

# 1 Limiti

## 1.1 Definizioni

1. sia  $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $D$ . diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. sia  $f(x) \in D \subset \mathbf{R} \wedge x_0 \in f(x)$

$$\text{se } \forall M \in \mathbf{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

3. sia  $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$  non limitato superiormente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall x \in D, x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

4. sia  $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  allora diremo che la funzione  $f(x)$  ha un'asintoto verticale in  $x_0$

5. sia  $f(x) \in (c, \pm\infty)$  Diremo che la retta di equazione  $y = ax + b$  é un asintoto di  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

## 1.2 Teoremi

1. siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

2. teorema della permanenza del segno

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > \frac{M}{2} > 0$$

3. teorema dei 2 carabinieri

$$\text{siano } f(x), g(x) \text{ e } h(x) \in \mathbf{R} \wedge f(x) < g(x) < h(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

## 1.3 Limiti notevoli

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 \pm x)}{x} = \pm 1 \end{array} \right|$$

## 2 Successioni

### 2.1 Definizioni

1. una successione è una funzione  $a_n : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$
2. un insieme  $K \subset \mathbf{R}$  si dice compatto se da ogni successione a valori in  $K$  si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di  $K$
3. una successione è definita monotona crescente se  $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$  mentre monotone decrescente se  $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. Una successione si dice di Cauchy se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n, m > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

### 2.2 Teoremi

1. Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente
2. una successione  $a_n$  monotona ha sempre limite, se  $a_n$  è crescente si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ , mentre se  $a_n$  è decrescente  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$ ,

## 3 Serie

### 3.1 Definizioni

1. sia  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  la somma dei termini tra  $i$  e  $j$  della successione  $a_n$  essa è definita come  $\sum_{n=i}^j a_n$
2. se  $\forall n \in \mathbf{R} \mid s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , allora  $s_n$  è definita la successione delle somme parziali

### 3.2 Teoremi

1. sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi, e sia  $s_n$  la successione delle somme parziali. Se la successione  $s_n$  è limitata superiormente, la serie converge, altrimenti diverge a  $+\infty$
2. se serie  $\sum a_n$  è convergente, allora la successione  $a_n$  è infinitesima
3. criterio del confronto  
siano  $\sum a_k$  e  $\sum b_k$ , e supponiamo che  $\forall n \in \mathbf{R} \mid 0 \leq a_n \leq b_n$ , allora se  $\sum b_k$  converge, allora  $\sum a_k$  converge, viceversa se  $\sum a_k$  diverge, allora anche  $\sum b_k$  diverge
4. criterio del confronto asintotico  
siano  $a_n$  e  $b_n$  serie a termini positivi

$$\sum_n b_n \text{ converge} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge} \quad (1)$$

5. criterio della radice  
sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$ , allora la serie converge
6. criterio dell'assoluta convergenza  
se  $\sum |a_n|$  converge, allora  $\sum a_n$  converge anch'essa
7. sia  $a_n$  una serie a termini positivi, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge} \quad (2)$$

## 4 Funzioni continue

### 4.1 Definizioni

1. una funzione si dice continua se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
2. sia  $f(x)$  una funzione definita in un insieme  $A$ , e sia  $x_0$  un punto di  $A$ . Diremo che  $x_0$  è un punto di massimo assoluto se risulta che  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$
3. sia  $f(x)$  una funzione definita in un insieme  $A$ , e sia  $x_0$  un punto di  $A$ . Diremo che  $x_0$  è un punto di massimo relativo se in un'intorno  $I \subset A$   $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$

### 4.2 Teoremi

1. siano  $f(x)$  una funzione continua in  $x_0$  e  $g(y)$  una funzione continua in  $y_0 = f(x_0)$ , allora la funzione composta  $g(f(x))$  è continua in  $x_0$

$$x_0 \cup y_0 \subset \mathbf{R} : f(x) \in x_0 \wedge g(y) \in y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(g(x)) \in x_0$$

2. se  $g(x)$  è una funzione continua, allora

$$g : A \rightarrow \mathbf{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

3. una funzione  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è continua se e solo se per ogni successione  $x_n$  a valori in  $A$  convergente a  $x_0$ , la successione  $f(x_n)$  converge a  $f(x_0)$
4. teorema della permanenza del segno  
sia  $f(x)$  una funzione continua in  $A$ , e sia  $x_0$  un punto di  $A$ . Se risulta  $f(x_0) > 0$ , allora esiste un'intorno  $I$  di  $x_0$  tale che per ogni  $x \in I \cap A$  si ha  $f(x) > 0$
5. teorema degli zeri delle funzioni continue  
sia  $f(x)$  una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$ , se  $f(a) > 0 \vee f(b) < 0$ , allora esiste un punto  $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$
6. teorema dei valori intermedi  
una funzione  $f(x)$  continua in un intervallo  $I$  assume tutti i valori compresi tra  $\inf_I f$  e  $\sup_I f$
7. teorema della continuità della funzione inversa  
sia  $f(x)$  una funzione continua e invertibile in un intervallo  $I$  che può essere una semiretta o tutto  $\mathbf{R}$ . Allora la sua inversa è continua
8. le funzioni goniometriche e le loro inverse sono continue
9. Teorema di Weierstrass  
Una funzione continua in un insieme  $E$  compatto ha massimo e minimo

## 5 Uniforme continuità

### 5.1 Definizione

Una funzione é uniformemente continua se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0, x_1 \in Dom(f), [|x_0 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon] \quad (3)$$

### 5.2 Teoremi