1 Limiti

1.1 Definizioni

1. sia $f(x) \in D \subset R$ e sia x_0 un punto di accumulazione di D. diremo che
$$\lim_{x \to x_0} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
2. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R} \wedge x_0 \in f(x)$
$$\text{se } \forall M \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 : \forall x \subset D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ allora } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
3. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ non limitato superiormente
$$\lim_{x \to \infty} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall x \in D, x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
4. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ se $\lim\limits_{x \to x_0} = \infty$ allora diremo che la funzione $f(x)$ ha un'asintoto verticale in x_0
5. sia $f(x) \in (c, \pm\infty)$ Diremo che la retta di equazione $y = ax + b$ é un asintoto di f se
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

1.2 Teoremi

1. siamo $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M$$
$$\text{allora}$$
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$
2. teorema della permanenza del segno
$$\text{se } \lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > \frac{M}{2} > 0$$
3. teorema dei 2 carabinieri
$$\text{siano} f(x), g(x) \text{ e } h(x) \in \mathbf{R} \wedge f(x) < g(x) < h(x) \wedge \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$
$$\text{allora } \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

1.3 Limiti notevoli

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{arcCos}(x)}{\sqrt{1 - x}} = \sqrt{2}$
$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 \pm x)}{x} = \pm 1$

2 Successioni

2.1 Definizioni

1. una successione é una funzione $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$
2. un insieme $K \subset \mathbf{R}$ si dice compatto se da ogni successione a valori in K si puó estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K
3. una successione é definita monotona crescente se $\forall n \subset \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$ mentre monotone decrescente se $\forall n \subset \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. Una successione si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n, m > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

2.2 Teoremi

1. Da ogni successione limitata si puó estrarre una sottosuccessione convergente
2. una successione a_n monotona ha sempre limite, se a_n é crescente si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$, mentre se a_n é decrescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} a_n$,

3 Serie

3.1 Definizioni

1. sia $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ la somma dei terimini tra i e j della successione a_n essa é definita come $\displaystyle\sum_{n=i}^{j} a_n$
2. se $\forall n \in \mathbf{R} \,|\, s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, allora s_n é definita la successione delle somme parziali

3.2 Teoremi

1. sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e sia s_n la successione delle somme parziali. Se la successione s_n é limitata superiormente, la serie converge, altrimenti diverge a $+\infty$
2. se serie $\sum a_n$ é convergente, allora la successione a_n é infinitesima
3. criterio del confronto
   siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$, e supponiamo che $\forall n \in \mathbf{R} \,|\, 0 \leq a_n \leq b_n$, allora se $\sum b_k$ converge, allora $\sum a_k$ converge, viceversa se $\sum a_k$ diverge, allora anche $\sum b_k$ diverge
4. criterio del confronto asintotico
   siano a_n e b_n serie a termini positivi
   $$\sum_{n}^{\infty} b_n \text{ converge} \wedge \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
5. criterio del rapporto
   sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora la serie converge
6. criterio della radice
   sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora la serie converge

7. criterio dell'assoluta convergenza
   se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge anch'essa

8. sia a_n una serie a termini positivi, se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge}$$

4 Funzioni continue

4.1 Definizioni

1. una funzione si dice continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A, e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 é un punto di massimo assoluto se risulta che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$
3. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A, e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 é un punto di massimo relativo se in un'intorno $I \subset A \,|\, f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$

4.2 Teoremi

1. siano $f(x)$ una funzione continua in x_0 e $g(y)$ una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g(f(x))$ é continua in x_0
$$x_0 \cup y_0 \subset \mathbf{R} : f(x) \in x_0 \wedge g(y) \in y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(g(x)) \in x_0 \tag{1}$$
2. se $g(x)$ é una funzione continua, allora
$$g : A \to \mathbf{R} : \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) \tag{2}$$
3. una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ é continua se e solo se per ogni successione x_n a valori in A convergente a x_0, la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$
4. teorema della permanenza del segno
sia $f(x)$ una funzione continua in A, e sia x_0 un punto di A. Se risulta $f(x_0) > 0$, allora esiste un'intordo I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap A$ si ha $f(x) > 0$
5. teorema degli zeri delle funzioni continue
sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, se $f(a) > 0 \vee f(b) < 0$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$
6. teorema dei valori intermedi
una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$
7. teorema della continuitá della funzione inversa
sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intervallo I che puó essere una semiretta o tutto $\mathbf{R}$. Allora la sua inversa é continua
8. le funzioni goniometriche e le loro inverse sono continue
9. Teorema di Weistrass
Una funzione continua in un insieme E compatto ha massimo e minimo

