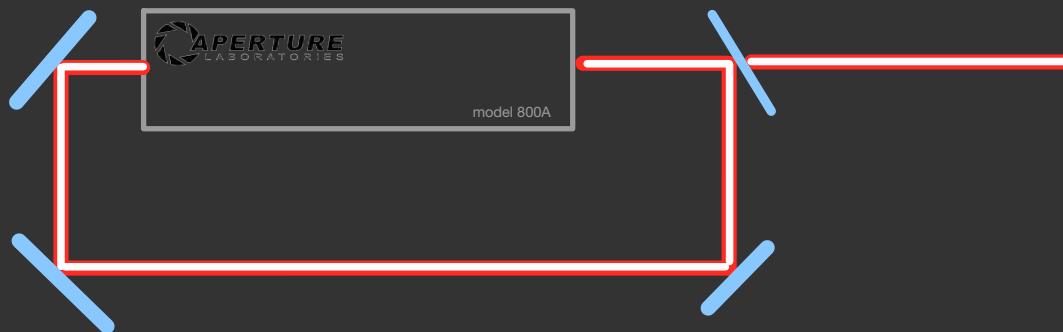
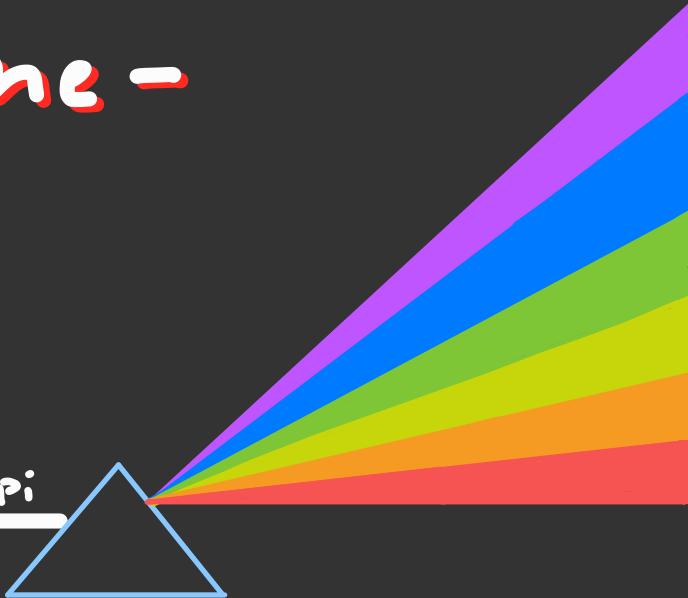


Fondamenti di Interazione

Radiazione - Materiali

A.A. 2019/20 UniPi

Francesco Sacco

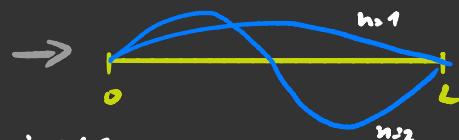


Campo Elettro-Magnetico in Una Cavità

$V(\vec{r}) \Rightarrow$ se \vec{r} si trova fuori un quadrato di lato L con uno spigolo centrale nell'origine e

$$V(\vec{r}) \propto \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Ogni componente permette di annullare il potenziale agli estremi e forma comunque una base



Derivando rispetto a z/L x si ottiene

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \cos\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right)$$

Normalizzazione

L'energia di un fotone in funzione di \vec{n} è

$$E_{\vec{n}} = \omega_{\vec{n}} = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2} = c \frac{n \pi}{L} |\vec{n}|.$$

Normalmente la radiazione interagisce in un qualche modo misterioso col proprio contenitore, quindi dopo un po' di tempo radiazione e contenitore vanno all'equilibrio termico.

Le probabilità di trovarsi in uno stato con energia E

$$P(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}}$$

il potenziale chimico non spunta perché è nullo, infatti dall'eq
Termo dinamico si ha che $q = \frac{\partial E}{\partial N}$
dove N è il numero di fotoni.

Questo perché è possibile che un atomo assorba un fotone e ne emetta 2 tali che $w_2 = w_1 w_2$, quindi N è cambiato ma E no $\rightarrow \frac{\partial E}{\partial N} > 0 \Rightarrow q > 0$

Visto che i fotoni sono particelle non interagenti, possiamo concentrarci sulla probabilità che esistano n_k fotoni e un singolo vettore d'onda \vec{k}

$$P(E(n_k, \vec{k})) = \frac{e^{-\beta E}}{\sum_{n_k} e^{-\epsilon n_k / k_B T}}$$

definisce E il quanto di energia $E = h\nu = \hbar c k$

$$\sum_{n_k} e^{-\frac{\epsilon n_k}{k_B T}} = \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1}$$

$$P(E) = e^{-\frac{\epsilon n_k}{k_B T}} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)$$

il numero medio di fotoni è

$$\begin{aligned} \overline{n_k} &= \sum_{n_k} n_k P(E) = \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \sum_{n_k} n_k e^{-\frac{\epsilon n_k}{k_B T}} = \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \cdot \left(-k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon}\right) \sum_{n_k} e^{-\frac{\epsilon n_k}{k_B T}} = \\ &= -k_B T \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1} = \quad \text{ho sfruttato} \\ &= k_B T \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{k_B T} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} : \quad \text{che } F d\frac{1}{F} = d\frac{F}{F} - \frac{1}{F} dF \\ &= \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} \quad \leftarrow \text{Questo rappresenta il numero medio di fotoni con energia } E = \hbar\nu \end{aligned}$$

$$\text{La densità di stato: } D(w) dw = 2 \cdot 9 \pi n^2 dw = 8 \frac{\pi}{\hbar} \left(\frac{w}{\pi c}\right)^3 w^2 dw$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{w}{c}\right)^3 w^2 dw \quad \leftarrow \text{Nel libro di testo manca } L^3 \text{ perché per loro è la densità di stato per unità di volume.}$$

La distribuzione di energia c'è quindi:

$$W(w) = \bar{n} \hbar w D(w) dw = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{\pi}{\hbar^2} \frac{w^3 dw}{e^{\frac{E_w}{k_B T}} + 1} = \begin{cases} X \equiv \frac{h w}{k_B T} \\ = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{\pi}{\hbar^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{x^3 dx}{e^x + 1} \end{cases}$$

Se voglio l'energia media totale mi basta integrare.

Gli integrali del tipo $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1} dx = I^2(n+1) \{ (n+1) \} \in I_n$

\nwarrow zeta di Riemann

nel caso $n=3$ $I_3 = 6.93 \dots$

$$\bar{E}(T) \approx \left(\frac{2L}{\pi c}\right)^3 (k_B T)^3 \frac{6.93}{\hbar^2}$$

Fluttuazione $\langle n \rangle$

I fotoni possono essere assorbiti e riamessi dai bordi quindi il loro numero può fluttuare

$$\Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2; \quad \bar{n} = \frac{1}{N} \sum_n n^2 e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{n} =$$

$$- \frac{k_B T}{\hbar^2} \frac{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}}}{(e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} - 1)^2} = \bar{n}^2 e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} \quad \Delta n^2 = \bar{n}^2 (e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} - 1) = \bar{n}$$

$$\boxed{\Delta n^2 = \bar{n}}$$

Questo dice quanto fluttuano i fotoni a w fisso.

Sistemi radiazione - materia 2 2 livelli

Supponiamo di avere un sistema quantistico 2 2 livelli energetici con degenerazione $g_1 = g_2$ e con N_1, N_2 particelle l'uno.

Il sistema è immerso in una radiazione eletromagnetica

$$N = N_1 + N_2 \quad \frac{dN}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 g_1 A_{21} + N_2 g_1 B_{21} W(\omega) - N_1 g_2 B_{12} W(\omega)$$

Quante particelle ci sono nello stato 2
Quanti stati ci sono

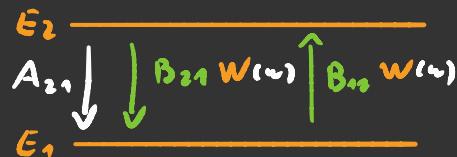
Probabilità per unità di tempo (Rate) che una particella nello stato 2 finisce in uno stato 1

All'equilibrio $N_1 = 0$, quindi

$$N_2 g_1 [A_{21} + B_{21} W(\omega)] = N_1 g_2 B_{12} W(\omega)$$

$$\frac{N_2 g_1}{N_1 g_2} = \frac{B_{12} W(\omega)}{A_{21} + B_{21} W(\omega)} \quad W \text{ in generale è compreso da due termini } W(\omega) = W_T(\omega) + W_E(\omega)$$

- W_T è il contributo termico (vedi pagina di prima)
- W_E è un contributo esterno (tipo un raggio laser)
 - Questo contributo può dipendere dallo spazio



$$\text{Adesso supponiamo che } W(u) = W_T(u) = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} \frac{u^3}{e^{\frac{h u}{k_B T}} - 1}$$

Risolvendo l'equazione di primz per $W(u)$

$$N_2 g_1 [A_{21} + B_{21} W(u)] = N_1 g_2 B_{12} W(u)$$

$$W(u) = \frac{N_2 g_1 A_{21}}{N_1 g_2 B_{12} - N_2 g_1 B_{21}} = \frac{A_{21}}{\frac{N_1 g_1}{N_2 g_2} B_{12} - B_{21}}$$

Visto che siamo all'equilibrio termico $N_1/N_2 = e^{-\frac{h u}{k_B T}}$

$$W(u) = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} B_{12} e^{\frac{h u}{k_B T}} - B_{21}} = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} \frac{u^3}{e^{\frac{h u}{k_B T}} - 1}$$

$$\text{Si ottiene che } \frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21} \text{ e che } \frac{A_{21}}{B_{21}} = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \frac{h}{\pi^2} u^3 \equiv w_s$$

Per far sì che il denominatore sia proporzionale a $e^{\frac{h u}{k_B T}}$

Per aggiungere il resto

Viste che i coefficienti NON dipendono dalla radiazione queste due equazioni qui sopra valgono sempre.

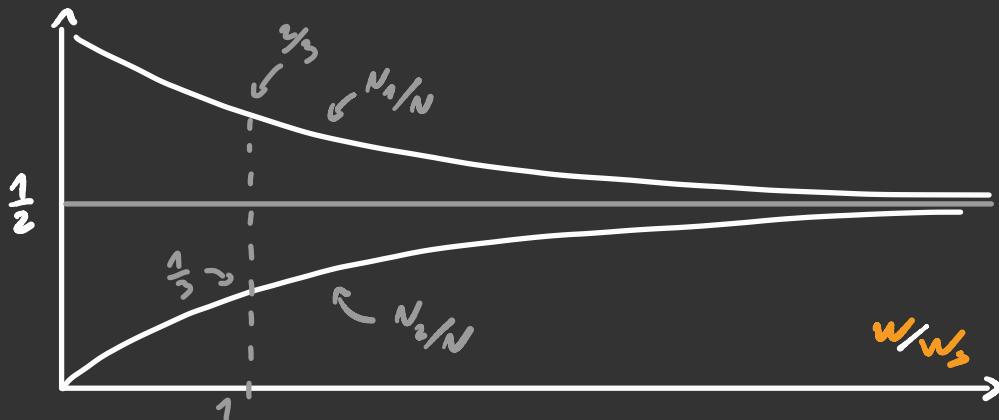
Supponiamo che il nostro sistema venga tenuto all'equilibrio da una radiazione stazionaria $W \neq W_T$. Vogliamo vedere come si distribuiscono N_1 e N_2

$$N_2 g_1 A_{21} + N_2 g_1 W B_{21} - N_1 g_2 W B_{12} = 0$$

$$N_2 w_s + (N_2 \cdot N_1) W = 0 \quad N(w_s + W) = N_1 (w_s + 2W)$$

$$N_1 = N \frac{w_s + W}{w_s + 2W} \quad N_2 = N \frac{W}{w_s + 2W}$$

Ecco qua una rappresentazione grafica delle ultime 2 equazioni:

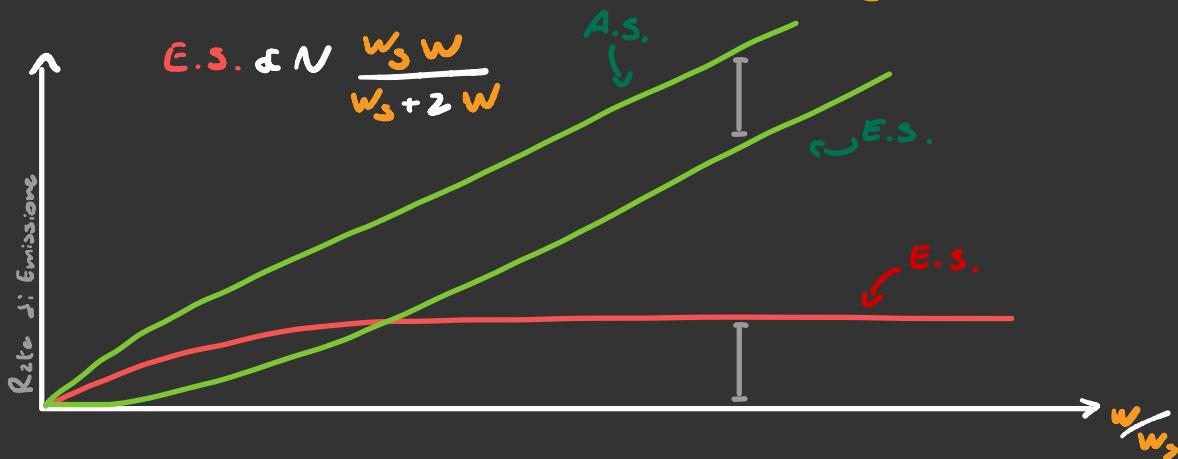


Adesso sarebbe curioso vedere cosa succede al rate dei vari tipi di emissione al variare di w/w_s

Assorbimento stimolato	$\hbar \omega g_2 B_{21} N_1 w$
Emissione stimolata	$\hbar \omega g_1 B_{21} N_2 w$
Emissione spontanea	$\hbar \omega g_1 A_{21} N_2$

Se divido tutto per $\hbar \omega g_1 B_{21}$ ottengo che

$$\text{A.S.} \propto N_1 w = N w \frac{w_s + w}{w_s + 2w} \quad \text{E.S.} \propto N \frac{w^2}{w_s + 2w}$$



Attenuazione

Supponiamo di avere un'onda elettromagnetica incidente sul nostro sistema a 2 livelli. Il sistema quando assorbe l'onda fa una emissione stimolata che rientra il fotone nella stessa direzione dell'onda incidente. Quando invece fa emissione spontanea la direzione del fotone uscente è casuale.

L'energia dissipata per unità di tempo è quindi uguale a

$$\dot{W} = -\gamma_1 \hbar \omega A_{21} N_2 = -\gamma_1 \hbar \omega A_{21} N \frac{w}{w_s + 2w}$$

Si può risalire esattamente, ma con Freghiziano

Adezzo facciamo la supposizione - Approssimazione che $w_s \gg w$

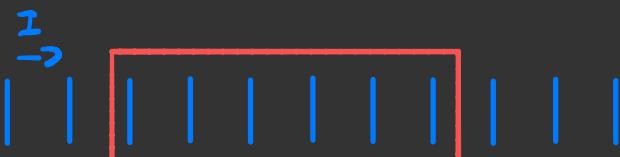
$$w(t) = w(0) \exp[-\gamma_1 \hbar \omega B_{21} N t]$$

Equivale a dire che la luce che stiamo vedendo quanto velocemente è molto più forte di quella di corpo nero nella stessa Frequenza.

Se consideriamo un mezzo fatto da tanti di questi ci aspettiamo che

Queste ipotesi è vera nella maggior parte dei casi, ad esempio se vogliamo vedere quanto velocemente si attenua la luce del laser dobbiamo acciorgarci che la luce rossa del laser sia molto più forte della luce rossa proveniente dalla radiazione di corpo nero dell'ambiente circostante

$$I(x) = I(x=0) e^{-Kx}$$



Inoltre $I = c w$ e

$$\frac{dI}{dx} = \frac{dW}{dt} \quad \text{quindi: } I(x) = I(0) \exp\left[-\gamma_1 \hbar \omega B_{21} N \frac{x}{c}\right]$$

Il modo "corretto" di farlo sarebbe sostituire queste equazioni nella prima equazione di questa pagina.

Indice di diffrazione

Classicamente, il modo in cui i fotoni interagiscono con la luce è descritto dalla costante dielettrica $\epsilon(\omega)$.

Essa è collegata a quanto dissipativo è un mezzo.

Supponiamo di avere un'onda E.M. descritta da queste equazioni

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \exp[iKx - i\omega t]$$

Se siamo in un mezzo abbiamo che

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \text{Indice di diffrazione}$$

Alcuni mezzi tendono ad attenuare l'onda E.M., quindi:

$E(x,t)$ ha un andamento esponenziale decrescente.

Questo succede quando l'indice di diffrazione ha delle componenti immaginarie

$$E(x,t) = E_0 \exp[iK'x - i\omega t] e^{-K''x}$$

$$I(x) = \frac{\epsilon_0 |E(x)|^2}{2} = \frac{\epsilon_0 |E(x=0)|^2}{2} e^{-2K''x} = I(x=0) e^{-2K''x}$$

Possiamo scrivere K'' in termini di $n(\omega)$: $K'' = \frac{\omega}{c} n''(\omega)$ che a sua volta può essere collegata con la costante dielettrica e la suscettività:

$$n''(\omega) = \chi(\omega) = 1 + \chi(\omega)$$

Una proprietà di χ che è più interessante di quel che sembra è che deve essere analitica per $\text{Im}(w) > 0$. Se così non fosse si violerebbe la relazione di causalità $E(t) \rightarrow P(t)$

Dimostrazione

$$P(w) = \chi(w) E(w) \rightarrow P(t) = \int \chi(t-t') E(t') dt'$$

Se ad esempio $E(t') = \delta(t')$ $P(t) = \chi(t-t')$, chiaramente

cioè non deve avere nessun effetto nel passato, quindi:

$\chi(t-t') = 0$ se $t < t'$, o alternativamente $\chi(t) = 0$ per $t < 0$

Visto che $\chi(t) \in \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(w) e^{-iwt} dw = \frac{i}{2\pi} \sum \text{Residui}$

Per $t > 0$ si somma sui residui dove $\text{Im} w < 0$, altrimenti:

si sommano sui residui per $\text{Im} w > 0$. Se $\chi(w) \neq 0$ per $\text{Im} w \neq 0$

è analitica, abbiamo che non ci sono residui, quindi $\chi(t) = 0$ per $t > 0$.

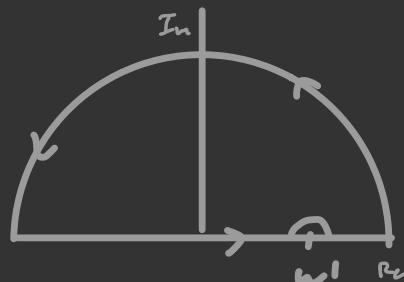
A dire il vero c'è una dimostrazione che dimostra che l'analiticità è necessaria e non solo sufficiente, ma è più lunga

Inoltre se conosciamo la parte immaginaria di $\chi(w)$ è possibile ricavarsi quella reale grazie alle relazioni di Kramers-Koenig, infatti visto che $\chi(w)$ è analitica

$$\chi(w) = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w'-w} dw$$

Quindi:

$$\chi'(w) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(w')}{w'-w} dw$$



Questo significa che conoscendo i livelli energetici e i coefficienti di Einstein è possibile calcolarsi le proprietà ottiche di un materiale (e vice versa).

LASER

Come visto prima in un sistema a 2 livelli la luce che passa viene attenuata. Questo perché $N_2 < N_1$. È possibile in un sistema a 3 livelli rendere $N_2 > N_1$ pompando dal livello 0 particolari E_2 al livello 2.

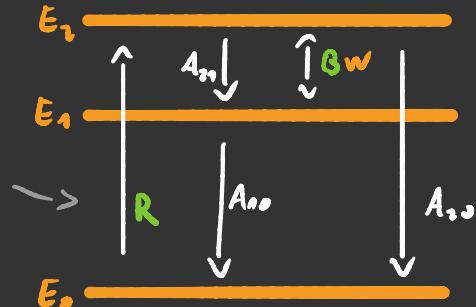
R è un valore che può essere modificato a piacere, gli elettroni possono essere pompati anche senza dover incidere sulla luce a frequenza ω_0 .

Per semplificare supponiamo che i livelli non siano degeneri.

Adesso precisiamo i conti

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0 + N_1 + N_2 = N \\ \frac{dN_2}{dt} = -N_0 R + N_1 A_{20} + N_2 A_{02} \\ \frac{dN_2}{dt} = N_0 R - N_2 (A_{21} + A_{20}) - BW(\omega) (N_2 - N_1) \\ \frac{dN_1}{dt} = N_2 A_{21} - N_1 A_{10} + BW(\omega) (N_2 - N_1) \end{array} \right.$$

A dire il vero una di queste 4 equazioni è ridondante, però scrivere non fa male a nessuno



Visto che siamo in un regime stazionario tutte le derivate temporali fanno zero.

Visto che vogliamo far sì che $N_2 > N_1$ basta risolvere per $N_2 - N_1$ e vedere che segno ha.

$$\begin{cases} N_0 R > N_1 A_{10} + N_2 A_{20} \\ N_0 + N_1 + N_2 = N \\ N_1(A_{10} + \text{BW}(\omega)) = N_2(A_{21} + \text{BW}(\omega)) \end{cases} \quad \text{Da qui si vede che } N_0 > N_1 \text{ se } A_{20} > A_{10}$$

$$\begin{cases} N_1 A_{10} + N_2 A_{20} = N_0 R \\ N_1(A_{10} + \text{BW}(\omega)) - N_2(A_{21} + \text{BW}(\omega)) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= N_1 + N_2 \rightarrow N_1 = \frac{x+y}{2} \\ y &= N_1 - N_2 \quad N_2 = \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}(A_{10} + A_{20}) + \frac{y}{2}(A_{10} - A_{20}) = N_0 R \\ \frac{x}{2}(A_{10} - A_{21}) + \frac{y}{2}(A_{20} + A_{21} + 2\text{BW}(\omega)) = 0 \end{cases} \quad \frac{y}{2} \left[(A_{10} - A_{20}) - (A_{10} + A_{21} + 2\text{BW}(\omega)) \frac{(A_{10} + A_{20})}{A_{10} - A_{20}} \right] = N_0 R$$

$$\frac{y}{2} [(A_{10} - A_{20})(A_{10} - A_{21}) - (A_{10} + A_{21} + 2\text{BW}(\omega))(A_{10} + A_{20})] = N_0 R (A_{10} - A_{21})$$

$$\frac{y}{2} [A_{10}^2 - A_{10}A_{21} - A_{20}A_{10} + A_{20}A_{21} - A_{10}^2 - A_{10}A_{20} - A_{21}A_{10} - A_{21}A_{20} - 2\text{BW}(A_{10} + A_{20})]$$

$$\frac{y}{2} [-2A_{10}A_{21} - 2A_{20}A_{10} - 2\text{BW}(A_{10} + A_{20})] = -y [\text{BW}(A_{10} + A_{20}) + A_{10}(A_{21} + A_{20})]$$

$$N_2 - N_1 = \frac{N_0 R (A_{10} - A_{21})}{(A_{10} + A_{20}) \text{BW}(\omega) + A_{10}(A_{21} + A_{20})}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (\text{Emissione} - \text{Assorbimento}) \text{ stimato da:}$$

$$= h\nu (N_2 - N_1) \text{BW}(\omega) =$$

$$= \frac{h\nu \text{BW}(\omega) N_0 R (A_{10} - A_{21})}{(A_{10} + A_{20}) \text{BW}(\omega) + A_{10}(A_{21} + A_{20})}$$

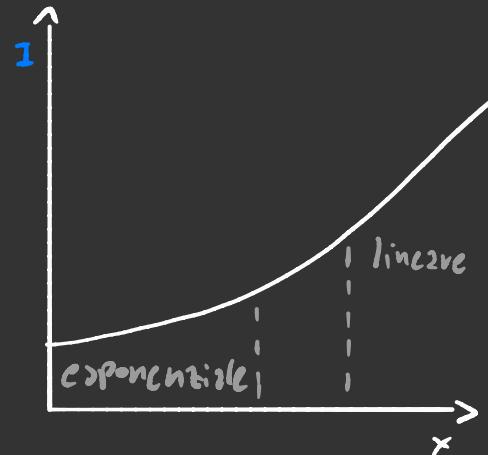
Fondamentalmente questa equazione differenziale è identica a quella ottenuta per il sistema a due livelli

Alessio vediamo come $I(x, \omega)$ si propaga dentro un mezzo fatto così

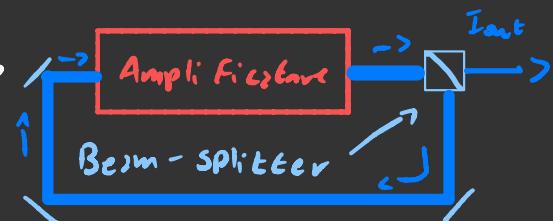
$\nwarrow N_0 \approx N$ Suppongo che le maggior parte delle particelle si trovino nello stato fondamentale

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{h\nu \text{BINR} (A_{10} - A_{21})}{(A_{10} + A_{20}) \text{BI} + C A_{10} (A_{21} + A_{20})}$$

Sento stare a risolvere esattamente l'equazione differenziale. Si può notare che quando I è piccolo la crescita è esponenziale, poi però diventa lineare.



