

Sezione d'urto

Francesco Sacco

Anno accademico 2018/2019

Indice

0.1Sezione d'urto s'un oggetto opaco	2
0.2Sezione d'urto s'un oggetto traslucido	3
0.3Collegamento con la probabilità	4
0.4Sezione d'urto di una particella	4
0.5Sezione d'urto con due gas/plasmi che si scontrano	5
0.6Sezione d'urto differenziale e Scattering Rutherford	6
0.7Cose con onde elettromagnetiche	8
0.8Cose con lo spazio delle fasi	10
0.9Processi inclusivi	11

Prefazione

Visto che c'è molta confusione sulla sezione d'urto faccio questi brevi appunti per chiarire bene cos'è e cosa rappresenta.

Lungo il pdf metterò un bel pò di note a piè di pagina, esse vanno lette solo se non si capisce quello che si sta leggendo, se stai capendo non leggerle,¹ rovinano il flusso della discussione.

La sezione d'urto viene indicata di solito con σ , Il suo nome richiama alla mente qualcosa che abbia a che vedere un'area su cui sbatte qualcosa. Però la sezione d'urto non è sempre l'area dell'oggetto, ma intende rappresentare una sorta di "area equivalente".

Ad esempio è ragionevole dire che per la luce l'area effettiva di un vetro $1m \times 1m$ è minore di un metro quadro, questo perchè molti fotoni passano attraverso il vetro indisturbati.

1 Sezione d'urto s'un oggetto opaco

Per semplicità iniziano a trattare il concetto di sezione d'urto nel caso di un oggetto opaco,² in questo caso ci aspettiamo che la sezione d'urto sia uguale alla superficie ortogonale al facio.

Noi in questo caso vogliamo ricavare l'area ortogonale in base a quello che succede al fascio di luce che lo colpisce.

Supponiamo di mandare un facio di luce con un'area maggiore del bersaglio, e che dietro ci sia uno schermo ortogonale al facio molto grande che raccolga la luce (figura 1), allora possiamo dire che la sezione d'urto è l'area dell'ombra che l'oggetto genera sullo schermo.

Chiamarente se l'oggetto è una superficie orientata ortogonalmente al facio luminoso, la sua sezione d'urto sarà uguale alla sua area.

Solo che c'è un problema: nel caso di un'oggetto sgummato sarà difficile misurare l'area. Per ovviare a questo problema si può mettere uno schermo che sia in grado di contare i fotoni che riceve e una sorgente che sia in grado di contare i fotoni che manda.

Chiamiamo A l'area illuminata dalla sorgente quando non c'è il bersaglio in mezzo ai piedi, che per comodità la creiamo quadrangolare, n_s il numero di fotoni che colpiscono lo schermo per unità di tempo e Φ il numero di fotoni che vengono sparati dalla luce per unità di tempo, allora con una semplice

¹Minchia ma allora non hai capito un cazzo

²Chiaramente le particelle incidenti sono fotoni, ma con un pò di fantasia si può generalizzare il concetto con oggetti incidenti diversi dai fotoni

