

1 Limiti

1.1 Definizioni

1. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di D . diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R} \wedge x_0 \in f(x)$

$$\text{se } \forall M \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

3. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ non limitato superiormente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall x \in D, x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

4. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ allora diremo che la funzione $f(x)$ ha un'asintoto verticale in x_0

5. sia $f(x) \in (c, \pm\infty)$ Diremo che la retta di equazione $y = ax + b$ é un asintoto di f se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

1.2 Teoremi

1. siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

2. teorema della permanenza del segno

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > \frac{M}{2} > 0$$

3. teorema dei 2 carabinieri

$$\text{siano } f(x), g(x) \text{ e } h(x) \in \mathbf{R} \wedge f(x) < g(x) < h(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

1.3 Limiti notevoli

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 \pm x)}{x} = \pm 1 \end{array} \right|$$

2 Successioni

2.1 Definizioni

1. una successione è una funzione $a_n : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$
2. un insieme $K \subset \mathbf{R}$ si dice compatto se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K
3. una successione è definita monotona crescente se $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$ mentre monotone decrescente se $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. Una successione si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n, m > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

2.2 Teoremi

1. Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente
2. una successione a_n monotona ha sempre limite, se a_n è crescente si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$, mentre se a_n è decrescente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$,

3 Serie

3.1 Definizioni

1. sia $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ la somma dei termini tra i e j della successione a_n essa è definita come $\sum_{n=i}^j a_n$
2. se $\forall n \in \mathbf{R} \mid s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, allora s_n è definita la successione delle somme parziali

3.2 Teoremi

1. sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e sia s_n la successione delle somme parziali. Se la successione s_n è limitata superiormente, la serie converge, altrimenti diverge a $+\infty$
2. se serie $\sum a_n$ è convergente, allora la successione a_n è infinitesima
3. criterio del confronto
siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$, e supponiamo che $\forall n \in \mathbf{R} \mid 0 \leq a_n \leq b_n$, allora se $\sum b_k$ converge, allora $\sum a_k$ converge, viceversa se $\sum a_k$ diverge, allora anche $\sum b_k$ diverge
4. criterio del confronto asintotico
siano a_n e b_n serie a termini positivi

$$\sum_n b_n \text{ converge} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

5. criterio della radice
sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora la serie converge
6. criterio dell'assoluta convergenza
se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge anch'essa
7. sia a_n una serie a termini positivi, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge}$$

4 Funzioni continue

4.1 Definizioni

1. una funzione si dice continua se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
2. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A , e sia x_0 un punto di A . Diremo che x_0 è un punto di massimo assoluto se risulta che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$
3. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A , e sia x_0 un punto di A . Diremo che x_0 è un punto di massimo relativo se in un'intorno $I \subset A$ $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$

4.2 Teoremi

1. siano $f(x)$ una funzione continua in x_0 e $g(y)$ una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g(f(x))$ è continua in x_0

$$x_0 \cup y_0 \subset \mathbf{R} : f(x) \in x_0 \wedge g(y) \in y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(g(x)) \in x_0 \quad (1)$$

2. se $g(x)$ è una funzione continua, allora

$$g : A \rightarrow \mathbf{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \quad (2)$$

3. una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ è continua se e solo se per ogni successione x_n a valori in A convergente a x_0 , la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$
4. teorema della permanenza del segno
sia $f(x)$ una funzione continua in A , e sia x_0 un punto di A . Se risulta $f(x_0) > 0$, allora esiste un'intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap A$ si ha $f(x) > 0$
5. teorema degli zeri delle funzioni continue
sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, se $f(a) > 0 \vee f(b) < 0$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$
6. teorema dei valori intermedi
una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$
7. teorema della continuità della funzione inversa
sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intervallo I che può essere una semiretta o tutto \mathbf{R} . Allora la sua inversa è continua
8. le funzioni goniometriche e le loro inverse sono continue
9. Teorema di Weistrass
Una funzione continua in un insieme E compatto ha massimo e minimo

5 Uniforme continuità

5.1 Definizioni

1. Una funzione é uniformemente continua se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0, x_1 \in \text{Dom}(f), [|x_0 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon] \quad (3)$$

2. una funzione $f(x)$ definita in A é detta lipschitziana se $\forall x \in A, \exists L \in \mathbf{R} : |f'(x)| \leq L$

5.2 Teoremi

1. sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ se essa é lipschitziana in A , allora é anche uniformemente continua
2. Teorema di Heine-Cantor
se $f(x)$ é definita in un insieme chiuso e limitato, allora é uniformemente continua
3. Osservazione di Heine-Cantor
se $f(x)$ é continua in $[a, b]$, allora é uniformemente continua
4. sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ continua, se la funzione ha un asintoto non verticale, allora da un certo punto in poi é uniformemente continua
5. se $f(x)$ é un. continua in $[a, b]$ e $(b, c]$, allora essa é uniformemente continua in $[a, c]$
6. siano $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $f + g$ é un. continua
7. siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $g[f(x)]$ é un. continua

6 Derivata

6.1 Definizioni

1. sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ e sia x un punto di (a, b) . Diremo che f é derivabile in x se esiste il limite finito