Ora che abbiamo un sistema che amplifica la luce ci basterà metterlo a feedback per avere qualcosa di stabile.



A dire il vero non è fatto proprio così un laser.

Esso ha anzitutto camere di risonanza dove all'interno la radiazione viene amplificata e un po' può uscire fuori.



Supponiamo che i coefficienti di:

Riflessione e Trasmissione R e T siano uguali per entrambe le barriere, e che gli momenti non ci sia amplificazione.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_c e^{-ikL} = R \bar{E}_c e^{ikL} \quad \leftarrow \text{nella barriera a sinistra} \\ \bar{E}_c = T \bar{E}_{in} + R \bar{E}_c \quad \leftarrow \text{nella barriera a sinistra} \\ \bar{E}_{out} = T \bar{E}_c e^{ikL} \quad \leftarrow \text{nella barriera a destra} \end{array} \right.$$

Adezzo vogliamo E_{out} in funzione di E_{in}

$$\vec{E}_o = T \vec{E}_{in} + R^2 \vec{E}_o e^{iKL} \quad \vec{E}_o = \frac{T \vec{E}_{in}}{1 - (R e^{iKL})^2} \quad E_{out} = \frac{T^2 E_{in} e^{iKL}}{1 - (R e^{iKL})^2}$$

$$I_{out} = \left| \frac{T^2 e^{iKL}}{1 - (R e^{iKL})^2} \right|^2 \quad I_{in} = \frac{|T|^2 I_{in}}{|T|^2 + |R|^2 \sin^2(KL)}$$

Ora come ora tutte le equazioni in queste pagine sono state fatte supponendo che non ci sia amplificazione

Se vogliamo introdurre l'amplificazione basta aggiungere al fattore di fase una parte reale

$$e^{iKL} \rightarrow e^{iKL + jL/2}$$

Inoltre se il campo oscilla alla frequenza di risonanza

$$e^{iKL} = \pm 1 \quad \text{e se } j \text{ è piccolo, } e^{jL/2} = 1 + jL/2$$

$$E_{out} = \pm \frac{T^2 E_{in}}{1 - R^2 \left(1 + \frac{jL}{2}\right)^2} = \pm \frac{T^2 E_{in}}{|T|^2 - |R|^2 L^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Suppongo che} \\ R \text{ sia reale} \end{array}$$

Ora però bisogna capire quanto vale j , facendo queste approssimazioni

$$I_o(x) - I_o(0) \approx \frac{\partial I_o}{\partial x} \Big|_{x=0} x$$

possiamo dire che

$$I_o(x) \approx \left[1 + \frac{h \omega B N R (A_{10} - A_{20}) x}{(A_{10} + A_{20}) B I_o(0) + C A_{10} (A_{20} + A_{10})} \right] I_o(0)$$

$\Im X$ rappresenta l'amplificazione

Alessio semplifica un po' la notazione

$$\frac{BNR(A_{10} - A_{20})}{(A_{10} + A_{20})BI_s + CA_{10}(A_{20} + A_{10})} = \frac{G(w)}{1 + I_s/I_s} = \frac{G(w)}{1 + |E_s|^2/|E_s|^2} =$$

$$|E_s|^2 = |E_s|^2 + |E_s|^2 = \frac{|E_{out}|^2}{|T|^2} + \frac{|R|^2}{|T|^2} |E_{out}|^2 = \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} |E_{out}|^2$$

$$G(w) \left(1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} = 3$$

E ora abbiamo E_{in} in funzione di E_{out}

$$\frac{1}{|T|^2} E_{in} = \pm E_{out} \left[|T|^2 - |R|^2 G \left(1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} \right]$$

Se vuoi che il laser si autosostenga $E_{in} = 0$, quindi:

$$|T|^2 - |R|^2 G \left(1 + \frac{1 + |R|^2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2} \right)^{-1} = 0$$

Inoltre i laser hanno di solito $|R|^2 \approx 0,95$ e $|T|^2 \approx 0,05$

Quindi possiamo far diventare $|R|^2 \approx 1$

$$\frac{G}{|T|^2} = 1 + \frac{2}{|T|^2} \frac{|E_{out}|^2}{|E_s|^2}$$

$$|E_{out}|^2 = \frac{|E_s|^2}{2} \left(G - |T|^2 \right)$$

Potenziali periodici nel tempo

Fin ora abbiamo semplicemente supposto che esista un intervallo tra gli atomi e la radiazione elettromagnetica che in un modo o nell'altro ci fa saltare fuori i coefficienti di Einstein. Ora ci andiamo a verificare che tutto ciò è vero e otterremo delle formule che ci dicono quanto valgono i coefficienti di Einstein.

Lavoreremo con sistemi a 2 livelli energetici.

$$H(t) = H_0 + H_I(t) \quad H_i |i\rangle = E_i |i\rangle \quad i \in \{1, 2\}$$

$$|4\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$H|4\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [C_1(t)|1\rangle] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [C_2(t)|2\rangle] =$$

$$C_1(t) \rightarrow 2; (t) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \quad \text{Questo serve a far sì che se } z_i \text{ non dipende dal tempo perché } \dot{H}=0, \text{ allora si saprà la parte dipendente da quello indipendente dal tempo della funzione d'onda}$$

$$= [i\hbar \dot{z}_1(t) + z_1(t) E_1] e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle + [i\hbar \dot{z}_2(t) + z_2(t) E_2] e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |2\rangle$$

$$= i\hbar \dot{z}_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle + i\hbar \dot{z}_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |2\rangle + H_0 |4\rangle$$

$$H_I |4\rangle = i\hbar \dot{z}_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle + i\hbar \dot{z}_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |2\rangle$$

$$\langle i | H_I | 4 \rangle = i\hbar \dot{z}_i e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}} \quad \text{fin qua non c'è niente di approssimato}$$

Senza scendere troppo nei dettagli di come si ricava l'Hamiltoniana di interazione essa risulta essere

$$H_I = -\hat{D} \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

Dove \hat{D} è l'operatore di dipolo dell'atomo. i^\pm sono scambi di lavoro.

Se manca $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ gli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ → $|\pm 1\rangle$, $|\mp 1\rangle$

$$\langle 1 | \hat{D} | 1 \rangle = (\langle 1 | \pi^+) \hat{D} (\pi | 1 \rangle) = \langle 1 | \pi^+ D \pi | 1 \rangle = \langle 1 | (\pi^+ D \pi) | 1 \rangle = -\langle 1 | \hat{D} | 1 \rangle$$

Quindi $D_{11} = 0$

$$\langle 1 | H_I | 2 \rangle = \langle 2 | H_I | 1 \rangle^* \quad i\hbar \dot{\alpha}_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} = -\hat{D}_{12} \cdot \vec{E}_0 \alpha_2 \cos(\omega t) e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$$

$$i\hbar \dot{\alpha}_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} = -\hat{D}_{21} \cdot \vec{E}_0 \alpha_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \frac{1}{2}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \hat{D}_{21} \cdot \vec{E}_0 [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] \frac{i}{2\hbar} \alpha_1$$

Supponiamo che all'inizio stiamo allo stato fondamentale,

quindi, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$ e definisco $\frac{\hat{D}_{21} \cdot \vec{E}_0}{\hbar} \equiv V$, quindi

$$\dot{\alpha}_2 = i \frac{V}{2} [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] \quad \text{per avere una approssimazione migliore basta mettere questa eq. in quest'altra e risolvere perturbativamente.}$$

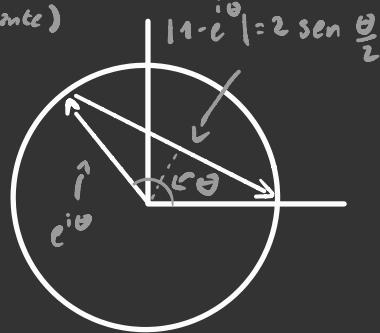
$$\dot{\alpha}_2 = \frac{V}{2} \left[\underbrace{\frac{1 - e^{i(\omega-\omega_0)t}}{\omega - \omega_0}}_{R} - \underbrace{\frac{1 - e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{\omega + \omega_0}}_{R'} \right]$$

Se $\omega \approx \omega_0$ il termine sinistro è molto più grande di quelli a destra. (Questa si chiama approssimazione di onda Rotante)

Per vedere quant'è la prob. che anz

praticella si trovi in $|2\rangle$ bisogna prendere

$$|2_1|^2 = \frac{V^2}{4} \frac{|1 - e^{i(\omega-\omega_0)t}|^2}{(\omega - \omega_0)^2} = \frac{V^2 \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\omega - \omega_0)t \right]}{(\omega - \omega_0)^2}$$



Ricapitolando abbiamo ottenuto che un sistema a 2 livelli soggetto a un campo elettrico $\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ che parte con $z_1 = 1$ e $z_2 = 0$ si evolve $|z_2|^2$ così

$$|z_2|^2 = \frac{V^2 \sin^2\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t\right]}{(\omega - \omega_0)^2} \quad \text{con} \quad V = \langle z_1 | \hat{D} | z_2 \rangle \cdot \frac{\vec{E}_0}{\hbar}$$

Ma che succede se \vec{E} non è monodromastico?

$$\text{In } z_2 e^{-\frac{i\vec{E}_0 t}{\hbar}} = -\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0 z_1 e^{-\frac{i\vec{E}_0 t}{\hbar}}$$

Visto che $z_1 \geq 1$

$$z_2 = i \frac{\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0}{\hbar} e^{i\omega_0 t}, \quad \text{quindi} \quad z_2 = i \frac{1}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

$$z_2 = i \frac{1}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \vec{E}(\omega_0)$$

Trasformata di Fourier

$$|z_2|^2 = \frac{|\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}(\omega_0)|^2}{\hbar^2}$$

Per verificare che funzioni
volendo possiamo metterci
il campo elettrico che abbiamo

usato all'inizio ($\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$), noi però abbiamo
considerato un intervallo di tempo limitato, quindi è come
se fosse che $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \psi(t)$

$$\text{dove } \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int [\vec{E}_0 \cos(\omega t) \psi(t)] [\vec{E}_0 \cos(\omega t)] (\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{E}_0 \cos(\omega t) \psi(t)] [\vec{E}_0 \cos(\omega t)] e^{i\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{\vec{E}_0}{2} \int_0^T [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] e^{i\omega_0 t} dt = \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{2(\omega_0 - \omega)} \vec{E}_0$$

Se ne va via con l'onda rotante

Se faccio la norma e moltiplico per $\frac{1}{\hbar^2} \frac{|D_{21}|^2}{n}$ ottengo che

$$|c_2|^2(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\vec{D}_{21} \cdot \vec{E}_0|^2 \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(w_0 - w)t\right]}{(w_0 - w)^2} = \frac{v^2}{(w_0 - w)^2} \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(w_0 - w)t\right]}{(w_0 - w)^2}$$

Determinazione coefficienti A e B di Einstein

Il coefficiente di Einstein B_{12} è quel numero che moltiplica per le potenze delle frequenze $w(w)$ da il valore di emissione dallo stato 1 a quello 2.

Supponiamo che applichiamo al sistema un campo elettrico

$E(t)$ per un tempo finito T , quindi $E(t) = E_0(t) \Psi(T)$.

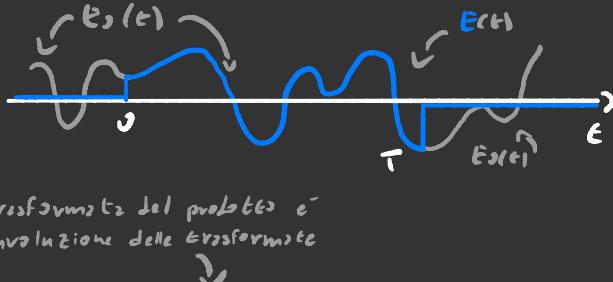
Se a $t=0$ $N_1=N$ e $N_2=0$,

allora per piccoli T

$$B_{12} W(w) = |c_2(\tau)|^2 / T$$

$$W(w) = \frac{1}{2} |\tilde{E}_0(w)|^2$$

La trasformata del prodotto è
la convoluzione delle trasformate



$$\begin{aligned} |c_2(\tau)|^2 &= \left| \frac{D_{21}}{\hbar^2} \cdot \mathcal{F}[E(t)] \right|^2 = \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \cdot \tilde{E}_0(w) * \tilde{\Psi}(w) \right|^2 \\ &= \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_0(w) \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(w-w_0)\tau\right]}{(w-w_0)} dw \right|^2 \end{aligned}$$

Supponiamo che $E_0(t)$ sia molto simile a un esponentiale complesso con frequenza w_0 , e che la sua trasformata stabilisca una deviazione standard Δw , quindi

$$\tilde{E}_0(w) \approx \begin{cases} \tilde{E}_0 & \text{per } |w-w_0| < \Delta w/2 \\ 0 & \text{per } |w-w_0| > \Delta w/2 \end{cases}$$

$$|C_2(T)|^2 = \frac{1}{h^2} |D_{21} \cdot \tilde{E}_0|^2 \int_{w_0 - \frac{\Delta w}{2}}^{w_0 + \frac{\Delta w}{2}} \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2}(w-w_0)T \right]}{(w-w_0)^2} dw \\ = I(T)$$

Il termine $|D_{21} \cdot \tilde{E}_0|^2$ va mediato su tutti gli angoli, se vuoi puoi fare i conti, il risultato comunque è che $|D_{21} \cdot \tilde{E}_0|^2 = \frac{1}{3} |D_{21}|^2 |\tilde{E}_0|^2$

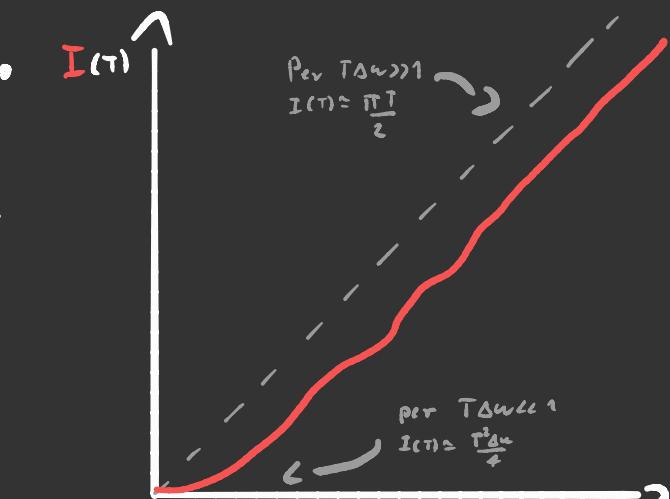
Adesso concentriamoci nel C_{230} in cui $T\Delta w \gg 1$

$$|C_2(T)|^2 = \frac{1}{h^2} |D_{21} \cdot \tilde{E}_0|^2 \frac{\pi T}{2}$$

$$B_{12} W(w_0) = B_{12} \frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 =$$

$$= \frac{|D_{21}|}{3} \cdot |E_0|^2 \frac{\pi T}{2 h^2} \frac{1}{T}$$

$$B_{12} = \frac{\pi |D_{21}|^2}{3 h^2 \epsilon_0}$$



E questa è l'espressione analitica del coefficiente B di Einstein

La relazione tra questo coefficiente e gli altri due c'è già stata ricavata all'inizio

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \left(\frac{2L}{c} \right)^3 \frac{h}{\pi^2} w_0^3 \Rightarrow$$

$$A_{21} = \frac{|D_{21}|^2}{3 \pi h \epsilon_0} \left(\frac{2L}{c} \right)^3 w_0^3$$

Suppongo che gli stati siano non degeneri

Regola d'oro di Fermi

Spedo e volentieri quando si fa teoria delle perturbazioni: dipendenti dal tempo molti passaggi sono identici, ad esempio se vogliamo calcolare il Rate di transizione da uno stato iniziale $|i\rangle$ a degli stati finali $\{ |f\rangle \}$ con un Hamiltoniano del tipo

$$H = H_0 + V \cos(\omega t)$$

Si arriva sempre al risultato che

Dopo varie delle approssimazioni che sono incluse con queste formule

$$\frac{P_{i \rightarrow f}(\tau)}{\tau} = \underbrace{\frac{2\pi}{\hbar^2}}_{\text{Rate di Transizione}} \sum_F | \langle F | V | i \rangle |^2 S(w - \omega_0)$$

Probabilità di passare dallo stato iniziale $|i\rangle$ a quello finale $|F\rangle$

Per dimostrarlo sfruttiamo quello che si è imparato con i potenziali dipendenti dal tempo

$$i\hbar \dot{z}_F e^{-i\omega_F t} = \langle F | V | i \rangle \cos(\omega t) z_i e^{-i\omega_i t}$$

Approssimo $z_i(t) \approx 1$

$$2\pi \Im \left(-\frac{i}{\hbar} \langle F | V | i \rangle \right) \int_0^\tau e^{i(w_0 - \omega)t} dt = -\frac{i}{\hbar} \langle F | V | i \rangle \frac{e^{i(w_0 - \omega)\tau} - 1}{i(w_0 - \omega)}$$

$$|z_F|^2 = \frac{\pi}{\hbar^2} |\langle F | V | i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{w - w_0}{2} \right) \tau \right]}{(w - w_0)^2} \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle F | V | i \rangle|^2 \tau S(w - \omega_0)$$

Sommendo su tutti i possibili stati finali e dividendo per τ si ottiene la seconda formula di questa pagina

Fenomeni di Allargamento

Finora abbiamo visto che il nostro sistema a 2 livelli assorbe ESATTAMENTE alla frequenza $\Delta E/\hbar$.

Nella realtà, però può capitare che alcuni fenomeni tendano ad allargare l'intervallo di frequenze che è possibile assorbire.

Il primo fenomeno che F_2 ciò è l'emissione spontanea.

Possiamo scrivere z_2 così

$$\frac{1}{\hbar} \vec{D}_{21} \cdot \vec{E}(t) e^{i\omega t} z_1 - i\gamma z_2 = i \frac{d z_2}{dt}$$

Se $E=0$ allora C_2 ha un decadimento esponentiale

$$\text{Se } E=0 \quad z_2(t) = e^{-i\gamma t} \rightarrow N_2(t) = e^{-2\gamma t}, \text{ quindi } 2\gamma = A_{21}$$

Ora qua ci sono un po' di conti saltando tra la Trasformata

Si è supposto di nuovo che $z_1 \leq 1$

$$-\frac{D_{21}}{\hbar} \cdot \vec{E}(t) e^{i\omega t} = i \left(\gamma + \frac{d}{dt} \right) z_2 \quad - \frac{D_{21}}{\hbar} \tilde{E}(w+w_0) = (i\gamma + w) \tilde{z}_2(w)$$

$$z_2(t) = -\frac{D_{21}}{\hbar} \tilde{f}^{-1} \left[\frac{\tilde{E}(w+w_0)}{i\gamma + w} \right] = -\frac{D_{21}}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{E}(w+w_0)}{i\gamma + w} e^{-iwt} dw$$

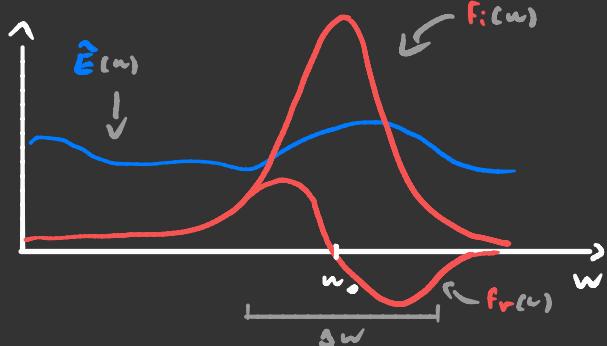
$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{D_{21}}{\hbar} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{E}(w) e^{-i(w-w_0)t}}{i\gamma + w - w_0} dw \quad \begin{array}{l} \text{Nel lim } \gamma \rightarrow 0 \quad \frac{e^{-i(w-w_0)t}}{2\pi(i\gamma + w - w_0)} \rightarrow i\delta(w-w_0) \\ \text{quindi si torna al caso di prima} \end{array}$$

$\frac{1}{i\gamma + w - w_0}$ è una funzione che è centrata in $w=w_0$, ma non ha varianze nulli, quindi si finiscono per essere assorbiti anche le frequenze vicine a w_0

$$\text{Se definiamo } F(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iwt}}{i\gamma-w} \equiv f_r + i f_i \quad \text{allora}$$

$$I_{22}(t) = -\frac{D_{21}}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(w) F(w_0-w) dw = -\frac{D_{21}}{\hbar} \hat{E}(w) f_r(w)$$

Per valutare meglio questo integrale conviene tenere in considerazione che intorno a w_0 , $F_i \gg f_r$ visto che f_r è antisimmetrica in w_0 , mentre F_i è simmetrica. Quindi: in $w=w_0$.



$$F(w_0 - \omega) \approx i F_i(w_0 - \omega) \approx \frac{i}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad e^{-i(\omega - \omega_0)t} \approx 1$$

$$\text{Quindi: } \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(w) F(w_0 - \omega) dw \approx i \int_{w_0 - \Delta w/2}^{w_0 + \Delta w/2} \hat{E}(w) F_i(w - \omega) dw$$

Vista che F_i è centrata in $(w_0 - \Delta w/2, w_0 + \Delta w/2)$ uso questi estremi d'integrazione (è equivalente a fare l'approssimazione di una rotante).

All'interno di $(w_0 - \Delta w/2, w_0 + \Delta w/2)$ mi aspetto che la fase di $\hat{E}(w)$ varii poco, questo mi permette di dire che

$$|I_{22}(t)|^2 \approx \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \right|^2 \left| \int_{w_0 - \Delta w/2}^{w_0 + \Delta w/2} \hat{E}(w) F_i(w - \omega) dw \right|^2 \approx$$

$$\approx \left| \frac{D_{21}}{\hbar} \right|^2 \int_{w_0 - \Delta w/2}^{w_0 + \Delta w/2} |\hat{E}(w)|^2 |F_i(w_0 - \omega)|^2 dw \approx$$

$$\approx |\hat{V}_{cm}|^2 |F_i(w_0)|^2 \quad \text{Questo procedimento può essere generalizzato creando questo pseud-teorema:}$$

$$|F * g|^2 \approx |F|^2 * |g|^2 \text{ se } g \text{ è una funzione "stretta"}$$

Un'altro fenomeno d'allargamento è l'Allargamento Doppler.

Supponiamo che il nostro sistema 2

2 livelli e' uno di tanti atomi

che assieme formano un gas

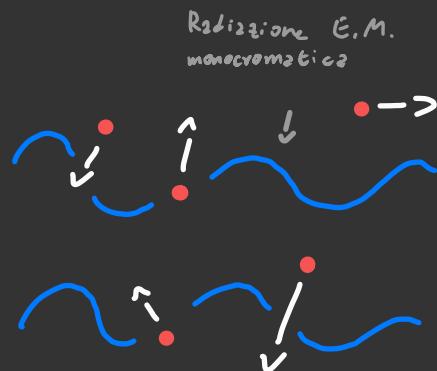
all'equilibrio termodynamico.

Vista che gli atomi si muovono, rispetto al loro sistema di

riferimento la frequenza della

radiazione risulta alterata.

Supponiamo che un fotone a frequenza ω venga assorbito da un atomo a velocità iniziale \vec{v}_1



$$\left\{ M \vec{V}_1 + h \vec{K} = M \vec{V}_2 \right.$$

$$\left. E_1 + \frac{1}{2} M V_1^2 + h \omega = E_2 + \frac{1}{2} M V_2^2 \right.$$

$$h \omega_0 \equiv E_2 - E_1$$

$$\frac{M V_2^2}{2} = \frac{M V_1^2}{2} + \frac{\hbar^2 K^2}{M \frac{2}{2}} + h \vec{V}_1 \cdot \vec{K} \quad h \omega_0 = h \omega - h \vec{V}_1 \cdot \vec{K} - \frac{\hbar^2 K^2}{2 M}$$

$$\text{Se } \vec{K} = K \hat{x} \quad \vec{V}_1 \cdot \vec{K} = V_x K = V_x \frac{K}{c}$$

$$\text{Quindi } \omega_0 = \omega \left(1 - \frac{V_x}{c} \right) \quad \text{e} \quad \omega = \omega_0 \frac{1}{1 - V_x/c} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V_x}{c} \right)$$

Quindi la frequenza ω che deve avere la radiazione per fare effettuare la transizione all'atomo in moto differisce di un fattore $(1 + \frac{V_x}{c})$ dalla frequenza nel caso静止状態 ω_0 .