5 Uniforme continuitá

5.1 Definizoni

1. Una funzione é uniformemente continua in I se
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0, x_1 \in I, [|x_0 - x1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon] \tag{3}$$
2. una funzione $f(x)$ definita in A é detta lipsichitziana se $\forall x \in A, \exists L \in \mathbf{R} : |f'(x)| \leq L$

5.2 Teoremi

1. sia $f : A \to \mathbf{R}$ se essa é lipsichitiziana in A, allora é anche uniformemente continua
2. Teorema di Heine-Cantor
se $f(x)$ é definita in un inzieme chiuso e limitato, allora é uniformemente continua
3. Osservazione di Heine-Cantor
se $f(x)$ é continua in $[a, b]$, allora é uniformemente continua
4. sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, se la funzione ha un asintoto non verticale, allora da un certo punto in poi é uniformemente continua
5. se $f(x)$ é un. continua in $[a, b)$ e $(b, c]$, allora essa é uniformemente continua in $[a, c]$
6. siano $f, g : A \to \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $f + g$ é un. continua
7. siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $g[f(x)]$ é un. continua

6 Derivata

6.1 Definizioni

1. sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e sia x un punto di (a, b). Diremo che f é derivabile in x se esiste il limite finito

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

2. data una funzione f e un applicazione lineare L tale che $L(x) = \alpha x$ dove α é una costante. Allora f si dice differenziabile in x_0 se é vero che

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + R(x, x_0) \tag{5}$$

   dove i primi due termini a secondo membro rappresentano una retta, e $R(x - x_0)$ rappresenta un resto, ossia una funzione che corregge l'approssimazione fatta. La peculiaritá del resto é che al tendere di x a x_0 $\frac{R}{x - x_0} \to 0$

6.2 Teoremi

1. se una funzione f é derivabile in un punto x_0, é continua in x_0
2. sia $f(x)$ una funzione definita in $A \subset \mathbf{R}$, e sia $x_0 \in A$ un punto stazionario. se f é derivabile in A, allora $f'(x_0) = 0$
3. Teorema di Rolle
   sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto compreso tra a e b in cui la derivata si annulla
4. Teorema di Lagrange
   sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in (a, b). esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6}$$

5. Teorema di Caucy
   siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni continue in un'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabili in (a, b), allora esiste un punto ξ tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{7}$$

6. sia $f(x)$ una funzione derivabile definita in un intervalo I. Se $\forall x \in I \mid f'(x) = 0$, allora $f(x)$ é costante
7. una funzione $f(x)$ derivabile in un'intervallo I é crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$
8. Teorema di de l'Hopital
   siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in un'intervallo I, con la possibile eccezzione di $x_0 \in I$, supponiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e supponiamo che esista il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{8}$$

9. se f é differenziabile in x_0, allora f é derivabile in x_0 e $L(x - x_0) = f'(x)(x - x_0)$

7 Integrale

7.1 Definizioni

1. Funzione costante a tratti sia $\varphi(x)_{I_k}$ una funzione che vale 1 nell'intervallo I_k e zero in tutto il resto e sia λ_k una costante, allora la funzione $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_{I_1}(x) + \lambda_2\varphi_{I_2}(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_{I_n}(x) = \sum \lambda_k\varphi_{I_k}$ é definita costante a tratti

2. Integrale funzione semplice
sia $\varphi(x) = \sum \lambda_k\varphi_{I_k}$ una funzione costante a tratti, siano $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \subseteq [a, b)$, siano x_k e x'_k gli estremi dell'insieme I_k , allora
$$\int_a^b \varphi(x) = \sum \lambda_k(x_k - x'_k) \tag{9}$$

