Algebra continua

Francesco Sacco

Marzo 2018

Sono abbastanza convinto di specare tempo, e che forse era meglio se studiavo, ma non avrei studiato comunque quindi faccio questo pdf.
Ovviamente non sarò formale, quindi Ischia non ci scassare la minchia, e farò parecchi errori grammaticali, quindi Silvio non ci scassare la minchia.

Buona lettura.

1 Dalle matrici discrete a quelle continue

Supponiamo di prendere una matrice M $n \times m$, adesso rendiamo le cellette della matrice sempre più strette mandando n a infinito.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \qquad\qquad & \cdot\,(x,y) & \qquad \end{vmatrix} \tag{1}$$

Così facendo non è più possibile indicare un'elemento della matrice con una coppia di numeri interi, ma è possibile indicarli con una coppia di numeri reali (x, y), di conseguenza la matrice non è più una funzione $M : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \mathbb{R}$, ma $M : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$.
Usando lo stesso ragionamento con i vettori abbiamo che la loro versione con $n \to +\infty$ siano funzioni $v : [a, b] \to \mathbb{R}$

2 Prodotto caso discreto

In algebra lineare un prodotto tra una matrice M e un vettore v non è altro che un vettore w che ha come componente i-esima il prodotto scalare canonico tra il vettore v e la i-esima riga di M, quindi vediamo prima di generalizzare il prodotto scalare.
Possiamo definire il prodotto scalare in questo modo: prendiamo questa funzione $P : V \times V \to V$ tale che

$$v = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} \quad P(v, w) = \begin{vmatrix} v_1 w_1 \\ \vdots \\ v_n w_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

Una volta aver definito questa apparentemente inutile funzione ne definisco un'altra. Prendi un vettore $v = (v_1, \dots, v_n)$ e immagina che ogni componente uscisse dal foglio con un'altezza pari al suo valore (attento agli occhi).
Adesso se lo guardi di lato dovresti vedere un'istrogramma, nell'immagine che se avrò voglia metterò si capisce benissimo quello che intendo.
Definisco $A(v)$ l'area di quell'istogramma mostrato dalla fantomatica immagine, è facile verificare che $A(P(v, w)) =< v, w >$[1].

3 Prodotto caso continuo

Adesso applichiamo lo stesso ragionamento generalizzandolo con le funzioni (che come abbiamo detto sono vettori continui), in questo caso la funzione $P(v(x), w(x)) = v(x)w(x)$ e l'area è l'integrale nel dominio di definizione di v e w, dunque

$$< v(x), w(x) >= \int_a^b v(x)w(x)dx \tag{3}$$

ovviamente questo soddisfa le proprietà del prodotto scalare, non perchè lo so dimostrare, ma perchè lo so per sentito dire.
Filamente possiamo definire il prodotto matrice per vettore. Come abbiamo detto prima un prodotto tra una matrice M e un vettore v non è altro che un vettore w che ha come componente i-esima il prodotto scalare canonico tra il vettore v e la i-esima riga di M, quindi il prototto w tra M e v è

$$w(y) = \int_a^b M(x, y)v(x)dx \tag{4}$$

da qui è facile verificare che rispetta tutte le stesse proprietà che ha il prodotto matrice-vettore standard, infatti siano M, N, O matrici continue, v, w vettori, e λ uno scalare, allora

$$\lambda Mv = M(\lambda v), \quad M \circ (N \circ O) = (M \circ N) \circ O, \tag{5}$$

$$Mv + Nv = (M + N)v, \quad Mv + Mw = M(v + w)$$

Lascio al lettore l'esercizio di dimostrare queste poprietà, trovare la matrice identità e la formula per prodotto tra matrici[2]

4 Combinazioni lineari

In algebra lineare sappiamo che se $w \in V$ e $v_1, \dots, v_n$ è una base di V abbiamo che esistono dei coefficenti $a_1, \dots, a_n$ tali che $w = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$,

[1] supponendo che alla base dell'istogramma ci sia un quadrato di area unitaria
[2] comunque se scrolli dovresti trovarle la soluzione

scritto in forma vettoriale

$$\begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \tag{6}$$

dove la matrice nel mezzo è la matrice che ha come colonne i vettori $v_1, \dots, v_n$, quindi un modo per calcolare i coefficenti $a_1, \dots, a_n$ è quello di calcolare l'inversa della matrice[3] e moltiplicare membro a membro.