Ora però dobbiamo vedere come è la distribuzione delle frequente assorbite di un sistema termodynamico

$$P(v_x) dv_x = \underbrace{P(v_x(w))}_{F_0(w)} \frac{dv_x}{dw} dw e^{-\frac{mv_x^2(w)}{k_b T}} dw$$

visto che $w = w_0(1 + \frac{v_x}{c})$ $v_x^2 = c^2 \frac{(w - w_0)^2}{w_0^2}$

$$F_D(w) = \underbrace{\frac{c}{w_0 \sqrt{2 k_b T \pi}}}_\text{Normalizzazione} e^{-\frac{mc^2(w-w_0)^2}{2 k_b T w_0^2}}$$

Gaussiana

Indica come si allarga lo spettro di assorbimento

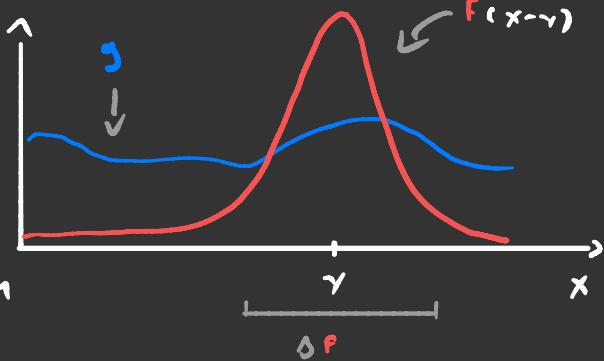
Teorema 2:

se $\frac{d^2}{dx^2}(\Delta F) \ll 1 \quad \forall x, \forall n \geq 1$

Equivalent a dire che F è molto stretta rispetto a g

e $F(x) = F(-x) \in \mathbb{R}$, $\int F(x) dx \geq 1$

$$\text{allora } |g * F|^2 \approx |g|^2 * F$$



Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 |g * F|^2 &= \left| \int F(x) g(y-x) dx \right|^2 = \left[\int F(x) g(y-x) dx \right] \cdot \left[\int F(x) g^*(y-x) dx \right] \\
 &= \int F(x) F(x) g(y-x) g^*(y-x) dx = \text{Serie di Taylor in } x \text{ a } y \\
 &= [\int F(x) F(x) dx] |g(y)|^2 + \left[\int F(x) F(x) x^2 dx \right] |g''(y)|^2 + \dots + \\
 &\quad + \left[\int F(x) F(x) x^{2n} x^{2m} dx \right] |g^{(2n)}(y)|^2 + \dots = \\
 &= \sum_n^\infty |g^{(2n)}(y)|^2 \left| \int x^{2n} F(x) dx \right|^2 = |g(y)|^2 + |g''(y)|^2 |\Delta F|^2 + \dots = |g * F|^2
 \end{aligned}$$

$$|g|^2 * F = \int F(x) |g(y-x)|^2 dx = \int F(x) \left| \sum_n x^n g^{(2n)}(y) \right|^2 dx$$

$$\int F(x) \left| \sum_n x^n g^{(2n)}(y) \right|^2 dx = \int F(x) \sum_{n,m} x^n g^{(2n)}(y) x^m g^{(2m)}(y) dx =$$

$$= \sum_{n,m} g^{(2n)}(y) g^{(2m)}(y) \int x^{n+m} F(x) dx,$$

$$= |g(y)|^2 + [g''(y)g''(y) + 2g'g' + gg''] |\Delta F|^2 = |g|^2 * F$$

$$|g(y)|^2 + [g''(y)g''(y) + 2g'g' + gg''] |\Delta F|^2 \neq |g(y)|^2 + |g''(y)|^2 |\Delta F|^2$$

L'uguaglianza è esatta solo all'ordine zero

Equazioni di Bloch ottiche

Fino a ora abbiamo trattato un sistema a 2 livelli; per piccoli $V = \frac{1}{\hbar} D_{21}$, \vec{E} , però, grazie all'uso della matrice di densità $P = \sum P_i |i\rangle\langle i|$ è possibile risolvere esattamente l'evoluzione temporale di un sistema a 2 livelli sotto un potenziale periodico. A dire il vero useremo l'appross. d'onda Rotante.

Supponiamo che il sistema si trovi in uno stato puro, cioè che $P = |147\rangle\langle 147|$ dove $|147\rangle$ è una certa funzione d'onda, adesso scriviamo P rispetto alla base a 2 livelli $\{|17\rangle, |27\rangle\}$ scelto da $C_1 = |147\rangle$ abbiamo che

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} |C_1|^2 & C_2^* C_1 \\ C_2 C_1^* & |C_2|^2 \end{vmatrix}$$

I C_1 e C_2 sono gli stessi che sono stati definiti all'inizio del capitolo sui potenziali periodici nel tempo

$$\frac{dP}{dt} = \begin{vmatrix} 2\text{Re}[C_1^* C_1] & C_2^* C_1 + C_2 C_1^* \\ C_2 C_1^* + C_2 C_1 & 2\text{Re}[C_2^* C_2] \end{vmatrix}$$

Per rendere i conti più comodi però è meglio usare le C_2 : e definire

$$G_{ij} = \begin{vmatrix} |2_1|^2 & 2_2^* 2_1 \\ 2_2 2_1^* & |2_2|^2 \end{vmatrix}$$

Essendo non c'è la matrice di densità del sistema, m₂ e m₁ non ci interessano. A noi interessa trovare $\dot{z}(t)$.

Sapendo che

$$z(1) H_1 z(4) = i h \hat{z} e^{-\frac{i E_1}{h} t}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -i V \cos(\omega t) e^{i w_0 t} z_2 \\ \dot{z}_2 = -i V \cos(\omega t) e^{-i w_0 t} z_1 \end{cases}$$

Con cui possiamo calcolare: $\frac{d\vec{z}}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{G}_{12}}{dt} &= 2 \operatorname{Re}[z^* \dot{z}_1] = 2 \operatorname{Re}[-i V \cos(\omega t) e^{i w_0 t} z_1^* z_2] \\ &= i V \cos(\omega t) [z_1^* z_2 e^{i w_0 t} - z_1 z_2^* e^{-i w_0 t}] \\ &= i V \cos(\omega t) [G_{12} e^{i w_0 t} - G_{21} e^{-i w_0 t}] = - \frac{dG_{12}}{dt} \end{aligned}$$

La Traccia deve rimanere costante.

Faccendo un po' di conti: esse fuori che

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} = -G_{22} = i V \cos(\omega t) [G_{12} e^{i w_0 t} - G_{21} e^{-i w_0 t}] \\ \dot{G}_{22} = G_{11}^* = i V \cos(\omega t) e^{-i w_0 t} (G_{11} - G_{22}) \end{cases}$$

A questo punto l'approssimazione d'onda rettante

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} = -G_{22} = i V [G_{12} e^{i(w_0-\omega)t} - G_{21} e^{-i(w_0-\omega)t}] \\ \dot{G}_{12} = G_{11}^* = i V e^{-i(w_0-\omega)t} (G_{11} - G_{22}) \end{cases}$$

Sce definisca

$$\tilde{\zeta}_{12} = \zeta_{12} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \quad \tilde{\zeta}_{21} = \zeta_{21} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \quad \tilde{\zeta}_{11} = \zeta_{11} \quad \tilde{\zeta}_{22} = \zeta_{22}$$

Si ottiene che

$$\frac{d\tilde{\zeta}_{11}}{dt} = -\frac{d\tilde{\zeta}_{21}}{dt} = iV(\tilde{\zeta}_{12} - \tilde{\zeta}_{21})$$

$$\frac{d\tilde{\zeta}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{\zeta}_{21}}{dt} = iV(\tilde{\zeta}_{11} - \tilde{\zeta}_{22}) + i(\omega_0 - \omega)\tilde{\zeta}_{12}$$

Piamo a cercare una soluzione del tipo $\tilde{\zeta}_{ij}(t) = \tilde{\zeta}_{ij}(0)e^{i\Delta\omega t}$

$$i\Delta\omega \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_{11} \\ \tilde{\zeta}_{21} \\ \tilde{\zeta}_{12} \\ \tilde{\zeta}_{22} \end{vmatrix} = \frac{iV}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{2\Delta\omega}{V} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{2\Delta\omega}{V} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\zeta}_{11} \\ \tilde{\zeta}_{21} \\ \tilde{\zeta}_{12} \\ \tilde{\zeta}_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$$

E adesso vanno trovati autovalori e autovettori.

Senza stare a fare calcoli essi sono

$$\Omega = \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + V^2} \quad \epsilon \quad \Omega = 0 \quad \omega = 2$$

Gli autovettori sono un po' più lunghi da scrivere, quindi se ti servono vedi la calcolare con Wolfram Alpha

Equazioni di Bloch ottiche con emissione spontanea

I calcoli che abbiamo fatti poco fa non tengono conto che le particelle nello stato 12> possono decadere nello stato 11> spontaneamente per far ciò basta introdurre un termine a $\hat{\rho}_{12}$

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = - \frac{d\hat{\rho}_{22}}{dt} = - \underbrace{\frac{iV}{2}(\hat{\rho}_{12} - \hat{\rho}_{21})}_{\text{termine che c'era già prima}} - \underbrace{2\gamma_s \hat{\rho}_{22}}_{\text{Emissione spontanea}}$$

Ricordiamoci però che $\hat{\rho}_{11} = |z_1|^2$ e $\hat{\rho}_{22} = |z_2|^2$, quindi anche $\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_{21}^* = z_1^* z_2 e^{-i(w-w_0)t}$ cambiano, facendo i conti esce fuori che

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}_{22}^*}{dt} = \frac{iV}{2}(\hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{22}) + [i(w_0 - w) - \gamma_s] \hat{\rho}_{22}$$

Una volta introdotte l'emissione spontanea il sistema può andare all'equilibrio termico. Per vedere come è messo bisogna porre tutte le derivate uguali a zero.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{iV}{2}(1 - 2\hat{\rho}_{11}) + [i(w_0 - w) - \gamma_s] \hat{\rho}_{11} = 0 \\ \frac{V}{2} \text{Im}(\hat{\rho}_{12}) - 2\gamma_s \hat{\rho}_{22} = 0 \\ \text{Re}^2[\hat{\rho}_{12}] + \text{Im}^2[\hat{\rho}_{12}] = (1 - \hat{\rho}_{11}) \hat{\rho}_{11} \end{array} \right.$$

Risolvendo questo sistema 2 3 equazioni con 3 incognite esce fuori questa equazione qui

$$\hat{\rho}_{22}(t=+\infty) = \frac{V^2/4}{(w_0 - w)^2 + \gamma_s^2 + V^2/2}$$

Collisioni

Gli atomi se non stanno allo zero assoluto tendono a sfuggire fra di loro, che effetto ha sulle equazioni di Boltzmann?

Intanto bisogna chiedersi quanto spesso avvengono queste collisioni.

Il tempo medio di volo τ_0 è:

- Inversamente proporzionale alla sezione d'urto del processo σ
- Inversamente proporzionale alla velocità media c_{vd}
- Inversamente proporzionale alla densità di atomi N/V
- E $\propto c_{\text{vd}}^2$

$$\text{Quindi } \tau_0 = \frac{V}{6c_{\text{vd}}N}$$

Se i nostri atomi li consideriamo come palline di diametro d , $\sigma = d^2 \pi$.

E' possibile scrivere la velocità media in funzione della temperatura così

$$c_{\text{vd}} = \frac{\int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} v d^3 p \cancel{d^3 x}}{\int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} d^3 p \cancel{d^3 x}}$$

$$\int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} v d^3 p = m^3 \int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} v^3 v = m^3 \int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} v^2 dv =$$

$$= m^3 2\pi \int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} v^2 dv = m^3 \frac{8\pi}{\beta^2} \int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} d\left(\frac{Pmv^2}{2}\right) = m^3 \frac{8\pi}{\beta^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x dx > \frac{8\pi}{\beta^2 m}$$

$$\text{e}^{-\frac{Pmv^2}{2}} d^3 p = 4\pi (2m)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\beta}\right)^3 \int e^{-\frac{Pmv^2}{2}} dp = -8\pi m \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2m}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 dx = -8\pi m \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2m}{p}} \left(-\frac{1}{2} x^3\right)$$

$$\langle v \rangle = \frac{8\pi m}{P^2} \cdot \frac{2\beta^2}{4\pi m} \frac{1}{\sqrt{2m\pi}} = 2\sqrt{\frac{2K_B T}{m}}$$

$$\frac{1}{T_0} = 2 \frac{d^2 N}{V} \sqrt{\frac{2\pi K_B T}{m}}$$

Nel libro questo
veloce c'è moltiplicato per
un fattore $\sqrt{2}$, questo però
al posto delle velocità
ci va il valore medio
delle velocità relativistiche

Ora che abbiamo capito quanto spesso accadono le collisioni
dobbiamo capire che succede ai livelli energetici.

Esistono 2 tipi di collisioni: quelle **Elastiche** e quelle
Anelastiche.

Le collisioni elastiche lasciano i livelli energetici
invinti, quindi al massimo cambiano le Fasi di C_1 e C_2 ,
questo significa che gli unici elementi della matrice di
densità che vengono modificati sono quelli fuori diagonale

$$\frac{d\tilde{C}_{12}}{dt} = \frac{d\tilde{C}_{21}}{dt} = \frac{iV}{2} (\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{22}) + [i(w_0 - w) - (\gamma_{sp} + \gamma_{coll})] \tilde{C}_{12}$$

dove $\gamma_{coll} = 1/\tau_0$

Dopo spiegherò per bene come mai
 $\tau_{coll} = 1/\tau_0$ è perché va messo proprio qua

di solito $\tau_{coll} \gg \tau_{sp}$ (circa 10^4 volte)

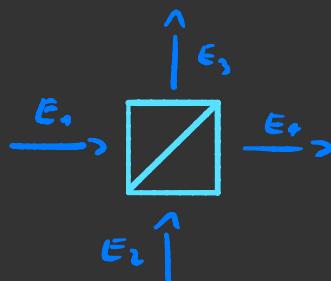
Le collisioni Anelastiche contribuiscono
ai F_{21} decidere gli elettroni dagli stati eccitabili, quindi
cioè che fanno aumentare i rate di decadimento,
ma per ora non c'è dato sapere quanto esattamente

Beam

~~splitters~~

Ora come ora non ti serve
studiare bene sta parte

Possiamo rappresentare un generico beam-splitter
con una matrice



$$\begin{aligned} & \text{Supponiamo che i campi} \\ & \text{siano monodromatici;} \\ \approx & \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & R_{12} \\ R_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix} \\ \vec{E}_{in} &= M_B \vec{E}_{out} \end{aligned}$$

Questa matrice però ha il vincolo della conservazione
dell'energia, quindi $|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_1'|^2 + |E_2'|^2$, ciò significa
che la matrice debba essere unitaria, quindi i vettori
colonne della matrice devono essere ortogonormali.

$$R_{21}^2 + T_{11}^2 = R_{12}^2 + T_{22}^2 = 1 \quad R_{21}T_{32} + R_{32}T_{21} = 0$$

Dall'equazione a destra si deduce che $t_{31} + t_{32} - t_{12} - t_{21} = \pm i\pi$
dove le t sono le Fazi complesse dei coefficienti R e T .

Facendo le norme quadrate dell'equazione a destra e
sfruttando l'equazione a sinistra si ottiene che

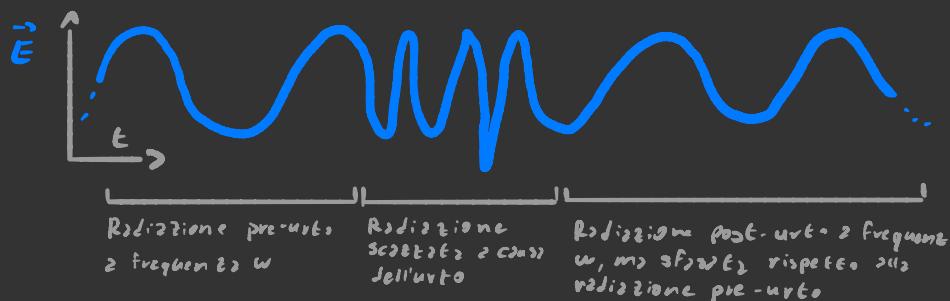
$$|T_{22}| = |T_{11}| = T \quad e \quad |R_{31}| = |R_{12}| = R$$

Con questi vincoli è comunque possibile creare una grande
varietà di beam splitters, ad esempio settando tutti
i coefficienti reali è possibile avere una matrice così

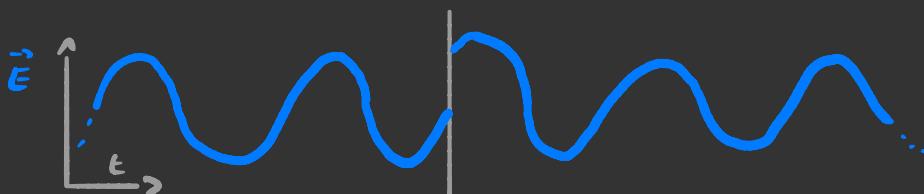
$$\begin{vmatrix} R & T \\ T & -R \end{vmatrix}$$

Teoria Classica di Fluttuazioni ottiche e Coerenza

Supponiamo di avere un atomo di una sorgente luminosa. Questo atomo oscillando emette una radiazione monocromatica, però ogni tanta scatte contro altri atomi.



Durante l'urto la radiazione viene alterata, e dopo l'urto ritorna ad avere le stesse 2 frequenze di prima, ma con una fase diversa se la durata media dell'urto T_u è del tempo medio diviso allora possiamo approssimare il grafico di sopra così



Quindi $\vec{E}(t) = E_0 e^{i\omega t + \phi(t)}$

dove $\phi(t)$ è una funzione costante a tratti.



Le lunghezze di un singolo tratto indica per quanto tempo la particella è stata in libero volo.

Se vogliamo sapere come il campo elettrico generato da un insieme di atomi basterà sommare i vari campi elettrici

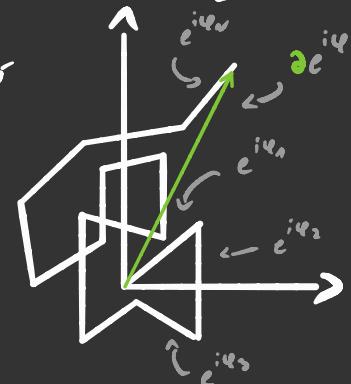
$$\vec{E}_{tot}(t) = \vec{E}_1(t) + \dots + \vec{E}_N(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t} [e^{i\phi_1(t)} + \dots + e^{i\phi_N(t)}]$$

Il termine nelle parentesi quadre uno può immaginarselo come una somma di finti numeri complessi di norma 1.

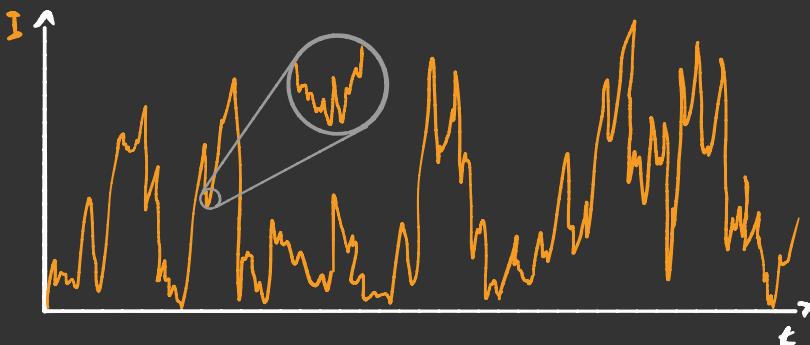
Questo è un esempio di random-walk

$$s(t) e^{i\phi(t)} \equiv [e^{i\phi_1(t)} + \dots + e^{i\phi_N(t)}]$$

$$I(t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |E_{tot}|^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 s^2(t)$$



Faccendo una simulazione di $I(t)$ esce questo tipo di funzione a frattale



Nelle prossime pagine si studieranno i vari tipi di rumori e quali informazioni si possono ricavare da essi.

Autocorrelazione

Sia $R(t)$ un segnale rumoreoso, c'è una funzione

$$\rightarrow \text{mediz (quasi) nulla} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt \rightarrow 0$$

Ogni singolo valore $R(t)$ è una variabile casuale, però
è correlato al valore che assume $R(t-\Delta t)$ e $R(t+\Delta t)$,
quindi è possibile descrivere un generico segnale di rumore
in termini della correlazione tra $R(t)$ e $R(t+\epsilon)$

In statistica le formule della correlazione tra due
variabili casuali x e y è

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

Per vedere come si generalizza questa formula al continuo
basta mettere

$$x_i \rightarrow R(t), y_i \rightarrow R(t+\epsilon), \sum_i \rightarrow \int dt$$

$$\text{Cov}(R, t') \equiv \text{Cov}[R(t), R(t+t')] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(t) R(t+t') dt}{\int_{-\infty}^{\infty} R^2(t) dt}$$

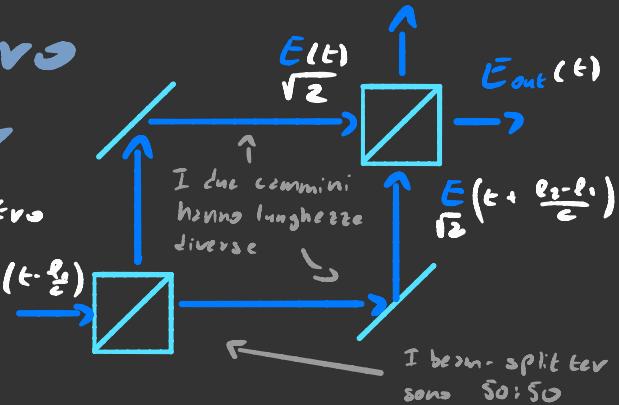
Purtroppo però non esistono strumenti che siano in
grado di misurare direttamente $E(t)$ o $I(t)$ col grado di
precisione necessario per fare il calcolo di sopra, però
ci sono modi per misurare direttamente g_1 con
degli interferometri

Interferometro Mech-Zehnder

Prepariamo un interferometro

fatto così e vediamo $E(t - \frac{\ell_2}{c})$
che succede quando

Si misura



$$\frac{\langle I_{out} \rangle}{\langle I_{in} \rangle} = 2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E_{out}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_{in}(t)|^2 dt}$$

$$\text{Se definisco } \frac{\ell_2 - \ell_1}{c} = \Delta t$$

$$|E_{out}(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[|E(t)|^2 + |E(t + \Delta t)|^2 + 2 R_c [E(t) E(t + \Delta t)] \right]$$

$$\frac{\langle I_{out} \rangle}{\langle I_{in} \rangle} = 1 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} R_c [E(t) E(t + \Delta t)] dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt} = 1 + \operatorname{Re} g_1(\Delta t)$$

Adesso calcoliamoci g_1 sapendo che $E(t) = E_0 e^{i\varphi_{in}(t)} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n(t)}$

$$\begin{aligned} \int E(t) E^*(t + \Delta t) dt &= |E_0|^2 e^{-i\omega t} \sum_{n,m} \int e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_m(t + \Delta t)]} dt \quad \leftarrow \text{Per n,m in media zero} \\ &= |E_0|^2 e^{-i\omega t} \sum_n \int e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_n(t + \Delta t)]} dt = N |E_0|^2 e^{-i\omega t} \int e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_n(t + \Delta t)]} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e^{i[\varphi_n(t) - \varphi_n(t + \Delta t)]} dt = \int_{\Delta t}^\infty e^{-\frac{\tau}{T_0}} d\tau = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{\Delta t}{T_0}}$$

$$\begin{aligned} \int E(t) E^*(t + \Delta t) dt &= N |E_0|^2 e^{-i\omega t - \frac{i\Delta t}{T_0}} \\ g_1(\Delta t) &= e^{-\frac{i\omega t - i\Delta t}{T_0}} \end{aligned}$$

Il valore assoluto gliel'ho messo perché

$$\begin{aligned} \int E(t) E^*(t + \Delta t) dt &= \int E(t + \Delta t) E^*(t) dt = \\ &= [\int E(t) E^*(t + \Delta t) dt]^* \end{aligned}$$

$E(t)$ con tutti i suoi arti non è più monacromatico quindi ci aspettiamo che lo spettro sia allargato

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int E(t) E^*(t+\Delta t)\right] &= \mathcal{F}[E(t)] \mathcal{F}[E^*(t+\Delta t)] = \\ &= |\hat{E}(\omega)|^2 e^{-i\omega\Delta t} = \hat{\mathcal{F}}[e^{-i\bar{\omega}t} e^{-i\Delta t/\tau_0}] e^{-i\omega\Delta t} = \\ &= S\left[e^{-\frac{i\Delta t}{\tau_0}}\right] (\omega - \bar{\omega}) e^{-i\omega\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0 e^{-i\omega\Delta t}}{(\omega - \bar{\omega})^2 \tau_0^2 + 1} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che $|\hat{E}(\omega)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0}{(\omega - \bar{\omega})^2 \tau_0^2 + 1}$

La forma di questa funzione è quella di una lorenziana se definisco $\gamma_{coll} = 1/\tau_0$ si vede che

$$|\hat{E}(\omega)|^2 \propto \frac{\gamma_{coll}}{(\omega - \bar{\omega})^2 + \gamma_{coll}^2}$$

Quindi gli effetti collisionali creano un allargamento dello spettro di assorbimento di tipo lorenziano, questo spiega perché abbiamo inserito in quel modo alla fine della parte sulla eq. di Bloch ottiche.