3. Integrale definito di Reimann
sia f(x) una funzione limitata definita nell'intervallo $I = [a, b)$. Indichiamo con $\mathscr{S}^+$ la classe delle funzioni semplici ψ maggioranti tali che $\psi(x) \geq f(x)$ in $[a, b)$ e con $\mathscr{S}^-$ la classe delle funzioni semplici φ minoranti tali che $\varphi(x) \leq f(x)$ in $[a, b)$ e siano $\psi(x) = \varphi(x) = 0$ se x non appartiene a $[a, b)$, allora se si ha che
$$\sup_{\psi\in\mathscr{S}^+} \int_a^b \psi(x)dx = \inf_{\varphi\in\mathscr{S}^-} \int_a^b \varphi(x)dx \tag{10}$$
il loro valore comune sará uguale all'integrale in $[a, b)$ di $f(x)$ che verrá indicata col simbolo
$$\int_a^b f(x)dx \tag{11}$$

4. Integrale indefinito
sia $f(t)$ una funzione integrabile, allora la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ é definita il suo integrale indefinito e verrá indicato cosí
$$\int f(x)dx \tag{12}$$

5. Integrale di Reimann generalizzato 1
sia $f(x)$ integrabile in $(a, b]$ e non limitata in a, e sia $c \in (a, b]$, allora
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a} \int_c^b f(x)dx \tag{13}$$

6. Integrale di Reimann generalizzato 2
sia $f(x)$ integrabile in $[a, +\infty)$, allora
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

7. un funzione f viene detta assolutamente integrabile in $(a, +\infty)$ se esiste un $k \in \mathbf{R}$ tale che
$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < k \tag{15}$$

7.2 Teoremi

1. sia f una funzione, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione semplice maggiorante ψ e una funzione semplice minorante φ di f tale che
$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \epsilon \tag{16}$$
allora la funzione $f(x)$ é integrabile in $[a, b)$
2. se una funzione f é integrabile in $[a, c)$ e $[c, b)$, allora essa é integrabile in $[a, b)$
3. se $f(x)$ é continua in $[a, b]$, allora é integrabile in $[a, b)$
4. se $f(x)$ é continua e limitata in $(a, b]$, essa é integrabile in $[a, b]$
5. se $f(x)$ é crescente in $[a, b]$ allora é integrabile
6. se $f(x)$ é integrabile, $|f(x)|$ é integrabile
7. siano f, g funzioni integrabili in $[a, b)$, allora
$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{17}$$
8. sia f una funzione integrabile in $[a, b)$, allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{18}$$
9. Teorema della media integrale
sia $f(x)$ integrabile in $I = [x_1, x_2]$ allora
$$\inf_{x\in I} f(x) \leq \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \sup_{x\in I} f(x) \tag{19}$$
10. Teorema dei valori intermedi
sia $f(x)$ una funzione integrabile in $[x_1, x_2]$, esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che
$$f(\xi) = \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{20}$$
11. Teorema fondamentale del calcolo integrale
sia f una funzione integrabile in $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, allora $F'(x) = f(x)$. Sia $G(x)$ una funzione tale che $G'(x) = f(x)$, allora $F'(x) = G(x) - G(a)$
12. sia f una funzione integrabile in $[a, b]$, allora $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é lispsichitiziana
13. sia f una funzione assolutamente integrabile in (a, b), allora f é anche integrabile e in particolare
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{21}$$
14. sia f una funzione continua integrabile in $(a, +\infty)$, allora se $\int_a^{+\infty} f(x)dx = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

15. sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ monotona e a_n una sucessione con $f(n) = a_n$ per ogni $n \geq a$, allora

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \sum_n^\infty a_n \leq f(a) + \int_a^\infty f(x)dx \tag{22}$$

16. criterio dell'integrale per le serie
sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ monotona e a_n una sucessione con $f(n) = a_n$ per ogni $n \geq a$, allora se

$$\sum_n^\infty a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge} \tag{23}$$

17. criterio del confronto asintotico
siano $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ due funzioni integrabili tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b)$

$$\text{se} \int_a^b g(x) \text{ converge e } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \text{ allora } \int_a^b f(x) \text{ converge} \tag{24}$$

oppure

$$\text{se} \int_a^b g(x) \text{ diverge e } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \text{ allora } \int_a^b f(x) \text{ diverge} \tag{25}$$