La stessa cosa si può fare con le matrici continue, ma prima parliamo di matrici inverse. Sarei tentato di definire la matrice M^{-1} l'inversa di M se $Id(x,y) = \delta(y-x) = \int_a^b M^{-1}(x,t)M(t,y)dt$, ma per ora la definisco così:

Definizione 1 (Matrice inversa)**.** Sia $M : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, e N pure (se c'hai voglia te lo generalizzi tu), allora N è l'inversa di M se

$$v = NMv \tag{7}$$

Adesso che sappiamo cos'è l'inversa possiamo usare lo stesso ragionamento della scorsa sezione: Supponiamo che $\{M(x,y_0) \,|\, y_0 \in \mathbb{R}\}$ sia una base di uno spazio vettoriale V, allora per ogni $v \in V$ è possibile trovare una combinazione lineare dei vettori di base che sia uguale a v stesso, cioè

$$\begin{vmatrix} \\ v(x) \\ \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & M(x,y) & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \\ a(y) \\ \\ \end{vmatrix} \tag{8}$$

Di conseguenza se si vuole trovare $a(y)$ basta moltiplicare per l'inversa entrambi i lati.

5 Serie di Furiè [4]

Chi ha un'occhio attento avrà già notato che la trasformata di fourier è un prodotto matrice-vettore, ma prima di spiegare per bene il motivo è meglio cominciare dalla sua sorellina minore: la serie di fourier

Partiamo definendo un prodotto scalare che ci faccia comodo

$$< f(x), g(x) >= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)dx \tag{9}$$

se prendiamo questo insieme di vettori $E_T = \{e^{i2\pi n/T} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ abbiamo che sono vettori ortonormali rispetto a questo prodotto scalare, quindi sono perfetti per usarli come base dello spazio vettoriale $C\big[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\big]^5$, o per le

[3] che esiste perchè le righe sono lienarmente indipendenti

[4] se sai come funziona puoi saltarlo, e comunque fa più confondere che altro

[5] a dire il vero bisognerebbe dimostrare che $Span\{E_T\}$ sia effettivamente $C\big[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\big]$

funzioni che oscillano con un periodo T.
Tutto ciò ci porta alla celeberrima serie di fouriè, dove $\widehat{e_n} = e^{i2\pi n/T}$

$$f(x) = Re\left[\sum_{n=0}^{+\infty} < f(x), \widehat{e_n} > \widehat{e_n}\right] \tag{10}$$

Scritto in forma vettoriale assume una forma strana, è una matrice semi continua, che sarebbe $M : [a, b] \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$

$$\left|f(x)\right| = Re\left|\widehat{e_0} \quad \dots \quad \widehat{e_n} \quad \dots\right|\left|\begin{matrix} < f(x), \widehat{e_0} > \\ \vdots \\ < f(x), \widehat{e_n} > \\ \vdots \end{matrix}\right| \tag{11}$$

So che è un pò complicato, ma se avete dubbi chiedetemi di persona[6]

6 Trasformata di Furiè

Ora che abbiamo reso incomprenzibile la serie, facciamo lo stesso lavoro con la trasformata.

La trasformata di fourier, può essere vista come una serie di forurier con il periodo che tende a infinito, ora però c'è il problema di scegliere una base. Non essendoci stavolta un valido motivo per escludere le funzioni periodiche che hanno la frequenza che non siano un multiplo di $1/T$ possiamo prenderci la libertà di prenderle tutte. Di conseguenza segliamo come base $B = \{F(x, y_0) = e^{ixy_0} \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$.
Come abbiamo visto nell'equazione 8 possiamo scrivere una generica funzione in questo modo

$$\left|f(x)\right| = \left| \quad F(x, y) \quad \right|\left|\hat{f}(y)\right| \tag{12}$$

La quale scritta in forma esplicita diventa la trasformata di Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\hat{f}(y)dy \tag{13}$$

Da qui si evince cosa rappresenta fisicamente $\hat{f}(y)$: essa è la funzione che indica i coefficienti da mettere davanti i vettori di base per ottenere il vettore desiderato.