Correlazione dell'intensità

Ora che abbiamo visto l'autocorrelazione del campo elettrico vediamo come è autocorrelata l'intensità.

Questo ci dice come fluttua il valore dell'intensità nel tempo.

$$g_2(\Delta t) = \frac{\langle I(t) I(t + \Delta t) \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle E(t) E(t + \Delta t) E^*(t) E^*(t + \Delta t) \rangle}{\langle E(t) E^*(t) \rangle^2}$$

Visto che $E(t) = \sum_i E_i(t) = E_0 e^{-i\omega t} [e^{i\phi_1(t)} + \dots + e^{i\phi_n(t)}]$

$$\begin{aligned} \langle E(t) E(t + \Delta t) E^*(t) E^*(t + \Delta t) \rangle &= \sum_i \langle E_i(t) E_i(t + \Delta t) E_i^*(t) E_i^*(t + \Delta t) \rangle + \\ &+ \sum_{i \neq j} \langle E_i(t) E_j(t + \Delta t) E_i^*(t) E_j^*(t + \Delta t) \rangle + \langle E_i(t) E_j(t + \Delta t) E_j^*(t) E_i^*(t + \Delta t) \rangle = \end{aligned}$$

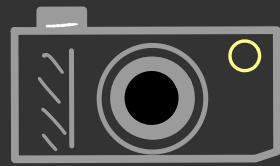
Gli unici termini che tengono sono quelli che sono la media dei quadri di qualcosa, perché altrimenti in media fanno zero.

$$= N \langle |E_i(t)|^2 |E_i(t + \Delta t)|^2 \rangle + N(N-1) |\langle E_i(t) E_i(t + \Delta t) \rangle|^2 + N(N-1) \langle |E_i(t)|^2 \rangle^2$$

Visto che $N \ll N^2$ possiamo dire che

$$g_2(\Delta t) = 1 + |g_1(\Delta t)|^2$$

Teoria semiclassica conteggio fotoni



Supponiamo di avere un rilevatore che conta quanti fotoni raggiungono il suo obiettivo all'interno di un intervallo temporale lungo T con una certa efficienza. Vogliamo calcolare la probabilità che m fotoni vengano rilevati nell'intervallo di tempo $(t, t+T)$ $P_m(t, T)$.

Ora vediamo di calcolarla.

La probabilità che
cav (t, t+t') ne siano
già stati rilevati: m

La probabilità che tra
(t', dt') non ne viene
rilevato nessuno

Gli altri sono
termini di ordine
più basso

$$P_m(t, t'+dt') = P_m(t, t') P_0(t', dt') + P_{m-1}(t, t') P_1(t', dt') + \dots$$

↑ La probabilità che tra (t, t+t'+dt') vengano rilevati m fotoni ↑ La probabilità che tra (t, t+t') ne siano già stati rilevati: $m-1$ ↑ La probabilità che tra (t', dt') non ne viene rilevato 1

Se definisco $p(t)dt \equiv P_0(t, dt)$, allora $P_0(t, dt) = 1 - p(t)dt$

$$p(t)dt = \eta I(t)dt \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{La probabilità per unità di tempo che} \\ \text{un fotone venga contato è proporzionale} \\ \text{alla potenza incidente} \end{array}$$

$$P_m(t, t'+dt') = P_m(t, t')[1 - p(t)dt] + P_{m-1}(t, t') p(t)dt'$$

$$\frac{dP_m(t, t')}{dt'} = P_{m-1}(t, t') p(t)dt' - P_m(t, t') p(t)dt'$$

$$\begin{cases} \frac{dP_m(t, t')}{dt'} = [P_{m-1}(t, t') - P_m(t, t')] p(t) \\ \frac{dP_0(t, t')}{dt'} = -P_0(t, t') p(t) \end{cases}$$

Visto che P_{-1} non ha nessun significato, l'equazione di P_0 è così:

Supponendo che $I(t)$ cambia poco sulla scala di temp. di T

$\left(\frac{dI(t)}{dt} T \ll 1 \right)$ possiamo dire che

$$\frac{dP_0(t, t')}{dt'} = - P_0(t, t') \ln I(t+t') \rightarrow P_0(t, t') = e^{-nI(t+t')t'}$$

E' possibile dimostrare per induzione che

$$P_m(t, T) = \frac{[nI(t+T)T]^m}{m!} e^{-nI(t+T)T}$$

Per calcolare in medie quanti fotocentri vengono fatti:

$$\langle m \rangle = \sum_m m P_m(t, T) = \langle n I(t+T) T \rangle$$

Quantizzazione del campo

Elettromagnetico

Le Flashcards di questa sezione sono poche e incomplete

Fino ad oggi abbiamo trattato il campo Elettromagnetico classicamente, adesso vediamo come si comporta quantisticamente.

Le equazioni classiche dell'elettrodinamica vengono sempre, ma E, B, V ed A diventano tutti degli operatori.

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0 \quad \nabla \cdot B = 0 \quad E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad B = \nabla \times A$$

L'energia diventa l'hamiltoniana: $H = \epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B|^2$.
Scritta così però è poco utile

Le equazioni di Maxwell scritte in gauge di Coulomb soddisfano $\nabla \cdot A = 0$ e sono scritte così

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0 \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V - \nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J$$

Adesso, per iniziare vediamo che succede nel vuoto

$$\rho, J = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \Rightarrow V = 0 \\ J = V = 0 \Rightarrow \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Supponiamo che anche al contorno } V = 0$$

Le soluzioni dell'equazione $\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ sono

$$\hat{e}_{k\lambda} \left[A_{k\lambda} e^{ikx - i\omega t} + A_{k\lambda}^* e^{-ikx - i\omega t} \right] \text{ con } \hat{e}_{k\lambda} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ Perché } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Dove $\lambda \in \{1, 2\}$ indica la polarizzazione, adesso calcolizziamo i campi.

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} = -i\omega \hat{e}_{k\lambda} \left[A_{k\lambda} e^{ikx - i\omega t} - A_{k\lambda}^* e^{-ikx - i\omega t} \right]$$

$$B = \nabla \times A = i\omega k \hat{e}_{k\lambda} \left[A_{k\lambda} e^{ikx - i\omega t} - A_{k\lambda}^* e^{-ikx - i\omega t} \right]$$

Ora che abbiamo E e B possiamo calcolarci l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} [\epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B|^2] d^3x$$

Se uno si fa tutti i calcoli si ottiene che

$$H = \sum_{k\lambda} \epsilon_0 V w_k^2 (A_{k\lambda} A_{k\lambda}^* + A_{k\lambda}^* A_{k\lambda})$$

$$H_{k\lambda} = \epsilon_0 V w_k^2 (A_{k\lambda} A_{k\lambda}^* + A_{k\lambda}^* A_{k\lambda})$$

Ricorda che A e A^* sono degli operatori, quindi non è detto che commutino

L'Hamiltoniana scritta così sembra peggio di cominciata scritta in termini dei campi, noi vogliamo cercare di ricordurre $H_{k\lambda}$ all'Ham. di un oscillatore armonico che dovrebbe essere tipo così:

$$H_{k\lambda} = \frac{\hbar \omega_k}{2} (\mathfrak{d}_{k\lambda} \mathfrak{d}_{k\lambda}^+ + \mathfrak{d}_{k\lambda}^+ \mathfrak{d}_{k\lambda})$$

Perciò c'è bisogno che le \mathfrak{d} rispettino le relazioni di commutazione dell'oscillatore armonico

$$[\mathfrak{d}_{k\lambda}, \mathfrak{d}_{k\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Se si definisce definitivamente gli operatori di creazione e distruzione così l'Hamiltoniana diventa come quelli dell'oscillatore armonico. Ora però dobbiamo verificare che rispetti le relazioni di commutazione

$$[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda}^+] = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k} [A_{k\lambda}, A_{k\lambda}^*] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Purtroppo per calcolare i commutatori bisogna usare la teoria dei campi e questo è al di là dello scopo di questo quaderno, quindi bisogna fidarsi che l'equazione sia corretta.

Gli operatori a^+ e a nell'oscillatore armonico sono interpretati come operatori che fanno salire o scendere di livello energetico. Nel caso del campo E.M. a^+ e a sono visti come gli operatori che creano o distruggono un fotone. È per questo vengono chiamati operatori di **Creazione e Distruzione**.

L'operatore $a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} = n_{k\lambda}$ indica quanti fotoni ci sono nello stato k, λ

L'Hamiltoniana si può riparametrizzare così

$$H_{k\lambda} = \hbar \omega_k \left(a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

Energia del singolo fotone $\hbar \omega_k$
Numero di fotoni nello stato k, λ
Costante additiva che volendo si può ignorare

Statistica del campo E.M.

I fotoni, avendo spin 1, sono dei bosoni e quindi rispettano le statistiche di Bose-Einstein.

Come abbiamo visto all'inizio di questo quaderno le probabilità dello stato E è $P(E) = e^{-\frac{h\nu}{kT}} (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$

Per quanto riguarda gli stati io posso scrivere un auto-stato dell'energia come $(\bigotimes_{K,\lambda} |n_{K\lambda}\rangle \equiv | \{n_{K\lambda}\} \rangle$, quindi un generico stato quantistico è scrivibile come $\sum_{\{n_{K\lambda}\}} c(\{n_{K\lambda}\}) | \{n_{K\lambda}\} \rangle$

Quindi la matrice di densità di questo sistema è

$$\rho = \sum_{\{n_{K\lambda}\}} P(E(\{n_{K\lambda}\})) | \{n_{K\lambda}\} \rangle \langle \{n_{K\lambda}\}| =$$

$$= \sum_{\{n_{K\lambda}\}} \bigotimes_{K,\lambda} e^{-\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}} (1 - e^{-\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}}) | n_{K\lambda} \rangle \langle n_{K\lambda} | =$$

$$= \bigotimes_{K,\lambda} (1 - e^{-\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}}) \sum_{n_{K\lambda}=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu_{K\lambda} n_{K\lambda}}{kT}} | n_{K\lambda} \rangle \langle n_{K\lambda} | = \rho$$

Se vuoi capire perché ho scambiato prodotto tensoriale e sommatoriazi così, provi a calcolarvelo tu, scrivere tutti i conti è lungo

$$\rho = \bigotimes_{K,\lambda} \rho_{K\lambda}$$

$$\rho_{K\lambda} = (1 - e^{-\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}}) \sum_{n_{K\lambda}=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu_{K\lambda} n_{K\lambda}}{kT}} | n_{K\lambda} \rangle \langle n_{K\lambda} |$$

$$\langle n_{K\lambda} \rangle = \text{tr}(\rho n_{K\lambda}) = \text{tr}(\rho_n n_{K\lambda}) = x \equiv \frac{n_{K\lambda}}{kT}$$

$$= (1 - e^{-\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}}) \sum_{n_{K\lambda}=0}^{\infty} n_{K\lambda} e^{-\frac{h\nu_{K\lambda} n_{K\lambda}}{kT}} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n_{K\lambda}=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu_{K\lambda} n_{K\lambda}}{kT}} =$$

$$= -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = (1 - e^{-x})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})$$

$$\therefore \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{K\lambda}}{kT}} - 1}$$

Chiediamo cosa
la Bose-Einstein

Interazione Foton - Materia

Fino adesso visto come gli atomi interagiscono con il campo E.M. classico, ora vediamo che succede se si considera la natura quantistica del campo.

Se supponiamo che il nucleo si stia bene fermo in $r=0$ abbiamo che densità di carica e corrente sono

$$\sigma = -e \sum_{\lambda=1}^2 \delta(r-r_\lambda) + 2e \delta(r) \quad J = -e \sum_{\lambda=1}^2 r_\lambda \delta(r-r_\lambda)$$

Nella gauge di Coulomb il potenziale eletrostatico è eguale a

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{-e}{|r-r_\lambda|} + \frac{2e}{r}$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{\lambda} \left[P_{\lambda} \cdot e A(r_{\lambda}) \right]^2 - \sum_{\lambda} e V(r_{\lambda}) + \sum_{k,\lambda} \hbar \omega_k (a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} + \frac{1}{2})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2m} \sum_{\lambda} \left[P_{\lambda}^2 - e V(r_{\lambda}) \right]}_{H_A \text{ Ham. Atomo}} - \underbrace{\sum_{\lambda} P_{\lambda} \cdot e A(r_{\lambda})}_{H_I \text{ Ham. di interazione}} + \underbrace{\frac{e^2}{2m} \sum_{\lambda} A^2(r_{\lambda})}_{R} + H_{EM}$$

Questo termine è molto piccolo

Questa Hamiltoniana, scritta così ha le proprietà che è scrivibile come la somma delle due hamiltoniane libere degli elettroni e del campo (H_A e H_{EM}) + un termine di interazione che può essere trattato perturbativamente

Il termine $\frac{e^2}{m} \sum_{\alpha} A_{\alpha}^2(r_{\alpha})$ è molto piccolo, quindi si butta via, il termine $-\frac{e}{m} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \cdot A(r_{\alpha})$ è scrivibile così ↗

Non entra la dim
di nessuna parte

$$-\frac{e}{m} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \cdot A(r_{\alpha}) = \sum_{\alpha} D_{\alpha} \cdot E(r_{\alpha}) + \sum_{\alpha} M_{\alpha} \cdot B(r_{\alpha})$$

Energia interazione ↗
dipolo - campo elettrico

Energia di interazione ↗
dipolo - campo magnetico

$$D_{\alpha} = -er_{\alpha} \quad M_{\alpha} = -\frac{eL_{\alpha}}{m} \quad \leftarrow L_{\alpha} \text{ è il momento angolare orbitale}$$

Volendo si può anche aggiungere lo spin

Adesso proviamo ad approssimare la parte di dipoli ↗ Non scrivo l'indice
d'alfa se è sempre la

$$D \cdot E(r) = -er_i E_i(r) = -er_i E_i(0) - e \frac{1}{2} r_i r_j \partial_j E_i(0) + \dots =$$

$$= D \cdot \vec{E}(0) + \underbrace{Q \cdot (\nabla \otimes \vec{E}(0))}_{\text{Quadrupolo}} + \dots$$

Dipolo

Viste che la somma dei dipoli
e dei quadrupoli non è altro
che il momento di dipoli e
quadrupoli dell'intero atomo

$$\sum_{\alpha} D_{\alpha} \cdot E(r_{\alpha}) = D \cdot E(0) + Q \cdot (\nabla \otimes \vec{E}(0)) + \dots \quad D = \sum_{\alpha} D_{\alpha} \quad Q = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}$$

$$M \cdot B(r) = M_i B_i(r) + M_i r_j \partial_j B_i(0) + \dots$$

il termine $M \cdot B(0)$ è $\frac{I}{macro} \approx 0,045$ volte più piccolo del
termine $D \cdot E(0)$

↗ Non dovrebbe essere Δ ?

$$H_I = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{E}(0)}_{\text{ordine } 0} + \underbrace{\vec{M} \cdot \vec{B}(0) + \underbrace{Q \cdot (\nabla \otimes \vec{E})}_{\text{I ordine}} + \dots}_{\text{I ordine}}$$

Interazione nell'approssimazione di dipolo

Ritorniamo ad analizzare l'Hamiltoniana d'interazione

$$H_I = -\frac{e}{m} \sum_{\lambda} p_{\lambda} A(r_{\lambda}) + \frac{e^2}{2m} \sum_{\lambda} \vec{A}(r_{\lambda}) \cdot \vec{p}_{\lambda} \approx \hat{D} \cdot \vec{E}(R) \quad \text{Posizione del nucleo}$$

Vogliamo scriverla in termini di π , $\bar{\pi}$, π^+ e π^-

$$\hat{E}(R) = i \sum_{K\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_K}{2 E_0 V}} (\hat{a}_{K\lambda} e^{i K \cdot R} - \hat{a}_{K\lambda}^+ e^{-i K \cdot R}) \hat{e}_{K\lambda} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Vettore di} \\ \text{polarizzazione} \end{array}$$

Se supponiamo di aver scelto un ω che si occupa di transizioni tra solo 2 livelli energetici $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

L'operatore di dipolo \hat{D} , in questo caso ha queste forme

$$\hat{D} = \hat{D} \begin{vmatrix} |0\rangle & |1\rangle \\ |1\rangle & |0\rangle \end{vmatrix} = \hat{D}(\pi^+ \pi^-) \quad \text{dove } \pi = |1\rangle \langle 2|$$

\hat{D} vettore che non è un operatore

$$\hat{D} \cdot \hat{E} = i \hbar \sum_{K\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_K}{2 E_0 V}} \hat{D} \cdot \hat{e}_{K\lambda} \left(\hat{a}_{K\lambda} \pi^+ e^{i K \cdot R} - \pi^- \hat{a}_{K\lambda}^+ e^{-i K \cdot R} \right)$$

Destruge il fotone Sale di livello

I termini $\pi^+ \pi^-$ e $\pi^- \pi^+$ non sono consentiti perché l'energia non viene conservata

Rate di assorbimento ed emissione

Per vedere come si evolvono temporalmente gli stati scriviamo

$$\begin{cases} \langle n_{k\lambda} - 1, 2 | H_i | n_{k\lambda}, 1 \rangle = i \hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}} e^{i(kR + i(w_0 - w_k)t)} \\ \langle n_{k\lambda} + 1, 1 | H_i | n_{k\lambda}, 2 \rangle = -i \hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda} + 1} e^{-i(kR - i(w_0 - w_k)t)} \end{cases}$$

Una cosa importante da notare è che gli elementi di matrice con $w_0 \neq w_k$ non sono nulli, quindi il nostro sistema a 2 livelli interagisce con TUTTI i fotoni! Ma allora come mai solo i fotoni con $w_n = w_0$ vengono assorbiti? Il fatto è che l'interazione non è istantanea, dobbiamo dargli almeno un po' di tempo τ .

$$P_{abs}(\tau) = \left| \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle n_{k\lambda} - 1, 2 | H_i | n_{k\lambda}, 1 \rangle dt \right|^2 = g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} \left| \int_0^\tau e^{i(w_0 - w_k)t} dt \right|^2 = g_{k\lambda}^2 n_{k\lambda} \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2}(w_0 - w_k)\tau \right]}{(w_0 - w_k)^2}$$

E' approssimato perché sarebbe $\int_0^\infty e^{i(w_0 - w_k)t} dt$, ma poi si approssima esponenziale al primo ordine

Se facciamo evolvere il sistema per un tempo $\tau \gg |w_0 - w_k|$ abbiamo che

$$\frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2}(w_0 - w_k)\tau \right]}{(w_0 - w_k)^2} \rightarrow \frac{\pi \tau}{2} \delta(w_0 - w_k)$$

Quindi abbiamo che gli unici fotoni che fanno fare la transizione sono quelli con le frequenze ad esattamente $w_k = w_0$, solo che c'è il problema che la probabilità è diverge, che senso ha? (Per chi se lo sia perso queste non è una densità di probabilità, ma una probabilità vera e propria. Non dovrebbe fare al massimo?)

Il punto è che non esistono veramente fotoni con una frequenza ben definita, ogni fotone è una superposizione di tanti fotoni a frequenze diverse, quindi di fatto noi non partiamo mai veramente da uno stato $|n_{\lambda}, 1\rangle$.

Se supponiamo che il nostro campo E.M. abbia una matrice di densità fatta così: In realtà la matrice di densità del campo E.M. in generale è più complicata.

$$P = \sum_{\lambda} \int P_{\lambda}(w) |n_{\lambda}, 1\rangle \langle n_{\lambda}, 1| \frac{d^3 k}{8\pi^3} = 2 \underbrace{\int \frac{1}{\pi^2 c^2} P_{\lambda}(w) |n_{\lambda}, 1\rangle \langle n_{\lambda}, 1| dw}_{= P(w)}$$

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta\gamma}(\tau) &= \text{Tr} (H_1 |n_{\lambda}-1, 2\rangle \langle n_{\lambda}-1, 2| H_2 P) = \\ &= 2 \int P(w) \left[\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} \langle n_{\lambda}-1, 2 | H_1 | n_{\lambda}, 1 \rangle dt \right]^2 dw = \quad g_M = \sqrt{\frac{w_n}{2\varepsilon_0 V h}} \hat{D} \cdot \hat{e}_{\lambda}, \\ &= 8\pi \Gamma g_{\alpha\lambda}^2 n_{\lambda} \int P(w) \delta(w - w_n) dw = 2 \frac{\Gamma \pi w_n n_{\lambda} |D \cdot \hat{e}_{\lambda}|^2 P(w_n)}{\varepsilon_0 V h} \\ &= \frac{\Gamma \pi |D \cdot \hat{e}_{\lambda}|^2 w_n}{\varepsilon_0 h} \quad B_{12} = \frac{P_{\alpha\beta\gamma}(\tau)}{\tau w(w_n)} \cdot \frac{\pi |D \cdot \hat{e}_{\lambda}|^2}{\varepsilon_0 h^2} = \frac{\pi |D_{12}|^2}{3 \varepsilon_0 \hbar^2} \end{aligned}$$

c'è da tenere in considerazione però che con queste formulazioni non c'è una vera e propria differenza tra emissione spontanea e stimolata. Possiamo però dividere l'elemento di matrice di emissione dell'Hamiltonian d'interazione. Emissione stimolata $\rightarrow \hbar^2 g_{\alpha\lambda}^2 n_{\lambda} + \hbar^2 g_{\alpha\lambda}^2 \leftrightarrow$ Emissione spontanea. c'è anche da tenere in considerazione che noi abbiamo considerato solo un ben determinato λ , l'emissione spontanea può anche avvenire quindi a un λ diverso di quelli della radiazione incidente.

Vettore di Poynting

Adesso proviamo a calcolarci tutte quelle cose sull'autocorrelazione trattando i campi quantisticamente

$$E(R,t) = i \sum_{K\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_K}{2 \epsilon_0 V}} (2_{K\lambda} e^{i K \cdot R - i \omega_K t} - 2_{K\lambda}^+ e^{-i K \cdot R + i \omega_K t}) \hat{e}_{K\lambda}$$

$$B(R,t) = i \sum_{K\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_0 V \omega_K}} (2_{K\lambda} e^{i K \cdot R - i \omega_K t} - 2_{K\lambda}^+ e^{-i K \cdot R + i \omega_K t}) \hat{e}_{K\lambda} \lambda \vec{K}$$

$$S = \frac{1}{4\pi} E \wedge B : \quad \text{Controlla i segni}$$

$$= - \frac{c^2 \hbar}{2V} \sum_{n\lambda} \sum_{K\lambda} (2_{n\lambda} e^{i K \cdot R - i \omega_n t} - 2_{n\lambda}^+ e^{-i K \cdot R + i \omega_n t}) (2_{K\lambda} e^{i K \cdot R - i \omega_K t} - 2_{K\lambda}^+ e^{-i K \cdot R + i \omega_K t}) (\vec{K} \cdot \vec{n})$$

$$= \frac{c^2 \hbar}{2V} \sum_{n\lambda} \sum_{K\lambda} \vec{K} \cdot \vec{n} d_{n\lambda} d_{K\lambda} e^{i(K+n) \cdot R - i(\omega_n + \omega_K)t} + -2_{n\lambda} d_{n\lambda} - 2_{K\lambda}^+ 2_{n\lambda}^+ + 2_{n\lambda}^+ 2_{K\lambda}^+ e^{-i(K+n) \cdot R + i(\omega_n + \omega_K)t}$$

In generale però quando si calcola il valor medio del vettore di Poynting $\langle S \rangle$ si fa con autoestate dell'Ham. $|K,\lambda\rangle$ oppure con la matrice di densità all'equilibrio termodinamico $\rho = e^{-\frac{\omega_{K\lambda}}{kT}} |K,\lambda\rangle \langle K,\lambda|$.

