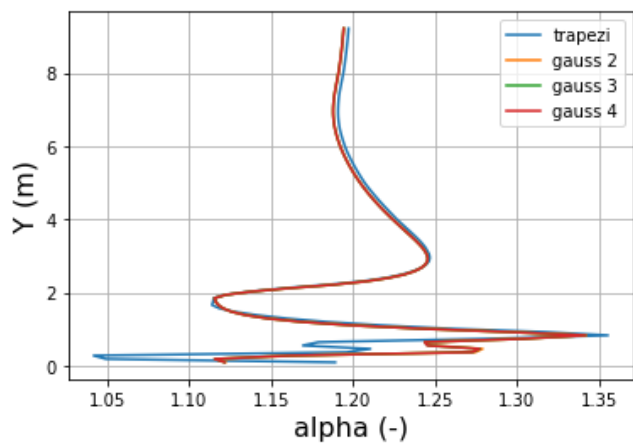


**Figura 24:** Sezione Vara

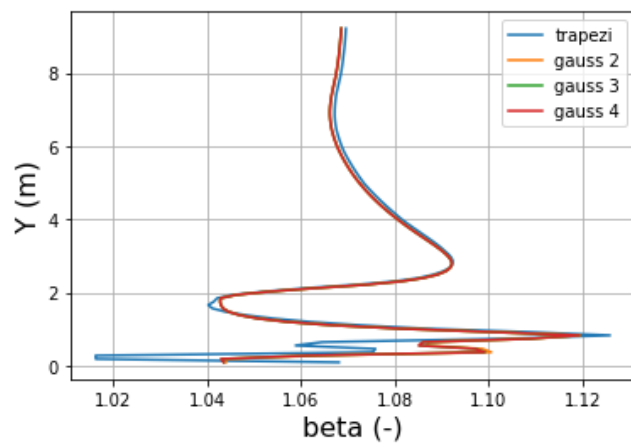


**Figura 25:** Rapporto area/altezza

I coefficienti di ragguglio  $\alpha$  e  $\beta$  assumono valori irregolari per tirante basso sia con il metodo di Gauss che con il metodo dei trapezi, salvo poi stabilizzarsi in entrambi i casi una volta raggiunti i massimi valori di tirante.

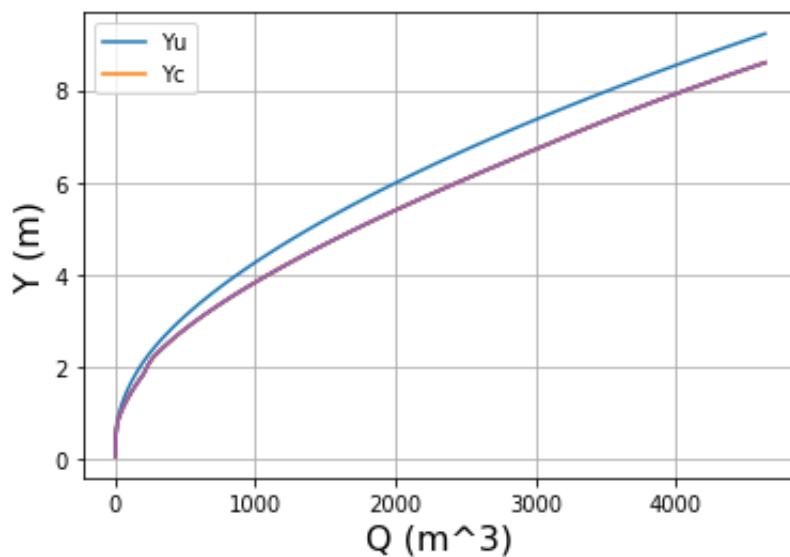


**Figura 26:** Andamento coefficiente  $\alpha$



**Figura 27:** Andamento coefficiente  $\beta$

Dalla scala di deflusso si può riscontrare il comportamento fluviale assunto dalla corrente del corso d'acqua, anche se con un divario tra tirante uniforme e tirante critico meno marcato rispetto ai fiumi di pianura.



**Figura 28:** Scala di deflusso del Vara

## Riferimenti bibliografici

- [1] Collischonn, W. (2013) *Hidrologia para engenharia e ciências ambientais*. ABRH, Porto Alegre
- [2] Adami, L. (2019) *Dispense del corso di Idrodinamica (a. a. 2019/2020)*.
- [3] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F., Gervasio, P. (2014) *Matematica Numerica*. Springer, Milano