

# Sezione d'urto

Francesco Sacco



Aprile 2019

## Indice

|   |                                                    |   |
|---|----------------------------------------------------|---|
| 1 | Sezione d'urto s'un oggetto opaco                  | 2 |
| 2 | Sezione d'urto s'un oggetto traslucido             | 3 |
| 3 | Collegamento con la probabilità                    | 4 |
| 4 | Sezione d'urto di una particella                   | 4 |
| 5 | Sezione d'urto con due gas/plasmi che si scontrano | 5 |
| 6 | Sezione d'urto differenziale                       | 6 |
| 7 | Cose con onde elettromagnetiche                    | 8 |

## Prefazione

Visto che c'è molta confusione sulla sezione d'urto faccio questi brevi appunti per chiarire bene cos'è e cosa rappresenta.

Lungo il pdf metterò un bel pò di note a piè di pagina, esse vanno lette solo se non si capisce quello che si sta leggendo, se stai capendo non leggerle,<sup>1</sup> rovinano il flusso della discussione.

La sezione d'urto viene indicata di solito con  $\sigma$ , Il suo nome richiama alla mente qualcosa che abbia a che vedere un'area su cui sbatte qualcosa. Però la sezione d'urto non è sempre l'area dell'oggetto, ma intende rappresentare una sorta di "area equivalente".

Ad esempio è ragionevole dire che per la luce l'area effettiva di un vetro  $1m \times 1m$  è minore di un metro quadro, questo perchè molti fotoni passano attraverso il vetro indisturbati.

## 1 Sezione d'urto s'un oggetto opaco

Per semplicità iniziano a trattare il concetto di sezione d'urto nel caso di un oggetto opaco,<sup>2</sup> in questo caso ci aspettiamo che la sezione d'urto sia uguale alla superficie ortogonale al facio.

Noi in questo caso vogliamo ricavare l'area ortogonale in base a quello che succede al fascio di luce che lo colpisce.

Supponiamo di mandare un facio di luce con un'area maggiore del bersaglio, e che dietro ci sia uno schermo ortogonale al facio molto grande che raccolga la luce (figura 1), allora possiamo dire che la sezione d'urto è l'area dell'ombra che l'oggetto genera sullo schermo.

Chiamarente se l'oggetto è una superficie orientata ortogonalmente al facio luminoso, la sua sezione d'urto sarà uguale alla sua area.

Solo che c'è un problema: nel caso di un'oggetto sgummato sarà difficile misurare l'area. Per ovviare a questo problema si può mettere uno schermo che sia in grado di contare i fotoni che riceve e una sorgente che sia in grado di contare i fotoni che manda.

Chiamiamo  $A$  l'area illuminata dalla sorgente quando non c'è il bersaglio in mezzo ai piedi, che per comodità la creiamo quadrangolare,  $n_s$  il numero di fotoni che colpiscono lo schermo per unità di tempo e  $\Phi$  il numero di fotoni che vengono sparati dalla luce per unità di tempo, allora con una semplice

---

<sup>1</sup>Minchia ma allora non hai capito un cazzo

<sup>2</sup>Chiaramente le particelle incidenti sono fotoni, ma con un pò di fantasia si può generalizzare il concetto con oggetti incidenti diversi dai fotoni

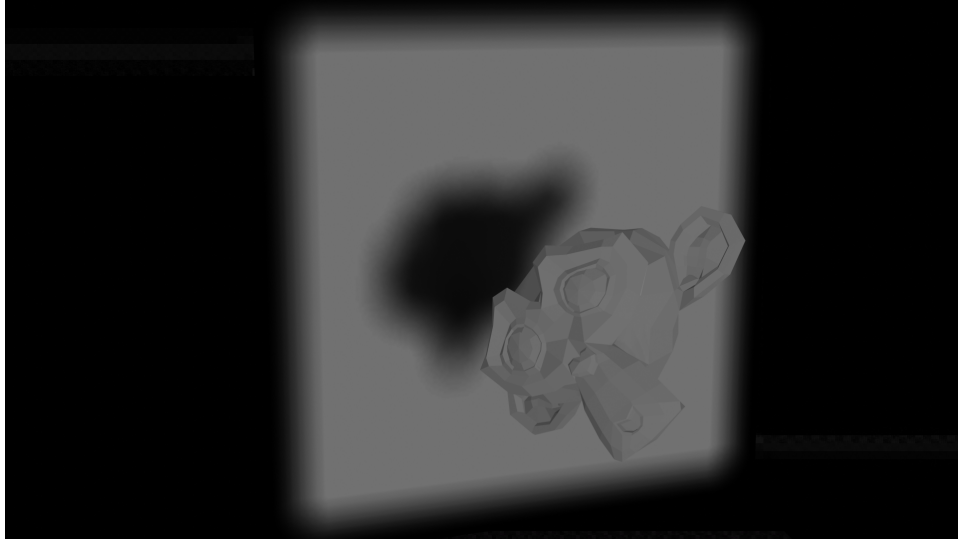


Figura 1: Immagine fatta male illustrativa

proporzione si può dire che:

$$\sigma : (n_l - n_s) = A : n_l \rightarrow \sigma = A \cdot (1 - n_s/\Phi) \quad (1)$$