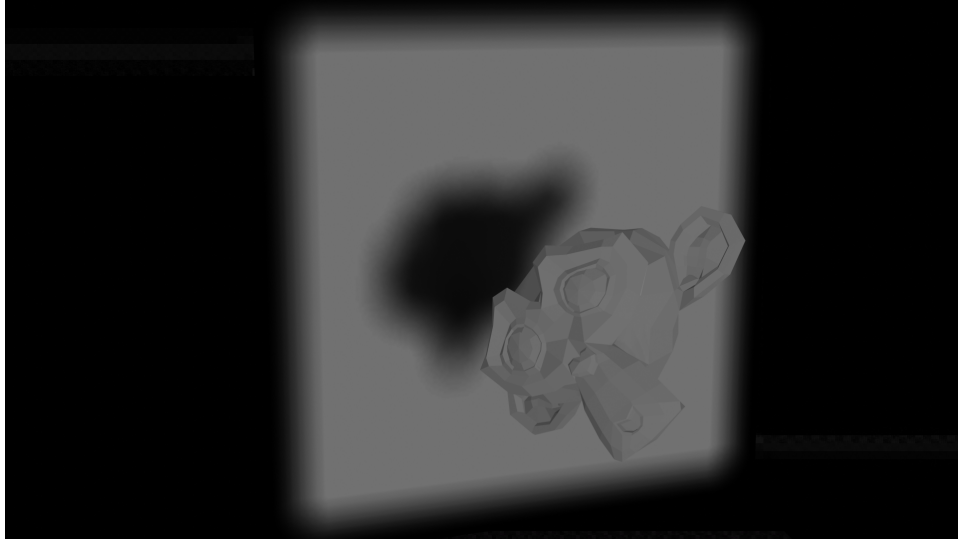


Figura 1: Immagine fatta male illustrativa

proporzione si può dire che:

$$\sigma : (n_l - n_s) = A : n_l \rightarrow \sigma = A \cdot (1 - n_s/\Phi) \quad (1)$$

Adesso vediamo se funziona veramente questo ragionamento.

Per verificare prendiamo un bersaglio quadrato di area $\sigma = 1$ illuminata da una luce quadrata di area $A = 2$, di conseguenza metà dei fotoni verrà bloccata, cioè $n_s = \Phi/2$, quindi $1 = 2 \cdot (1 - \Phi/2 \cdot 1/\Phi) = 2 \cdot (1 - 1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$. Che bello funziona.

Una cosa molto importante che poi verrà applicata è l'additività della sezione d'urto, infatti se prendiamo due schermi opachi quadrati con $\sigma = 1$ e li mettiamo uno accanto all'altro formando un rettangolo, esso avrà una sezione d'urto uguale a 2.

2 Sezione d'urto s'un oggetto traslucido

Per gli oggetti traslucidi tratteremo soltanto quelli planari, perchè quelli con geometri tridimensionali si comportano in modo strano con la luce.³

Se ti dico: "Io ho una lastra di vetro di un metro quadro che fa passare la metà della luce, qual'è la sezione d'urto?"⁴ tu mi risponderai di sicuro: "mezzo

³Facendo qualche assunzione volendo si potrebbe trattare anche oggetti tridimensionali, ma non credo aiuti alla comprensione del testo

⁴Supponiamo che la luce che non passi venga assorbita, a dire il vero non è molto importante che fine faccia

metro quadro", ma come è possibile giustificare questa affermazione?

Chiaramente deriva dall'equazione 1, ma si perde un pò il concetto che invece era ben chiaro con lo schermo opaco che ci ha portato in primo luogo a ricavare quell'equazione.

Ora però ti porto un'altro vetro traslucido con le esatte stesse proprietà, e ti chiedo: "qual'è la sezione d'urto di quest'altro vetro?", tu mi dirai: "è lo stesso di prima, quindi per forza sarà mezzo metro quadro", e io ti rispondo: "la tua sezione d'urto è esatta, ma ti sbagli a dire che è lo stesso di prima! Questo è uno schermo opaco che ha tantissimi buchetti microscopici che in totale gli levano metà dell'area"⁵.

Quindi effettivamente possiamo dire che il vetro è un pò come uno schermo opaco con tanti buchetti, e quindi deve avere la stessa sezione d'urto, e quindi si usa l'equazione 1.

3 Collegamento con la probabilità

Sempre rimandando nel caso del vetro traslucido posso fare questa affermazione: Se il fotone viene assorbito, allora vuol dire che ha interagito con un'atomo del vetro, altrimenti è passato indisturbato.

Ora vogliamo vedere se è possibile legare la probabilità di interazione P con la sezione d'urto.

