

CAPITOLO 1 – Analisi combinatoria

1.1 Introduzione

1.2 Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

1.3 Permutazioni

1.4 Disposizioni e combinazioni

N.B. La presente dispensa non sostituisce i libri di testo e non va resa accessibile sul web.

Gli argomenti indicati con (★★) sono da considerarsi facoltativi.

1.1 Introduzione

Problema. Un sistema di comunicazione consiste di n antenne allineate. Ogni antenna può essere funzionante oppure difettosa. Quante sono le possibili configurazioni?

Avendo 2 casi per ogni antenna, il numero di possibili configurazioni è

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Ad esempio, se $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ possibili configurazioni:

0 0 0 0	0 1 0 0	1 0 0 0	1 1 0 0
0 0 0 1	0 1 0 1	1 0 0 1	1 1 0 1
0 0 1 0	0 1 1 0	1 0 1 0	1 1 1 0
0 0 1 1	0 1 1 1	1 0 1 1	1 1 1 1

(1 = antenna funzionante)

(0 = antenna difettosa)

Supponiamo che il sistema sia funzionante se non vi sono 2 antenne difettose consecutive. Sapendo che esattamente m delle n antenne sono difettose, qual è la probabilità che il sistema sia funzionante?

Ad esempio, se $n = 4$ e $m = 2$ le possibili configurazioni sono 6:

	0	0	1	1	: sistema non funzionante
	0	1	0	1	: sistema funzionante
(1 = antenna funzionante)	0	1	1	0	: sistema funzionante
(0 = antenna difettosa)	1	0	0	1	: sistema non funzionante
	1	0	1	0	: sistema funzionante
	1	1	0	0	: sistema non funzionante

3 casi su 6: possiamo affermare che la probabilità che il sistema sia funzionante è

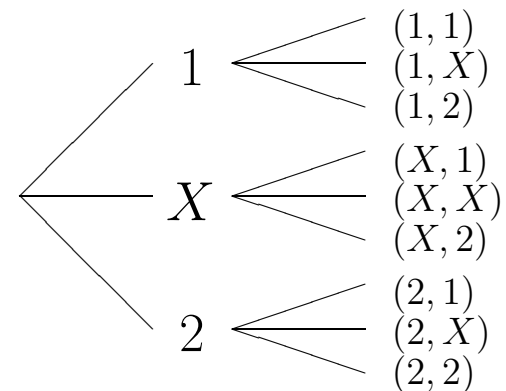
$$\text{prob.} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 ?$$

In molti problemi il calcolo delle probabilità si effettua semplicemente calcolando il numero di modi in cui avviene un dato evento; sarà questo l'argomento dell'*analisi combinatoria*.

1.2 Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

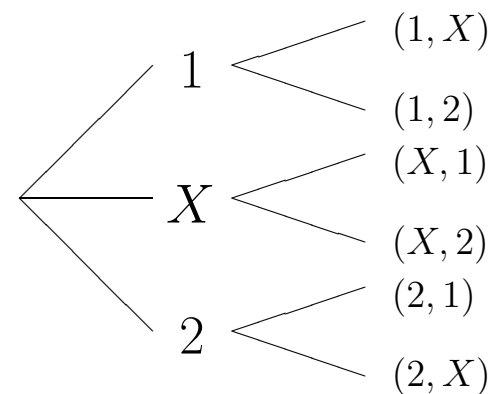
Esempio. Un giocatore scommette su 2 partite di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi può scegliere come scommettere?

Soluzione. $3 \times 3 = 9$



Esempio. Due giocatori (avversari) scommettono su una partita di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi si possono effettuare le scelte?

Soluzione. $3 \times 2 = 6$



Principio fondamentale del calcolo combinatorio. Si realizzino 2 esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n esiti possibili. Se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono in tutto mn esiti possibili.