Adesso vediamo se funziona veramente questo ragionamento.

Per verificare prendiamo un bersaglio quadrato di area  $\sigma = 1$  illuminata da una luce quadrata di area  $A = 2$ , di conseguenza metà dei fotoni verrà bloccata, cioè  $n_s = \Phi/2$ , quindi  $1 = 2 \cdot (1 - \Phi/2 \cdot 1/\Phi) = 2 \cdot (1 - 1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$ . Che bello funziona.

Una cosa molto importante che poi verrà applicata è l'additività della sezione d'urto, infatti se prendiamo due schermi opachi quadrati con  $\sigma = 1$  e li mettiamo uno accanto all'altro formando un rettangolo, esso avrà una sezione d'urto uguale a 2.

## 2 Sezione d'urto s'un oggetto traslucido

Per gli oggetti traslucidi tratteremo soltanto quelli planari, perchè quelli con geometri tridimensionali si comportano in modo strano con la luce.<sup>3</sup>

Se ti dico: "Io ho una lastra di vetro di un metro quadro che fa passare la metà della luce, qual'è la sezione d'urto?"<sup>4</sup> tu mi risponderai di sicuro: "mezzo

<sup>3</sup>Facendo qualche assunzione volendo si potrebbe trattare anche oggetti tridimensionali, ma non credo aiuti alla comprensione del testo

<sup>4</sup>Supponiamo che la luce che non passi venga assorbita, a dire il vero non è molto importante che fine faccia

metro quadro", ma come è possibile giustificare questa affermazione?

Chiaramente deriva dall'equazione 1, ma si perde un pò il concetto che invece era ben chiaro con lo schermo opaco che ci ha portato in primo luogo a ricavare quell'equazione.

Ora però ti porto un'altro vetro traslucido con le esatte stesse proprietà, e ti chiedo: "qual'è la sezione d'urto di quest'altro vetro?", tu mi dirai: "è lo stesso di prima, quindi per forza sarà mezzo metro quadro", e io ti rispondo: "la tua sezione d'urto è esatta, ma ti sbagli a dire che è lo stesso di prima! Questo è uno schermo opaco che ha tantissimi buchetti microscopici che in totale gli levano metà dell'area"<sup>5</sup>.

Quindi effettivamente possiamo dire che il vetro è un pò come uno schermo opaco con tanti buchetti, e quindi deve avere la stessa sezione d'urto, e quindi si usa l'equazione 1.

### 3 Collegamento con la probabilità

Sempre rimandando nel caso del vetro traslucido posso fare questa affermazione: Se il fotone viene assorbito, allora vuol dire che ha interagito con un'atomo del vetro, altrimenti è passato indisturbato.

Ora vogliamo vedere se è possibile legare la probabilità di interazione  $P$  con la sezione d'urto.

Sempre usando la notazione della sezione 1 e dell'equazione 1, possiamo dire che la probabilità  $P$  che il fotone incida sia quanti ne vengono assorbiti dal bersaglio per unità di tempo, che sono tanti quanti a quelli che non arrivano sullo schermo per unità di tempo  $N_i = (\Phi - n_s)$ , diviso quanto ne arrivano in totale  $\Phi$ , quindi:

$$P = \frac{N_i}{\Phi} = \left(1 - \frac{n_s}{\Phi}\right) = \frac{\sigma}{A} \quad (2)$$

### 4 Sezione d'urto di una particella

Supponiamo adesso che la luce venga proiettata in modo che ogni singolo fotone colpisca il bersaglio (ma non per forza deve essere assorbito, può anche attraversarlo se è traslucido), e che il bersaglio sia un oggetto planare con una densità di atomi per unità di superficie  $n_s$ .