Sempre usando la notazione della sezione 0.1 e dell'equazione 1, possiamo dire che la probabilità P che il fotone incida sia quanti ne vengono assorbiti dal bersaglio per unità di tempo, che sono tanti quanti a quelli che non arrivano sullo schermo per unità di tempo $N_i = (\Phi - n_s)$, diviso quanto ne arrivano in totale Φ , quindi:

$$P = \frac{N_i}{\Phi} = \left(1 - \frac{n_s}{\Phi}\right) = \frac{\sigma}{A} \quad (2)$$

4 Sezione d'urto di una particella

Supponiamo adesso che la luce venga proiettata in modo che ogni singolo fotone colpisca il bersaglio (ma non per forza deve essere assorbito, può anche attraversarlo se è traslucido), e che il bersaglio sia un oggetto planare

⁵Chiaramente è un'esperimento mentale, nella realtà fare una cosa del genere non sarà possibile perchè dovrebbe avere uno spessore nullo e la luce ha anche un comportamento ondulatorio che porterebbe alla diffrazione, ma possiamo supporre che tutto questo non accada in questo esempio

con una densità di atomi per unità di superficie n_s .

Adesso io voglio sapere quantè la sezione d'urto di un atomo sulla superficie, visto che la sezione d'urto è additiva⁶ posso dire che la sezione d'urto del bersaglio σ_b è uguale alla sezione d'urto di un singolo atomo σ moltiplicato per quanti ce ne sono per unità di superficie n_s moltiplicato per quanta superficie c'è A , quindi:

$$\frac{AN_i}{\Phi} = \sigma_b = \sigma An_s$$

dove la prima eguaglianza viene dall'equazione 2, risolvendo per sigma si ottiene che

$$\sigma = \frac{N_i}{\Phi n_s} \quad (3)$$

Questa equazione però dipende da come è fatta la lastra bersaglio, quindi se vogliamo qualcosa che ne sia indipendente bisogna fare qualche passaggio matematico:

$$\sigma = \frac{N_i}{\Phi n_s} \cdot \frac{An_s}{An_s} = \frac{N_i}{An_s} \cdot \frac{A}{\Phi} \cdot \frac{n_s}{n_s} = N_a \cdot \frac{1}{|j|} \cdot 1 = \frac{N_a}{|j|}$$

Dove ho detto che il numero di interazioni sulla lastra per unità di tempo N_i è uguale al numero di interazioni su un singolo atomo N_a moltiplicato per quanti atomi ci sono An_s (Area per densità), quindi $N_i/(An_s) = N_a$ e poi ho detto che il flusso attraverso l'area Φ diviso l'area stessa A dà la densità di corrente, quindi $A/\Phi = 1/|j|$.

Mettendo tutti insieme si ha che

$$\sigma = \frac{N_a}{|j|} \quad (4)$$

Nel sistema MKS la sezione d'urto si misura in m^2 , ma siccome essa nel caso degli atomi è circa $10^{-28}m^2$ si introduce come nuova unità di misura il barn denominata col simbolo b che è uguale a $1b = 10^{-28}m^2$.

Dalla relazione $h^2c^2/GeV^2 = 0.3894b$ si può usare con le unità naturali ($c = 1$, $h = 1$) i GeV per misurare la sezione d'urto, in particolare $1GeV^{-2} = 0.3894b$ oppure $1b = 2.568GeV^{-2}$

5 Sezione d'urto con due gas/plasmi che si scontrano

Fin'ora abbiamo considerato dei bersagli fermi che vengono colpiti da particelle (nello specifico fotoni), adesso considereremo ammassi di particelle che si scontrano tra di loro.

Questo è quello che succede ad esempio al CERN, dove per investigare cosa

⁶come spiegato negli ultimi righe del paragrafo 0.1

succede quando si scontrano delle particelle le une contro le altre si creano due fasci di particelle che circolano in direzione opposta ad altissima velocità e poi si mette un rivelatore nel mezzo che misura cosa avviene.

Supponiamo di avere due specie di particelle con densità per unità di volume n_1 e n_2 , una velocità relativa⁷ v_r e che ci sia un numero di interazioni per unità di volume e per unità di tempo N .

Adesso cerchiamo di vedere come queste variabili sono collegate con la definizione di sezione d'urto 3.

Adesso mettiamoci nel sistema di riferimento nella quale la specie 2 è ferma⁸, in questo modo la specie 2 diventa il bersaglio.

Per passare dalla densità per unità di volume n_2 a quella per unità di superficie n_s basta moltiplicarla per dx ($n_s = n_2 dx$)⁹.