Dimostrazione. Elenchiamo tutti gli esiti dei due esperimenti:

$$m \text{ righe: } \left\{ \begin{array}{llll} (1, 1) & (1, 2) & \dots & (1, n) & \leftarrow n \text{ elementi} \\ (2, 1) & (2, 2) & \dots & (2, n) & \leftarrow n \text{ elementi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (m, 1) & (m, 2) & \dots & (m, n) & \leftarrow n \text{ elementi} \end{array} \right.$$

dove si intende che l'esito finale è la coppia ordinata (i, j) se il primo esperimento ha prodotto esito i e il secondo ha prodotto esito j . L'insieme dei possibili esiti consiste di m righe, ognuna contenente n elementi. Quindi vi sono in tutto mn esiti possibili.

Notiamo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti; in altri termini (i, j) è un risultato distinto da (j, i) .

Esempio. Si lanciano a caso due dadi da gioco. Quanti sono i risultati possibili?

Soluzione. Il lancio del primo dado dà l'esito del primo esperimento, e il lancio del secondo dado dà l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $6 \times 6 = 36$ risultati possibili.

Esempio. Un campionato di calcio prevede 10 partite in una giornata, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). Se si deve scegliere una partita e un risultato, quante sono le scelte possibili?

Soluzione. Si può vedere la scelta della partita come l'esito del primo esperimento e la scelta del risultato come l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $10 \times 3 = 30$ scelte possibili.

Esempio. Uno studente può inserire nel piano di studi 2 insegnamenti a scelta, di cui uno deve essere selezionato da un elenco di 9 insegnamenti e l'altro da un elenco distinto di 10 insegnamenti. In quanti modi diversi può completare il piano di studi?

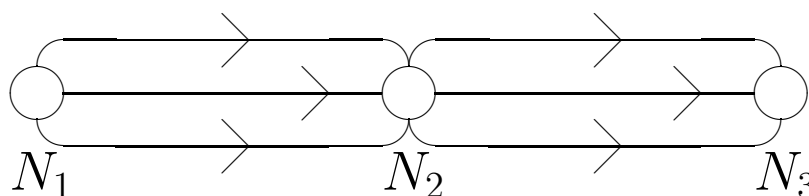
Soluzione. Si hanno in totale $9 \times 10 = 90$ modi diversi.

Esempio. Quante sono le funzioni booleane definite su $\{0, 1\}$?

Soluzione. Per ogni $x \in \{0, 1\}$ risulta $f(x)$ uguale a 0 o 1, con $f(0)$ corrispondente all'esito del primo esperimento e $f(1)$ all'esito del secondo esperimento. Vi sono pertanto $2 \times 2 = 4$ funzioni siffatte.

x	$f(x) = 0$	$f(x) = x$	$f(x) = \bar{x}$	$f(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Esempio. Si consideri il seguente grafo orientato. Quanti sono i percorsi distinti possibili che portano dal nodo N_1 al nodo N_3 ?



Soluzione. Vi sono $3 \times 3 = 9$ percorsi distinti.

Esempio. Si lancia a caso un dado da gioco. Se esce un numero pari si lancia nuovamente il dado. Se esce un numero dispari si lancia un dado truccato, in cui il 6 è stato modificato in 5. Quanti sono i risultati possibili?

Soluzione. Tenendo conto delle alternative relative al primo lancio, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $3 \times 6 + 3 \times 5 = 33$ esiti possibili.

Esempio. Un'urna contiene un dado regolare ed un dado con numeri 7, 8, 9, 10, 11, 11. Si lancia un dado estratto a caso dall'urna. Quanti sono i risultati possibili?

Soluzione. Tenendo conto delle 2 alternative relative all'estrazione, vi sono in tutto $6 + 5 = 11$ esiti possibili.

Esempio. Si effettuano due esperimenti. Il primo ha m possibili esiti. Se il primo esperimento produce l'esito $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, il secondo può avere k_i possibili esiti. Supponendo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producano esiti finali distinti, quanti sono gli esiti finali possibili?

Soluzione. Gli esiti possibili sono $\sum_{i=1}^m k_i = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.

Esempio. Si lanciano due dadi. Se il prodotto dei due numeri usciti è dispari allora vince Dario, se è pari allora vince Piero. Chi ha più possibilità di vincere?