---

<sup>5</sup>Chiaramente è un'esperimento mentale, nella realtà fare una cosa del genere non sarà possibile perchè dovrebbe avere uno spessore nullo e la luce ha anche un comportamento ondulatorio che porterebbe alla diffrazione, ma possiamo supporre che tutto questo non accada in questo esempio

Adesso io voglio sapere quantè la sezione d'urto di un atomo sulla superficie, visto che la sezione d'urto è additiva<sup>6</sup> posso dire che la sezione d'urto del bersaglio  $\sigma_b$  è uguale alla sezione d'urto di un singolo atomo  $\sigma$  moltiplicato per quanti ce ne sono per unità di superficie  $n_s$  moltiplicato per quanta superficie c'è  $A$ , quindi:

$$\frac{AN_i}{\Phi} = \sigma_b = \sigma An_s$$

dove la prima eguaglianza viene dall'equazione 2, risolvendo per sigma si ottiene che

$$\sigma = \frac{N_i}{\Phi n_s} \quad (3)$$

Questa equazione però dipende da come è fatta la lastra bersaglio, quindi se vogliamo qualcosa che ne sia indipendente bisogna fare qualche passaggio matematico:

$$\sigma = \frac{N_i}{\Phi n_s} \cdot \frac{An_s}{An_s} = \frac{N_i}{An_s} \cdot \frac{A}{\Phi} \cdot \frac{n_s}{n_s} = N_a \cdot \frac{1}{|j|} \cdot 1 = \frac{N_a}{|j|}$$

Dove ho detto che il numero di interazioni sulla lastra per unità di tempo  $N_i$  è uguale al numero di interazioni su un singolo atomo  $N_a$  moltiplicato per quanti atomi ci sono  $An_s$  (Area per densità), quindi  $N_i/(An_s) = N_a$  e poi ho detto che il flusso attraverso l'area  $\Phi$  diviso l'area stessa  $A$  dà la densità di corrente, quindi  $A/\Phi = 1/|j|$ .

Mettendo tutti insieme si ha che

$$\sigma = \frac{N_a}{|j|} \quad (4)$$

## 5 Sezione d'urto con due gas/plasmi che si scontrano

Fin'ora abbiamo considerato dei bersagli fermi che vengono colpiti da particelle (nello specifico fotoni), adesso considereremo ammassi di particelle che si scontrano tra di loro.

Questo è quello che succede ad esempio al CERN, dove per investigare cosa succede quando si scontrano delle particelle le une contro le altre si creano due fasci di particelle che circolano in direzione opposta ad altissima velocità e poi si mette un rivelatore nel mezzo che misura cosa avviene.

Supponiamo di avere due specie di particelle con densità per unità di volume  $n_1$  e  $n_2$ , una velocità relativa<sup>7</sup>  $v_r$  e che ci sia un numero di interazioni per unità di volume e per unità di tempo  $N$ .

<sup>6</sup>come spiegato negli ultimi rigi del paragrafo 1

<sup>7</sup>Si suppone per semplicità che tutte le partivelle della stessa specie viaggiano con la stessa identica velocità

Adesso cerchiamo di vedere come queste variabili sono collegate con la definizione di sezione d'urto 3.

Adesso mettiamoci nel sistema di riferimento nella quale la specie 2 è ferma<sup>8</sup>, in questo modo la specie 2 diventa il bersaglio.

Per passare dalla densità per unità di volume  $n_2$  a quella per unità di superficie  $n_s$  basta moltiplicarla per  $dx$  ( $n_s = n_2 dx$ )<sup>9</sup>.

Visto che ora le particelle che si muovono sono quelli della specie 1 possiamo determinare  $\Phi$ , cioè il flusso di queste particelle. Visto che sappiamo la densità di volume  $n_1$  delle paricelle della specie 1 e la loro velocità  $v_r$ , possiamo dire che  $\Phi dx = n_1 v_r$ . Adesso mettiamo tutto in mezzo

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{N_s}{\Phi n_s} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{N_s}{\Phi dx} \cdot \frac{dx}{n_s} = \frac{N_s}{n_1 n_2 v_r}$$

dove  $N_s$  sono il numero di interazioni nella superficie.

Così però otteniamo la sezione d'urto di un elemento di superficie con spessore infinitesimo  $dx$  di gas ( $d\sigma/dx$ ), noi vogliamo levare quel  $dx$ , quindi possiamo dire che il numero di interazioni per unità di superficie, integrato in  $dx$  darà il numero di interazioni in tutto il volume, cioè  $\int N_s dx = N_v$ , quindi.

$$\sigma = \frac{N_v}{n_1 n_2 v_r} \quad (5)$$

## 6 Sezione d'urto differenziale

Alcune sezioni d'urto per loro natura tendono a divergere. Infatti se consideriamo lo scattering Coulomb tra un flusso di particelle cariche  $|j|$  che incide su una carica dello stesso segno si ha che  $\sigma = N/|j| = +\infty$  visto che il numero di interazioni al secondo è infinito se consideriamo il flusso incidente come un'infinità di particelle che arrivano al secondo.

