

1 Limiti

1.1 Definizioni

1. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di D . diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R} \wedge x_0 \in f(x)$

$$\text{se } \forall M \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

3. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ non limitato superiormente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall x \in D, x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

4. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ allora diremo che la funzione $f(x)$ ha un'asintoto verticale in x_0

5. sia $f(x) \in (c, \pm\infty)$ Diremo che la retta di equazione $y = ax + b$ é un asintoto di f se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

1.2 Teoremi

1. siamo $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

2. teorema della permanenza del segno

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > \frac{M}{2} > 0$$

3. teorema dei 2 carabinieri

$$\text{siano } f(x), g(x) \text{ e } h(x) \in \mathbf{R} \wedge f(x) < g(x) < h(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

1.3 Limiti notevoli

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 \pm x)}{x} = \pm 1 \end{array} \right|$$

2 Successioni

2.1 Definizioni

1. una successione è una funzione $a_n : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$
2. un insieme $K \subset \mathbf{R}$ si dice compatto se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K
3. una successione è definita monotona crescente se $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$ mentre monotone decrescente se $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. Una successione si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n, m > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

2.2 Teoremi

1. Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente
2. una successione a_n monotona ha sempre limite, se a_n è crescente si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$, mentre se a_n è decrescente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$,

3 Serie

3.1 Definizioni

1. sia $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ la somma dei termini tra i e j della successione a_n essa è definita come $\sum_{n=i}^j a_n$
2. se $\forall n \in \mathbf{R} \mid s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, allora s_n è definita la successione delle somme parziali

3.2 Teoremi

1. sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e sia s_n la successione delle somme parziali. Se la successione s_n è limitata superiormente, la serie converge, altrimenti diverge a $+\infty$
2. se serie $\sum a_n$ è convergente, allora la successione a_n è infinitesima
3. criterio del confronto
siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$, e supponiamo che $\forall n \in \mathbf{R} \mid 0 \leq a_n \leq b_n$, allora se $\sum b_k$ converge, allora $\sum a_k$ converge, viceversa se $\sum a_k$ diverge, allora anche $\sum b_k$ diverge
4. criterio del confronto asintotico
siano a_n e b_n serie a termini positivi

$$\sum_n b_n \text{ converge} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge} \quad (1)$$

5. criterio della radice
sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora la serie converge
6. criterio dell'assoluta convergenza
se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge anch'essa
7. sia a_n una serie a termini positivi, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge} \quad (2)$$

4 Funzioni continue

4.1 Definizioni

1. una funzione si dice continua se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

4.2 Teoremi

1. siano $f(x)$ una funzione continua in x_0 e $g(y)$ una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g(f(x))$ è continua in x_0

$$x_0 \cup y_0 \subset \mathbf{R} : f(x) \in x_0 \wedge g(y) \in y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(g(x)) \in x_0$$

2. se $g(x)$ è una funzione continua, allora

$$g : A \rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$