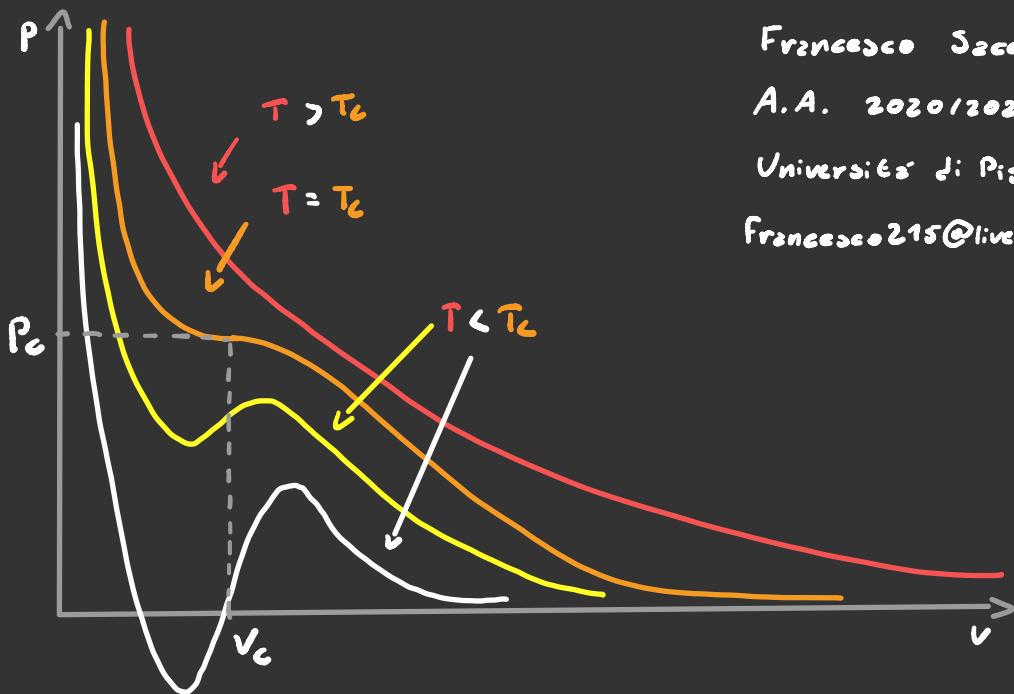


Fisica Statistica

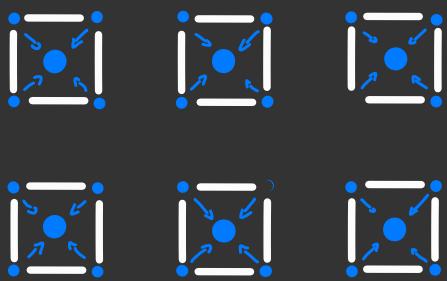
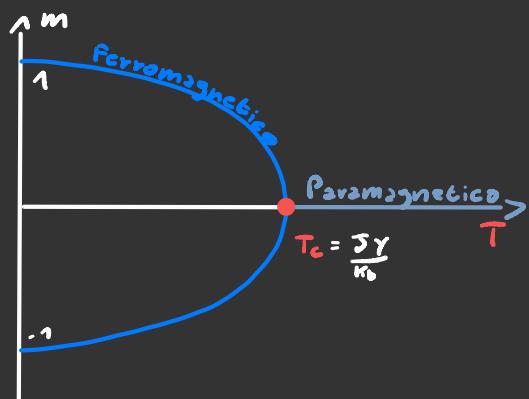


Francesco Sacco

A.A. 2020/2021

Università di Pisa

Francesco215@live.it



Termodinamica

Visto che in questa materia lavoreremo con una marea di particelle cerchiamo di lavorare con delle variabili che descrivono lo stato macroscopico del sistema, ed esse possono essere

- **Extensive** (V, E, N, \dots)
- **Intensive** (T, p, q, \dots)

E' possibile passare da uno stato all'altro attraverso delle trasformazioni che possono essere

- **Reversibili** $\Delta S = 0$
- **Inreversibili** N_2 scorreggi

E' possibile esprimere delle variabili in termini di altre, ad esempio $E = E(T, p, V)$. Esse sono definite come funzioni di stato.

Altre variabili come ad esempio il Lavoro W compiuto dipendono dal tipo di trasformazione fatta.

E' pure possibile esprimere la variazione del lavoro in termini di come variano le funzioni di stato, ad esempio $dW = pdV$

Affinché una variabile sia una funzione di stato è necessario che il suo differenziale sia un differenziale esatto

$$dE = -pdV + TdS + qdN + \dots$$

Quando peraltro $\sum_A^B dE = E(B) - E(A)$

Le 3+1 leggi della Termodinamica

Le 3 leggi della Termodinamica dicono che

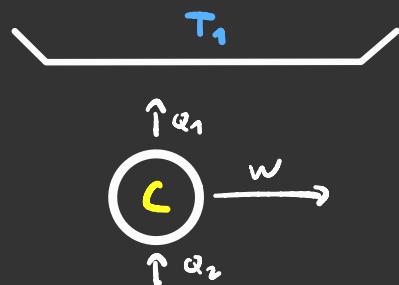
- I) L'equilibrio termodinamico è una proprietà transitiva
- II) Conservazione dell'energia
- III) Non c'è possibilità estrarre il lavoro da una singola sorgente
- IV) Se $T \rightarrow 0$ allora $S = 0$ Le definizioni di T ed S vengono spiezzate quando si tocca

Il secondo postulato equivale a dire che non c'è possibile avere una macchina termica che abbia un **efficenzia** $\eta = 1$

Supponendo di dover estrarre lavoro da due sorgenti termiche l'efficenzia c'è definita come

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

La macchina di Carnot è definita come la macchina che ha l'efficienza massima. La variabile intensiva da cui dipende l'efficienza della macchina di Carnot è **Definita Temperatura**



$$\eta_C = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \equiv 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Viste che la macchina

di Carnot c'è quella con efficienza massima abbiamato che

$$\eta_x \leq \eta_c \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \leq \frac{T_1}{T_2}$$

Quindi: $\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2}$

Se le temperature fossero molto vicine tra di loro $T_1 \approx T_2 \approx T$ allora anche l'efficienza $\eta \geq 0$ quindi: $Q_1 = Q_2 - \delta Q$ e l'equazione di sopra si può scrivere come

$$\frac{Q_1}{T_2} \leq \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Questo è vero in un ciclo infinitesimo.
Ancor dobbiamo vedere che succede in un ciclo vero e proprio

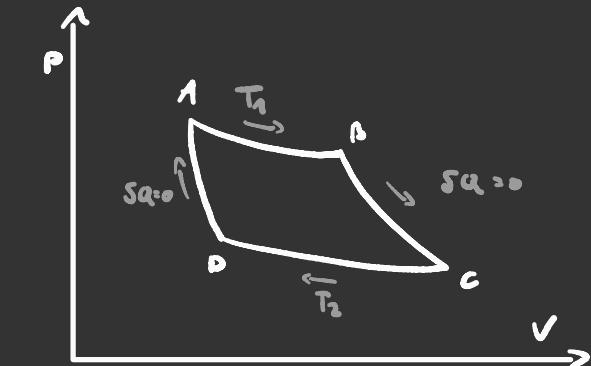
Quando avevamo scritto che $\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2}$ avevamo considerato che sia da che Q_2 siano positive. A dire il vero $Q_1 \leq 0$ e $Q_2 \geq 0$, quindi $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$. Se ci fossero state N sorgenti

In un ciclo chiuso $\rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \rightarrow \sum_i \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ con tanti scambi di calore infinitesimi

Entropia Leczione II

Il ciclo di Carnot è fatto da due isoterme e due adiabatiche.

L'efficienza di una macchina di Carnot è $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$



Visto che all'interno di un ciclo di Carnot $\oint \frac{dq}{T} = 0$
possiamo dire che $\frac{dq}{T} \equiv dS$ è un differenziale esatto
e lo chiamiamo Entropia.

$$S(A) - S(B) = \Delta S \geq \int_0^A \frac{dq}{T}$$

Il che significa che l'entropia non può mai scendere in un sistema termodinamico chiuso.

Aggiungere principio di Landsauer

Equilibrio Termico

Adesso proviamo a fare un giochetto,

risolviamo per dS

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{PdV}{T} - \frac{q}{T} dN$$

Setto divisorio



E_1, S_1, P_1	E_2, S_2, P_2
T_1, V_1, \dots	T_2, V_2, \dots

Se mettiamo a contatto i nostri 2 sistemi mi aspetto che vadano all'equilibrio termico con delle trasformazioni irreversibili in modo da massimizzare l'entropia.