Soluzione. Dario vince se il prodotto è dispari, ossia se entrambi i numeri usciti sono dispari. Ciò si realizza in $3 \times 3 = 9$ modi distinti. Piero vince se il prodotto è pari, ossia se almeno uno dei numeri usciti è pari. Ciò si realizza in $3 \times 6 + 3 \times 3 = 18 + 9 = 27$ modi distinti (pari e qualsiasi oppure dispari e pari). Quindi Piero è avvantaggiato.

Principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio. Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili, e ancora che per ognuno degli esiti dei primi 2 esperimenti il terzo esperimento abbia n_3 esiti possibili, ecc. Allora, se sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti, allora gli r esperimenti producono in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ esiti possibili.

Esempio. (i) Quante sono le targhe automobilistiche formate da 7 caratteri, di cui 3 sono numeri e 4 sono lettere (scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone)?

(ii) Quante targhe vi sono escludendo le ripetizioni tra numeri e lettere?

Soluzione. Per il principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio,

(i) vi sono $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456\,976\,000$ targhe possibili;

(ii) vi sono $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 258\,336\,000$ targhe senza ripetizioni.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si lancia a caso una moneta per n volte, se l'ordine è rilevante?

Soluzione. Ognuno degli n esperimenti consistenti nel lancio della moneta ha 2 possibili esiti, e quindi i risultati possibili sono $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$.

Ad esempio, per $n = 3$ si hanno 8 risultati: $ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt$.

Esempio. Si lancia un dado e poi si lanciano tante monete pari al risultato del lancio del dado. Quanti sono gli esiti finali possibili?

Soluzione. Gli esiti possibili sono $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \sum_{i=1}^6 2^i = 2^7 - 2 = 126$, avendo usato la formula $\sum_{i=1}^n x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$, valida per $x \neq 1$.

Esempio. In quanti modi si possono scegliere r oggetti in un insieme di n oggetti, se l'ordine delle scelte è rilevante? (Corrisponde a estrazioni senza reinserimento)

Soluzione. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si estraggono in sequenza 6 biglie da un'urna contenente 90 biglie distinte (tenendo conto dell'ordine delle estrazioni)?

Soluzione. Nella prima estrazione vi sono 90 possibili risultati, nella seconda ve ne sono 89, e così via nella sesta ve ne sono 85, quindi i risultati possibili sono in tutto $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$.

Esempio. Si consideri il seguente grafo. Avendo a disposizione 3 colori distinti, in quanti modi è possibile colorare i nodi del grafo dando colori diversi a nodi adiacenti? Cosa cambia se si aggiunge un arco che congiunge N_1 a N_4 ?



Soluzione. Vi sono $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ colorazioni possibili. Nel secondo caso 18.

1.3 Permutazioni

In quanti modi si possono ordinare le lettere a, b, c ? Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio i casi possibili sono $3 \times 2 \times 1 = 6$: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Ciascuno di questi ordinamenti prende il nome di *permutazione*.

Le permutazioni distinte di n oggetti sono $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

$0! = 1$	$10! = 3\,628\,800$
$1! = 1$	$11! = 39\,916\,800$
$2! = 2$	$12! = 479\,001\,600$
$3! = 6$	$13! = 6\,227\,020\,800$
$4! = 24$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$5! = 120$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$6! = 720$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$7! = 5\,040$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$8! = 40\,320$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$9! = 362\,880$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Sapendo che le 10 esecuzioni hanno avuto termine in istanti diversi,

- (a) quanti sono i possibili elenchi dei programmi?
- (b) quanti sono i possibili elenchi, se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C?

Soluzione. (a) Ad ogni elenco corrisponde una possibile permutazione di 10 oggetti, quindi la risposta è $10! = 3\,628\,800$.

(b) Vi sono $4!$ elenchi dei programmi in C e $6!$ elenchi dei programmi in Java; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono quindi $4! \cdot 6! = 24 \cdot 720 = 17\,280$ diversi elenchi se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C.

Esempio. Quanti sono gli anagrammi di S T A T I S T I C A ?