Questo torna al livello intuitivo perchè se la sezione d'urto è l'area all'interno del quale c'è interazione tra proiettile e bersaglio, allora nel caso dell'interazione elettromagnetica deve fare infinito visto che il campo elettrico di una carica si estende all'infinito, anche se diventa via via più debole.

Però abbiamo detto che sezione d'urto e probabilità vanno a braccetto, quindi certe volte anzichè chiedersi "Qual'è la probabilità che ...", si ci può chiedere "Qual'è la sezione d'urto tale che ...". Nei puntini chiaramente si ci deve mettere qualcosa che abbia senso nel nostro contesto.

---

<sup>8</sup>Volendo potevamo prendere la specie la specie 1, tanto non cambia niente, basta che almeno una delle due stia ferma

<sup>9</sup>Questo perchè se hai in generale una funzione  $f$  di cui sai  $df/dV$ , allora  $df/dV \cdot dx = df/ds$

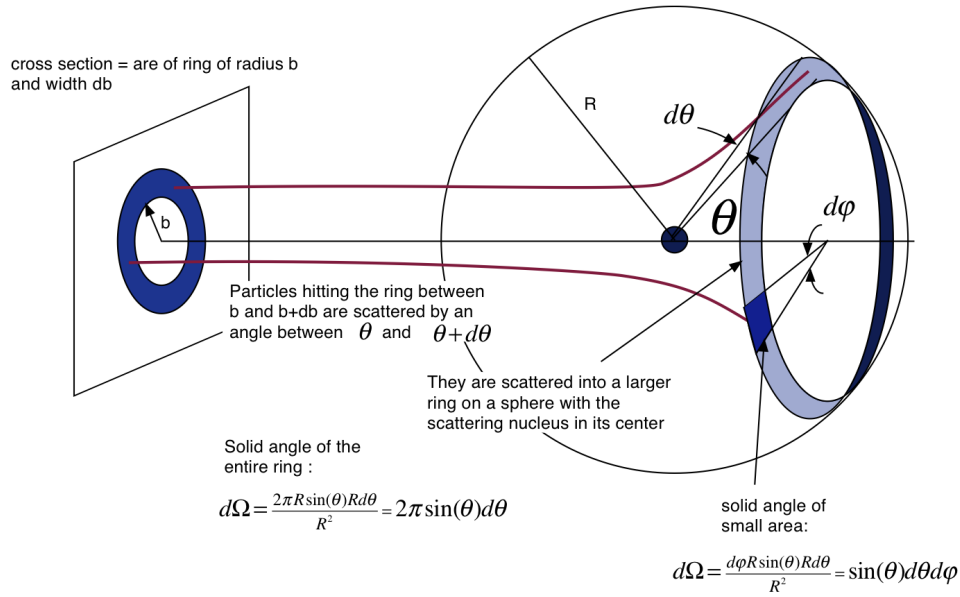


Figura 2: In questo caso  $d\sigma = 2\pi b db$  e  $d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta$  sono a simmetria cilindrica

Adesso ci chiediamo qual'è la sezione d'urto tale che il flusso uscente finisca per andare entro un certo angolo solido infinitesimo  $d\Omega$  dopo che avvenga uno scattering coulombiano. Scritto in equazioni sarà così:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N(\Omega)}{|j|} \quad (6)$$

$d\sigma$  rappresenta una piccola area, tale che se ci entri poi vai a finire in un angolo solido  $d\Omega$ , (immagine 2) e  $N(\Omega)$  è il numero di interazioni al secondo che fanno finire asintoticamente i proiettili in un angolo  $\Omega$ .

Questo tipo di scattering è detto "Scattering Rutherford", non mi dedicherò molto a questo argomento perchè è trattato abbastanza bene anche altrove<sup>10</sup>. Qui dirò soltanto che il risultato finale è che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{e_1 e_2}{2\mu v_\infty^2} \right) \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (7)$$

dove  $\mu$ ,  $e_2$ ,  $v_\infty$  e  $\theta$  sono rispettivamente la massa, la carica, la velocità iniziale e l'angolo di deflessione delle particelle cariche proiettile ed  $e_1$  è la carica del bersaglio.