Quando si calcolano $\langle K,\lambda | S | K,\lambda \rangle$ gli unici elementi che non fanno zero nella sommatoria sono quelli con $K=n$ e $\lambda=\lambda'$

$$S(R,t) = - \frac{c^2 \hbar}{2} \sum_{K\lambda} (2_{n\lambda} 2_{n\lambda}^+ + 2_{K\lambda}^+ 2_{n\lambda}) \vec{K} = \frac{1}{4\pi} (E \wedge B^+ - B \wedge E^+) :$$

Se si lavora con un onde piana monochromatizzabbiamo che

$$S(R,t) = \frac{c^2 \hbar}{2} (2_{n\lambda} 2_{n\lambda}^+ + 2_{K\lambda}^+ 2_{n\lambda}) \vec{K} = \frac{1}{4\pi \omega} (E^- \cdot E^+ + E^+ \cdot E^-) :$$

$$= \frac{2}{4\pi \omega} (E^- \cdot E^+) + \text{cost } \eta$$

Non conta perché non si può misurare

E^+ per qualche ragione è la parte con l'operatore di distruzione ed E^- di creazione

Teoria quantistica 2 singolo modo

Adesso torniamo a trattare il campo Elettromagnetico da solo, e per semplicità concentriamoci su un singolo modo.

In questo caso l'Hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

L'operatore di campo elettrico è scrivibile così

$$E(x) = \frac{1}{2} \left(2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\pi c v}} \right) [a e^{-ix} + a^\dagger e^{ix}] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

Per ora ignoreremo i termini nella parentesi grigia perché cambiamo unità di misura per \hbar

Bisogna notare che x non ha nulla a che vedere con la funzione d'onda dei fotoni. x serve a distinguere due operatori di campo elettrico diversi. Inoltre abbiamo che

$$[E(x_1), E(x_2)] = -\frac{i}{2} \sin(x_1 - x_2)$$

$$\Delta E(x_1) \Delta E(x_2) \geq \frac{1}{4} |\sin(x_1 - x_2)|$$

Quindi la fase del campo E.M. è qualcosa che è soggetta a dell'indeterminazione quantistica anche se si considera un singolo modo.

Gli autovalori dell'Hamiltoniana sono detti **Stati Numero**

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n \frac{|0\rangle}{\sqrt{n!}}$$

Stati Coerenti

Gli stati coerenti sono gli autostati dell'operatore di **distruzione** \hat{a} . Stranamente per riuscire a capire meglio il campo E.M. a singolo modo c'è più importante lavorare con gli stati coerenti che con gli stati numeri.

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{d.c.c}$$

Bisogna stare attenti! Visto che \hat{a} non è un operatore hermitiano non c'è detto che formino una base ortonormale, infatti:

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Nonostante ciò gli stati coerenti formano un insieme completo delle funzioni L^2 , ma bisogna tenere in considerazione che sono sovrabbondanti.

È possibile scrivere gli stati coerenti in questa forma più semplice

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*n}}{n!} |0\rangle = e^{\alpha^* \cdot \frac{|\alpha|^2}{2}} |0\rangle$$

definisce l'operatore di

$$D(\alpha) = e^{\alpha^* \cdot \frac{|\alpha|^2}{2}}$$

Trasformazione coerente come

Adice il vero non so
come si chiamava in italiano.
In inglese si dice
"Coherent-state displacement
operator"

Le probabilità di trovare n fotoni nello stato α è uguale a

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

È possibile scrivere $|\alpha|^2 = (\langle \alpha | \alpha^* \rangle)(\alpha | \alpha \rangle) = \langle \alpha | n | \alpha \rangle = \langle n \rangle$, quindi

$$P(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

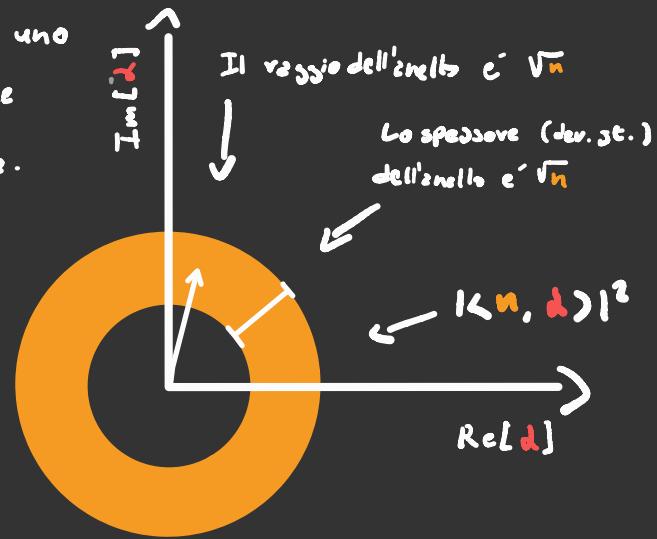
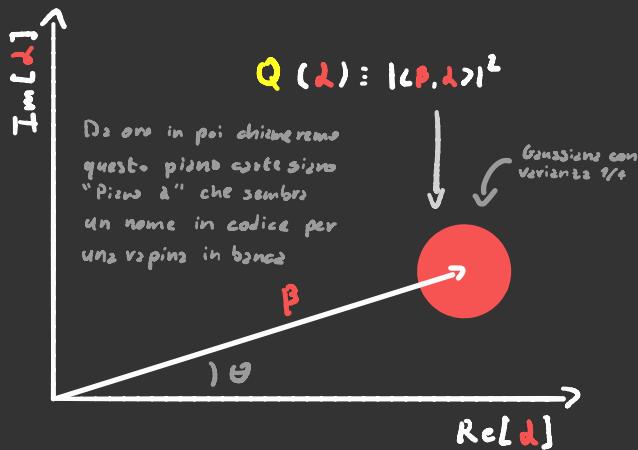
È una Poissoniana

E' possibile "rappresentare" una generica funzione d'onda ψ definendo le quasi-probabilità $Q(\alpha) = |\langle \psi, \alpha \rangle|^2$.

Nella figura qui a destra è rappresentato lo stato coerente $|\beta\rangle$.

Se si vuole rappresentare uno stato numerico abbiamo che avrà un'orma a ciambella.

Se si vuole essere più precisi abbiamo che la distribuzione radiale è quella delle probabilità primarie $Q = e^{-\frac{|\alpha|^2}{n}} \frac{1}{n!} \alpha^n$



L'operatore di evoluzione coerente $D(\alpha)$ trasla la quasidistribuzione di α .

Ma qual'è il senso di questa strana rappresentazione delle funzioni d'onda?

Tutto gira intorno a queste 2 equazioni:

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle = |\alpha| \cos(\chi - \Theta) \quad [\Delta E(x)]^2 = 1/4$$

Per gli stati coerenti

L'equazione $\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle = |\alpha| \cos(\chi - \theta)$ ci dice che gli stati coerenti hanno una "preferenza" per alcune fasi del campo elettrico. Gli stati numeri, ad esempio, non hanno questo tipo di preferenza, infatti: $\langle n | E(x) | n \rangle = 0$.

La seconda dice quello che dice $\langle E | E(x) | E \rangle = 1/2$.

Adesso proviamo a rappresentare queste equazioni graficamente.

La prima equazione sembrerebbe semplice da rappresentare →

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle = |\alpha| \cos(\chi - \theta)$$

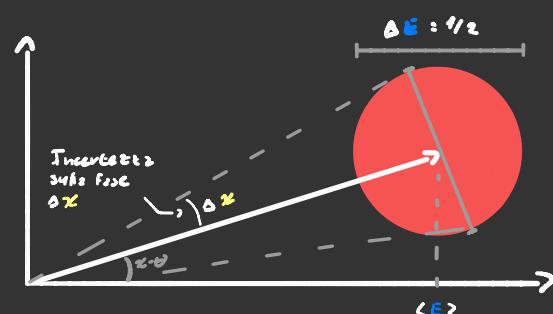
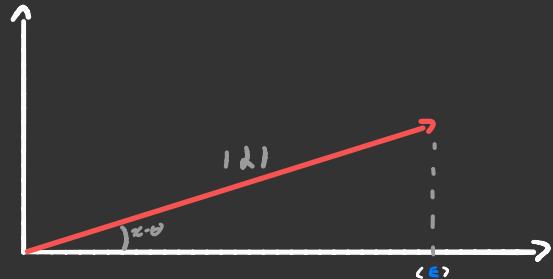
Tuttavia non tiene in considerazione il fatto che gli stati coerenti non sono ortogonali fra di loro. (Sta parte è spiegata in alto)

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | E(x) | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | E | \beta \rangle e^{-i\chi-\theta}$$

In pratica $\langle E \rangle$ "contiene" il contributo anche degli altri stati coerenti con uno smorzamento gaussiano $e^{-i\chi-\theta}$. Quindi si può di rappresentare l'equazione

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle = |\alpha| \cos(\chi - \theta)$$

come un solo vettore (come nella prima figura) bisogna rappresentarlo come un'onda gaussiana centrata in $|\alpha| e^{i(\chi-\theta)}$ con una deviazione standard $1/2$ (che guarda caso è uguale a ΔE)



Il London sta parte qua non lo spiega e non l'argomenta nemmeno, quindi mi sono arrampicato sugli specchi.

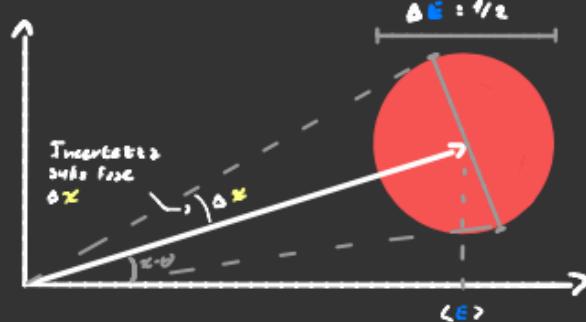
Sospendo che

$$E(x) = \frac{1}{2} [a e^{-ix} + a^* e^{ix}] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

calcola

$$\langle n | E(x) | n \rangle$$

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle$$



QUESTION

$$\langle n | E(x) | n \rangle = 0$$

$$\langle \alpha | E(x) | \alpha \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \alpha | a e^{-ix} | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha | a^* e^{ix} | \alpha \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} [a e^{-ix} + a^* e^{ix}] \quad a = |\alpha| e^{i\theta}$$

$$= |\alpha| \cos(\chi - \theta)$$

ANSWER

Sospensione

$$E(x) = \frac{1}{2} [a e^{-ix} + a^* e^{ix}] \quad x = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$$

$$\langle \Re | E(x) | \Delta \rangle = |\Delta| \cos(\chi - \theta)$$

calcola

$$\langle \Re | \Delta E^2(x) | \Delta \rangle$$

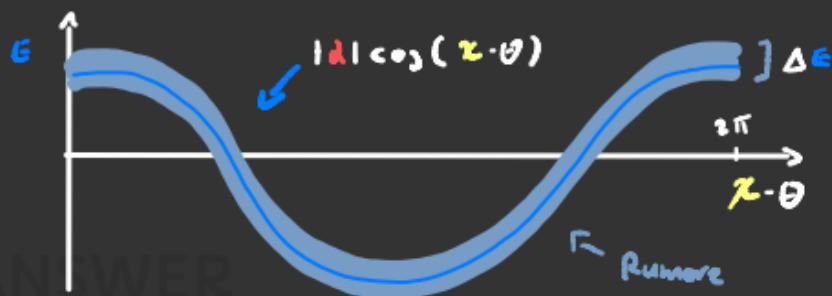
QUESTION

$$\langle \Re | E^2(x) | \Delta \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \langle \Re | a^2 e^{-2ix} + 2a^* a + 1 + a^* e^{-2ix} | \Delta \rangle$$

$$= \frac{1}{4} (a^2 e^{-2ix} + 2|\Delta|^2 + a^* e^{2ix}) + \frac{1}{4}$$

$$= |\Delta|^2 \cos^2(\chi - \theta) + \frac{1}{4} \quad \langle \Re | \Delta E^2(x) | \Delta \rangle = \frac{1}{4}$$



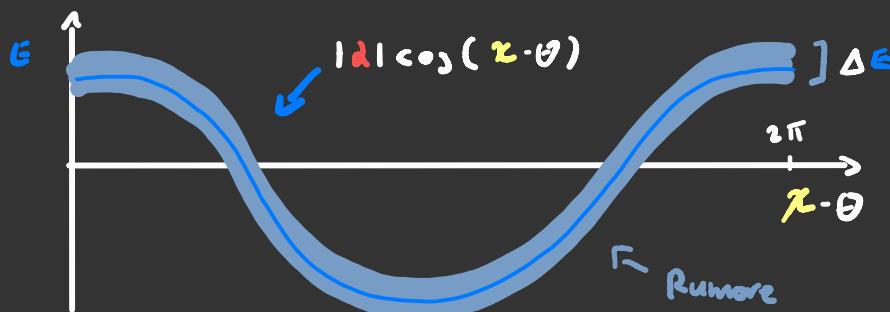
ANSWER

Da questa rappresentazione è possibile ottenere l'errore associato alla fase del campo elettrico $\Delta \chi = \arctan\left(\frac{1}{2|\alpha|}\right)$ per la grande $\Delta \chi = \frac{1}{2|\alpha|}$.

Facendo qualche altro calcolo si ottiene che $\Delta n = |\alpha|$.

Moltiplicando i 2 risultati otteniamo che $\Delta E \Delta n = \frac{1}{2}$, quindi c'è una relazione d'indeterminazione tra χ ed n .

Detto questo, ora possiamo mettere a rappresentare la forma del campo elettrico di uno stato coerente.



Note che lo spessore della funzione implica che c'è anche un errore nella fase $\Delta \chi$, che è proprio quello di cui abbiamo discusso prima.

Se definiamo il segnale $s = \langle E \rangle$ e il rumore $R = (\Delta E)^2$ abbiamo che il rapporto segnale-rumore $s^2/R = \frac{\alpha^2 \cos^2(\chi - \theta)}{4}$

Come ultima cosa vediamo l'evoluzione temporale degli stati coerenti:

$$e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle = e^{-i|\alpha|^2 t} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega t/2} e^{i\omega nt} |n\rangle =$$

$$= e^{-i|\alpha|^2 t - i\omega t} \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-i\omega t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

Quindi: l'evoluzione temporale è rappresentata da una rotazione attorno all'origine, ciò implica che $\exp[i\theta \sigma^z]$ è l'operatore di rotazione nel piano χ .

Stati: Squeezed

Fino adesso abbiamo visto come sia possibile traslare e ruotare le funzioni d'onda nel piano α , ma c'è anche possibile "schiazzare".

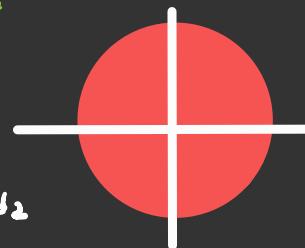
In generale uno stato squeezed ha la forma di una gaussiana con il prodotto delle 2 varianze pari ad $1/8$.

Adezzo vediamo come la matematica dietro a questi stati.

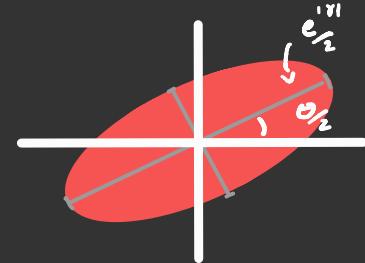
Definiamo l'operatore di squeeze così

$$S(\gamma) = e^{\frac{i\gamma \hat{x}_1 - i\gamma \hat{x}_2}{2}}$$

$$\text{dove } \gamma = \gamma_1 e^{i\theta}$$



$$S(\gamma) \rightarrow$$



Non ho trovato da nessun parte una spiegazione sul perché questo operatore abbia questa forma a parte quella a forza bruta.

L'espressione di uno stato squeezed generato nell'origine è

$$|S(\gamma)|0\rangle = e^{\frac{i\gamma \hat{x}_1 - i\gamma \hat{x}_2}{2}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\gamma)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left[\frac{e^{i\theta} e^{i\gamma h(\gamma)}}{2} \right]^n |2n\rangle$$

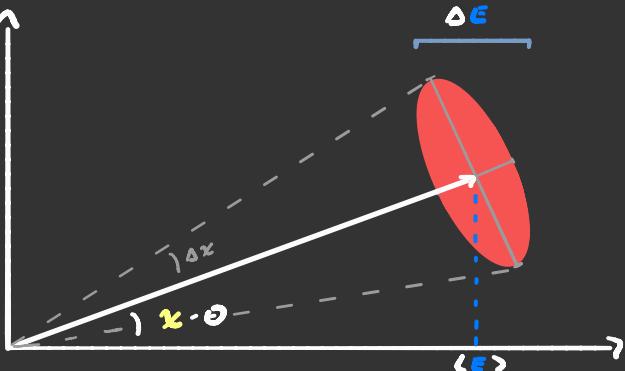
Per ottenere lo stato spaziale più generico possibile bisogna applicargli un operatore di traslazione coerente

$$|\alpha, \gamma\rangle = D(\alpha) S(\gamma) |0\rangle \quad \leftarrow \text{Stato spaziale generico}$$

Adesso vediamo qual'è la forma d'onda e l'incertezza associata ad uno stato spaziale.

Per semplicità prendiamo uno stato dove uno dei due semiasse punti verso l'origine.

Il valore medio e l'incertezza sul campo elettrico sono rappresentati dalla proiezione lungo l'asse x del centro dell'ellisse o dall' "angolo" dell'ellisse.

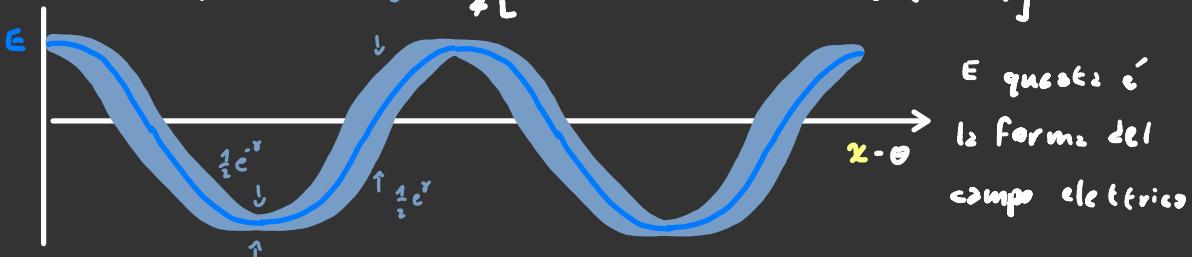


$$\langle E \rangle = \langle \alpha, \gamma | E | \alpha, \gamma \rangle = |E| \cos(\kappa - \theta)$$

Se definiamo $x = e^{\imath\gamma}$ abbiamo che $N = (\Delta E)^2$ è la componente 1,1 di questa matrice qui sotto

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{che è uguale a } N = \frac{1}{4} [e^{2\gamma} \sin^2(\kappa - \theta) + e^{-2\gamma} \cos^2(\kappa - \theta)]$$



Autocorrelazione bis

Primo abbiamo usato l'autocorrelazione dei campi con se stessi per rinascere a ottenere informazione sulle fonti di rumore, adesso il rumore è quantistico, vediamo che succede.

Stavolta si è g_1 che g_2 sono degli operatori, e come ogni operatore di campo vogliamo scriverli in termini di \hat{e} e \hat{e}^* .

Pertanto con g_1 : la definizione classica è

$$g_1(E, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t+t') dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt'}$$

A dire il vero la definizione scritta qui tiene in considerazione il fatto che il campo può avere valori complessi.

Ora in teoria basterebbe sostituire E e E^* con i loro operatori, però bisogna stare attenti, l'ordine conta!

Abbiamo visto prima che $|E(t)|^2 = E(t) E^*(t)$, inoltre il nominatore e il denominatore devono essere uguali per t' : quindi:

$$g_1(t') = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t+t') dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t) dt'}$$

Inoltre la media temporale viene aggiunta la media rispetto alla matrice di densità del campo

$$g_1(t') = \frac{\langle E(t) E^*(t+t') \rangle}{\langle E(t) E^*(t) \rangle}$$

Facendo così g_1 non è più un operatore, ma va bene così

La funzione \mathfrak{D}_2 , invece viene scritta così

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{\langle E^-(t) E^-(t+t') E^+(t+t') E^+(t) \rangle}{|\langle E^-(t) E^+(t) \rangle|^2}$$

E' lo stesso operatore di
 quello a destra, solo che
 agisce sul bro

Assorbo un fotone al tempo $t+t'$
 Assorbo un fotone al tempo t

Il motivo per cui c'è espressa in questo ordine è perché per confrontare l'intensità del campo in due istanti di tempo diversi c'è da assorbire due fotoni.

Fin ora abbiamo considerato le funzioni di correlazione che non dipendono dello spazio. La forma più generica è

$$\mathfrak{D}_1(r_1, t_1; r_2, t_2) = \frac{\langle E_i^-(\vec{r}_1, t_1) E_i^+(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{\langle E_i^-(\vec{r}_1, t_1) E_i^+(\vec{r}_1, t_1) \rangle \langle E_i^-(\vec{r}_2, t_2) E_i^+(\vec{r}_2, t_2) \rangle}$$

$$\mathfrak{D}_2(r_1, t_1; r_2, t_2) = \frac{\langle E_i^-(\vec{r}_1, t_1) E_i^-(\vec{r}_1, t_1) E_i^+(\vec{r}_2, t_2) E_i^+(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{\langle E_i^-(\vec{r}_1, t_1) E_i^+(\vec{r}_1, t_1) \rangle \langle E_i^-(\vec{r}_2, t_2) E_i^+(\vec{r}_2, t_2) \rangle}$$

Queste formule usiamo per campi generici, ora vediamo che forme assumono quando lavoriamo con campi E.M. a singolo modo. Visto che

$$E^+ \propto 2e^{-ix} \quad E^- \propto 2e^{+ix} \quad x = \omega t - kx - \pi/2$$

Sostituendo abbiamo che

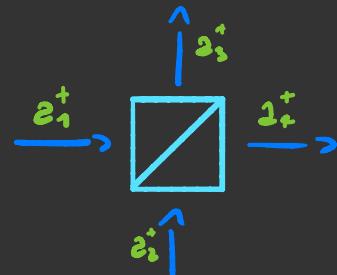
$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\langle 2^+ 2^- e^{i(x_2 - x_1)} \rangle}{\langle 2^+ 2^- \rangle} = \frac{\langle n e^{i(x_2 - x_1)} \rangle}{\langle n \rangle} = e^{i(x_2 - x_1)}$$

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{\langle 2^+ 2^+ 2^- 2^- \rangle}{\langle 2^+ 2^- \rangle \langle 2^+ 2^- \rangle} = \frac{\langle 2^+ 2^- 2^+ 2^- \rangle}{\langle n \rangle^2} - \frac{1}{\langle n \rangle} = \frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - \frac{1}{\langle n \rangle}$$

Esperimenti di Interferenza

Orz che abbiamo scoperto che la luce presenta delle incertezze di tipo quantistico bisogna chiedersi cosa succede a tutta la teoria sui beam splitters e sull'autocorrelazione.

Queste volte esprimiamo i campi che entrono ed escono dai 2 bracci tramite degli operatori di campo.



Se creiamo un fotone in ingresso

con l'operatore $|2_1^+10\rangle = |12,10\rangle_2$, questo passando dal beam splitter crea uno stato che c'è uguale a

$$(R|2_3^+\rangle + T|2_2^+\rangle)|0\rangle = R|11\rangle_3|0\rangle_2 + T|0\rangle_2|1\rangle_2$$

Per semplificare imponiamo $R=T=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Adezzo proviamo a far interfettiva un fotone con se stesso.

Sia $|F\rangle$ lo stato finale

per vedere quanto c'è luminosità la figura di

interferenza bisogna calcolare $\langle F|n|F\rangle$ in questo caso $n=|1\rangle\langle 1|$, quindi $\langle F|n|F\rangle = |\langle 1|F\rangle|^2$

$$|F\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(l_2-l_1)}}{2} \quad \langle 1|F\rangle = \frac{1}{2} \left[1 + e^{i\frac{\omega}{c}(l_2-l_1)} \right]$$

$$|\langle 1|F\rangle|^2 = \text{Sen}^2\left[\frac{\omega(l_2-l_1)}{c}\right] = 1 - \cos^2\left[\frac{\omega(l_2-l_1)}{c}\right]$$

Trova un'interpretazione

Stati: Molti modi

Anche se non sembra finora abbiamo lavorato in un caso molto semplificato rispetto a quello che succede nella realtà. Infatti la radiazione non c'è mai veramente monocromatica.

La funzione d'onda del nostro campo E.M. appartiene allo spazio di $|4_{k_1} \rangle |4_{k_2} \rangle \dots |4_{k_n} \rangle \dots$ dove le varie $|4_{k_i} \rangle$ sono delle funzioni d'onda a singolo modo.