Soluzione. Se le 10 lettere da permutare fossero distinte vi sarebbero $10! = 3\,628\,800$ permutazioni possibili. Tuttavia le lettere non sono distinte: se permutiamo le lettere S tra di loro, le lettere T tra di loro, le lettere A tra di loro, e le lettere I tra di loro, si ottiene comunque la stessa parola. Il numero di anagrammi distinti è quindi

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2} = 75\,600.$$

Permutazioni di oggetti non tutti distinti

Un ragionamento analogo a quello svolto nell'esempio precedente mostra che vi sono

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

permutazioni distinte di n oggetti presi da r categorie, dei quali n_1 sono identici fra loro, n_2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti, \dots , n_r sono identici fra loro e distinti dai precedenti, con

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r.$$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Quanti sono i possibili elenchi dei programmi se è indicato solo il loro linguaggio?

Soluzione. Trattandosi di permutazioni di oggetti non tutti distinti, gli elenchi possibili sono

$$\frac{10!}{4!6!} = \frac{3\,628\,800}{24 \cdot 720} = 210.$$

Esempio. Quanti sono i vettori booleani di dimensione n costituiti da k bit pari a 1 e da $n - k$ bit pari a 0?

Soluzione. I possibili vettori siffatti sono $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Per $n = 4$ e $k = 2$ i vettori sono $\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$: 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100.

Esempio. In una giornata di un campionato di calcio vi sono 10 partite, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). (i) Quanti sono i risultati possibili? (ii) Quante sono le sequenze di risultati possibili se vi sono 5 vittorie in casa e 3 pareggi?

Soluzione. (i) I possibili risultati sono $3^{10} = 59\,049$.

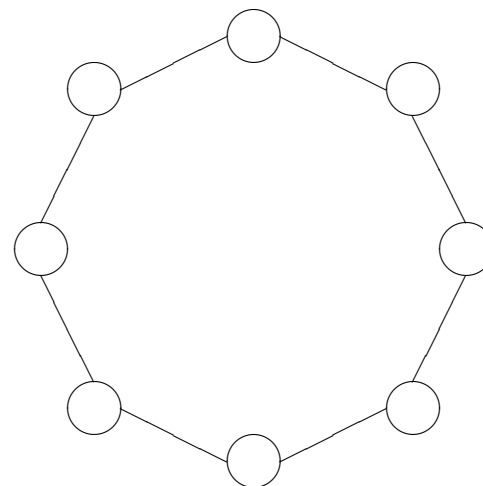
(ii) Nel caso di 5 vittorie in casa e 3 pareggi, allora le sequenze di risultati possibili sono

$$\frac{10!}{5! 3! 2!} = 2\,520.$$

Esercizio. Quante configurazioni si possono realizzare disponendo n oggetti in un allineamento circolare?

Soluzione. $n!/n = (n - 1)!$

poiché per ogni permutazione ve ne sono n equivalenti.



1.4 Disposizioni e combinazioni

Quanti insiemi di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti?

Per risolvere questo problema va specificato se gli insiemi da formare sono *ordinati* (in cui l'ordine è rilevante) o *non ordinati* (dove l'ordine non è rilevante).

Nel caso di insiemi *ordinati* le sequenze da formare si dicono **disposizioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **disposizioni con ripetizioni**.

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio

– il numero di disposizioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D_{n,r} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

dove $(n)_r := n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ è detto *fattoriale discendente*;

– il numero di disposizioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D'_{n,r} = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r.$$

Esempio. Quante parole di lunghezza 2 si possono formare da un alfabeto di 4 lettere

(a) se le lettere non possono ripetersi?

(b) se le lettere possono ripetersi?

Soluzione. (a) Si tratta di disposizioni semplici di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D_{4,2} = (4)_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

$(ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc)$

(b) Si tratta di disposizioni con ripetizioni di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.

$(aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd)$

Esempio. Da un'urna che contiene n biglie numerate da 1 a n si effettuano k estrazioni a caso. Quante sono le sequenze distinte ottenibili se le estrazioni

(a) si effettuano senza reinserimento?

(b) si effettuano con reinserimento?