<sup>10</sup> Ad esempio nelle dispense di Claudio Bonati

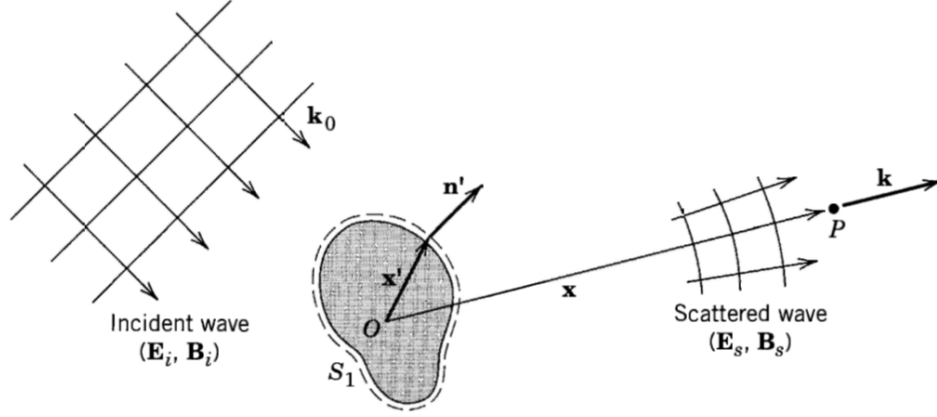


Figura 3: Onda incidente e onda rifratta

## 7 Cose con onde elettromagnetiche

Nel caso di onde elettromagnetiche si ci può chiedere: "Una volta che ci siamo calcolati come delle onde elettromagnetiche di frequenza  $\omega$  vengono diffratte da un'ostacolo, non possiamo calcolarci la sezione d'urto come se fosse stata calcolata con dei fotoni anch'essi di frequenza  $\omega$ ?".

Effettivamente, se fosse possibile farlo risolverebbe un bel pò di problemi: prima di tutto la necessità di considerare come proiettili delle cose che in un modo o nell'altro sono discrete, ma fare il tutto con dei campi.

Immaginato di esser stati bravi ad aver calcolato i campi del problema che stiamo analizzato, cioè

$$\begin{cases} E = E_i + E_s \\ B = B_i + B_s \end{cases}$$

Dove  $E_i$  e  $E_s$  indicano i campi elettrici incidenti e irraggiati (figura 3),<sup>11</sup> stessa cosa vale per il campo magnetico.

Visto che  $\langle \langle \mathbf{S} \rangle, d\mathbf{a} \rangle$  è uguale al flusso di potenza, che è uguale a quanti fotoni passano attraverso  $d\mathbf{a}$  per unità di tempo moltiplicato per quanta energia ha ognuno di loro. Scritto in matematiche  $\hbar\omega\phi = \hbar\omega\langle \mathbf{j}, d\mathbf{a} \rangle$ , quindi

$$\langle \langle \mathbf{S} \rangle, d\mathbf{a} \rangle = \hbar\omega\langle \mathbf{j}, d\mathbf{a} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{S} \rangle = \hbar\omega\mathbf{j} \quad (8)$$

dove  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \Re(\mathbf{E}) \times \Re(\mathbf{B})$ , e  $\mathbf{j}$  è lo stesso che va a finire nel denominatore dell'equazione 6.

Ricordiamo la definizione della sezione d'urto differenziale:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = N(\Omega)/|j|$  (eq 6).

$$d\sigma = \frac{N(\Omega)d\Omega}{|j|} \cdot \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega} = \frac{\hbar\omega N(\Omega)d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|}$$

<sup>11</sup>è scirtto  $E_s$  perchè la  $s$  sta per scattered (irraggiato in inglese)



Adesso concentriamoci col significato di  $\hbar\omega N(\Omega)d\Omega$ , esso è uguale a quanti fotoni vanno nella direzione dell'angolo infinitesimo  $d\Omega$  moltiplicato per la loro energia.

Quindi possiamo dire che se lo moltiplichiamo per la superficie che essi attraversano ( $R^2d\Omega$ ) otteniamo potenza irradiata nell'angolo  $d\Omega$ .

Esso è uguale al flusso del vettore di poynting attraverso la stessa superficie, che è  $R^2|\langle \mathbf{S}_s \rangle|d\Omega$ . Quindi mettendo tutto dentro si ha che

$$d\sigma = \frac{\hbar\omega N(\Omega)d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|} = \frac{R^2|\langle \mathbf{S}_s(\Omega) \rangle|d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|}$$

adesso basta riportare il differenziale a sinistra e si ottiene la formula della sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2|\langle \mathbf{S}_s(\Omega) \rangle|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|} \quad (9)$$