Supponiamo che il setto sia fisso e ermetico ma che non sia isolante, quindi abbiamo che

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{dE_1}{T_1} + \frac{dE_2}{T_2} = \frac{dE}{T_1} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

All'equilibrio l'entropia dovrà ad un massimo quindi:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

Alllo stesso modo si può ottenere che la condizione di equilibrio se il setto è mobile ma isolante ed ermetico è che il volume non cambi:

$$dV = dV_1 - dV_2 = - \frac{dE_1}{P_1} + \frac{dE_2}{P_2} = \frac{dE}{P_2} \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1} \right) \rightarrow P_1 = P_2$$

E così via...

Energia e complessità

Forze generalizzate

$$dE(S, \{x_i\}, \{N_i\}) = TdS - \sum F_i dx_i + \sum q_i dN_i$$

Possiamo dire che $\lambda E(S, \{\lambda x_i\}, \{\lambda N_i\}) = E(\lambda S, \{\lambda x_i\}, \{\lambda N_i\})$

Quindi:

$$dE = TdS - \sum F_i d(\lambda x_i) + \sum q_i d(\lambda N_i)$$

questo è vero per ogni λ quindi:

$$E = TS - \sum F_i x_i + \sum q_i N_i$$

Ri-differentiamo queste equazioni otteniamo che

$$TdT - \sum x_i dF_i + \sum N_i dq_i = 0$$

Mentre le altre energie Termodinamiche

Ensemble Microcanonico

L'ensemble microcanonico ci serve per fare il salto dalla meccanica classica alla fisica statistica.

Supponiamo di avere un gas di N particelle, noi definiamo

- il **microstato** che è la posizione nello spazio delle fasi del nostro sistema $\{x_i, p_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$
- il **Macroscopo** che è lo stato termodinamico del sistema

Una supposizione che si fa quando si lavora con la meccanica statistica è l'**ipotesi Ergodica**.

Ci sono diversi modi di formulare. Il modo in cui la formulazione adesso c'è che:

Se prepariamo il nostro sistema in un determinato microstato $\{x_i, p_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ esso esplorera' tutti gli elementi dello spazio delle fasi che è in grado di esplorare

Supponiamo di avere una variabile di cui vogliamo calcolare il valore medio

$$\langle A \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} A(\{x_i(t), p_i(t)\}) dt = \\ = \int A(\{x_i, p_i\}) P(\{x_i, p_i\}) d^{3N}x d^{3N}p$$

Dove P è la densità di probabilità

Su ρ c'è il vincolo sull'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{dove} \quad \vec{v} = \{\dot{x}_i, \dot{p}_i\}$$

✓ $F_2 = 0$ per le eq. di H2M.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \dot{x}_i + \rho \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} = \frac{d\rho}{dt}$$

Quindi ρ non dipende dal tempo

A questo punto possiamo supporre che $\rho = \rho(E)$ che equivale a dire che tutti i microstati con la stessa energia sono equiprobabili. Inoltre ci aspettiamo che se il nostro microstato ha una certa energia $E \pm \Delta E$ allora ci resterà, quindi possiamo dire che $\rho(E) = 0$ se non sta in $(E-\Delta E, E+\Delta E)$

ri-Definisco l'entropia $S(E) = k_B \ln \Gamma(E)$ dove

Volume dello spazio delle fasi con energia $E \rightarrow \Gamma(E) = \int d\vec{x} d\vec{p}$

$$_{E \in (E-\Delta E, E+\Delta E)}$$

Per assicurarsi che questa definizione di entropia è equivalente a quella data prima bisogna assicurarsi che

- Sia esclusiva

- $\left| \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N,V} = \frac{1}{T}$ Ricordati che il fatto che la Temperatura sia positiva implica il secondo principio della Termodinamica

Dopotutto se stavazzza come un anatra, allora è un anatra

Cominciamo col' estensivo E_2 .

Se consideriamo un sistema fatto da 2 sottosistemi abbiamo che

$$\sum_{\epsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{p} = \sum_{\epsilon_1} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{p}_1 \sum_{\epsilon_2} d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_2$$

Quindi

$$P(\epsilon) = P(\epsilon_1)P(\epsilon_2) \rightarrow S(\epsilon) = S(\epsilon_1) + S(\epsilon_2)$$

Adesso verifichiamo che $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{\text{ext}} = \frac{1}{T}$

Chiaramente se deriviamo una funzione per una variabile ci cerca un'altra funzione, quindi basterebbe DEFINIRE $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{\text{ext}} = \frac{1}{T}$, però dobbiamo assicurarsi che $T \geq 0$.

Mettiamo i contenitori in modo che si possano scambiare un $dE_1 = -dE_2$ di energie.

Vista che questo scambio avviene spontaneamente significa che si è passato da uno stato meno probabile a uno più probabile.

Visto che la probabilità è proporzionale a P abbiamo che l'entropia totale è aumentata

$$dS = dS_1 + dS_2 = dE_1 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} T_1 \geq T_2 & \text{se } dE_1 \leq 0 \\ T_1 \leq T_2 & \text{se } dE_1 \geq 0 \end{cases}$$

Questo ci dice che l'energia va da dove c'è più caldo a dove c'è più freddo

E_1, S_1, N_1

E_2, S_2, N_2

E, S, N

Supponiamo che $T_1 > T_2$, e supponiamo per assurdo che

$T_1 > 0$ e $T_2 < 0$ allora.

$$dS = \underbrace{dE_1}_{<0} \underbrace{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)}_{>0} > 0 \quad \text{Assurdo}$$

Se invece sia T_1 che T_2 sono negative allora.

$$dS = \underbrace{dE_1}_{<0} \underbrace{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)}_{<0} > 0$$

Quindi le temperature possono essere o tutte positive o tutte negative, quindi ci basta trovare un singolo caso in cui la temperatura è positiva e abbiamo fatto.

Ad esempio si potrebbe prendere un gas perfetto e vedere che segue la 2^a legge di Carnot.

Non farò i conti qui perché tanto dopo si faranno, ma comunque $T > 0$

GAS PERFETTO

Lec 11

Un gas perfetto è un gas dove le particelle non interagiscono tra di loro. L'Energy è quindi:

$$E = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

Adesso per vedere quant'è l'entropia vediamo quant'è grosso il volume dello spazio delle fasi.

Quando siamo in tante dimensioni il volume dello spazio delle fasi sta tutto vicino alla superficie, quindi possiamo dire che

$$\rho(E) = V_s(2mE, 3N)$$

Dove $V_s(r, N)$ è il volume di una sfera con raggio r in N dimensioni.

$$V_s(r, N) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2}+1)!} r^N$$

Nel caso $\frac{N}{2}+1$ non è un intero si usa la formula di Euler

$$\rho(E) = \frac{2\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2}+1)!} V^{3N}$$

Volume nello spazio delle fasi

È possibile approssimare il fattoriale con la formula di Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k_B} S(E) \quad \ln \rho(E) = \ln(2) + 3N \ln(2mE V^3 \sqrt{\pi}) - \ln(\frac{3N}{2}+1)!$$

$$= \ln(2) + \frac{3N}{2} \ln(2mE V^3 \sqrt{\pi}) - (\frac{3N}{2}+1) \left[\ln(\frac{3N}{2}+1) - 1 \right] + \ln(\frac{3N}{2}) \approx$$

$$\approx \frac{3N}{2} \ln\left(V^2 \frac{2mE}{3N} V \sqrt{\pi}\right) + \frac{3N}{2}$$

Adesso possiamo riceverci alcune relazioni del gas perfetto sfruttando le derivate parziali di dS

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \frac{3N}{2} \frac{K_b}{E} \rightarrow E = \frac{3N}{2} K_b T$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} = \frac{3NK_b}{V} \rightarrow PV = 3NK_b T$$

Perdosso di Gibbs

Supponiamo di avere all'equilibrio termico E_1, S_1, N_1 e E_2, S_2, N_2 separate da un setto.

All'inizio l'entropia è

$$S_i = S_1 + S_2 =$$

$$= 3N_1 \ln V_1 + 3N_2 \ln V_2 + 3 \left(\underbrace{N_1 + N_2}_{2} \right) + \text{cost.}$$

Alla fine invece è

$$S_f = 3(N_1 + N_2) \ln(V_1 + V_2) + \frac{3}{2}(N_1 + N_2)$$

Quindi se prendo il setto l'entropia aumenta, in teoria questo non dovrebbe essere vero se i due gas sono uguali.

Il problema qua c'è che noi consideriamo le particelle come se fossero distinguibili quando in realtà, in genere non lo sono. Per risolvere questo "problema" basta ridefinire

$$P(E) = \frac{1}{N!} V_s(2mE, 3N)$$

Non mi metto a fare i conti

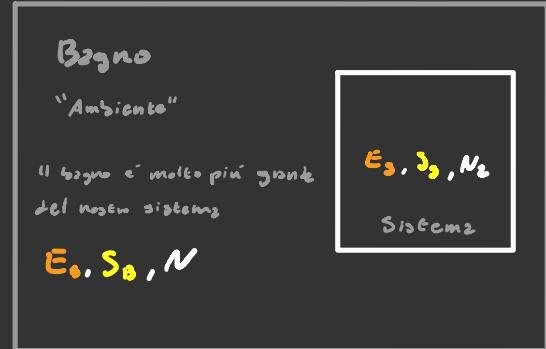
E_1, S_1, N_1	E_2, S_2, N_2
T, V_1, P, \dots	T, V_2, P, \dots

Ensemble Canonico

Primo, quando avevamo usato l'ensemble microcanonico avevamo considerato il nostro sistema come se fosse isolato.