[6] il mio numero è +39 345 7011798

7 Matrice associata a un'applicazione lineare

Per costruire una matrice associata a un'applicazione lineare il procedimento è pressocchè identico a quello adottato in algebra lineare:
Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra due spazii vettoriali e sia $B = \{v_y(x)|y \in \mathbb{R}\}$ una base di V. Allora la matrice associata all'applicazione lineare sarà $L(x, y) = L(v_y(x))$.
Detto in parole povere ho messo in ogni colonna dove va a finire il vettore di base associato.

8 Cambiamento di base

Trovare la matrice associata all'applicazione lineare ci dà informazioni su come trasformano i vettori di base, ma non ci dice molto su come trasforma una funzione generica.
Sia $B = \{v_y(x)|y \in \mathbb{R}\}$ una base di uno spazio vettoriare V denso in $\mathbb{L}$, sia M la matrice assiociata all'applicazione lineare rispetto alla base B e sia $N(x, y) = v_y(x)$ la matrice di cambiamento di base, allora la matrice associata all'applicazione lineare L in V sarà

$$L = N^{-1} \circ M \circ N \tag{14}$$

Che è praticamente identica alla sua controparte discreta di algebra lineare

9 Proprietà δ di Dirac

Prima di ricavarci la matrice associata alla derivata occorre sapere un paio di proprietà sulla δ di dirac.
La prima è sapere qual'è la sua derivata, che nonostante sia un pò un'abuso di notazione fa il suo sporco lavoro. Partiamo dall'osservare che $x\delta(x) = 0$ per ogni x, adesso calcoliamoci la sua derivata.

$$(x\delta(x))' = 0 = x\delta'(x) + \delta(x) \tag{15}$$

risolvendo per $\delta'(x)$ si ottiene che

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \tag{16}$$

La seconda proprietà non la dimostro, essa afferma che

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x-y)} dt \tag{17}$$

10 Matrice associata alla derivata

A questo punto possiamo trovare la matrice associata alla più famosa delle applicazioni lineare: la derivata[7]
cominciamo mettendoci nella base $B = \{e^{ixy_0} \,|\, y_0 \in \mathbb{R}\}$ delle esponenziali complesse, la matrice associata alla derivazione rispetto a x $\widehat{D}$ in quella base è

$$\widehat{D}(x,y) = -iy\delta(x-y) = -ix\delta(x-y) = -i\sqrt{|xy|}\delta(x-y) \tag{18}$$

Mentre la matrice di cambiamento di base è $F(x,y) = \frac{e^{-iyx}}{\sqrt{2\pi}}$, e la sua inversa è $F^{-1}(x,y) = \frac{e^{iyx}}{\sqrt{2\pi}}$, per avere l'applicazione derivata D rispetto alla base canonica bisognerà comporre le matrici

$$D = F^{-1} \circ \widehat{D} \circ F \tag{19}$$

Essendo la composizione di matrici associativa, conviene calcolarci prima $\widehat{D}F$

$$(\widehat{D} \circ F)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -iy\delta(y-t)e^{-itx}dt = -\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}e^{-iyx}$$

adesso basta moltiplicare la nuova matrice per F^{-1}

$$(F^{-1} \circ \widehat{D} \circ F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{it}{\sqrt{2\pi}}e^{itx}e^{-ity}dt = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{it(x-y)}dt$$

integrando per parti si ottine

$$-\frac{it}{2\pi}(2\pi\delta(x-y))\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(x-y)}}{i(x-y)}dt = \frac{1}{2\pi(x-y)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x-y)}dt = \frac{\delta(x-y)}{x-y}$$

E così abbiamo la matrice associata alla derivata nella base canonica delle funzioni

$$D(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{x-y} \tag{20}$$

Adesso dimostriamo che effettivamente funziona

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x-y)}{x-y} f(y)dy = -\delta(x-y)f(y)\big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f'(y)dy = f'(x)$$

[7]Se ti senti particolarmente intelligente puoi provare a trovare la matrice associata all'integrale