Visto che ora le particelle che si muovono sono quelli della specie 1 possiamo determinare Φ , cioè il flusso di queste particelle. Visto che sappiamo la densità di volume n_1 delle paricelle della specie 1 e la loro velocità v_r , possiamo dire che $\Phi dx = n_1 v_r$. Adesso mettiamo tutto in mezzo

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{N_s}{\Phi n_s} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{N_s}{\Phi dx} \cdot \frac{dx}{n_s} = \frac{N_s}{n_1 n_2 v_r}$$

dove N_s sono il numero di interazioni nella superficie.

Così però otteniamo la sezione d'urto di un elemento di superficie con spessore infinitesimo dx di gas ($d\sigma/dx$), noi vogliamo levare quel dx , quindi possiamo dire che il numero di interazioni per unità di superficie, integrato in dx darà il numero di interazioni in tutto il volume, cioè $\int N_s dx = N_v$, quindi.

$$\sigma = \frac{N_v}{n_1 n_2 v_r} \quad (5)$$

6 Sezione d'urto differenziale e Scattering Rutherford

Alcune sezioni d'urto per loro natura tendono a divergere. Infatti se consideriamo lo scattering Coulomb tra un flusso di particelle cariche $|j|$ che incide su una carica dello stesso segno si ha che $\sigma = N/|j| = +\infty$ visto che il numero di interazioni al secondo è infinito se consideriamo il flusso incidente come un'infinità di particelle che arrivano al secondo.

⁷Si suppone per semplicità che tutte le partivelle della stessa specie viaggiano con la stessa identica velocità

⁸Volendo potevamo prendere la specie la specie 1, tanto non cambia niente, basta che almeno una delle due stia ferma

⁹Questo perchè se hai in generale una funzione f di cui sai df/dV , allora $df/dV \cdot dx = df/ds$

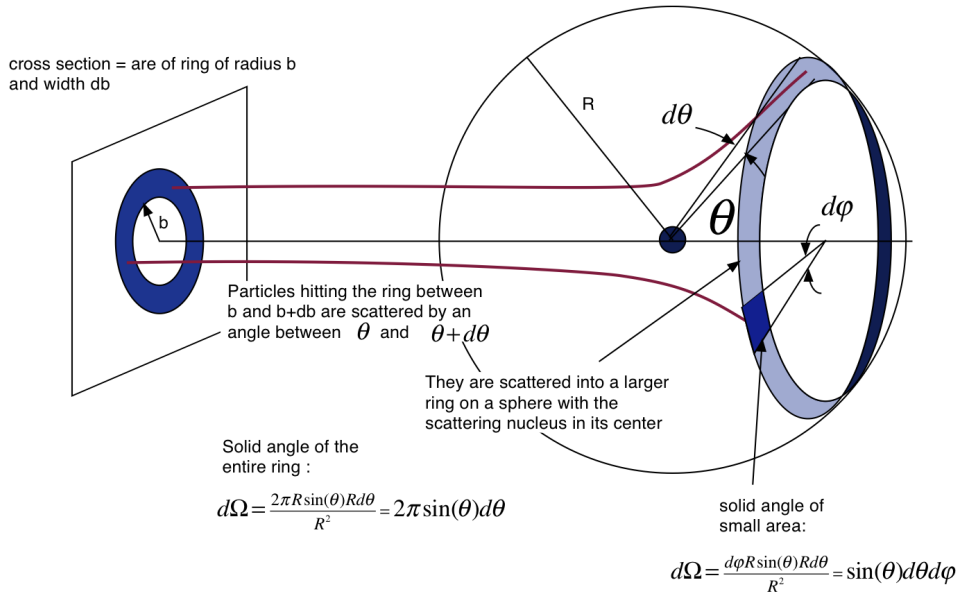


Figura 2: In questo caso $d\sigma = 2\pi b db$ e $d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta$ sono a simmetria cilindrica

Questo torna al livello intuitivo perchè se la sezione d'urto è l'area all'interno del quale c'è interazione tra proiettile e bersaglio, allora nel caso dell'interazione elettromagnetica deve fare infinito visto che il campo elettrico di una carica si estende all'infinito.¹⁰

Però abbiamo detto che sezione d'urto e probabilità vanno a braccetto, quindi certe volte anzichè chiedersi "Qual'è la probabilità che ...", si ci può chiedere "Qual'è la sezione d'urto tale che ...". Nei puntini chiaramente si ci deve mettere qualcosa che abbia senso nel nostro contesto.