Secondo supponiamo che il nostro sistema sia all'equilibrio termico con un bagno a temperatura T .

Usare questa trattazione ci permette di avere i conti più facili rispetto al microcanonico.



La prima cosa da calcolare c'è $P_S(\{x_i, p_i\})$
Supponiamo che "l'Universo" che c'è il Bagnio + Sistema sia isolato.

L'entrospazio del bagno è

$$S_B(E - E_S) = S_B(E) \cdot e^{-\frac{E_S}{kT}} \quad \leftarrow \text{La } S \text{ sta per sistema}$$

Quindi

$$\Gamma_S(E_S) = e^{\frac{S_B(E)}{kT}} = e^{-\frac{E_S}{kT}}$$

Avevamo visto prima che ogni stato è equiprobabile, quindi

$$\text{L2 costante di } \rightarrow P_S \propto \frac{1}{\Gamma_S^2} = \frac{P_B}{T^2} \propto P_B \quad \leftarrow P_S P_B = 1^2$$

proporzionalità
si ottiene normalizzando

Quindi

$$P_S(E_S) \propto e^{-\frac{E_S}{kT}}$$

Funzione di partizione

A noi adesso ci tocca normalizzare la densità di stati.

Intanto riscriviamola in forma un po' più carina

$$\rho(\{x_i, p_i\}) = \frac{e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})}}{Z} \quad \beta = 1/k_B T$$

La normalizzazione Z è detta funzione di partizione e dopo vedremo che è estremamente importante.

$$Z = \sum e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{d^N}{dx^N} \frac{d^N}{dp^N}$$

Il valor medio di un operatore è

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \sum O(\{x_i, p_i\}) e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{d^N}{dx^N} \frac{d^N}{dp^N}$$

È possibile scrivere alcuni valori medi in termini di Z , ad esempio

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z} \sum H(\{x_i, p_i\}) e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{d^N}{dx^N} \frac{d^N}{dp^N} =$$

$$= -\frac{1}{Z} \sum \frac{\partial}{\partial p} e^{-\beta H(\{x_i, p_i\})} \frac{d^N}{dx^N} \frac{d^N}{dp^N} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial p} Z = -\frac{\partial}{\partial p} \ln Z$$

Adesso $\frac{\partial}{\partial \beta} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{1}{T} = -k_B T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$, quindi

$$E = k_B T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = T \frac{\partial}{\partial T} k_B T \ln Z - k_B T \ln Z$$

Adesso definisco $F = -k_B T \ln Z$ e ottengo che

$$E = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$$

Questo significa che E è la trasformata di Legendre rispetto alla temperatura di F , ma allora F è l'energia libera di Helmholtz. \leftarrow Controlla

Questo è una cosa molto buona! Noi con l'energia libera possiamo calcolare qualunque funzione termodinamica!

Fluttuazioni

Non scordiamoci che stiamo lavorando con l'ensemble canonico, e che quindi il nostro sistema è in contatto con un bagno termico, quindi anche se sono all'equilibrio ci aspettiamo che i due si scambino piccole quantità di energia facendo fluttuare le variazioni termodinamiche. Ormai il punto è capire QUANTO. La varianza di un operatore O non c'è altro che

$$(\Delta O)^2 = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2$$

Ad esempio

$$(\Delta E)^2 = K_B T^2 \frac{\partial U}{\partial T} = K_B T^2 C_V$$

Coppia: termica e volume costante

$C_V \propto N$, quindi le fluttuazioni crescono all'aumentare delle particelle, ma visto che $E \propto N$ $\Delta E/E \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$

Ensemble Grancanonico

Lezione VI

L'ensemble grancanonico
è "l'estensione" dell'ensemble
canonico.

Prima avevamo considerato
che il nostro sistema poteva
scambiare solo l'energia
con il bagno. L'ensemble
grancanonico permette al sistema di scambiare sia Energia
che particelle.

Sotto un certo punto di vista il nostro sistema è soltanto
un pezzo di spazio senza muri che sta dentro al bagno
termico.

Per la trattazione Bagno + sistema uso la formulazione canonica

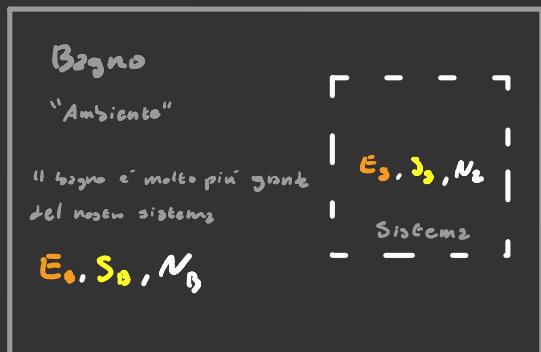
$$Z_{B+S}(V, T, N) = \frac{1}{N!} \int e^{-\beta H_{B+S}(x_i, p_i)} d^N x d^N p$$

Questo termine rappresenta
l'interazione tra le particelle
di B e di S e possiamo
trascurarla

dove $H_{B+S} \approx H_S(\{x_i, p_i\}; S, N_S) + H_B(\{x_i, p_i\}; B, N_B) + \dots$ ()

Adezzo però le Hamiltoniane non sono più simmetriche per
ogni scambio di particelle, quindi non ci va $1/N!$

Pensò si possono tranquillamente scambiare le particelle di S
tra di loro e quelle di B Era di loro, quindi ci va $\frac{1}{N_S! N_B!}$



$$Z_{\text{zero}} = \left[\frac{1}{N_s!} \int e^{-\beta H_s(\{X_i, p; S, N_s\})} d^N_s d^{N_s} \right] \left[\frac{1}{N_d!} \int e^{-\beta H_d(\{X_i, p; S, N_d\})} d^N_d d^{N_d} \right]$$

Definiamo $Z_i = \frac{1}{N_s!} \int e^{-\beta H_s(\{X_i, p; S, N_s\})} d^N_s d^{N_s}$

Perciò qui ho trascurato il fatto che i due sistemi possono scambiarsi parti celle, quindi devo sommare su tutte le possibili valori di N_s , quindi

$$Z_{S+D} = \sum_{N_s=0}^N Z_s Z_D$$

Visto che ci interessa descrivere soltanto il sistema per calcolare le densità di stati bisogna sommare sui gradi di libertà del Bagno.

$$P_s(\{X_i, p; S, N_s\}) = \frac{1}{N_s!} e^{-\beta H_s(\{X_i, p; S, N_s\})} \frac{Z_0}{Z_{S+D}}$$

Quindi c'è già
normalizzata

Visto che $F \equiv -k_B T \ln Z$, Allora

$$\frac{Z_D}{Z} = \exp\{\beta[F(V, T, N) - F_0(V_0, T, N_0)]\} \approx \exp[-\beta(PV_s - qN_s)]$$

Faccendo la sostituzione otteniamo che

$$P_s(\{X_i, p; S, N_s\}) = \frac{1}{N_s!} \exp[-\beta(H_s(\{X_i, p; S, N_s\}) + PV_s - qN_s)]$$

La normalizzazione di P_s è la Gran funzione di Partizione

$$Z_S = \sum_{N_s=0}^N \frac{1}{N_s!} \int \int \exp[-\beta(H_s(\{X_i, p; S, N_s\}) + PV_s - qN_s)] d^N_s d^{N_s}$$

Da notare che il colore è leggermente diverso, così si può distinguere

Visto che la distribuzione di probabilità era già normalizzata abbiamo che $Z_S = 1$.

Spesso e volentieri consideriamo sistemi a Volume costante, in quel caso possiamo portare il termine e^{-PV} fuori dall'integrale e ridefinire la funzione di granpartizione così:

$$Z_S = \sum_{N_S=0}^N \frac{1}{N_S!} \iint \exp[-\beta(H_S(x_i, p_j; S, N_S) - qN_S)] dx_i^3 dp_j^3$$

In questo caso però $Z_S = e^{\beta PV}$

Adesso che abbiamo la funzione di Granpartizione possiamo abbandonare l'indice S .

Definiamo

$$\Omega = -PV = -k_B T \ln Z$$

Prima avevamo visto che

$$E = TS - PV + qN$$

Ma allora Ω non è altro che la trasformata di Legendre dell'energia rispetto all'entropia e N , quindi possiamo ottenere tutte le variabili che vogliamo partendo da lì.