Soluzione. (a) $(n)_k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$; (b) n^k .

(**) **Esempio.** Quante sono le operazioni distinte definite su 2 variabili booleane?

Soluzione. Essendo $x_1 \in \{0, 1\}$ e $x_2 \in \{0, 1\}$, vi sono 4 coppie (x_1, x_2) distinte. Ad ognuna di queste si può assegnare valore 0 o 1. Si tratta quindi di determinare il numero di disposizioni con ripetizioni di 2 oggetti (i valori 0 e 1) in quattro classi (le coppie (x_1, x_2)); vi sono pertanto $D'_{2,4} = 2^4 = 16$ operazioni distinte.

x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge \overline{x_2}$	x_1	$\overline{x_1} \wedge x_2$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \vee x_2$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(\wedge = AND, \vee = OR, \oplus = OR ESCLUSIVO)

Consideriamo il problema di determinare quanti insiemi non ordinati di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti.

Nel caso di insiemi *non ordinati* le sequenze si dicono **combinazioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **combinazioni con ripetizioni**.

In generale, dato che $(n)_r = n(n-1) \cdots (n-r+1)$ rappresenta il numero di scelte di r oggetti tra n , tenendo conto dell'ordine nel quale questi vengono selezionati, e dato che ogni insieme di r oggetti viene in tal modo contato $r!$ volte, si ha che il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare da un insieme di n oggetti è

$$C_{n,r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \frac{(n)_r}{r!}.$$

Notiamo anche che $D_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$, in quanto il numero di sequenze ordinate è uguale al numero di sequenze non ordinate per il numero di permutazioni di r oggetti, e pertanto

$$C_{n,r} = \frac{D_{n,r}}{r!} = \frac{(n)_r}{r!}$$

Per $r = 0, 1, \dots, n$ definiamo il *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Se $r < 0$ o se $r > n$ si pone

$$\binom{n}{r} = 0.$$

Il numero $C_{n,r}$ di combinazioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Questo denota il numero di sottoinsiemi di dimensione r che si possono formare con gli elementi di un insieme di dimensione n senza tener conto dell'ordine della selezione.

Il numero $C'_{n,r}$ di combinazioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C'_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \frac{(n+r-1)_r}{r!} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}.$$

Tabella riepilogativa

	Disposizioni (l'ordine è rilevante)	Combinazioni (l'ordine non è rilevante)
semplici (senza ripetizioni)	$D_{n,k} = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$
composte (con ripetizioni)	$D'_{n,k} = n^k$	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Esempio. Quante combinazioni di 4 oggetti in gruppi di 2 si possono formare

- (a) nel caso di combinazioni semplici? (gli oggetti non possono ripetersi)
- (b) nel caso di combinazioni con ripetizioni? (gli oggetti possono ripetersi)

Soluzione. (a) $C_{4,2} = (4)_2/2! = (4 \cdot 3)/2 = 6$ (ab, ac, ad, bc, bd, cd).

(b) $C'_{4,2} = (5)_2/2! = (5 \cdot 4)/2 = 10$ ($aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd$).

Esempio. In quanti modi si possono scegliere 3 oggetti da un insieme di 20?

Soluzione. $C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$.

Esempio. Una classe di tango argentino ha 22 studenti, 10 donne e 12 uomini. In quanti modi si possono formare 5 coppie?

Soluzione. Vi sono $\binom{10}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 10 donne, $\binom{12}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 12 uomini, e $5!$ modi di accoppiare 5 donne con 5 uomini, quindi la soluzione è $\binom{10}{5} \binom{12}{5} 5! = 252 \cdot 792 \cdot 120 = 23\,950\,080$.

Esempio. (a) Quanti comitati composti da 2 donne e 3 uomini si possono formare da un gruppo di 5 donne e 7 uomini? (b) Quanti sono i comitati se 2 uomini che hanno litigato rifiutano di sedere insieme nel comitato?