Adesso ci chiediamo qual'è la sezione d'urto tale che il flusso uscente finisca per andare entro un certo angolo solido infinitesimo $d\Omega$ dopo che avvenga uno scattering coulombiano. Scritto in equazioni sarà così:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N(\Omega)}{|j|} \quad (6)$$

$d\sigma$ rappresenta una piccola area, tale che se ci entri poi vai a finire in un angolo solido $d\Omega$, (immagine 2) e $N(\Omega)$ è il numero di interazioni al secondo che fanno finire asintoticamente i proiettili in un angolo Ω .

Questo tipo di scattering è detto "Scattering Rutherford", non mi dedicherò molto a questo argomento perchè è trattato abbastanza bene anche altrove¹¹.

¹⁰Ciò che conta nella sezione d'urto è se un'interazione c'è o no, quindi anche una particella che passa molto lontana dal bersaglio è considerata come se interagisse con esso nonostante il fatto che il campo elettrico è debole e quindi viene deflessa minimamente

¹¹Ad esempio nelle dispense di Claudio Bonati

Qui dirò soltanto che il risultato finale è che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v_\infty^2} \right) \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (7)$$

dove μ , e_2 , v_∞ e θ sono rispettivamente la massa, la carica, la velocità iniziale e l'angolo di deflessione delle particelle cariche proiettile ed e_1 è la carica del bersaglio.

La correzione dello scattering Rutherford che tiene conto dello spine dell'elettrone incidente sul nucleo e degli effetti relativistici è detto scattering Mott ed è uguale a¹²

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (8)$$

Lo scattering Rutherford può essere usato per determinare la dimensione del nucleo.

Nel caso di scattering di particelle α ¹³ si osserva sperimentalmente che le previsioni teoriche sono corrette per energie cinetiche $\lesssim 30\text{MeV}$. Quindi eguagliando l'energia potenziale a 30MeV otteniamo una stima approssimativa del raggio atomico, quindi $30\text{MeV} \lesssim E = e^2 z_\alpha z_A / R$. Risolvendo per il raggio atomico R si ottiene

$$R \lesssim \frac{e^2 z_A}{15\text{MeV}} \quad (9)$$

Dove z_A è il numero atomico dell'atomo colpito e ho diviso per due perchè il numero atomico della particella α (z_α) è sempre uguale a 2

7 Cose con onde elettromagnetiche

Nel caso di onde elettromagnetiche si ci può chiedere: "Una volta che ci siamo calcolati come delle onde elettromagnetiche di frequenza ω vengono diffratte da un'ostacolo, non possiamo calcolarci la sezione d'urto come se fosse stata calcolata con dei fotoni anch'essi di frequenza ω ?".

Effettivamente, se fosse possibile farlo risolverebbe un bel pò di problemi: prima di tutto la necessità di considerare come proiettili delle cose che in un modo o nell'altro sono discrete, ma fare il tutto con dei campi.

Immaginato di esser stati bravi ad aver calcolato i campi del problema che stiamo analizzato, cioè

$$\begin{cases} E = E_i + E_s \\ B = B_i + B_s \end{cases}$$

Dove E_i e E_s indicano i campi elettrici incidenti e irraggiati (figura 3),¹⁴

¹²Per spiegare il perchè di questa equazione serve la teoria quantistica dei campi, quindi a meno che tu non abbia le basi per capirla di consiglio di prenderla per buona