Vuendo si possono calcolare direttamente le variabili termodinamiche in modo analogo a come avevamo fatto con la funzione di partizione, ad esempio

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial q} \Big|_{T, V}$$

Esercizio: Calcola la magnetizzazione di un sistema di spin non interagenti in un campo magnetico

Sistemi



Interagenti

Lessione VII

$$Z = \frac{1}{N!} \iint e^{-\beta H} d^3x d^3p \quad H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

Integrare rispetto alle \vec{p}_i è semplice. La parte costante è integrare rispetto alle \vec{x}_i .

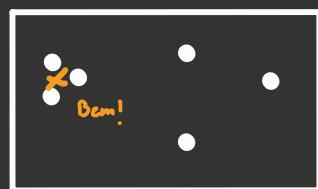
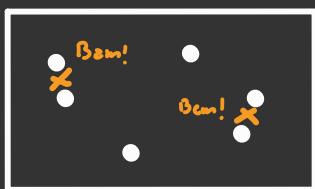
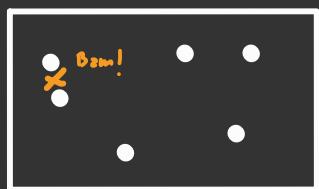
$$Z = \frac{1}{N!} \left[\underbrace{\left(\int e^{-\frac{\beta p_i^2}{2m}} dp_i \right)^N}_{\text{Facile}} \right] \underbrace{\int e^{-\beta V} d^3x}_{\text{Difficile} \equiv Z_N}$$

Quindi adesso limitiamoci a calcolare questo integrale.

Supponiamo che

$$V(\{\vec{x}_i\}) = \sum_{i < j} v(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

Adesso approssimiamo: Supponiamo che le collisioni sono così rare che è improbabile che avvengano più di una collisione 2 a 2 corpi o collisioni con più di 2 corpi.



Pertanto scrivendo la funzione di partizione di $N+1$ particelle interagenti:

Particella "1"

$$Z_{N+1} = \int \exp \left[-\beta \left(\sum_j \nabla (\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_{i \neq j} \nabla (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right) \right] d\vec{x} =$$

$$= \frac{\int \exp \left[-\beta \left(\sum_j \nabla (\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_{i \neq j} \nabla (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right) \right] d\vec{x}}{\int \exp \left[-\beta \sum_{i \neq j} \nabla (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right] d\vec{x}} \int \exp \left[-\beta \sum_{i \neq j} \nabla (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right] d\vec{x} =$$

$$= \langle \int e^{-\beta \sum_i \nabla (\vec{x} - \vec{x}_i)} d\vec{x} \rangle Z_N$$

Adesso applichiamo l'approssimazione:

Supponiamo che solo la particella "1" come posso fare degli urti, quindi: $\sum_{i \neq j} \nabla (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \approx 0$, quindi:

$$\langle \int e^{-\beta \sum_i \nabla (\vec{x} - \vec{x}_i)} d\vec{x} \rangle \approx \frac{1}{V^N} \int e^{-\beta \sum_i \nabla (\vec{x} - \vec{x}_i)} d\vec{x} =$$

$$= \frac{V}{V^N} \int e^{-\beta \sum_i \nabla (\vec{x}_i)} d\vec{x} = V \left[\frac{1}{V} \int e^{-\beta \nabla (\vec{x})} d\vec{x} \right]^N =$$

$$= V \left[1 - \frac{1}{V} \int 1 - e^{-\beta \nabla (\vec{x})} d\vec{x} \right]^N = V \left[1 - \frac{4\pi}{V} \int x^2 (1 - e^{-\beta \nabla (x)}) dx \right]^N =$$

Definisco $z \equiv \frac{4\pi}{V} \int x^2 (1 - e^{-\beta \nabla (x)}) dx$ rappresenta il "volume" di una particella

$$Z_{N+1} = V \left(1 - \frac{z}{V} \right)^N Z_N = V^N \left(1 - \frac{z}{V} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} Z_1 \approx V^{N+1} e^{-\frac{N^2 z}{2V}}$$

Quindi la funzione di partizione complessiva viene

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\int e^{-\frac{PV^2}{2V}} d^3 p_i \right]^N \int e^{-PV} d^3 x =$$

$$= \frac{1}{N!} \cdot \left[2\pi m k_B T \right]^{\frac{3N}{2}} \cdot V^N e^{-\frac{N^2 a}{2V}}$$

$$\beta F = \ln Z = -N \ln N + \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right) + N \ln V - \frac{N^2 a}{2V}$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{N}{V} + \left(\frac{N}{V} \right)^2 z(T)$$

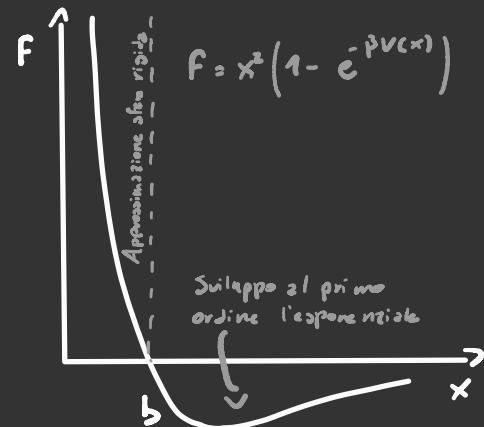
$$PV = N k_B T \left[1 + \frac{N}{V} z(T) \right]$$

E' possibile fare un'approssimazione
su z tale che per $T \gg 1$

$$z \approx V_b + \frac{D}{k_B T}$$

$$\text{dove } D = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty r^2 v(r) dr \text{ e}$$

V_b e' il volume di una sfera di $r=b$



Creando dei nuovi parametri :

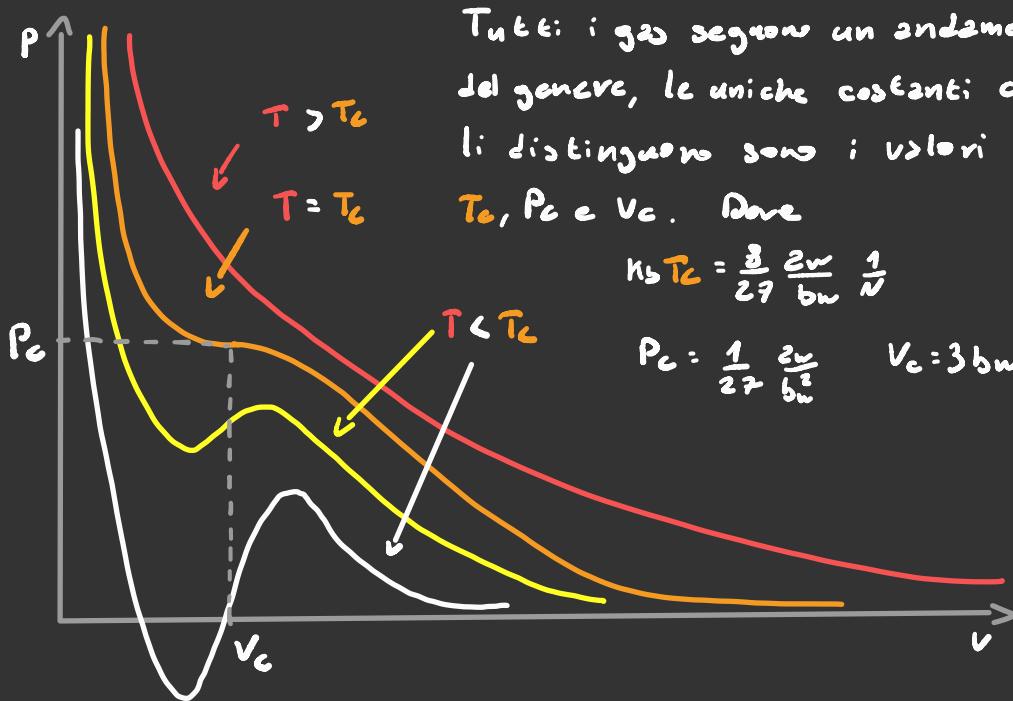
$$b_w = \frac{N}{2} V_b \quad z_w = \frac{N^2}{2} D$$

