Fluttuazioni e Rumore

Francesco Sacco

Agosto 2018

1 Fluttuazioni numero di Particelle

Il potenziale di landau $\Omega = E - TS - \mu N$, quindi $d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu$ ne consegue che $\partial\Omega/\partial\mu = -N$. Questa relazione può essere dimostrata attraverso la seguente relazione.

$$\Omega = -kT \ln Z \qquad | \qquad Z = \sum_{stati} \exp\left(\frac{\mu N - E}{kT}\right) \tag{1}$$

Per $\sum_{stati}$ si intende dire di sommare su tutti i possibili numeri N di particelle e su tutte le possibili configurazioni di posizioni e impulsi di quelle N particelle.

Prima di vedere quanto vale quella somma calcoliamoci per sport $\partial\Omega/\partial\mu$ e $\partial^2\Omega/\partial\mu^2$.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{-kT}{Z}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sum_{stati} \exp\frac{\mu N - E}{kT}\right] = -\frac{1}{Z}\sum_{stati} N \exp\frac{\mu N - E}{kT} = -\bar{N}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2} = -\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{Z}\sum_{stati} N \exp\frac{\mu N - E}{kT}\right] =$$

$$= \frac{1}{kTZ^2}\left[\sum_{stati} N \exp\frac{\mu N - E}{kT}\right]^2 - \frac{1}{kTZ}\sum_{stati} N^2 \exp\frac{\mu N - E}{kT} = \frac{1}{kT}\left[\left(\bar{N}\right)^2 - \left(\bar{N^2}\right)\right] = -\frac{\left(\Delta N\right)^2}{kT}$$

Quindi alla fine si ha che:

$$-kT\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2} = \left(\Delta N\right)^2 \tag{2}$$