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4)$$

6.2 Teoremi

1. se una funzione f é derivabile in un punto x_0 , é continua in x_0
2. sia $f(x)$ una funzione definita in $A \subset \mathbf{R}$, e sia $x_0 \in A$ un punto stazionario. se f é derivabile in A , allora $f'(x_0) = 0$
3. Teorema di Rolle
sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto compreso tra a e b in cui la derivata si annulla
4. Teorema di Lagrange
sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in (a, b) . esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (5)$$

5. Teorema di Cauchy
siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni continue in un'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , allora esiste un punto ξ tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (6)$$

6. sia $f(x)$ una funzione derivabile definita in un intervallo I . Se $\forall x \in I \mid f'(x) = 0$, allora $f(x)$ é costante
7. una funzione $f(x)$ derivabile in un'intervallo I é crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$
8. Teorema di de l'Hopital
siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in un'intervallo I , con la possibile eccezione di $x_0 \in I$, supponiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e supponiamo che esista il limite del rapporto delle derivate, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (7)$$

7 Integrale

7.1 Definizioni

1. Funzione costante a tratti sia $\varphi(x)_{I_k}$ una funzione che vale 1 nell'intervallo I_k e zero in tutto il resto e sia λ_k una costante, allora la funzione $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_{I_1}(x) + \lambda_2\varphi_{I_2}(x) + \dots + \lambda_n\varphi_{I_n}(x) = \sum \lambda_k\varphi_{I_k}$ è definita costante a tratti

2. Integrale funzione semplice

sia $\varphi(x) = \sum \lambda_k\varphi_{I_k}$ una funzione costante a tratti, siano $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \subseteq [a, b]$, siano x_k e x'_k gli estremi dell'insieme I_k , allora

$$\int_a^b \varphi(x) = \sum \lambda_k(x_k - x'_k) \quad (8)$$

3. Integrale definito di Reimann

sia $f(x)$ una funzione limitata definita nell'intervallo $I = [a, b]$. Indichiamo con \mathcal{S}^+ la classe delle funzioni semplici ψ maggioranti tali che $\psi(x) \geq f(x)$ in $[a, b]$ e con \mathcal{S}^- la classe delle funzioni semplici φ minoranti tali che $\varphi(x) \leq f(x)$ in $[a, b]$ e siano $\psi(x) = \varphi(x) = 0$ se x non appartiene a $[a, b]$, allora se si ha che

$$\sup_{\psi \in \mathcal{S}^+} \int_a^b \psi(x)dx = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^-} \int_a^b \varphi(x)dx \quad (9)$$

il loro valore comune sarà uguale all'integrale in $[a, b]$ di $f(x)$ che verrà indicata col simbolo

$$\int_a^b f(x)dx \quad (10)$$

4. Integrale indefinito

sia $f(t)$ una funzione integrabile, allora la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è definita il suo integrale indefinito e verrà indicato così

$$\int f(x)dx \quad (11)$$

5. Integrale di Reimann generalizzato 1

sia $f(x)$ integrabile in $(a, b]$ e non limitata in a , e sia $c \in (a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x)dx \quad (12)$$

6. Integrale di Reimann generalizzato 2

sia $f(x)$ integrabile in $[a, +\infty)$, allora

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad (13)$$

7. una funzione f viene detta assolutamente integrabile in $(a, +\infty)$ se esiste un $k \in \mathbf{R}$ tale che

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < k \quad (14)$$

7.2 Teoremi

1. se $f(x)$ é continua in $[a, b]$, allora é integrabile in $[a, b]$
2. se $f(x)$ é continua e limitata in $(a, b]$, essa é integrabile in $[a, b]$
3. se $f(x)$ é crescente in $[a, b]$ allora é integrabile
4. se $f(x)$ é integrabile, $|f(x)|$ é integrabile
5. Teorema della media integrale
sia $f(x)$ integrabile in $I = [x_1, x_2]$ allora

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq \sup_{x \in I} f(x) \quad (15)$$

6. Teorema dei valori intermedi
sia $f(x)$ una funzione integrabile in $[x_1, x_2]$, esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (16)$$

7. Teorema fondamentale del calcolo integrale
sia f una funzione integrabile in $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, allora $F'(x) = f(x)$. Sia $G(x)$ una funzione tale che $G'(x) = f(x)$, allora $F(x) = G(x) - G(a)$
8. sia f una funzione integrabile in $[a, b]$, allora $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é lipschitziana
9. sia f una funzione assolutamente integrabile in (a, b) , allora f é anche integrabile e in particolare

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (17)$$

10. sia f una funzione continua integrabile in $(a, +\infty)$, allora se $\int_a^{+\infty} f(x) dx = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
11. sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ e a_n una successione con $n \geq a$ se $f(n) = a_n$ per ogni $n \geq a$, allora

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \sum_n a_n \leq f(a) + \int_a^\infty f(x) dx \quad (18)$$

12. criterio dell'integrale per le serie
sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ e a_n una successione con $n \geq a$ se $f(n) = a_n$ per ogni $n \geq a$, allora se

$$\sum_n a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ converge} \quad (19)$$