si ottiene l'equazione di Van der Waals

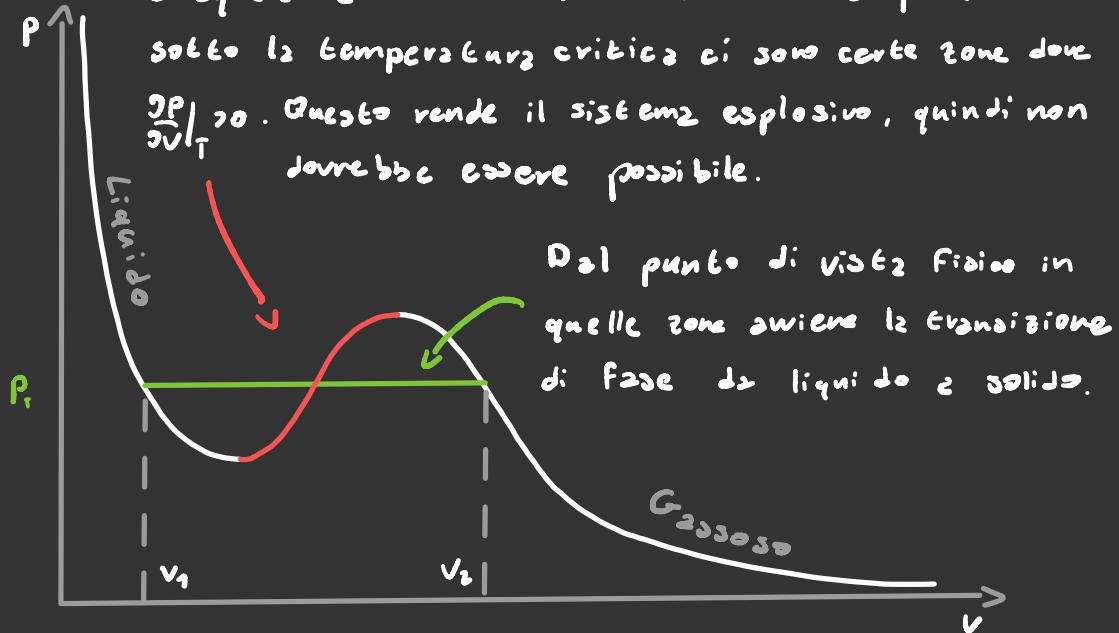
L'equazione di Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = Nk_b T$$

La rappresentazione grafica di questa equazione e'
qualcosa del genere.



L'equazione di Van der Waals ha un bel problema:
 sotto la temperatura critica ci sono certe zone dove
 $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$. Questo rende il sistema esplosivo, quindi non
 dovrebbe essere possibile.

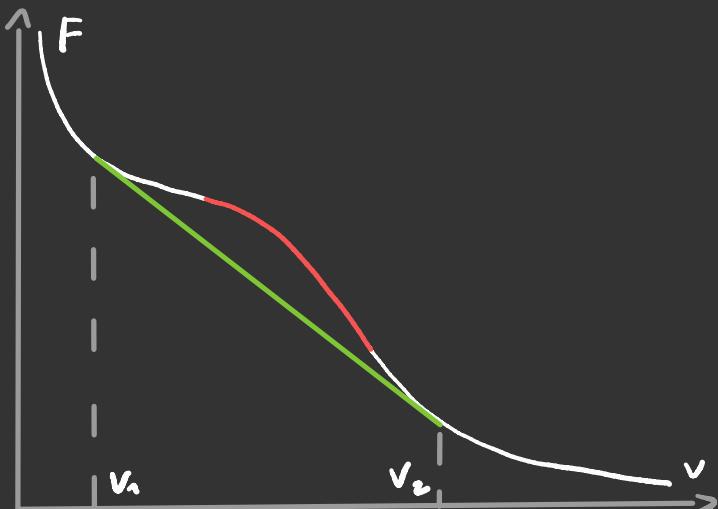


Durante la transizione di fase abbiamo le 2 fasi che coesistono. Entrambe le fasi devono essere all'equilibrio meccanico, quindi devono avere la stessa pressione.

L'altra cosa d'è che in tali condizioni è che l'energia libera $F = -\int P dV$ deve cambiare quando la derivata prima rispetto al volume

continua visto che c'è la pressione e nella regione di transizione deve essere lineare visto che $\frac{dF}{dV} = P_T$ per $V_1 \leq V \leq V_2$.

Questo determina univocamente P_T



Espansione dei Cluster

Prima avevamo fatto l'approssimazione che il gas era diluito e sufficiente di modo che c'era al massimo una sola interazione fra le molecole del gas.

Adesso proviamo a aumentare la precisione. Se 2 volte usiamo la funzione di Grandpartizione

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} Z_N \quad \text{dove} \quad \lambda = e^{-\beta u \sqrt{2 \pi m k_B T}}$$

$$\text{e } Z_N = \int e^{-\beta V(\{\vec{x}_i\})} d^N x \quad \text{con } V(\{\vec{x}_i\}) = \sum_{i < j} v(1 \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j 1)$$

$$\text{quindi } Z_N = \int \prod_{i < j} e^{-\beta V_{ij}} d^N x$$

Se definisco $F_{ij} = e^{-\beta V_{ij}} - 1$ abbiamo che

$$Z_N = \int \prod_{i < j} (1 + F_{ij}) d^N x$$

Se proviamo a calcolare la produttoriazza di queste

$$\prod_{i < j} (1 + F_{ij}) = 1 + \text{Ordine 0}$$

$$+ F_{12} + F_{23} + F_{13} + F_{14} + \dots \quad \text{I ordine}$$

$$+ F_{12} F_{23} + F_{12} F_{13} + F_{13} F_{23} + \dots \quad \text{II ordine}$$

+ ecc...

I prodotti queste F_{ij} sono detti cluster

Sarebbero i termini di questa sommatoria.

Quello che bisogna fare è classificare e calcolare gli integrali dei clusters.

$$\text{Per simmetria } \int f_{12} d\vec{x} = \int f_{34} d\vec{x}$$

$$\text{Allo stesso modo } \int f_{12} f_{23} = \int f_{45} f_{56} \neq \int f_{12} f_{34}$$

Si possono rappresentare e classificare graficamente così

$$\int f_{ij} d\vec{x}_i d\vec{x}_j = \begin{array}{c} j \\ | \\ i \end{array} \quad \int f_{ij} f_{jk} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k = \begin{array}{c} j \\ | \\ i \\ | \\ k \end{array}$$

$$\int f_{ij} f_{kl} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l = \begin{array}{c} j \\ | \\ i \\ | \\ k \\ | \\ l \end{array} = \left(\begin{array}{c} j \\ | \\ i \end{array} \right)^2 \leftarrow \text{Lo spiego dopo}$$

$$\int f_{ij} f_{jk} f_{ki} f_{kl} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l = \begin{array}{c} j \\ | \\ i \\ | \\ k \\ | \\ l \\ | \\ k \\ | \\ l \end{array}$$

Adezzo ci tocca contare quanti cluster ci sono di ciascun tipo

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} N(N-1)$$

Bisogna però stare attenti

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \frac{N}{(N-2)!} \frac{1}{3!}$$

~~C'è comunque da considerare che per ogni i, j in F_i $l_2 i$ deve essere minore della j . Un modo di assicurarsi che ciò avvenga è ordinare i vari indici i, j, k, \dots in ordine crescente ogni volta che $l_2 i$ incontra uno. Non si capisce~~

Ad exemplum

$$\int F_{2b} F_{bc} F_{bd} F_{dc} \rightarrow \cancel{\int F_{S+T+U} F_{S+Z} F_{Z+1}} \rightarrow \text{Ordinary} \rightarrow$$

$$\rightarrow \oint F_{12} F_{23} F_{34} F_{41}$$

↗ ↑ ↘ ↑ ↗ ↑ ↘ ↑
 1 → 2 2 → 3 3 → 4 4 → 1
 5 → 1 4 → 2 3 → 4 2 → 5

~~Il primo numero che incontrerò è un 5, quindi faccio a sentire tutte: $5 \cdot 1$, il secondo è il 4, quindi $4 \cdot 1$ e così via.~~

Questo significa che l'è moltiplicato
di ogni cluster V_2 diviso per b_1 .

Adesso "calcoliamo" il valore di ognuno di questi integrali

$$\int \dots = \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) d^3x_i = V^{n-2} \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) d\vec{x}_i d\vec{x}_j =$$

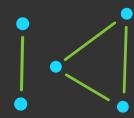
Ras 2021:06:24

$$= V^{n-3} \int F_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) F_{jn}(|\vec{x}_j - \vec{x}_n|) d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_n$$

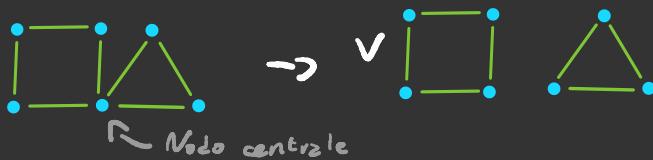
$$= V^{n-2} \int F_{ij}(|\vec{x}_i|) F_{jn}(|\vec{x}_n|) d\vec{x}_i d\vec{x}_n \quad \left(\frac{V}{4\pi} \right)^2$$

$$\bullet \rightarrow \bullet = V^{N-4} \int f_{i,j} f_{j,k} f_{j,l} f_{k,l} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k d\vec{x}_l =$$

$$= V^{N-3} \int f_{i_1} f_{j_2} f_{k_3} f_{l_1} d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 d\vec{x}_4$$



In generale se il cluster è formato da 2 pezzi uniti da un solo nodo allora si possono ripartire trizzare tutte le altre variabili d'integrazione in termine del nodo centrale



Un cluster che non è possibile spezzare in 2 è detto irriducibile.