Soluzione. (a) Ci sono $\binom{5}{2}$ possibili insiemi con 2 donne, e $\binom{7}{3}$ possibili insiemi di 3 uomini; segue allora dal principio fondamentale del calcolo combinatorio che vi sono

$$\binom{5}{2} \binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350 \quad \text{comitati possibili formati da 2 donne e 3 uomini.}$$

(b) Se due uomini rifiutano di far parte insieme nel comitato, vi sono $\binom{2}{0} \binom{5}{3}$ insiemi di 3 uomini che non contengono nessuno dei 2 litiganti, e $\binom{2}{1} \binom{5}{2}$ insiemi di 3 uomini che contengono esattamente 1 dei 2 litiganti, e quindi vi sono $\binom{2}{0} \binom{5}{3} + \binom{2}{1} \binom{5}{2} = 30$ gruppi di 3 uomini senza i 2 litiganti. In totale vi sono $30 \cdot \binom{5}{2} = 300$ comitati.

Notiamo che il numero di comitati che contengono i 2 uomini che hanno litigato è:
 $\binom{5}{2} \binom{2}{2} \binom{5}{1} = 50.$

Esempio. Quanti sono i risultati possibili nel gioco del Superenalotto?

Soluzione. Se si tiene conto dell'ordine delle estrazioni, i possibili risultati sono $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$. Dividendo per il numero di possibili permutazioni dei numeri estratti, pari a $6! = 720$, si ottiene il numero dei risultati possibili nel gioco del Superenalotto (ossia senza tener conto dell'ordine delle estrazioni):

$$\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{6!} = \frac{448\,282\,533\,600}{720} = 622\,614\,630.$$

Esempio. Un network è costituito da n nodi. Quanti sono i collegamenti diretti che si possono attivare tra ciascun nodo e tutti i nodi rimanenti?

Soluzione. Ragionando nodo per nodo si ha che il numero di collegamenti diretti è $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$. Inoltre la soluzione coincide col numero di combinazioni semplici di n oggetti in 2 classi:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{pertanto} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esempio. In un centro di calcolo 4 elaboratori devono smaltire 3 carichi di lavoro. (a) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi? (b) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi se ciascun elaboratore può smaltire al più un solo carico?

Soluzione. (a) Si tratta di combinazioni con ripetizioni (l'ordine non è rilevante). Quindi le possibili distribuzioni sono $\mathcal{C}'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$, e sono così rappresentabili: 0111, 1011, 1101, 1110, 0012, 0102, 1002, 0021, 0120, 1020, 0201, 0210, 1200, 2001, 2010, 2100, 0003, 0030, 0300, 3000.

(b) Poiché non sono ammesse ripetizioni la soluzione è $\mathcal{C}_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$.

Tavola (di Tartaglia-Newton) dei coefficienti binomiali

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	somma
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$1 = 2^0$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$2 = 2^1$
2	1	2	1	0	0	0	0	0	$4 = 2^2$
3	1	3	3	1	0	0	0	0	$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1	0	0	0	$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1	0	0	$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	0	$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$128 = 2^7$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n; \quad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n.$$

(**) Dimostrazione analitica

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r(r-1)!(n-r-1)!} \\ &= \left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r} \right] \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} = \frac{n}{r(n-r)} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} = \binom{n}{r}. \end{aligned}$$

(**) **Esercizio.** Realizzare un programma che usi la formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali per ottenere la tavola di Tartaglia-Newton per $\binom{n}{r}$, $0 \leq r \leq n \leq N$, con N assegnato. Quali sono le condizioni iniziali da usare?

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n.$$

(**) Dimostrazione combinatoria

Si basa sul fatto che i sottoinsiemi di r elementi di un insieme di n oggetti sono $\binom{n}{r}$. Consideriamo un insieme di n oggetti e fissiamo l'attenzione su uno di essi, che chiamiamo *oggetto 1*. Vi sono $\binom{n-1}{r-1} \binom{1}{1}$ sottoinsiemi di r elementi che contengono l'oggetto 1. Inoltre vi sono $\binom{n-1}{r} \binom{1}{0}$ sottoinsiemi di r elementi che non contengono l'oggetto 1. La somma dei termini $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ fornisce il numero $\binom{n}{r}$ di sottoinsiemi di r elementi.