Gli operatori di creazione e distruzione descrivono additi specificando il e la polarizzazione λ .
Io però mi metto ad ignorare il perché apprezzando la notazione.
Le relazioni di commutazioni diventano.

$$[a_k, a_{k'}] = 0 \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad [a_{k'}^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$$

e l'hamiltoniana diventa

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \text{cost}$$

Quando si passa a valori di \vec{k} continui gli operatori $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ creano stati non normalizzabili a meno di δ di Dirac, quindi possiamo prendere la libertà di moltiplicare i nostri operatori per $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$. Ma perché proprio $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$?

In una cavità cubica di dimensione L $K_i = \frac{2\pi n_i}{L}$, quindi $\sum_{\vec{k}} \rightarrow (2\pi)^3 \int d^3 k$ e se si è nello spazio libero basta levare L^3 .

Quindi se io volessi fare ad esempio

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{a}_k e^{-ikx} \rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int \hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} d^3k$$

l'che significa che posso usare la trasformata di Fourier che mantiene la norma. ($\|F(x)\| = \|\widehat{F}(\vec{k})\|$)

Inoltre le relazioni di commutazione e l'Ham. diventano così

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')]=0 \quad [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')]=\delta(k-k') \quad [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')]=0$$

$$H = \int h_{\text{wck}}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) d^3k + \text{cost}$$

Spesso e volentieri si considerano dei fasci di luce che si propagano in una singola direzione, in questi casi si usa ω al posto di k .

Quando io creo un fotone con l'operatore $\hat{a}^\dagger(\omega)$ so con precisione la frequenza, ma non ho la minimaz idea di quando venga creato.

Adesso prendiamo l'operatore $\hat{a}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}^\dagger(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$, con questo io so esattamente quando viene creato, ma non ho idea che frequenze abbiano.

Esistono operatori che creano pacchetti d'onde

$$\hat{a}^\dagger[F] \equiv \int F(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) d\omega \quad \text{con } \|F\|^2 = 1$$

Le relazioni di commutazione diventano

$$[\hat{a}[F], \hat{a}^\dagger[g]] = \langle F, g \rangle$$

E le equazioni riguardanti il numero di fotoni diventano

$$n[F] = \hat{a}^\dagger[F] \hat{a}[F]$$

$$\langle n[F] \rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger[F])^n}{n!} |0\rangle$$

Operatori di Campo Multi-modali

Per quanto riguarda gli operatori di campo essi dicono

$$E_T(\vec{r}, \omega) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\hbar \omega(\omega)}{2\epsilon_0 V}} \mathbf{a}(\vec{r})$$

Faccendo la trasformata di Fourier rispetto a \vec{r} si ottiene E in funzione di \vec{k} . Inoltre se a ogni componente in \vec{k} gli si aggiunge la fase che dipende da ω si ottiene anche la dipendenza dal tempo

$$E_T^r(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega(\omega)}{2\epsilon_0}} \mathbf{a}(\vec{k}) e^{-i\omega(t-\frac{|k|}{c})} dk$$

$$E_T^r(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sqrt{\frac{\hbar \omega(\omega)}{2\epsilon_0 A}} \mathbf{a}(\omega) e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} \frac{d\omega}{\epsilon_0} \quad \text{Questo è la forma che si ha quando l'onda si propaga lungo la } x \text{ con } k > 0 \text{ all'interno di un'area } A$$

Se siamo sicuri di lavorare con uno

spettro stretto l'ultimo operatore $E_T^r(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2\pi \epsilon_0 A c}} \mathbf{a}(t - \frac{x}{c})$
del campo $E_T^r(x, t)$ diventa

In modo analogo si ottengono gli operatori multi modo del campo magnetico partendo dal campo elettrico $B_T^r = \frac{1}{c} E_T^r$

Da qui possiamo ricavare il vettore di Poynting per un'onda che si propaga con $k > 0$

$$\mathbf{S} = \frac{2}{q_0 c} \mathbf{B}_T^r \mathbf{E}_T^r = \frac{2}{q_0 c} \mathbf{E}_T^r \mathbf{E}_T^r$$

$$\mathbf{S}(x, t) = \frac{2}{q_0 c} \frac{\hbar}{2\pi \epsilon_0 A} \int \sqrt{\omega \omega'} \mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{a}(\omega') \exp[i(\omega - \omega')(t - \frac{x}{c})] d\omega d\omega'$$

$$= \frac{\hbar}{2\pi \epsilon_0 A} \int \sqrt{\omega \omega'} \mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{a}(\omega') \exp[i(\omega - \omega')(t - \frac{x}{c})] d\omega d\omega'$$

Inoltre se si calcola il flusso di \mathbf{S} e integrando su tutto il tempo si ottiene

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar \omega \mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{a}(\omega) d\omega$$

A quanto pare una dimostrazione esiste, ma è lunga.
Ad intuitivo però torna.

Autocorrelazione bis bis

Riscrivo per comodità le definizioni delle funzioni di correlazione.

$$g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle E_i^-(x_1, t_1) E_i^+(x_2, t_2) \rangle}{\langle E_i^-(x_1, t_1) E_i^+(x_1, t_1) \rangle \langle E_i^-(x_2, t_2) E_i^+(x_2, t_2) \rangle}$$

$$g_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle E_i^-(x_2, t_2) E_i^-(x_1, t_1) E_i^+(x_1, t_1) E_i^+(x_2, t_2) \rangle}{\langle E_i^-(x_1, t_1) E_i^+(x_1, t_1) \rangle \langle E_i^-(x_2, t_2) E_i^+(x_2, t_2) \rangle}$$

Supponiamo di avere uno stato $|1[F]\rangle = a^+[F]|0\rangle$, per evitare di ammazzarci la vita consideriamo che F non si stretta in w . Con questa supposizione possiamo dire che

$$E_i^r(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar w}{\pi \Gamma c_0 A_0}} a(t - \frac{x}{c}), \quad g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\langle a^+(t_1 - \frac{x_1}{c}) a(t_2 - \frac{x_2}{c}) \rangle}{\langle n(t_1 - \frac{x_1}{c}) \rangle \langle n(t_2 - \frac{x_2}{c}) \rangle}$$

Noi vogliamo calcolare il g_1 , partiamo calcolando $a(t)|1[F]\rangle = a(t)a^+[f]|0\rangle = f(t)|0\rangle + \cancel{f(F)a(t)|0\rangle} \leftarrow a(t)|0\rangle = 0|0\rangle$
Ho usato le relazioni di commutazione \rightarrow

E così esco fuori $g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\overline{f(t_1 - \frac{x_1}{c})} f(t_2 - \frac{x_2}{c})}{|f(t_1 - \frac{x_1}{c}) f(t_2 - \frac{x_2}{c})|}$

Per g_2 invece sì $f_2 a(t) a^*(t) a^*[f] |0\rangle =$

$= a(t)f(t)|0\rangle = 0$ quindi $g_2=0$ se si lavora con un singolo fotone, questo perché c'è bisogno di misurare due fotoni per vedere come è correlata l'intensità

Certi processi emettono i fotoni 2 2 2, per ora ignoriamo come sono fatti sti processi e ci limitiamo a studiare le proprietà di queste coppie.

Un operatore di creazione di coppia generico P^+ appartenente allo spazio $\{a^\dagger(\omega) \otimes a^\dagger(\omega') | \omega, \omega' \in \mathbb{R}\}$, quindi ha la forma

$$P^+[\beta] = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega, \omega') a^\dagger(\omega) a^\dagger(\omega') d\omega d\omega'$$

Se scambia i due operatori di creazione e scambia ω con ω' non dovrebbe cambiare nulla, quindi $\beta(\omega, \omega') = \beta(\omega', \omega)$.

I due fotoni sono in genere correlati tra di loro, e meno che $\beta(\omega, \omega') = f(\omega) f(\omega')$.

Per riuscire a calcolare la \mathcal{G}_1 utile sapere qualche $[a(\omega), P^+[\beta]]$

$$a(\omega) P^+[\beta] = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega', \omega'') a(\omega) a^\dagger(\omega') a^\dagger(\omega'') d\omega' d\omega''$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega, \omega'') a^\dagger(\omega'') d\omega'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega, \omega'') a^\dagger(\omega') a^\dagger(\omega') a(\omega) a^\dagger(\omega'') d\omega' d\omega'' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega, \omega') a^\dagger(\omega') d\omega' + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \beta(\omega', \omega) a^\dagger(\omega') d\omega' + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint \beta(\omega, \omega'') a^\dagger(\omega') a^\dagger(\omega'') a(\omega) d\omega' d\omega'' =$$

$$= \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') a^\dagger(\omega') d\omega' + P^+[\beta] a(\omega)$$

$$\text{Quindi } [a(\omega), P^+[\beta]] = \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') a^\dagger(\omega') d\omega'$$

In questo caso noi abbiamo fatto i conti con le ω , ma il risultato vale per qualsiasi base

$$\begin{aligned} g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) &\propto \langle 0|12 | \beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) | z^\dagger(t) z^\dagger(t') | 10 \rangle \\ &= 2 \int \beta^*(t, -\frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) dt \end{aligned}$$

Per calcolarci la costante di proporzionalità basta dire che $\mathcal{G}_1(x, t; x, t) = 1$, quindi:

$$g_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\int \beta^*(t, -\frac{x_1}{c}, t) \beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}) dt}{\sqrt{\int |\beta(t, -\frac{x_1}{c}, t)|^2 dt \int |\beta(t, t_2 - \frac{x_2}{c}, t)|^2 dt}}$$

Per calcolare la \mathfrak{J}_2 bisogna prima sapere $\langle 2(\omega) \alpha \omega', P^+[\beta] \rangle$
 $\alpha \omega) \alpha \omega') P^+[\beta] = 2(\omega) P^+[\beta] \alpha \omega') + 2(\omega) \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') 2^+(\omega') d\omega'$
 $= P^+[\beta] \alpha \omega) \alpha \omega') + \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') 2^+(\omega') d\omega' \alpha \omega) + \sqrt{2} \int \beta(\omega, \omega') 2^+(\omega') d\omega' \alpha \omega)$

$\langle 2(\omega) \alpha \omega', P^+[\beta] \rangle =$

$$\sqrt{2} [\beta(\omega, \omega') + \int \beta(\omega, \omega') 2^+(\omega') d\omega' \alpha(\omega) + \int \beta(\omega, \omega') 2^+(\omega') d\omega' \alpha(\omega)]$$

Quando si calcola la \mathfrak{J}_2 gli ultimi due pezzi non contribuiscono quindi:

$$\mathfrak{J}_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \propto 2 |\beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t_2 - \frac{x_2}{c})|^2$$

Al denominatore ci usi il quadrato della normalizzazione che abbiamo detto 2 \mathfrak{J}_1 , per ciò allora fine essere che

$$\mathfrak{J}_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{|\beta(t_1 - \frac{x_1}{c}, t_2 - \frac{x_2}{c})|^2}{\int |\beta(t, -\frac{x_1}{c}, t)|^2 dt \int |\beta(t_2 - \frac{x_2}{c}, t)|^2 dt}$$

Ammassamento e Antiammassamento di Fotoni

Partiamo dal fatto che in questo paragrafo c'è fatto un po' a cazzo perché le fonti sono un po' a cazzo, se c'è qualcosa che non si capisce c'è perché non c'è niente da capire.

Supponiamo di avere una sorgente di Fotoni che a causa di fenomeni di allargamento presenta uno spettro $f(\omega)$.

Ciò significa che i fotoni emessi non sono indipendenti fra di loro, ma tendono ad ammazzarsi.

La sorgente luminosa che consideriamo genera luce eratica.

Prima avevamo visto, quando abbiamo iniziato a studiare i fenomeni di rumore, che classicamente

$$E(t) = E_0 e^{-int} [e^{i\phi_1(t)} + \dots + e^{i\phi_n(t)}]$$

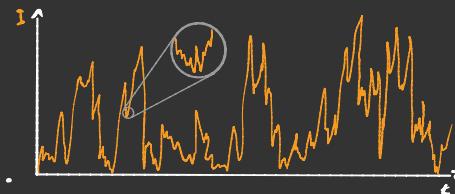
Quantisticamente la funzione d'onda del campo può essere rappresentata come una somma di tanti operatori di creazione ognuno con una fase random $\phi_i(t)$. Non lo scrivo perché fa confondere con una frase random $\phi_i(t)$. E non serve a nulla

Sta di fatto che $S_1 = \tilde{F}(\omega)$ rimane valida anche nel caso quantistico.

Questo perché il caso classico non c'è altro che il caso quantistico, ma con tantissimi fotoni, e per le leggi dei grandi numeri la correlazione deve essere la stessa

$$\text{Se abbiamo } \tilde{F}(\omega) = \frac{F \gamma \pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \quad S_1 = \frac{\langle 2^*(t) 2(t+\tau) \rangle}{\langle 2^*(t) 2(t) \rangle} = e^{-i\omega\tau - \gamma\tau}$$

In inglese si dice bunching and antibunching



Per quanto riguarda la \mathfrak{g}_2 si usa questa equazione che cade dal cielo, ma vale se la nostra sorgente emette (noi cerchiamo)

$$\langle \mathbf{2}^+(t) \mathbf{2}^+(t+\tau) \mathbf{2}(t+\tau) \mathbf{2}(t) \rangle =$$

$$\langle \mathbf{2}^+(t) \mathbf{2}(t) \rangle \langle \mathbf{2}^+(t+\tau) \mathbf{2}(t+\tau) \rangle + \langle \mathbf{2}^+(t) \mathbf{2}(t+\tau) \rangle \langle \mathbf{2}^+(t+\tau) \mathbf{2}(t) \rangle$$

Da ciò otteniamo che

$$\langle \mathbf{2}^+(t) \mathbf{2}^+(t+\tau) \mathbf{2}(t+\tau) \mathbf{2}(t) \rangle = F^2 [1 + e^{-2\gamma(\tau)}]$$

Se si provi a disegnare le tipiche rivelazioni in funzione del tempo ecco qualcosa del genere



Cioè i fotoni tendono ad annientarsi;

Se la $\mathfrak{g}_2(\tau) = 1$ $\forall \tau$ allora i fotoni sono indipendenti
tra di loro ed ecco fuori una cosa così



se la funzione \mathfrak{g}_2 è sempre minore di 1

i fotoni tendono a Antizannazzarsi; tra di loro



Teoria quantistica del Fotoconteggio

Un sensore ideale che ti dice quanti fotoni lo colpiscono nell'intervallo di tempo $(t, t+T)$ è rappresentabile con questo osservabile

$$M(t, T) = \int_t^{t+T} n(t') dt' = \int_t^{t+T} a^+(t') a(t') dt'$$

Purtroppo sensori ideali ancorz non ne hanno inventati.

Un sensore non ideale con un'efficienza η può essere rappresentato come un sensore ideale con davanti un beam splitter con $R = i\sqrt{1-\eta}$ $T = \sqrt{\eta}$

Quindi

$$M_s(t, T) = \int_t^{t+T} s^+(t') s(t') dt$$

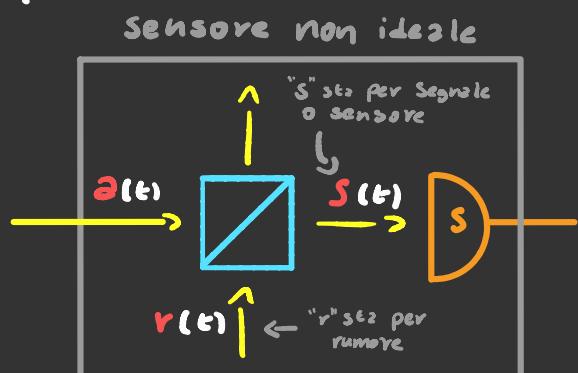
dove $s(t) = a(t)\sqrt{\eta} + i\sqrt{1-\eta} r(t)$

Il valore medio di fotoconteggi:

se il rumore è nullo c'è

$$\langle M_s(t, T) \rangle = \eta \langle M(t, T) \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta M_s^2(t, T) \rangle &= \langle M_s^2 \rangle - \langle M_s \rangle^2 = \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} s^*(t') s(t') s^*(t'') s(t'') dt' dt'' - \left[\int_t^{t+T} s(t') s(t'') dt' \right]^2 = \\ &= \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} s^*(t') s(t'') s^*(t'') s(t') dt' dt'' + \int_t^{t+T} s^*(t') s(t') dt' - \left[\int_t^{t+T} s(t') s(t'') dt' \right]^2 = \\ &= \eta^2 \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} a^*(t') a^*(t'') a(t'') a(t') dt' dt'' + \eta \int_t^{t+T} a^*(t') a(t') dt' - h^2 \left[\int_t^{t+T} a(t') a(t'') dt' \right]^2 = \\ &= \eta^2 \langle \Delta M^2(t, T) \rangle + \eta(1-\eta) \langle M(t, T) \rangle \end{aligned}$$



Rilevazione Omodina

I sensori sono solo in grado di contare i fotoni, tutte le altre informazioni vengono perse.

Perciò se si crea un apparato sperimentale fatto così si rieccano a ottenere un paio di informazioni in più.

Come beam splitter ne scegliersi

uno 50:50, e poi ci calcoliamo le differenze dei segnali dai due rivelatori ($T = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = i\sqrt{2}$)

$$M_{S_1} = \eta \int_t^{t+T} S_1^+(t') S_1(t') dt' = \frac{1}{2} \eta \int_t^{t+T} (2^+ - i2_L^+) (2^+ + i2_L) dt' = \\ = \frac{\eta}{2} \int_t^{t+T} 2^+ 2^+ + i(2^+ 2_L - 2_L^+ 2) + 2_L^+ 2_L dt'$$

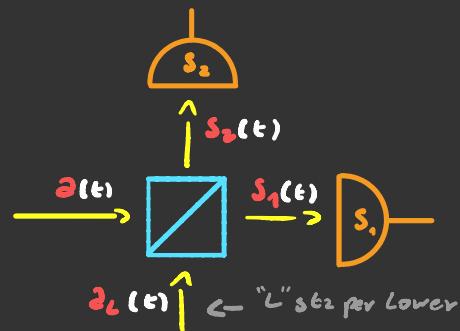
Per calcolarsi M_{S_2} bisogna scambiare 2 con 2_L e 2^+ con 2_L^+

$$M_{S_2} = \frac{\eta}{2} \int_t^{t+T} 2^+ 2^+ - i(2^+ 2_L - 2_L^+ 2) + 2_L^+ 2_L dt'$$

Adezzo calcoliamoci la differenza

$$M_{S_1(t,T)} = M_{S_1} - M_{S_2} = i \eta \int_t^{t+T} 2^+(t') 2_L(t') - 2(t') 2_L^+(t') dt'$$

Adezzo arriva il truccetto, se nell'altra parte di sotto al beam splitter ci si mette uno stato coerente con 2 ampiezze $\alpha = \sqrt{F} e^{i\chi(t)}$ dove $\chi = \omega t + \frac{\pi}{2}$



Mettendo tutto assieme si ha che

$$M_{S_+}(t,T) = \eta \sqrt{F} \int_t^{t+1} 2^+(t') e^{i\chi(t')} + 2(t') e^{-i\chi(t')} dt'$$

Che e' proporzionale all'operatore di campo elettrico

\uparrow
Argomentare

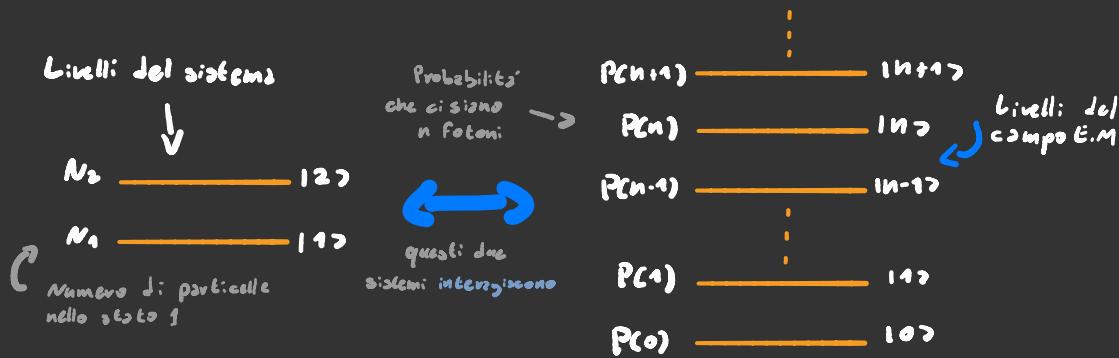
Assunzione effetto

Casimir

Generazione, Attenuazione e Amplificazione Ottica

Ora che abbiamo una conoscenza completa delle proprietà del campo E.M. di questo momento in poi cercheremo di avere una conoscenza completa di come esso interagisca con la materia.

Iniziamo con il solito sistema a 2 livelli e immaginiamo di metterlo in una cavità che ha all'interno un modo a Frequenza $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$. Il tutto è rappresentabile così:



Le equazioni che avevamo scritte prima riguardante il sistema a due livelli erano

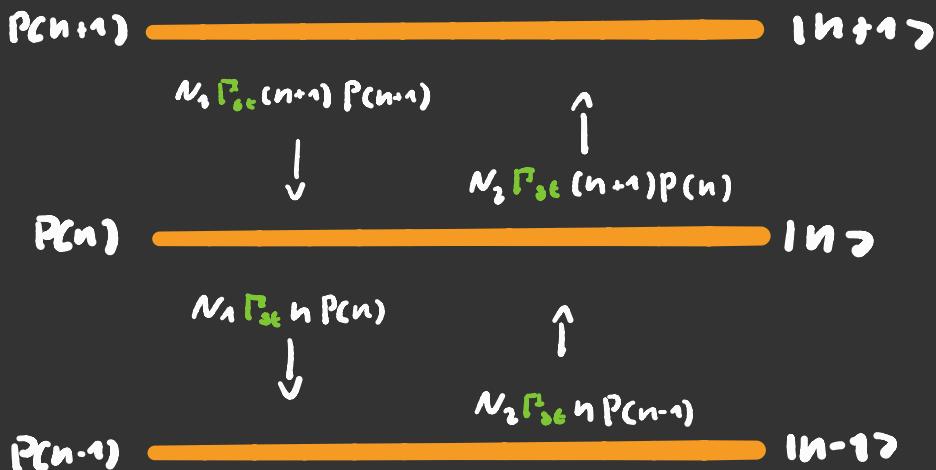
$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 \mathbf{A}_{21} + (N_2 - N_1) \mathbf{B}_{21} W(\omega_0)$$

Questa eq. è ancora valida, noi però vogliamo esprimere in termini del numero di fotoni visto che $W(\omega_0) \propto n$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 \Gamma_{op} + (N_2 - N_1) \Gamma_{sc} n$$

Ora però vogliamo scrivere le equazioni che riguardano il campo E.M.

Ogni livello del campo E.M. può assorbire o emettere un fotone con i livelli energetici adiacenti, visto che l'emissione spontanea rilascia un fotone in un \vec{K} a random ignoriamo questo effetto



Il motivo per cui il termine di emissione stimolata è scritto $l_n \rightarrow l_{n+1}$ e non $l_{n+1} \rightarrow l_n$ è che gli elementi di matrice dell'Hamiltoniana d'interazione sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle n_{k\lambda}+1, 2 | H_i | n_{k\lambda}, 1 \rangle = i \hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}} e^{i k \cdot R + i \omega_0 \cdot w_{k\lambda}} \\ \langle n_{k\lambda}+1, 1 | H_i | n_{k\lambda}, 2 \rangle = -i \hbar g_{k\lambda} \sqrt{n_{k\lambda}+1} e^{-i k \cdot R - i \omega_0 \cdot w_{k\lambda}} \end{array} \right.$$

Sta equazione è già spuntata prima in questo quaderno, se non ti ricordi cosa c'è da dove viene Fai un bel ripasso

E quando si fa la norma quadra su una $n+1$.