Adezzo vediamo quanto ognuno di questi cluster contribuisce

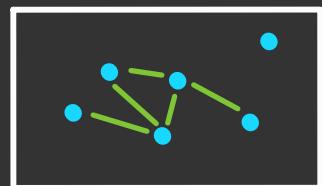
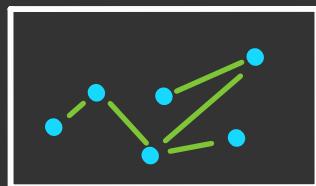
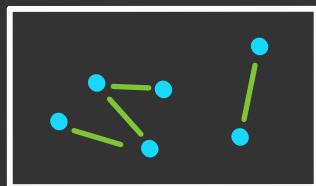
$$Z_N = \int \prod_{i < j} (1 + F_{ij}) d^N x = 1 + \\ + \sum F_{12} + F_{23} + F_{13} + F_{14} + \dots \\ + \sum F_{12} F_{23} + F_{12} F_{13} + F_{13} F_{23} + \dots$$

definisce b_N come la somma di tutte le contribuzioni che comprendono tutti i nodi.

$$b_N = \int \sum_{\text{clusters}}^{\text{2 nodi}} d^N x$$

Anche quelli separati e non irriducibili

Ecco quali clusters stanno e non stanno in queste somme teriz



Scriviamo i primi termini di b_e

$$b_1 = \bullet = V$$

$$b_2 = \bullet = \int f_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) d\vec{x}_i d\vec{x}_j$$

$$b_3 = \left(3 \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \end{array} \right) =$$

$$= \int f_{ii} f_{jj} f_{kk} + f_{ij} f_{jk} + f_{ji} f_{ik} + f_{ik} f_{kj} d\vec{x}_i d\vec{x}_j d\vec{x}_k$$

$$Z_N = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\ell!} \frac{N!}{(N-\ell)!} b_\ell V^{N-\ell} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} V^N \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell$$

\approx e la densità

Quindi c'è una serie di potenze in V .

A noi però ci interessa il logaritmo della funzione di partitione.

$$\ln \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell = \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell$$

$$\sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} b_\ell = \exp \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell =$$

$$= \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell + \left[\sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell \right]^2 + \dots$$

$$= 1 + B_0 + \left(\frac{N}{V}\right)^1 (B_1 + 2B_0 B_1) + \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{B_2}{2} + 2 \frac{B_2 B_0}{2} + B_1^2 \right) + \dots$$

A questo punto basta egualare i termini delle due serie con lo stesso $\left(\frac{N}{V}\right)^\ell$. Questa è una procedura standard per le cose perturbative.

Quindi abbiamo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} = 1 + B_0 \\ b_1 = B_1 + 2B_1B_0 \\ \frac{b_2}{2} = B_2 + B_2B_0 + B_0^2 \\ b_3 = \dots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = -1 \\ -B_1 = b_1 \\ -B_2 + 2b_1^2 = b_2 \\ \dots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = -1 \\ B_1 = -b_1 \\ B_2 = 2b_1^2 - b_2 \\ B_3 = \dots \end{array} \right.$$

Vanno le
mazzi di
come dovrebbe

$$\frac{P}{k_b T} = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \ln \frac{\lambda^N}{N!} Z_N = \frac{\partial}{\partial V} \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{N}{V} \right)^\ell \frac{1}{\ell!} B_\ell =$$

$$\frac{PV}{k_b T} = - \sum_{\ell=1}^N \left(\frac{N}{V} \right)^\ell \frac{1}{(\ell-1)!} B_\ell = \left[\frac{N}{V} B_1 - \left(\frac{N}{V} \right)^2 B_2 + \left(\frac{N}{V} \right)^3 \frac{B_3}{3} + \dots \right]$$

$$\ln \sum \frac{\lambda^N}{N!} Z_N =$$

Chiarmente calcolare queste serie e impossibile, pens si puo'
approssimare interrompendo la serie a un certo punto.
Supponiamo di interromperla a $\ell=3$

Transizioni di Fase

Una Transizione di Fase è quello che succede quando

- Cambia lo stato di aggregazione del sistema Liquido, solido, ...
- Cambiano alcune proprietà termodinamiche Ferromagnetico- paramagnetico

Secondo Ehrenfest le Transizioni di Fase di Ordine non è definita se le derivate n-ima del potenziale termodinamico è discontinua.

Ad esempio l'Ennesimo è discontinua a 0°C nell'acqua, visto che $S = \frac{\partial F}{\partial T}$ è discontinuo l'ebollizione è una transizione del I ordine

Oggi giorno stessa classificazione non si usa più, in pratica ci sono le

- Transizioni del primo ordine uguali ad Ehrenfest
- Transizioni continue Tutte le altre

Questo perché alcuni tipi di transizioni non erano classificabili

Noi ignoreremo le transizioni del primo ordine perché nel campo della chimica sono ben modellizzate.

Quindi concentriamo ci sulle transizioni continue

Se abbiamo un numero piccolo di particelle c'è insensato parlare delle loro Fase. Se ha 3 molecole d'acqua non sono né solide né liquide né gassose

Quindi le Transizioni di Fase sono un fenomeno puramente Termodinamico.

Noi però non siamo vincolati ad usare molte particelle, volendo possiamo prendere un numero finito N e poi portare $N \rightarrow \infty$.

La funzione di Grandezza è

$$Z = \sum_{N=0}^M \frac{z^N}{N!} Z_N = 1 + z Z_1 + z^2 Z_2 + \dots$$

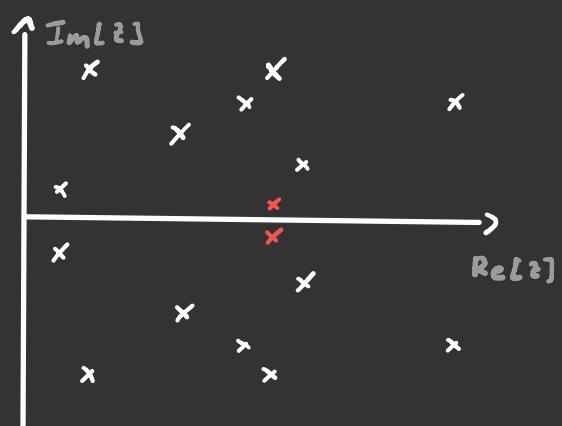
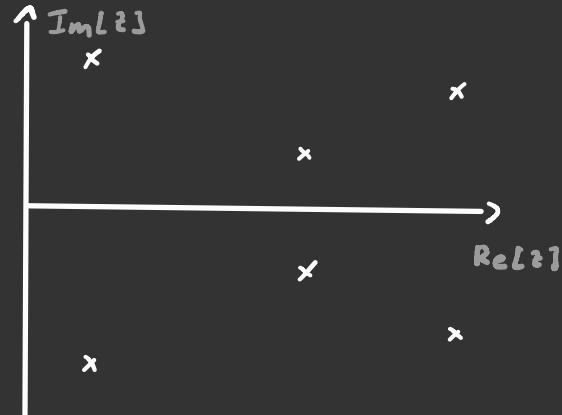
dove $z = e^{p\mu}$.

Quindi Z è un polinomio di grado M e ha M soluzioni nel piano complesso \rightarrow

In teoria z può avere solo valori reali > 0 visto che

$$z = e^{p\mu}$$

Normalmente non ci sono radici sull'asse reale, però quando aumentiamo M le soluzioni tendono ad affollarsi e alcune si mettono vicino alla retta reale, quindi per $M \rightarrow \infty$ possiamo dire che ci sono degli zeri in \mathbb{R}^+



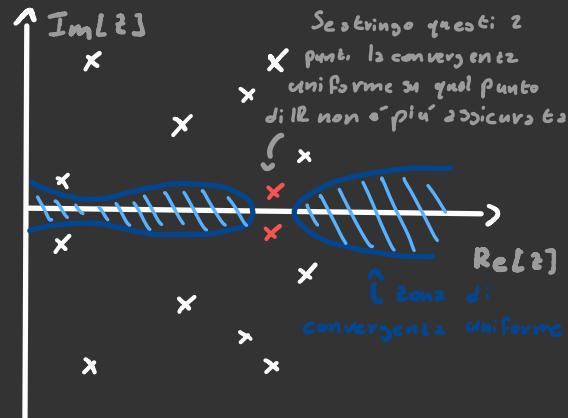
Però che cosa implica? Prendiamo la densità e facciamo il limite termodinamico. ($N, V \rightarrow \infty$)

$$p = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Noi vogliamo assicurarsi che il limite e le derivate si possano scambiare, però questo è possibile solo dove $\ln Z(z)$ converge uniformemente.

Ma perché a noi interessa la convergenza uniforme?

L'idea è che se abbiamo delle funzioni continue $\{z^N, z_N\}$ e infinitamente differenziabili allora anche le loro serie lo è, quindi siamo sicuri che non ci sono transizioni di fase.