¹³Nuclei di He_4 , cioè formati da 2 protoni e due neutroni

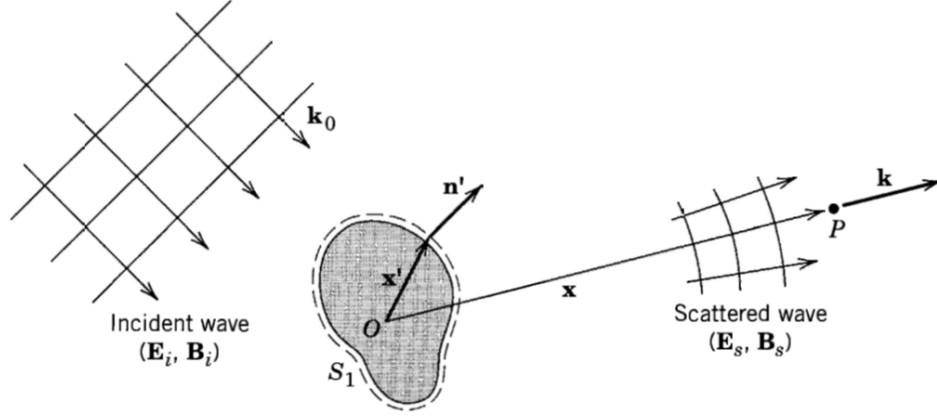


Figura 3: Onda incidente e onda rifratta

stessa cosa vale per il campo magnetico.

Visto che $\langle \langle \mathbf{S} \rangle, d\mathbf{a} \rangle$ è uguale al flusso di potenza, che è uguale a quanti fotoni passano attraverso $d\mathbf{a}$ per unità di tempo moltiplicato per quanta energia ha ognuno di loro. Scritto in matematiche $\hbar\omega\phi = \hbar\omega \langle \mathbf{j}, d\mathbf{a} \rangle$, quindi

$$\langle \langle \mathbf{S} \rangle, d\mathbf{a} \rangle = \hbar\omega \langle \mathbf{j}, d\mathbf{a} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{S} \rangle = \hbar\omega \mathbf{j} \quad (10)$$

dove $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \Re(\mathbf{E}) \times \Re(\mathbf{B})$, e \mathbf{j} è lo stesso che va a finire nel denominatore dell'equazione 6.

Ricordiamo la definizione della sezione d'urto differenziale: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = N(\Omega)/|j|$ (eq 6).

$$d\sigma = \frac{N(\Omega)d\Omega}{|j|} \cdot \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega} = \frac{\hbar\omega N(\Omega)d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|}$$

Adesso concentriamoci col significato di $\hbar\omega N(\Omega)d\Omega$, esso è uguale a quanti fotoni vanno nella direzione dell'angolo infinitesimo $d\Omega$ moltiplicato per la loro energia.

Quindi possiamo dire che se lo moltiplichiamo per la superficie che essi attraversano ($R^2 d\Omega$) otteniamo potenza irradiata nell'angolo $d\Omega$.

Esso è uguale al flusso del vettore di Poynting attraverso la stessa superficie, che è $R^2 |\langle \mathbf{S}_s \rangle| d\Omega$. Quindi mettendo tutto dentro si ha che

$$d\sigma = \frac{\hbar\omega N(\Omega)d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|} = \frac{R^2 |\langle \mathbf{S}_s(\Omega) \rangle| d\Omega}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|}$$

adesso basta riportare il differenziale a sinistra e si ottiene la formula della sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2 |\langle \mathbf{S}_s(\Omega) \rangle|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle|} \quad (11)$$

¹⁴è scirtto E_s perchè la s sta per scattered (irraggiato in inglese)

8 Cose con lo spazio delle fasi

Due sezioni fa (sez.0.5) abbiamo calcolato la sezione d'urto differenziale per una deflessione in un generico angolo Ω .

Possiamo generalizzare il concetto di sezione d'urto differenziale nel caso di un numero arbitrario di parametri finali di un'esperimento di scattering.¹⁵

Supponiamo di avere una reazione del tipo:

$$a + b \rightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_n \quad (12)$$

Che equivale a dire di supporre che siamo nella situazione che due particelle si scontrano e producono n particelle.

Per rendere meglio l'idea supponiamo che l'esperimento per la misura della sezione d'urto di questo esperimento sia fatto da due gas o plasmi che si muovono in direzione opposta come nella sezione 0.5.¹⁶

Supponiamo di avere un rivelatore molto buono che sia in grado di rilevare il quadrimpulso di ogni singola particella uscente dal processo.