Un generico sottoinsieme A di un insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ può essere rappresentato da un vettore booleano (x_1, x_2, \dots, x_n) , dove $x_i = 1$ se $a_i \in A$ e $x_i = 0$ altrimenti, per $i = 1, 2, \dots, n$. Quindi ad ogni sottoinsieme corrisponde un solo vettore e viceversa. Poiché in totale vi sono 2^n vettori, tanti sono i possibili sottoinsiemi. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ vettori aventi k bit pari a 1, tanti sono i sottoinsiemi di cardinalità k , per $k = 0, 1, \dots, n$.

Esempio. Per $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ sottoinsiemi di $\{a, b, c, d\}$:

$(0, 0, 0, 0) : \{\}$	$(1, 0, 0, 0) : \{a\}$
$(0, 0, 0, 1) : \{d\}$	$(1, 0, 0, 1) : \{a, d\}$
$(0, 0, 1, 0) : \{c\}$	$(1, 0, 1, 0) : \{a, c\}$
$(0, 0, 1, 1) : \{c, d\}$	$(1, 0, 1, 1) : \{a, c, d\}$
$(0, 1, 0, 0) : \{b\}$	$(1, 1, 0, 0) : \{a, b\}$
$(0, 1, 0, 1) : \{b, d\}$	$(1, 1, 0, 1) : \{a, b, d\}$
$(0, 1, 1, 0) : \{b, c\}$	$(1, 1, 1, 0) : \{a, b, c\}$
$(0, 1, 1, 1) : \{b, c, d\}$	$(1, 1, 1, 1) : \{a, b, c, d\}$

Teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \geq 1.$$

$\binom{n}{k}$ è detto *coefficiente binomiale* perché interviene nello sviluppo del binomio.

(★★) **Esercizio.** Dimostrare il teorema del binomio per induzione su n .

Esempio. Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Soluzione. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di dimensione k , dal teorema del binomio per $x = y = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

(Si veda anche l'ultima colonna della tavola dei coefficienti binomiali).

Nella somma $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ è incluso il caso $k = 0$ che corrisponde all'insieme vuoto.

Quindi il numero di sottoinsiemi non vuoti di un insieme di n elementi è

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Analogamente, il numero di sottoinsiemi costituiti da almeno 2 elementi è

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = 2^n - n - 1.$$

Esercizio. Utilizzare il teorema del binomio per dimostrare che

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \quad n > 0.$$

(**) **Proposizione.** Per ogni $n \geq k \geq 0$ sussiste la seguente identità:

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dimostrazione. Procedendo per induzione su n , notiamo che per $n = k$ l'identità è valida, essendo

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1.$$

Supponendo valida l'identità per n , vediamo che essa sussiste anche per $n+1$. Si ha

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}.$$

Ricordando la formula di ricorrenza $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ si ottiene

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \binom{n+2}{k+1}, \text{ da cui segue immediatamente la tesi.}$$

Esempio. Calcolare quanti sono i vettori (x_1, \dots, x_k) nei quali

- (a) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$;
- (b) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre ogni x_i è diverso da ciascun intero x_1, x_2, \dots, x_{i-1} ;
- (c) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre $x_1 < x_2 < \dots < x_k$;
- (d) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$.

Soluzione. (a) $D'_{n,k} = n^k$; (b) $D_{n,k} = (n)_k$; (c) $C_{n,k} = \binom{n}{k}$; (d) $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

(★★) **Esercizio.** Realizzare un programma che, per valori di k e di n assegnati,

- (i) generi tutte le sequenze dei 4 casi dell'esercizio precedente;
- (ii) conti quante sequenze sono state generate;
- (iii) valuti le quantità n^k , $(n)_k$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k}$;
- (iv) verifichi che i numeri di sequenze generate nei 4 casi corrispondano alle quantità valutate al punto (iii).