Ponche'? $\ln(0) = -\infty$?



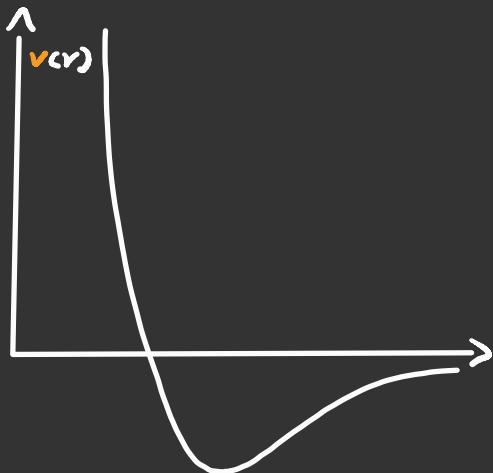
Dove ci sono gli zeri non c'è convergenza uniforme, quindi POTREBBE esserci una discontinuità della funzione o di una delle sue derivate.

Per meglio capire questo teorema proviamo ad applicarlo al modello di Ising

Idea: Aggiungere analogia con convergenza uniforme
Serie di Fourier

Teorema del Cerchio

Il teorema del cerchio dice che se se abbiamo un potenziale di interazione $v(r)$ come qui a destra, allora tutti gli zeri della funzione di partizione si trovano in un cerchio centrato all'origine di raggio 1, quindi possiamo scrivere z così



$$z = \prod_n (z - e^{i\theta_n}) \rightarrow \ln z = \sum_n \ln(z - e^{i\theta_n})$$

$$\text{Per } N \rightarrow \infty \quad \ln z = \sum_{n=0}^{2\pi} g(\theta) \ln(z - e^{i\theta}) d\theta$$

\curvearrowright Densità di zeri

Visto che per ogni radice esiste 12 complessi coniugatiabbiamo che $g(\theta) = \overline{g(-\theta)}$

$$\ln z = \sum_{n=0}^{\pi} g(\theta) \ln(z^2 - 2z \cos \theta + 1) d\theta$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{F}{V} = \frac{k_B T}{V} \ln z = \frac{k_B T}{V} \sum_{n=0}^{\pi} g(\theta) \ln(z^2 - 2z \cos \theta + 1) d\theta$$

$$P = \frac{N}{V} = \frac{z}{V} \sum_{n=0}^{\pi} \ln z = 2z \sum_{n=0}^{\pi} g(\theta) \frac{z - e^{i\theta}}{z^2 + 1 - 2z \cos \theta} d\theta$$

Ora come ora noi non abbiamo idea di come è fatta $g(\theta)$ se $g(0) = 0$ allora sia pure P sono continue in $z=1$ altrimenti potrebbe non esserlo.

Equazione di Van der Waals vicino al punto critico

Per cercare di capire "bene" come funziona l'ebollizione e la condensazione bisogna andare a guardare l'equazione di Van der Waals vicino al punto critico.

Se scriviamo l'equazione di Van der Waals in termini delle variabili termodinamiche al punto critico esce questo

$$8\bar{T} = \left(\bar{P} + \frac{3}{\bar{V}}\right)(3\bar{V} - 1) \quad \text{dove} \quad \bar{P} = \frac{P}{P_0} \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0}$$

Vicino al punto critico $\bar{P} = \bar{V} = \bar{T} = 1$, quindi posso provare a definire

$$\bar{P} = 1 + \pi \quad \bar{V} = 1 + \psi \quad \bar{T} = 1 + \tau$$

Facendo così l'eq. di Van der Waals diventa

Ancora qui non abbiamo approssimato

$$3\psi^2(1+\tau) + 8\psi(\tau-\epsilon) + \psi(7\tau - 16\epsilon) + 2(\tau+4\epsilon) = 0$$

Noi vogliamo trovare

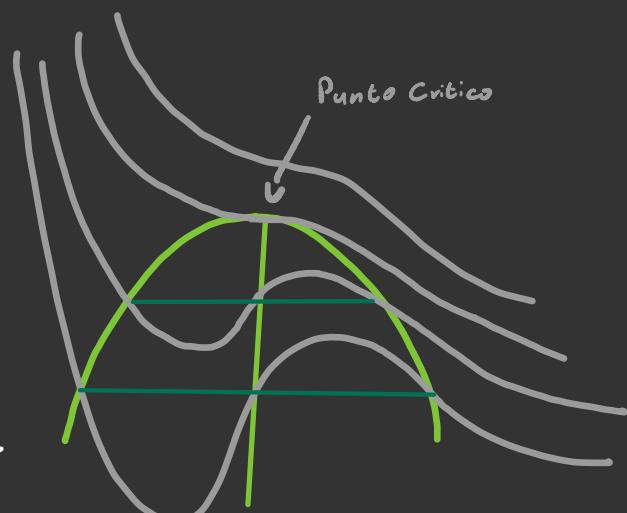
le intersezioni di queste \rightarrow linee con le linee isobare.

Visto che una delle soluzioni

se è semplice $\psi = 0$

allora $\tau \approx 4\epsilon$.

L'equazione diventa quindi



$$3\psi^3(1+\pi) + \delta\psi^2(\pi-\epsilon) + \psi(-7\pi - 16t) + 2(\pi + \epsilon) = 0$$

$$3\psi^2 + 2 + \psi\epsilon + 12t = 0 \quad \psi^2 + \frac{\delta\psi\epsilon}{3} + 4t = 0$$

Controllo
normalizzata

Quindi alla fine

$$\psi_{1,2} = \pm 2\sqrt{|\epsilon|} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{|\pi|} \propto |\pi|^{\frac{1}{2}} \quad \Delta = \frac{1}{2}$$

Che c'è quella cosa che ci dà la forma a parabola delle zone di coesistenza

Questo risultato è un po' approssimato, però si può usare per calcolare quanto sono discontinue le derivate termodinamiche.

Ad esempio la compressibilità isotermica

$$K_T = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \pi}\right)_T = \frac{2}{7\pi + 3\psi^2 - 16t} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6t} & t=0^+ \\ \frac{1}{12|t|} & t=0^- \end{cases} \quad \begin{cases} \psi=0^+ \\ \psi=0^- \end{cases}$$

Il che significa che nelle isotermiche appena al di sopra del punto critico $K_T = 1/6t$ e in quelle appena al di sotto $K_T = 1/12|t|$, quindi $K_T \propto |t|^\gamma$ con $\gamma = -1$

de γ sono detti **esponenti critici** perché caratterizzano il modo in cui variano le variabili termodinamiche vicino al punto critico

Modello di Ising



Il modello di Ising rappresenta un sistema di spin interagenti su un reticolo immersi in un campo magnetico.

Se si considerano solo le interazioni con gli spin confinanti l'hamiltoniana è:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

Somma solo gli spin \rightarrow
confinanti Proportionale al campo
magnetico

Dove $\sigma_i = \pm 1$

Studiare il modello di Ising all'inizio c'è un po' come studiare gli oscillatori armonici la prima volta: non si capisce come mai i fisici ne siano così tanto ossessionati.

Il motivo è che

- Nonostante la sua "semplicità" esso è in grado di descrivere il ferromagnetismo e l'anti-ferromagnetismo, le transizioni gas-liquido, liquido-solido e tante altre cose
- Grazie alla sua semplicità è in grado di dare una descrizione teorica unificata di tutti questi fenomeni

L'2 versione 1-dimensionale del problema ha soluzione

analitica Nel senso che è possibile scrivere tranquillamente la funzione di partizione

L'2 versione bidimensionale

ha sic soluzione analitica

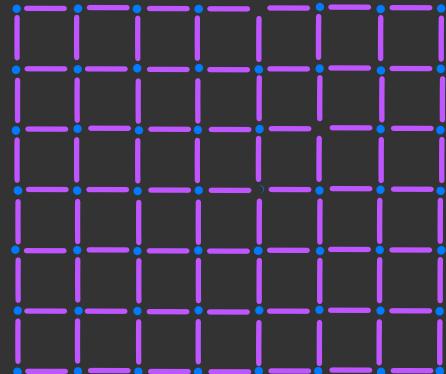
che transizioni di fasi, solo

che la soluzione analitica è

brutta come la germania e

quindi non l'2 facchiamo mano

con un bastone. Si chiamò soluz.
di Onsager



Per dimensioni 2,3 non esiste una soluzione analitica

Visto che non abbiamo intenzione di usare soluzioni esatte
facciamo un'approssimazione chiamata approssimazione di
campo medio.

$$G_j = M_j + \delta G_j$$

Che equivale a dire che gli spin si scostano poco dal loro
valore medio M_j , in questo modo

$$G_i G_j = M_i M_j + m_i \delta G_j + m_j \delta G_i + \cancel{\delta G_i \delta G_j}$$

Supponendo che il sistema sia invariante sotto traslazioni
possiamo dire che $G_j = G_i$

$$G_i G_j = m^2 + 2m \delta G = m^2 + 2m(C - m) = 2mC - m^2$$

L'Hamiltoniana diventa

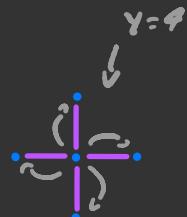
$$H = - \frac{J}{2} \sum_i \sum_j 2m\sigma_i - m^2 - h \sum_i \sigma_i$$

Somma solo sulle i confinanti la i

Serve per evitare di contare 2 volte ogni contributo

$$= \frac{Jy m^2 N}{2} - (h + Jmy) \sum_i \sigma_i$$

Dove l_2 y è il numero di particelle confinanti una particella l_2 , nel reticolo quadrangolare in 2D $y=4$



Questa approssimazione diventa sempre più esatta all'aumentare di y. In particolare da 4 dimensioni in su diventa paesaggio buono.