L'immagine di sopra si può scrivere in matematica così

$$\frac{dP(n)}{dt} = P_{se} [N_1(n+1)P(n+1) + N_2 n P(n-1) - N_1 n P(n) - N_2(n+1)P(n)]$$

$$\frac{1}{\text{sc}} \frac{d\langle n \rangle}{dt} = \frac{1}{\text{sc}} \sum n \frac{dP(n)}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 &= N_1 \sum n(n+1) P(n+1) + N_2 \sum n^2 P(n-1) - (N_1 + N_2) \langle n^2 \rangle - N_2 \langle n \rangle = \\
 &= \cancel{\langle n^2 \rangle} N_2 - N_1 \sum (n+1) P(n+1) + N_2 \sum n^2 P(n-1) - (N_1 + N_2) \cancel{\langle n^2 \rangle} - N_2 \langle n \rangle = \\
 &= -(N_1 + N_2) \langle n \rangle + 2N_2 \sum n P(n-1) - N_2 \sum P(n-1) = \\
 &= -(N_1 + N_2) \langle n \rangle + 2N_2 \sum (n-1) P(n-1) + N_2 \sum P(n-1) = \\
 &= N_2 + (N_2 \cdot N_1) \langle n \rangle \quad \text{In questi conti ho approssimato } P(0) \approx 0
 \end{aligned}$$

Quindi: $\frac{d\langle n \rangle}{dt} = [N_2 + (N_2 \cdot N_1) \langle n \rangle] \text{P}_{sc}$

Quando si lavora con tanti fotoni si tende ad approssimare $n \approx \langle n \rangle$

Sommendo quest'equazione con quella del rate di N_2 si ha

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{d\langle n \rangle}{dt} + N_2 (\text{P}_{sp} - \text{P}_{sc}) = 0$$

Se si risolve per $\langle n \rangle$ e si moltiplica per hwo si ottiene quanto che negli altri sistemi scambi con gli altri modi del campo

$$\text{hwo} \frac{d\langle n \rangle}{dt} = - \frac{dN_2}{dt} - N_2 (\text{P}_{sp} - \text{P}_{sc})$$

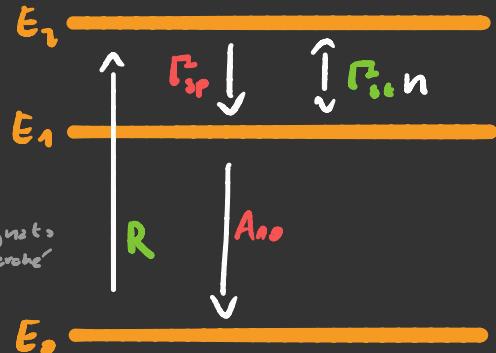
LASER bis

Adesso torniamo a parlare dei

Laser. Il nostro modello di un laser è fatto da un sistema a 3 livelli tale che

$$A_{10} \gg R, P_{sp}, P_{scn} \gg A_{20}$$

Non l'ho disegnato qui a destra perché è piccolo



Visto che A_{10} è molto grande abbiamo che $N_1 \approx 0$
 N_2 invece è controllato da R che è il rate di pompaggio
inoltre supponiamo che $N_2 \ll N_0 \approx N$ ← numero totale di particelle
Quindi:

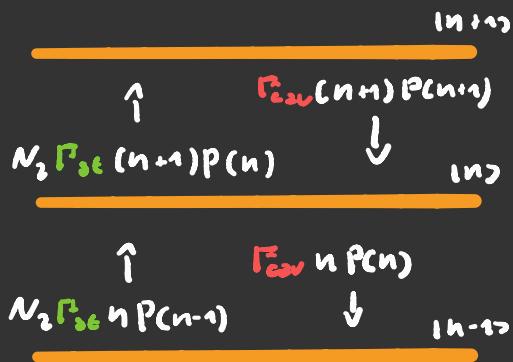
$$\frac{dN_2}{dt} = NR - N_2 (P_{sc} + n P_{sp})$$

Vista che da qualche parte la luce di questo laser deve uscire aggiungiamo un termine di decadimento $P_{scn} n$ (si capisce meglio guardando le figure) Quindi alla fine esce che

$$\frac{dPcn}{dt} = N_2 P_{sc} [nP(n-1) - (n+1)P(n)] - P_{scn} [nP(n) - (n+1)P(n+1)]$$

Faccendo dei conti noiosi come quelli della pagina di prima si ottiene che

$$\frac{dN_2}{dt} = P_{sc} N_2 (1 + \zeta n) - P_{scn} (n)$$



Quando siamo a regime $\langle n \rangle = N_2 = 0$

$$N_2 = \frac{NR}{P_{sp} + P_{sc}\langle n \rangle} \quad P_{sc} N_2 (1 + \langle n \rangle) = P_{car} \langle n \rangle$$

Mettendo a sistema queste due equazioni si ottiene che

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2} \left[(C-1)n_s + \sqrt{(C-1)^2 n_s^2 + 4Cn_s} \right] \quad N_2 = \frac{P_{car}}{P_{sc}} \frac{Cn_s}{n_s + \langle n \rangle}$$

dove $C = \frac{NR P_{sc}}{P_{sp} P_{car}}$ e $n_s = \frac{P_{sp}}{P_{sc}}$

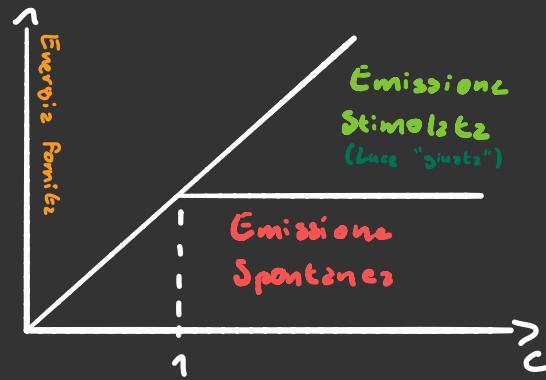
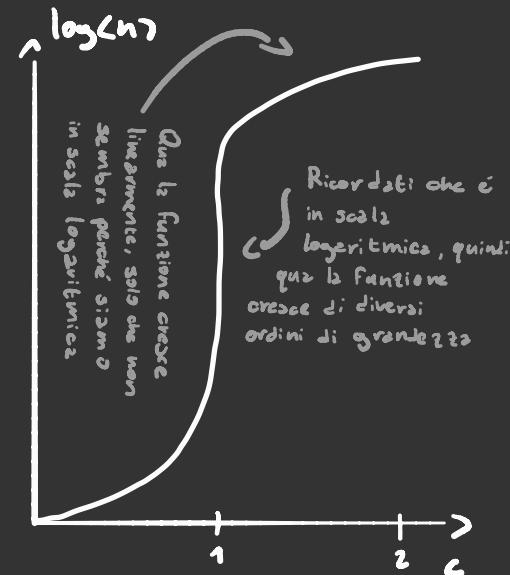
E' possibile plottare $\langle n \rangle$ in funzione di C ed ecco questo. \rightarrow

Per dimostrarlo si potrebbe fare lo studio di funzione, ma visto che qua siamo tutti adulti e vaccinati basta mettere l'equazione di $\langle n \rangle$ su Wolfram Alpha e veficali.

Da qui si puo' capire dove va a finire l'energia fornita al sistema in funzione di C .

L'energia delle luce "giusta" prodotta dal laser e' $\propto \langle n \rangle$.
Tutto il resto e' sprecato in Emissione Spontanea.

Sì, lo so ci spieghi male, ma mi scoccia argomentare a destra

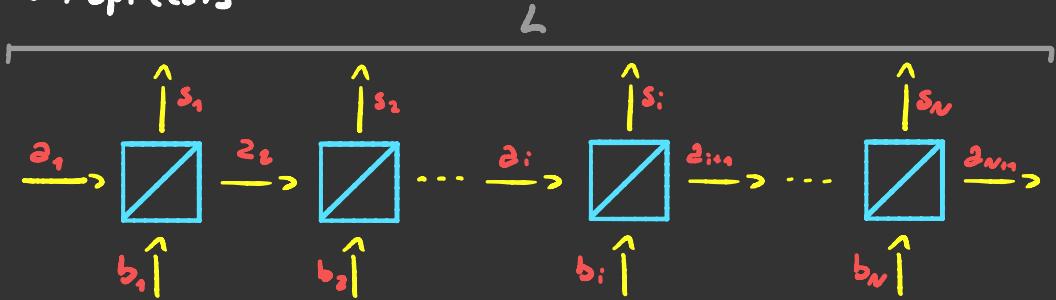


Fluttuazioni della Luce dei LASER

Prima abbiamo approssimato n con $\langle n \rangle$ per calcolare la potenza media di un fascio laser, se vogliamo capire quanto fluttua

Propagazione all'interno di un mezzo attenuante

E' possibile rappresentare un mezzo lungo L come tanti beam splitters



gli operatori **a** servono a indicare il segnale che si propaga,
gli operatori **b** servono a indicare il rumore e
gli operatori **s** servono a indicare ciò che viene scatterato

L'equazione che lega questi operatori è

$$\begin{cases} s_i(\omega) = R(\omega)a_i(\omega) + T(\omega)b_i(\omega) \\ a_{i+1}(\omega) = T(\omega)s_i(\omega) + R(\omega)b_i(\omega) \end{cases}$$

La luce in uscita in funzione di quelli in ingresso è

$$a_{N+1}(\omega) = [T(\omega)]^N a_1(\omega) + R(\omega) \sum_{i=1}^N [T(\omega)]^{N-i} b_i(\omega)$$

Per passare al continuo bisogna che $N \rightarrow +\infty$ $R(\omega) \rightarrow 0$ in modo
tale che il coefficiente di attenuazione $K(\omega) = |R(\omega)|^2 / \Delta z$
rimanga finito ($\Delta z = L/N$), quindi:

$$|T(\omega)|^N = [1 - |R(\omega)|^2]^N = \left[1 - \frac{|R(\omega)L|}{N}\right]^N = e^{-K(\omega)L}$$

$$\text{D2 cioè abbiamo che } [T_{\text{cur}}]^N = \exp \left\{ \left[i \eta(\omega) \frac{w}{c} - \frac{K(\omega)}{2} \right] L \right\}$$

dove $\eta(\omega)$ è l'indice di rifrazione

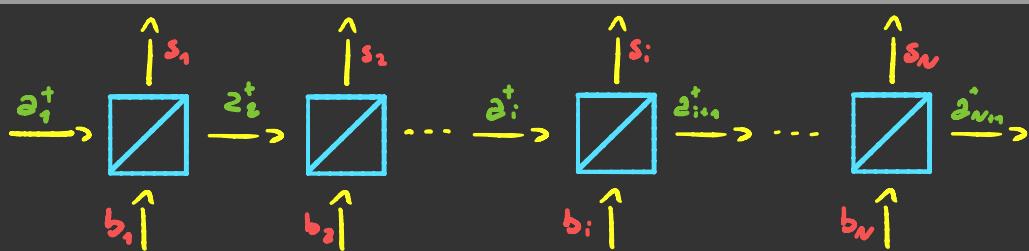
Per capire come mai basta partire dal caso in cui l'onda si propaga nel vuoto, e poi nel mezzo mandare $c \rightarrow c_n$

Se si vuole mandare $a_{\text{out}}(\omega) \rightarrow a(L, \omega)$ basta fare un passo di sostituzione:

$$a(L, \omega) = e^{[i \eta(\omega) \frac{w}{c} - \frac{K(\omega)}{2}]L} a(0, \omega) + \sqrt{K(\omega)} \int_0^L e^{[i \eta(\omega) \frac{w}{c} - \frac{K(\omega)}{2}](L-x)} b(x, \omega) dx$$

Propagazione all'interno di un mezzo Amplificante

L



Se prendiamo un mezzo attenuante e lo facciamo funzionare con tempo che va al contrario diventerà amplificante, quindi basterebbe trasformare tutti gli operatori di distruzione in operatori di creazione.

Il rumore e il segnale in uscita però non dovrebbero avere queste proprietà quindi continuano ad essere degli operatori di distruzione.

Le equazioni che legano tutti questi coefficienti sono simili a quelle di prima

$$\begin{cases} s_i(\omega) = R(\omega) a_i^*(\omega) + T(\omega) b_i(\omega) \\ a_{i+1}^*(\omega) = T(\omega) s_i^*(\omega) + R(\omega) b_i(\omega) \end{cases}$$

Le relazioni di commutazione sono

$$[b_i(\omega), b_j^*(\omega')] = \delta_{ij} \delta(\omega - \omega')$$

$$[s_i(\omega), s_j^*(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \quad [a_i(\omega), a_j^*(\omega')] = S(\omega - \omega')$$

Se inseriamo queste relazioni di commutazione nel sistema di eq. di sopra otteniamo che

$$|T(\omega)|^2 - |R(\omega)|^2 = 1$$

Questo implica che $|T(\omega)|^2 > 1$, che equivale a dire che c'è amplificazione.

Facendo conti identici a quelli della sezione di prima si ha che

$$a_i^*(L, \omega) = e^{[\frac{i\pi\omega L}{c} + \frac{G(\omega)}{2}]L} a_i^*(0, \omega) + \sqrt{G(\omega)} \int_0^L e^{[\frac{i\pi\omega x}{c} + \frac{G(\omega)}{2}](L-x)} b(x, \omega) dx$$

bisogna aggiungere tutte quelle cose riguardante il flusso del segnale

Luce Diffratta da un Atomo

A dire il vero si parla della luce diffratta da un sistema a 2 livelli.

Adesso vediamo come l'onda scatterata da un sistema a 2 livelli e che proprietà ha. Ci mettiamo a far evolvere gli operatori:

$$H = \hbar \sum_{k,l} w (2^+ 2^- + 2^- 2^+) + \hbar \omega_0 \pi^+ \pi^- + i\hbar \sum_{k,l} g_{kl} (2\pi^+ e^{ik \cdot r} - 2^+ \pi e^{-ik \cdot r})$$

$$\{ i\hbar \dot{a} = [H, a] = \hbar w a - i\hbar g_{kl} \pi(b) e^{-ik \cdot r}$$

$$i\hbar \dot{\pi} = [H, \pi] = \hbar \omega_0 \pi + i\hbar \sum_{kl} g_{kl} a (2\pi^+ \pi^- - 1) e^{ik \cdot r}$$

Integrando la prima si ottiene che

$$a(t) = e^{-iwt} \left[a(0) - g_{kl} e^{-ik \cdot r} \int_0^t \pi(\epsilon) e^{i\omega \epsilon} d\epsilon \right]$$

Noi vogliamo calcolerci il campo E.M.

$$E^*(r, t) = i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar w_k}{2 \epsilon_0 V}} \hat{e}_{kl} 2_{kl}(t) e^{ikr} d\vec{k} =$$

$$= i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar w_k}{2 \epsilon_0 V}} \hat{e}_{kl} 2_{kl}(0) e^{ikr - i\omega t} d\vec{k} +$$

$$+ i \sum_{\lambda} \int \sqrt{\frac{\hbar w_k}{2 \epsilon_0 V}} \hat{e}_{kl} g_{kl} e^{-iwt} \int_0^t \pi(\epsilon) e^{i\omega \epsilon} d\epsilon d\vec{k} =$$

Rappresenta l'onda incidente quindi me ne frego

Rappresenta l'onda rifratta

Adesso qua va fatto un integrale in 4 dimensioni ed e' brutto ssimone

Alla fine però esce che

Θ è l'angolo di differenza
tra il momento di dipolo e
la direzione di osservazione

Lo "s" sta per
scattered

$$\rightarrow \vec{E}_s^+(r,t) = -\frac{\epsilon \omega^2 D_{12} \sin \Theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 |r-R|} \Pi\left(t - \frac{|r-R|}{c}\right) \hat{n} \leftarrow$$

Direzione di
osservazione

Visto che E_s^+ & Π possiamo esprimere facilmente le \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2
della radiazione diffusa.

$$\mathfrak{D}_1(\tau) = \frac{\langle E_s^+(r,t) E_s^+(r,t+\tau) \rangle}{\langle E_s^+(r,t) E_s^+(r,t) \rangle} = \frac{\langle \Pi^+(t) \Pi^+(t+\tau) \rangle}{\langle \Pi^+(t) \Pi^+(t) \rangle}$$

$$\mathfrak{D}_2(\tau) = \frac{\langle \Pi^+(t) \Pi^+(t+\tau) \Pi^+(t+\tau) \Pi^+(t) \rangle}{\langle \Pi^+(t) \Pi^+(t) \rangle^2}$$

Dove si noti che $\mathfrak{D}_2(0) = 0$, questo significa che la luce
è fortemente non classica.

Questo è possibile spiegarlo dal fatto che una volta che
un fotone è stato emesso il nostro globo si trova allo stesso
fondamentale e quindi c'è da aspettare che venga riacquistato
per far sì che venga emesso un altro fotone.

Adezzo vediamo che forma ha esattamente la \mathfrak{D}_2 .

Per calcolare i vari valori medi ci tocca fare le tracce con
la matrice di densità.

$$\langle \Pi(t) \rangle = \hat{P}_{11} e^{-i\omega t} = \hat{P}_{22} e^{-i\omega t} \quad \langle \Pi^+(t) \Pi^-(t) \rangle = \hat{P}_{22}(t) = \hat{P}_{11}(t)$$

In qualche modo se mai erice di densità si evolverà

$$\hat{P}_{11}(t+\tau) = \lambda_1(\tau) + \lambda_2(\tau) \hat{P}_{11}(t) + \lambda_3(\tau) \hat{P}_{22}(t) + \lambda_4(\tau) \hat{P}_{22}(t)$$

$$\hat{P}_{22}(t+\tau) = \beta_1(\tau) + \beta_2(\tau) \hat{P}_{11}(t) + \beta_3(\tau) \hat{P}_{22}(t) + \beta_4(\tau) \hat{P}_{11}(t)$$

Perciò manca \hat{P}_{11} ?

Per $\gamma = 0$ abbiamo che $\alpha_2(0) = \beta_1(0) \geq 1$ e tutti gli altri coefficienti sono uguali a zero, invece per $\gamma \rightarrow +\infty$ le condizioni iniziali non contano, quindi tutti i coefficienti tranne $\alpha_1(\infty)$ e $\beta_1(\infty)$ sono nulli.

Una proprietà carica di questi discorsi sui coefficienti di β è che se abbiamo un operatore $A(t)$ e un insieme di operatori $\{A_i(t)\}$ tali che

$$\langle A(t+\gamma) \rangle = \sum_i \alpha_i(\gamma) \langle A_i(t) \rangle \quad \text{abbiamo che}$$

Dimostratelo,
è facile

$$\langle B(t) A(t+\gamma) C(t) \rangle = \sum_i \alpha_i(\gamma) \langle B(t) A_i(t) C(t) \rangle$$

Adesso calcoliamoci i valori medi degli operatori che stanno dentro alle α_i , e β_1

$$\langle \pi^*(t) \pi(t+\gamma) \rangle = \alpha_1(\gamma) \langle \pi^*(t) \rangle + \alpha_2(\gamma) \langle \pi^*(t) \pi(t) \rangle e^{i\omega t}$$

$$\alpha_1(\gamma) = \frac{\tilde{p}_{12}(t)}{\tilde{p}_{22}(t)} e^{i\omega t} \alpha_1(\gamma) + \alpha_2(\gamma) e^{i\omega t}$$

Visto che l'equazione dovrebbe valere per ogni t prendiamo a $t = +\infty$, quindi:

$$\alpha_1(\gamma) = \left[\frac{\alpha_1(\infty)}{\beta_1(\infty)} \alpha_1(\gamma) + \alpha_2(\gamma) \right] e^{i\omega t}$$

$$\alpha_2(\gamma) = \frac{\beta_1(\gamma)}{\tilde{p}_{22}(t)} = \frac{\beta_1(\gamma)}{\beta_1(\infty)}$$

Adesso proviamo a calcolare la γ_2 per un atomo che inizialmente sia stato fondamentale ($b_1(0)=1$,

$$b_{10} = b_{11} = b_{12} = 0$$

$$\frac{d\hat{P}_{11}}{dt} = R \hat{P}_{11}(t) - 2\gamma_{sp} \hat{P}_{12}(t) \cong R - 2\gamma_{sp} \hat{P}_{12}(t)$$

$$R - 2\gamma_{sp} \hat{P}_{12}(t+\tau) = [R - 2\gamma_{sp} \hat{P}_{12}(t)] e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$

$$\hat{P}_{12}(t+\tau) = \frac{R}{2\gamma_{sp}} \left(1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau} \right) + \hat{P}_{12}(t) e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$

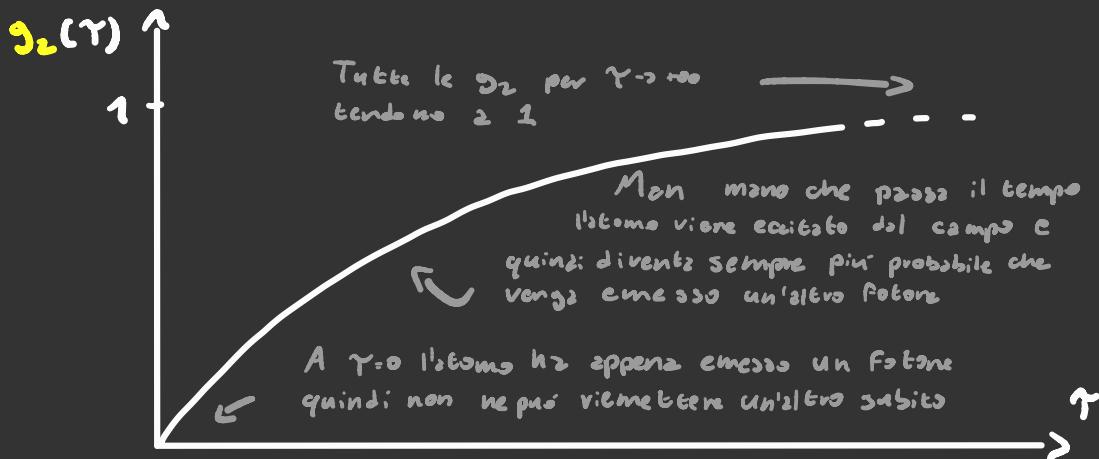
$x = R - 2\gamma_{sp} \hat{P}_{12}(t)$
 $\frac{dx}{dt} = -2\gamma_{sp} \frac{d\hat{P}_{12}(t)}{dt}$
 $\frac{dx}{dt} = -2\gamma x$
 $\dot{x} = -2\gamma x$
 $x(t+\tau) = x(t) e^{-2\gamma\tau}$

Quindi:

$$\beta_1(\tau) = \frac{R}{2\gamma_{sp}} \left(1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau} \right)$$

E adesso possiamo calcolare la $\gamma_2(\tau) = \frac{\beta_1(\tau)}{\beta_1(\infty)}$

$$\gamma_2(\tau) = 1 - e^{-2\gamma_{sp}\tau}$$



Fluorescenza

Ma che differenza c'è tra Fluorescenza e Fosforescenza?

In questa materia le i fenomeni di fluorescenza sono quelle cose che succedono quando un atomo viene eccitato e poi decade.

Gli altri due tipi di scattering sono quello Rayleigh e quello Raman, che a differenza della fluorescenza sono elastici.

Aognuno di questi fenomeni ci associa un

Sezione d'urto

Per processi di diffusione E.M. è definita così

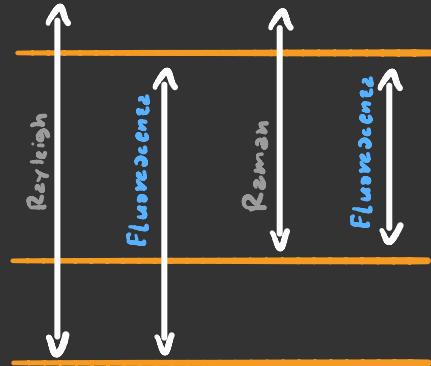
$$\frac{dG}{d\Omega} = \rho \frac{w_i I_s(\infty)}{w_i I} \quad \begin{matrix} \text{Intensità scatterata} \\ \text{Intensità incidente} \end{matrix}$$

Chiaramente per calcolarla va fatta la media sulla matrice di densità.

Quelche pagina fa abbiamo visto che

$$\langle I_s(r, t) \rangle = \frac{2}{q_0} \langle E_s^*(r, t) E_s(r, t) \rangle = \frac{1}{8 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{e w_0^2 \hat{E}_s \cdot \vec{D}_{11}}{\pi (r - R)} \right)^2 l_{11}(t - \frac{r}{c}) \hat{n}$$

$$\langle I \rangle = \frac{c h w \langle n \rangle}{V} \quad \begin{matrix} \text{Questo è il Volume} \\ \text{infatti è bianco} \end{matrix}$$



Avevo scritto l'anno scorso un pdf sulla sezione d'urto, sta sulla cartella Moza, dagli un'occhiata se vuoi ripassare

A questo punto ci vuole sapere che fa la matrice di densità

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -\frac{d\hat{\rho}_{11}}{d\tau} = -\frac{iV}{2}(\hat{\rho}_{12} - \hat{\rho}_{21}) - 2\gamma_{sp}\hat{\rho}_{11} \\ \frac{d\hat{\rho}_{12}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}_{21}}{d\tau} = \frac{iV}{2}(\hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{22}) + [i(w_0 - \omega) - \gamma_{sp} + \gamma_{coll}] \hat{\rho}_{12} \end{cases}$$

$$\hat{\rho}_{11}(+\infty) = \frac{(\gamma/2\gamma_{sp})V^2}{(w_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + (\gamma/2\gamma_{sp})V^2} \quad V^2 = \frac{2e^2}{\epsilon_0 c h^2} (E \cdot D_{11})^2$$

Alla fine la sezione d'urto viene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) = \frac{e^4 w_0^2 w}{16\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 c^5 w_{sc}} \frac{(E_{sc} \cdot D_{11})^2 (\hat{n} \cdot D_{11})^2 \gamma/\gamma_{sp}}{(w_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + (\gamma/2\gamma_{sp})V^2}$$

La sezione d'urto è piccola per piccole intensità, e per intensità troppo alta tende a zero perché l'atomo viene saturato.