Siano $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ i quadrimpulsi delle particelle c_1, \dots, c_n , sia $N_v(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n) d\mathbf{P}_1 \dots d\mathbf{P}_n$ il numero di eventi per unità di volume, per unità di tempo che abbiano una reazione che facciano finire la reazione nell'insieme dello spazio delle fasi $\mathbf{P}_1 + d\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n + d\mathbf{P}_n$,¹⁷.

Dall'equazione 5 discende che

$$d\sigma = \frac{N_v(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)}{n_1 n_2 v_r} d\mathbf{P}_1 \dots d\mathbf{P}_n \quad (13)$$

Dove le variabili al denominatore sono le stesse dell'equazione 5.

Bisogna però tenere in considerazione il fatto che i gradi di libertà non sono $4n$, ma sono di meno a causa della conservazione del quadrimpulso iniziale e dal fatto che la norma di un quadrimpulso è sempre uguale alla massa a riposo della particella moltiplicata per la velocità della luce, quindi i gradi di libertà in realtà sono $3n - 1$.

Imponendo questi vincoli si ottiene un sottoinsieme dello spazio delle fasi su cui è possibile lavorare più semplicemente. Senza perdersi troppo nella matematica ti sbatto in faccia il risultato:

$$d\Gamma = \delta^4\left(\mathbf{P}_t - \sum_i^n \mathbf{P}_i\right) \prod_i^n \frac{d^3\mathbf{P}_i}{2E_i} \quad (14)$$

¹⁵Si possono tenere in considerazione anche i parametri iniziali, ma per ora li ignoriamo

¹⁶Questo non è del tutto necessario, ma serve a darci l'idea, in ogni caso alla fine del paragrafo generalizzeremo

¹⁷Cioè un cubetto con uno spigolo in $(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)$ e l'altro in $\mathbf{P}_1 + d\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n + d\mathbf{P}_n$ e tutti i lati paralleli agli assi cartesiani

dove p_i è la parte spaziale di P_i e E_i la parte temporale.
Mettendo tutto assieme si ottiene che

$$d\sigma = \frac{N_v(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)}{n_1 n_2 v_r} \delta^4\left(\mathbf{P}_t - \sum_i^n \mathbf{P}_i\right) \prod_i^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i} \quad (15)$$

Visto che non è detto che l'esperimento venga fatto con due plasmi che si scontrano non è detto che l'equazione che determina dalla sezione d'urto sia sempre come quella qua sopra, in generale il numero di eventi per unità di volume, per unità di tempo che abbiano una reazione che facciano finire la reazione in $d\Gamma$ è una generica funzione $f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$.

Quindi la sezione d'urto differenziale generica rispetto allo spazio delle fasi è

$$d\sigma = f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \delta^4\left(\mathbf{P}_t - \sum_i^n \mathbf{P}_i\right) \prod_i^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i} \quad (16)$$

Per qualche strana ragione questa definizione di sezione d'urto viene usata anche nei decadimenti, anche se non capisco che c'azzecca, cioè la sezione d'urto è un'area, non una probabilità, come fanno a determinare la costante di normalizzazione?

Forse si sfrutta la parametrizzazione della sezione d'urto in GeV e a quel punto si normalizza in modo che la sezione d'urto totale sia uguale all'energia rilasciata nel processo decadimento, ma non ne sono certo e comunque non vedo che senso abbia, a me sembra abbastanza arbitraria come cosa.

9 Processi inclusivi

In realtà non sempre è possibile misurare il quadrimpulso di ogni particella uscente da un urto, quindi difficilmente si può usare la definizione di sezione d'urto dell'ultima equazione scritta (eq.16).

In fisica i processi nei quali è possibile misurare il quadrimpulso di ogni particella sono detti processi "esclusivi", come per esempio l'urto tra due palle di biliardo, altrimenti sono detti "inclusivi", come in molti esperimenti di fisica delle alte energie.

Ad esempio se siamo soltanto in grado di misurare l'energia della particella i -esima, allora l'equazione diventa così:

$$d\sigma = f(E_i) dE_i \quad (17)$$

dove $f(E_i)$ ha lo stesso significato della $f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ dell'ultima equazione (eq.16)