(★★) **Esercizio.** Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \cdots \sum_{\substack{i_k=1 \\ i_k \neq i_r \ \forall r < k}}^n 1 &= (n)_k, & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n 1 &= n^k, \\ \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}-1} 1 &= \binom{n}{k}, & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} 1 &= \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Proposizione. Sussiste la seguente uguaglianza (detta di Vandermonde):

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{m}{0}.$$

Per la dimostrazione, si può procedere per via combinatoria. Ad esempio, considerando n biglie nere e m biglie bianche. In quanti modi si può formare un sacchetto di k biglie?

Esempio. Da un lotto di $N = 20$ pezzi costituito da 4 pezzi difettosi e 16 buoni si estraggono $n = 10$ pezzi a caso.

- (a) Quanti sono i possibili campioni che non contengono pezzi difettosi?
- (b) Quanti sono i possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni?
- (c) Quanti sono i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi?

Soluzione. (a) I possibili campioni che non contengono pezzi difettosi sono:

$$\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = \frac{(16)_6}{6!} = 8\,008.$$

(b) I possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni sono:

$$\binom{4}{1} \binom{16}{9} = 4 \binom{16}{7} = 4 \frac{(16)_7}{7!} = 45\,760.$$

(c) Facendo uso della formula di Vandermonde si ha che i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi sono:

$$\binom{20}{10} - \binom{16}{10} - \binom{4}{1} \binom{16}{9} = \frac{(20)_{10}}{10!} - 8\,008 - 45\,760 = 184\,756 - 53\,768 = 130\,988.$$

Esempio. Un lotto di 4 computer distinti deve essere assegnato a 2 laboratori.

- (a) In quanti modi può essere fatto?
- (b) E se ogni laboratorio deve ricevere almeno un computer?

Soluzione. (a) Assegnando k computer al primo laboratorio e $4 - k$ al secondo laboratorio, l'assegnazione dei computer si può effettuare in $\binom{4}{k}$ modi; si ha quindi:

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} = 2^4 = 16;$$

tenendo conto che ogni computer può essere assegnato a ciascuno dei 2 laboratori, la soluzione è anche esprimibile come $D'_{2,4} = 2^4 = 16$.

- (b) In questo caso si ha:

$$\sum_{k=1}^3 \binom{4}{k} = 2^4 - \binom{4}{0} - \binom{4}{4} = 14.$$

Esercizi per casa

1.1) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n

- (i) che hanno almeno un elemento uguale a **1**?
- (ii) che hanno solo i primi due elementi uguali a **1**?
- (iii) che hanno tutti gli elementi uguali?

1.2) In una città ci sono 5 alberghi.

- (i) In quanti modi 3 persone possono scegliere un albergo dove pernottare?
- (ii) Cosa cambia se ogni persona deve scegliere un albergo diverso?

1.3) (i) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n ?

- (ii) Quanti sono i suddetti vettori con esattamente k elementi uguali a **0**?
- (iii) Quanti sono i suddetti vettori se i primi k elementi sono uguali?

1.4) Sia $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$; determinare

- (i) il numero di sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che contengono il numero 1;
- (ii) il numero dei sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che non contengono numeri pari.

1.5) Una squadra è formata da 11 titolari e 9 riserve. Selezionando 4 persone della squadra,

- (i) quanti raggruppamenti distinti si possono formare?
- (ii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti un solo titolare?
- (iii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti almeno un titolare?

1.6) In quanti modi si possono disporre in fila 5 donne e 4 uomini in modo che 2 uomini non siano mai consecutivi?

1.7) Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono esattamente due volte la cifra 1, esattamente due volte la cifra 2 e non contengono lo 0?

1.8) Stabilire quante sono le sequenze del tipo abc tali che

(i) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a > b > c$;

(ii) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a \geq b \geq c$.

1.9) Calcolare le seguenti somme:

$$(i) \quad \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^7 \binom{8}{k} \qquad (iii) \quad \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} \binom{4}{3-i}$$

1.10) Calcolare le seguenti espressioni:

$$(i) \quad \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 2^k \qquad (ii) \quad \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 2^n \qquad (iii) \quad \sum_{k=1}^3 \binom{4}{k} 2^k 3^{n-k}$$