1 Limiti

1.1 Definizioni

1. sia $f(x) \in D \subset R$ e sia x_0 un punto di accumulazione di D. diremo che
$$\lim_{x\to x_0} = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon, \exists\delta > 0 : \forall x \in D \land 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
2. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R} \land x_0 \in f(x)$
$$\text{se } \forall M \in \mathbf{R} \exists\delta > 0 : \forall x \subset D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ allora } \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$
3. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ non limitato superiormente
$$\lim_{x\to\infty} = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\nu : \forall x \in D, x > \nu \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
4. sia $f(x) \in D \subset \mathbf{R}$ se $\lim_{x\to x_0} = \infty$ allora diremo che la funzione $f(x)$ ha un'asintoto verticale in x_0
5. sia $f(x) \in (c, \pm\infty)$ Diremo che la retta di equazione $y = ax + b$ é un asintoto di f se
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

1.2 Teoremi

1. siamo $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = M$$
allora
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = LM$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$
2. teorema della permanenza del segno
$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) > \frac{M}{2} > 0$$
3. teorema dei 2 carabinieri
$$\text{siano} f(x), g(x) \text{ e } h(x) \in \mathbf{R} \land f(x) < g(x) < h(x) \land \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$
$$\text{allora } \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

1.3 Limiti notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcCos}(x)}{\sqrt{1 - x}} = \sqrt{2}$
$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 \pm x)}{x} = \pm 1$

2 Successioni

2.1 Definizioni

1. una successione é una funzione $a_n : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$
2. un insieme $K \subset \mathbf{R}$ si dice compatto se da ogni successione a valori in K si puó estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K
3. una successione é definita monotona crescente se $\forall n \subset \mathbf{N} : a_{n+1} \geq a_n$ mentre monotone decrescente se $\forall n \subset \mathbf{N} : a_{n+1} \leq a_n$
4. Una successione si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n, m > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$

2.2 Teoremi

1. Da ogni successione limitata si puó estrarre una sottosuccessione convergente
2. una successione a_n monotona ha sempre limite, se a_n é crescente si ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$, mentre se a_n é decrescente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$,

3 Serie

3.1 Definizioni

1. sia $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ la somma dei terimini tra i e j della successione a_n essa é definita come $\displaystyle\sum_{n=i}^{j} a_n$
2. se $\forall n \in \mathbf{R} \,|\, s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, allora s_n é definita la successione delle somme parziali

3.2 Teoremi

1. sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e sia s_n la successione delle somme parziali. Se la successione s_n é limitata superiormente, la serie converge, altrimenti diverge a $+\infty$
2. se serie $\sum a_n$ é convergente, allora la successione a_n é infinitesima
3. criterio del confronto
   siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$, e supponiamo che $\forall n \in \mathbf{R} \,|\, 0 \leq a_n \leq b_n$, allora se $\sum b_k$ converge, allora $\sum a_k$ converge, viceversa se $\sum a_k$ diverge, allora anche $\sum b_k$ diverge
4. criterio del confronto asintotico
   siano a_n e b_n serie a termini positivi
   $$\sum_{n}^{\infty} b_n \text{ converge} \wedge \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n \text{converge} \tag{1}$$
5. criterio della radice
   sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora la serie converge
6. criterio dell'assoluta convergenza
   se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge anch'essa
7. sia a_n una serie a termini positivi, se
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{converge}$$

4 Funzioni continue

4.1 Definizioni

1. una funzione si dice continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A, e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 é un punto di massimo assoluto se risulta che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$
3. sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A, e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 é un punto di massimo relativo se in un'intorno $I \subset A \,|\, f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$

4.2 Teoremi

1. siano $f(x)$ una funzione continua in x_0 e $g(y)$ una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g(f(x))$ é continua in x_0

$$x_0 \cup y_0 \subset \mathbf{R} : f(x) \in x_0 \wedge g(y) \in y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(g(x)) \in x_0 \tag{2}$$

2. se $g(x)$ é una funzione continua, allora

$$g : A \to \mathbf{R} : \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) \tag{3}$$

3. una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ é continua se e solo se per ogni successione x_n a valori in A convergente a x_0, la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$
4. teorema della permanenza del segno
sia $f(x)$ una funzione continua in A, e sia x_0 un punto di A. Se risulta $f(x_0) > 0$, allora esiste un'intordo I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap A$ si ha $f(x) > 0$
5. teorema degli zeri delle funzioni continue
sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, se $f(a) > 0 \vee f(b) < 0$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$
6. teorema dei valori intermedi
una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$
7. teorema della continuitÃă della funzione inversa
sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intervallo I che puÃš essere una semiretta o tutto $\mathbf{R}$. Allora la sua inversa é continua
8. le funzioni goniometriche e le loro inverse sono continue
9. Teorema di Weistrass
Una funzione continua in un insieme E compatto ha massmo e minimo

5 Uniforme continuitá

5.1 Definizoni

1. Una funzione é uniformemente continua se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0, x_1 \in Dom(f), [|x_0 - x1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon] \tag{4}$$

2. una funzione $f(x)$ definita in A é detta lipsichitziana se $\forall x \in A, \exists L \in \mathbf{R} : |f'(x)| \leq L$

5.2 Teoremi

1. sia $f : A \to \mathbf{R}$ se essa é lipsichitiziana in A, allora é anche uniformemente continua
2. Teorema di Heine-Cantor
   se $f(x)$ é continua in $[a, b]$, allora é uniformemente continua
3. Osservazione Heine-Cantor
   se $f(x)$ é definita in un inzieme chiuso e limitato, allora é uniformemente continua
4. sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, se la funzione ha un asintoto non verticale, allora da un certo punto in poi é uniformemente continua
5. se $f(x)$ é un. continua in $[a, b)$ e $(b, c]$, allora essa é uniformemente continua in $[a, c]$
6. siano $f, g : A \to \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $f + g$ é un. continua
7. siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbf{R}$ funzioni un. continue, allora $g[f(x)]$ é un. continua

6 Derivata

6.1 Definizioni

1. sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ e sia x un punto di (a,b). Diremo che f é derivabile in x se esiste il limite finito
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

6.2 Teoremi

1. se una funzione f é derivabile in un punto x_0, é continua in x_0
2. sia $f(x)$ una funzione definita in $A \subset \mathbf{R}$, e sia $x_0 \in A$ un punto stazionario. se f é derivabile in A, allora $f'(x_0) = 0$
3. Teorema di Rolle
sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto compreso tra a e b in cui la derivata si annulla
4. Teorema di Lagrange
sia $f(x)$ una funzione continua in un'intervallo chiuso $[a,b]$, derivabile in (a,b). esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6}$$
5. Teorema di Caucy
siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni continue in un'intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabili in (a,b), allora esiste un punto ξ tale che
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{7}$$
6. sia $f(x)$ una funzione derivabile definita in un intervalo I. Se $\forall x \in I \mid f'(x) = 0$, allora $f(x)$ é costante
7. una funzione $f(x)$ derivabile in un'intervallo I é crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$
8. Teorema di de l'Hopital
siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in un'intervallo I, con la possibile eccezzione di $x_0 \in I$, supponiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e supponiamo che esista il limite del rapporto delle derivate, allora
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{8}$$