Per calcolarsi la σ_1 e la σ_2 basta usare le espressioni calcolate prima

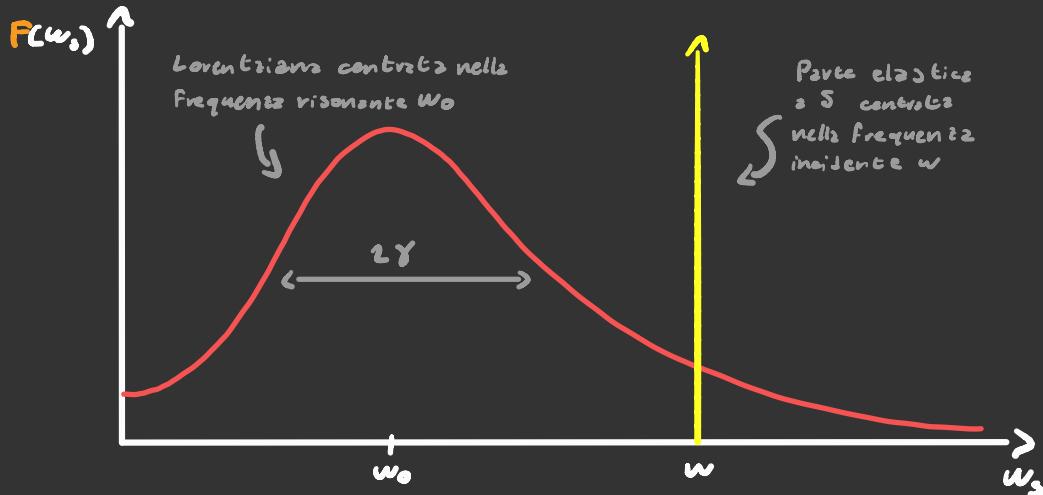
$$\sigma_1(\tau) = \left[\frac{\alpha_1(\omega)}{\beta_1(\omega)} \alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau) \right] e^{i\omega t} \quad \sigma_2(\tau) = \frac{\beta_1(\tau)}{\beta_1(\omega)}$$

Sarà noto visto che le equazioni di Bloch sono diverse, quindi gli $\alpha_i(\tau)$ e $\beta_i(\tau)$ saranno diversi, ma però non li servirà perché non serve per davvero, basta scrivere direttamente

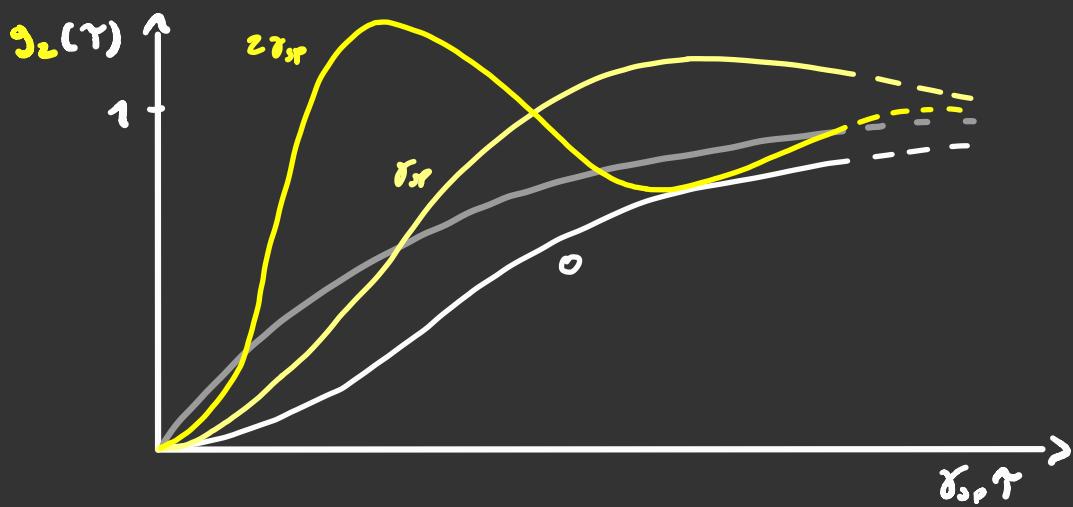
$$\sigma_1(\tau) = \frac{\gamma_{coll}}{\tau} e^{-i\omega_0 \tau - i\pi} + \frac{\gamma_{sp}}{\tau} e^{-i\omega \tau}$$

Questo ci serve a scrivere la distribuzione in frequenza
della luce sottilegata

$$F(w_s) = \underbrace{\frac{\gamma_{01}}{\pi} \frac{1}{(w_0 - w_s)^2 + \gamma^2}}_{\text{Anelastico}} + \underbrace{\frac{\gamma_2}{\gamma} \delta(w_s - w)}_{\text{Elastico}}$$



La γ_2 ha una formula enorme, quindi meglio mettere direttamente qualche grafico.

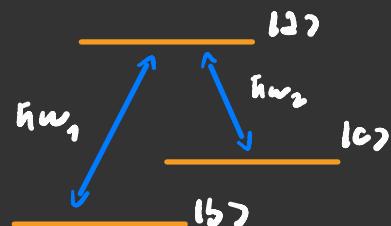


Coerenza

Quella cosa che i filosofi non hanno

E' un po' complicato dire esattamente la coerenza, ma ci provo lo stesso, in ogni caso dopo ci saranno un paio di esempi che dovrebbero rendere il tutto più chiaro.

Supponiamo di avere un atomo con 3 livelli energetici e che attraverso un campo E.M. sia possibile effettuare delle transizioni $|2\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |c\rangle$.



Di norma se partiamo da un sistema $c_b(0)|b\rangle + c_c(0)|c\rangle$ dopo un po' di tempo ci troviamo in uno stato

$$c_b(t)|2\rangle + c_b(t)|b\rangle + c_c(t)|c\rangle$$

Grazie al fatto che il campo E.M. fa assorbire un fotone, però se impostiamo bene le fasi dei livelli bcc a $t=0$ possiamo far sì che la transizione $|b\rangle \rightarrow |2\rangle$ sia esattamente in controfase con la transizione $|c\rangle \rightarrow |2\rangle$. Così facendo sarà impossibile per il campo E.M. eccitare gli elettroni allo stato $|2\rangle$.

Questo è un esempio di come si usi la coerenza fra 2 livelli energetici per controllare un processo.

Adezzo vediamo di dimostrare in matematica che tutto ciò è possibile.

$$H = H_0 + H_1 \quad H_0 = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 2| + \hbar\omega_2 |5\rangle\langle 6| + \hbar\omega_3 |6\rangle\langle 5|$$

$$H_1 = \frac{\hbar}{2} \Omega_1 [|2\rangle\langle 5| e^{i\omega_1 t + i\phi_1} + |5\rangle\langle 2| e^{-i\omega_1 t - i\phi_1}] + \frac{\hbar}{2} \Omega_2 [|2\rangle\langle 6| e^{i\omega_2 t + i\phi_2} + |6\rangle\langle 2| e^{-i\omega_2 t - i\phi_2}]$$

$$\text{if } \frac{dC_2}{dt} = \langle 2 | H | 1 \rangle = C_2(t) \hbar\omega_3 + \hbar \frac{\Omega_1}{2} e^{i\omega_1 t + i\phi_1} C_5(t) + \hbar \frac{\Omega_2}{2} e^{i\omega_2 t + i\phi_2} C_6(t)$$

$$\text{if } \frac{dC_5}{dt} = \langle 5 | H | 1 \rangle = C_5(t) \hbar\omega_3 + \hbar \frac{\Omega_1}{2} e^{-i\omega_1 t - i\phi_1} C_2(t)$$

$$\text{if } \frac{dC_6}{dt} = \langle 6 | H | 1 \rangle = C_6(t) \hbar\omega_3 + \hbar \frac{\Omega_2}{2} e^{-i\omega_2 t - i\phi_2} C_2(t)$$

Se $C_2(t) = 0$ basta t_2 imporre

Φ è l'angolo di rotazione
intorno all'asse z per $t=0$

$$\sin C_5(0) = e^{i\phi_1} \Omega_2 C_6(0) \quad \text{e} \quad \phi_1 - \phi_2 - \Phi = \pm \pi$$

La funzione d'onda totale viene

$$(1) \quad \text{e} \quad C_5(t) |5\rangle + C_6(t) |6\rangle = e^{-i\omega_3 t} C_5(0) |5\rangle + e^{-i\omega_3 t} C_6(0) |6\rangle = \\ \propto \Omega_1 e^{-i\omega_1 t} |5\rangle + \Omega_2 e^{-i\omega_2 t + i\Phi} |6\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \Omega_2 e^{i\Phi - i\omega_3 t} |5\rangle + \Omega_1 e^{-i\omega_2 t} |6\rangle$$

Questa funzione d'onda è un mezzo Autostato dell'Hamiltoniano nel senso che una volta che il sistema si trova dentro non si sposta più, ed è spesso chiamata "riga nera" o "stato scuro".

Una cosa curiosa da notare è che lo stato scuro può essere anche $|5\rangle$, basta avere $E_1 = 0$ ed $E_2 \neq 0$ e viceversa.

che l'elettrone se ne stia in $|5\rangle$. (anche in questo caso c'è anche lo stato fondamentale)

Inoltre se si cambiano i tempi adiabatici mentre lo stato scuro segue.

Trasparenza indotta Elettromagneticamente

Quest'ultimo paragrafo può essere usato per spiegare la trasparenza indotta elettromagneticamente.

Come abbiamo visto lo stato si evolverà senza assorbire nessun fotone, ciò significa che è possibile attivare o disattivare la trasparenza del mezzo accendendo o spegnendo o spegnendo una delle due radiazioni.

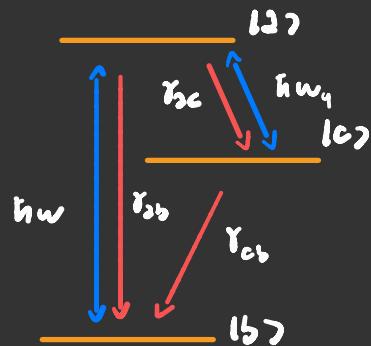
Il problema però c'è che il sistema deve essere preparato in uno stato quantistico ben preciso perché tutto funzioni.

Realisticamente parlando l'elettrone è in uno stato nello stato fondamentale e inoltre c'è dell'emissione spontanea dagli stati più alti a quelli più bassi (γ_{ab} , γ_{ac} , γ_{bc}).

Per rendere il tutto più simile al sistema studiato poco fa supponiamo che γ_{ab} sia molto più grande di γ_{ac} e γ_{bc} .

A prima vista tuttavia queste rate di decadimento sembrano essere un bel problema, ma a dire il vero aiutano ad impostare la fase "giusta" per tra lo stato $|ca\rangle$ e $|bc\rangle$.

In realtà se la fase $\phi \neq \phi_1 - \phi_2 \pm \pi$ l'elettrone viene eccitato e sbilanzato un po' e infine ri-decade in $|bc\rangle$ con una nuova fase ϕ'' e poi ϕ''' . Finché non arriverà una fase $\phi^{(n)} = \phi_1 - \phi_2 \pm \pi$



Supponiamo di voler far sì che il nostro mezzo sia trasparente rispetto a una radiazione a frequenza $\hbar\omega = E_2 - E_1$.

Per fare ciò abbiamo far sì che lo stato scuro sia l_{b2}, quindi la radiazione a frequenza $\hbar\omega_0 = E_2 - E_0$ deve essere molto più forte di quella a frequenza $\hbar\omega$.

In teoria questo è quello che serve per fare la trasparenza indotta elettromagneticamente, vediamo passiamo ai matematici.

Per vedere se un mezzo è trasparente ad una certa frequenza ω , basta guardare la suscettività $\chi(\omega)$, senza entrare troppo nei dettagli, noi abbiamo che

$$n(\omega) + \frac{2i\omega K(\omega)}{c} = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$$

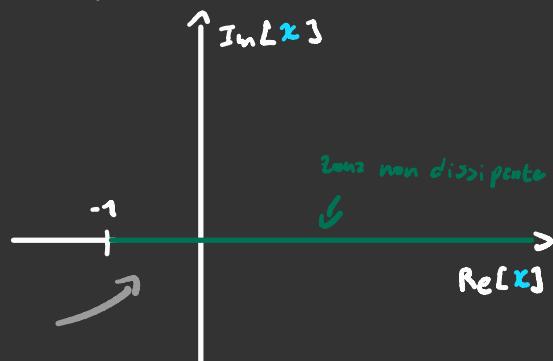
\nwarrow indice di rifrazione
 \nearrow coefficiente di attenuazione

Un mezzo per essere considerato

trasparente deve avere $K(\omega) = 0$,

quindi deve trovarsi in queste

zone del campo complesso.



Ricordiamoci che $P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega) = \frac{N}{V}\langle \hat{D} \rangle E(\omega)$

dove per $\langle \hat{D} \rangle$ si intende $tr(\hat{D})$.

Viste che gli elementi diagonali della matrice di densità hanno momento di dipolo nullo ci limitiamo a scrivere gli elementi fuori diagonale, inoltre visto che siamo interessati solo a cosa succede alla componente della luce a frequenza ω l'unica componente di \hat{D} che ci interessa è D_{ab} .

Il procedimento è identico a quello delle equazioni di Bloch ottiche

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \rho_{2b}}{dt} = -(i\omega_{2b} + \gamma_{2b}) \rho_{2b} - \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} e^{-i\omega t} (\rho_{22} - \rho_{bb}) + i \frac{\Omega_m}{2} e^{-i\omega_t - i\phi_m} \rho_{ab} \\ \frac{d \rho_{ab}}{dt} = -(i\omega_{ab} + \gamma_{ab}) \rho_{ab} - \frac{i}{2} \frac{D_{ab} E}{\hbar} e^{-i\omega t} (\rho_{aa} + i \frac{\Omega_m}{2} e^{i\omega_t + i\phi_m} \rho_{2b} \\ \frac{d \rho_{ac}}{dt} = -(i\omega_{ac} + \gamma_{ac}) \rho_{ac} + i \frac{D_{2b} E}{\hbar} e^{-i\omega t} \rho_{bc} - i \frac{\Omega_m}{2} e^{-i\omega_t - i\phi_m} (\rho_{22} - \rho_{cc}) \end{array} \right.$$

$$A \quad t=0 \quad \rho_{bb}=1, \quad \rho_{22}=\rho_{cc}=\rho_{ac}=0$$

Per ora limitiamoci a tempi piccoli, facendo così possiamo ignorare la III equazione del sistema. Se si definiscono

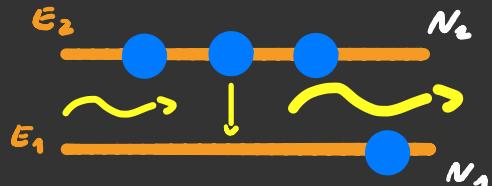
$$\tilde{\rho}_{2b} := \rho_{2b} e^{-i\omega t} \quad \tilde{\rho}_{ab} := \rho_{ab} e^{-i(\omega_{ab} + \omega_m)t} \quad \Delta := \omega_{ab} - \omega$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\rho}}_{2b} = -(i\gamma_{2b} + i\Delta) \tilde{\rho}_{2b} + \frac{i}{2} \frac{D_{2b} E}{\hbar} + i \frac{\Omega_m}{2} e^{i\phi_m} \tilde{\rho}_{ab} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ab} = -(i\gamma_{ab} + i\Delta) \tilde{\rho}_{ab} + i \frac{\Omega_m}{2} e^{i\phi_m} \tilde{\rho}_{2b} \end{array} \right.$$

Incompleto

LASER Senza Iniezione

Quando c'era LWL...



Prima avevamo visto che per far

sì che ci sia dell'amplificazione della luce è necessario che ci siano più elettroni eccitati che allo stato fondamentale.

Anche levando l'emissione spontanea, se ad esempio $N_2 = N_1$ il numero di Fotoni che emettono in modo stimolato è uguale al numero che assorbono, quindi la luce non viene amplificata.

Per far sì che avvenga l'emissione anche quando $N_2 < N_1$ c'è bisogno che in un modo o nell'altro i rate di assorbimento e di emissione non siano uguali.

Facciamo finta che il nostro

Sistema a 2 livelli sia
accoppiato a un continuo
di livelli energetici: il rate
transizione si scrivibile tipo

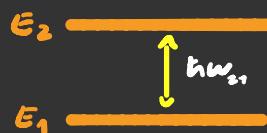
$$\langle 2 | H_2 | 1 \rangle +$$

$$+ \int \frac{\langle 2 | H_2 | c \rangle \langle c | H_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_c} dc$$

Continuo

Argomenti:

Quando fa diventare la
curva di assorbimento così



Anche il processo di emissione viene modificato quando si considera l'interazione col continuo, ma in modo diverso

$$\langle 1 | H_2 | 2 \rangle + \int_{\text{Continuo}} \frac{\langle 1 | H_2 | c \rangle \langle c | H_2 | 2 \rangle}{E_2 - E_c} dc \quad \begin{matrix} \text{Al denominatore c'è} \\ E_2 al posto di E_1 \end{matrix}$$

Questo crea un simmetria nei tassi di assorbimento e emissione stimolata, e quindi in teoria permette di avere dell'amplificazione senza inversione

Attenzione! Questo non significa che è possibile avere un laser senza inversione con un sistema a 2 livelli.

Un III livello è comunque indispensabile per pompare gli elettroni nello stato 12>. Altrimenti prima o poi gli elettroni in 12> finirebbero

$$|4\rangle = \lambda_1(t)|12\rangle + \lambda_2(t)|12\rangle + \int_{c_{\min}} P_c(t)|c\rangle dc$$

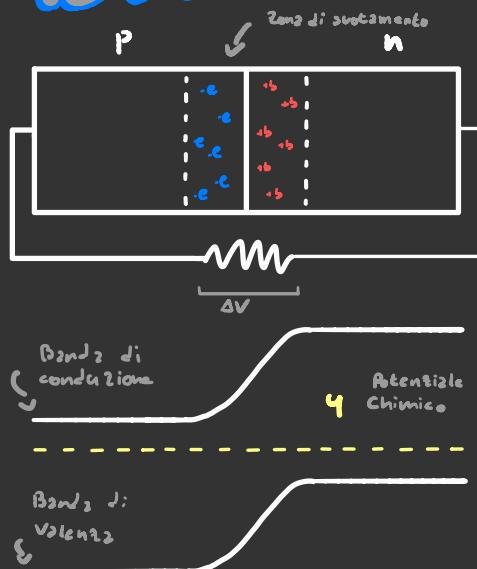
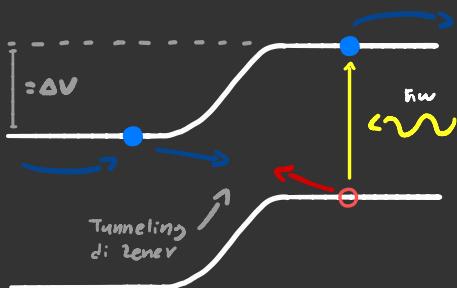
$$\text{in } \dot{\lambda}_2(t) = \langle 2 | V | 4 \rangle = \lambda_1(t) \langle 2 | V | 12 \rangle + \int P_c(t) \langle 2 | V | c \rangle dc$$

$$\text{in } \dot{P}_c(t) = \lambda_1(t) \langle c | V | 12 \rangle + \lambda_2(t) \langle 2 | V | 12 \rangle + \int P_c(t) \langle c | V | c \rangle dc$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \langle 2 | V | 12 \rangle + \frac{1}{\hbar} \iint \langle 2 | V | c \rangle \langle c | V | 12 \rangle dc dt$$

Come funziona un Pannello Solare

Supponiamo di avere una giunzione p-n, questa giunzione crea un gradino di potenziale per gli elettroni. Se non c'è luce che colpisce la nostra giunzione tutti gli elettroni stanno nella banda di valenza, per far sì che si possano muovere è necessario che vadano in banda di conduzione.



Supponiamo che un fotone con un'energia pari al gap del semiconduttore ecciti un elettrone. Se l'elettrone esce dalla parte destra nel nostro semiconduttore, esso libera un'energia pari a $\Delta V e$,

dopo di che rientra nell'altra parte del semiconduttore nella banda di valenza e si annienta con la buca che aveva creato.

Se invece l'elettrone viene eccitato nella zona P il ragionamento è identico al caso in cui l'elettrone viene eccitato nella zona N, solo che altra volta bisogna ragionare in termini di buca P e buca.

A primi visti sembrerebbe che se si usi un pallotto solare con un gap energetico ΔV si ha un'efficienza del 100%. Il problema però è che facendo così la banda di conduzione viene riempita di elettroni e quindi non conduce più.

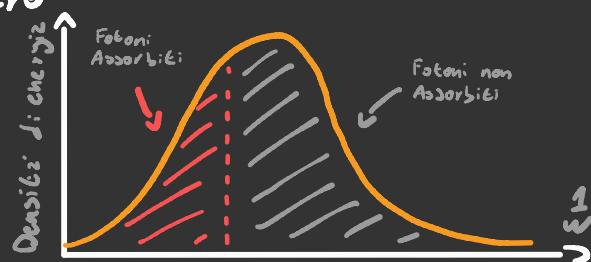
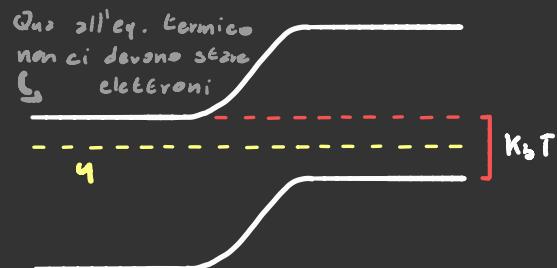
Per assicurarsi che non ci siano elettroni dobbiamo far sì che la banda di conduzione nella zona P e quella di valenza nella N abbiano una differenza di energie pari a $k_B T$, dove T è la temperatura del silicio. Da qui abbiamo che l'energia prodotta dal singolo fotone è

$$\Delta V e = h\nu - k_B T$$

L'efficienza η è uguale al rapporto tra lavoro prodotto $\Delta V e$ e energia assorbita $h\nu$, inoltre se scriviamo l'energia assorbita come se fosse una temperatura otteniamo che

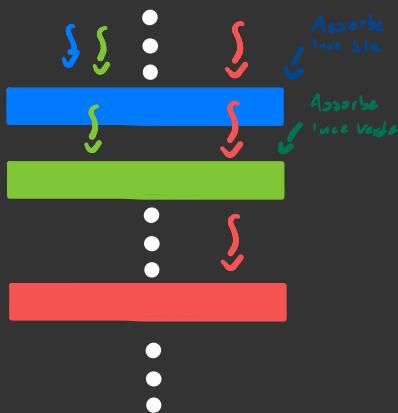
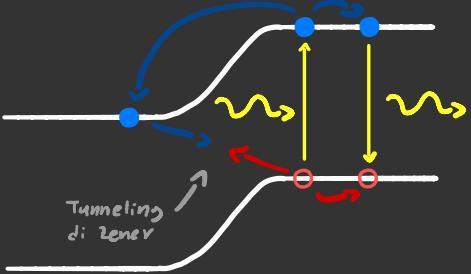
$$\eta = \frac{\Delta V e}{h\nu} = 1 - \frac{k_B T}{h\nu} = 1 - \frac{I}{T_s} \quad \begin{matrix} \text{Temperatura della} \\ \text{sorgente} \end{matrix}$$

E queste non è altro che l'efficienza di una macchina di Carnot. Purtroppo però questa formula funziona solo per luci monocromatiche. Se la radiazione è di corpo nero i fotoni a frequenza minore del gap non vengono assorbiti e quelli a frequenza maggiore contribuiscono solo $\Delta V e$.



Questo problema però può essere risolto creando dei pannelli strati fatti che assorbono la luce come descritto nel disegno a destra. C'è un problema: costerà uno schazzo di soldi fare i pannelli così.

I problemi però non finiscono qui: certe volte l'elettronere a la buca si scordava di fare il giro del circuito prima di ricombinarsi.



Questo c'è uno spreco di energia, ma forse c'è risolvibile. Nell'immagine qua a sinistra sono presenti due possibili percorsi:

Ma se decade vi mettendo un fotone a frequenze che non dovrebbe essere riasorbito subito?