Adesso vediamo che succede a una funzione di partizione con queste Hamiltoniane

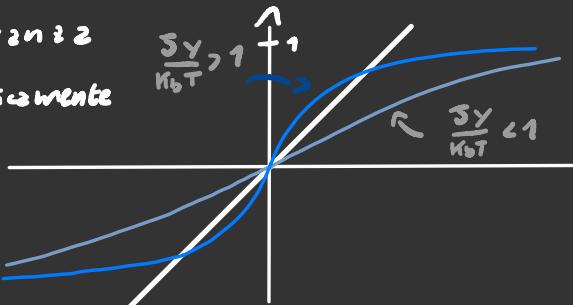
$$Z = C \sum_{\{\sigma\}} e^{\frac{h+Jmy}{k_b T} \sigma_i} = C 2^N \left[\cosh \left(\frac{h+Jmy}{k_b T} \right) \right]^N$$

Adesso che abbiamo l_2 magnetizzazioni $m = \langle \sigma_i \rangle$

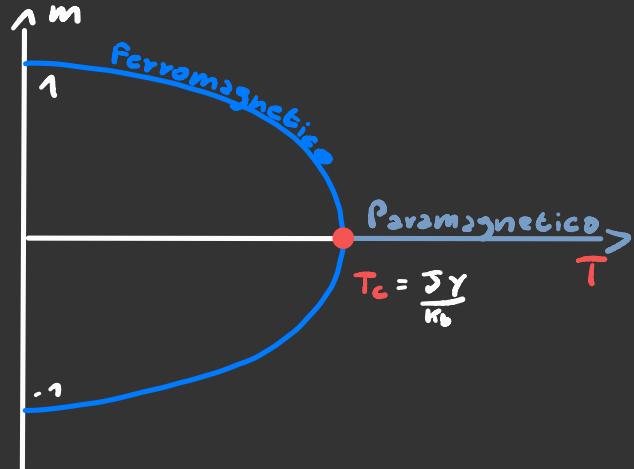
$$m = \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{N} k_b T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z = \tanh \left(\frac{h+Jmy}{k_b T} \right) \Big|_{h=0}$$

Le soluzioni di queste ugualgianze si possono rappresentare graficamente così.

Per $\frac{Jy}{k_b T} > 1$ ci sono 3 soluzioni, altrimenti ce n'è solo una



Se si plottano i vari valori che m può assumere al variazione della temperatura si vede che per $T > T_c$ il comportamento è Paramagnetico, mentre per $T < T_c$ è Ferromagnetico.



Ricordiamoci che un materiale è Paramagnetico quando sono magnetizzati solo in presenza di un campo magnetico esterno.

Un materiale è invece ferromagnetico non è necessario un campo esterno per essere magnetizzato. Tipo una calamita.

Adesso analizziamo il comportamento vicino al punto critico.

$$m = E \sinh \left(m \frac{T_c}{T} \right) \approx m \frac{T_c}{T} + \frac{m^3}{3} \left(\frac{T_c}{T} \right)^3$$

Simile alla relazione
che abbiamo fatto con Van der Waals

$$m^2 = 3 \left(1 - \frac{T_c}{T} \right) \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 \approx 3 \epsilon \quad \epsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

Una cosa curiosa da notare è che lo stato fondamentale è invariante sotto rotazione per $T > T_c$, ma non lo è per $T < T_c$. Ciò significa che durante la transiz. di fase avviene una rottura spontanea di simmetria

Suscettività Magnetica F

L'2 suscettività è definita

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{N}{V} \frac{\partial m}{\partial h}$$



Facciamo qualche calcolo

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{N} \frac{\sum_i \sum_{j \neq i} s_i e^{-\beta H}}{\sum_{j \neq i} e^{-\beta H}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{N} \frac{\sum_i \sum_{j \neq i} s_i (1 + \beta h \sum_j s_j) e^{-\beta H}}{\sum_{j \neq i} e^{-\beta H}} = \frac{1}{N} \frac{\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle_0}{1 + \beta h \sum_i \langle s_i \rangle_0} \approx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} (\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle_0) (1 - \beta h \sum_i \langle s_i \rangle_0) \approx$$

$$= \frac{1}{N} [\sum_i \langle s_i \rangle_0 - \beta h \sum_{ij} (\langle s_i \rangle_0 \langle s_j \rangle_0 - \langle s_i s_j \rangle_0)] =$$

$$= \frac{1}{N} [\sum_i \langle s_i \rangle_0 + \beta h \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0]$$

Quindi

$$\chi \approx \frac{\beta}{V} \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0$$

Ora notate che queste formule vale per ogni H_0

Questo significa che se χ è molto grande, gli spin sono molto correlati fra di loro e se ti sembra normale sappi che non lo è

Questo significa che gli spin interagiscono molto fra di loro e se ti sembra normale sappi che non lo è

Per capire cosa c'è di strano andiamo a studiare $m(h)$ a diverse temperature. Prima c'eravamo ricavati che

$$m = \tanh\left(\frac{h + 3my}{K_b T}\right)$$

Se grafichiamo

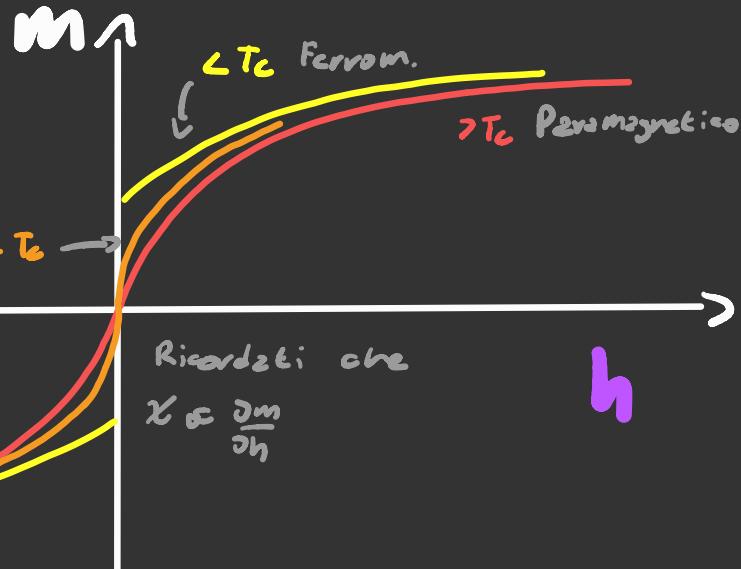
$m(h)$ al variare

della temperatura

notiamo che x

diverge a T_c

$$= T_c \rightarrow$$



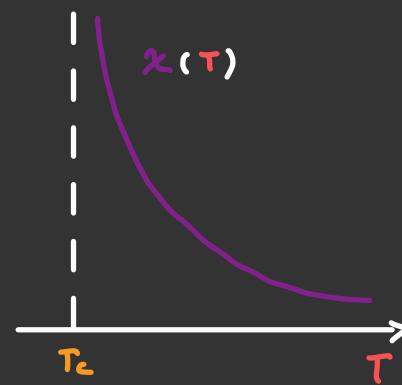
A questo approssimiamo $T \approx T_c(1+\epsilon)$ $h, m \gg 0$

$$m = \tanh\left(\frac{h + 3my}{K_b T}\right) = \tanh\left(\frac{h}{K_b T_c} + m\right) \approx \frac{h}{K_b T_c} + m(1-\epsilon)$$

$$m\epsilon = \frac{h}{K_b T_c} \quad m = \frac{h}{K_b T_c} \epsilon$$

$$\chi(h=0, T=T_c) = \frac{N}{V} \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{N}{V} \frac{1}{K_b T_c} \frac{1}{\epsilon}$$

Quindi abbiamo che χ diverge come t^γ dove γ è un esponente critico con $\gamma = -1$



Teoria di Ginzburg - Landau

Prima di procedere scriviamo la versione un po' generalizzata dell'Hamiltoniana del modello di Ising in assenza di campo M .

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i \tilde{J}_{ij} \sigma_j$$

La funzione di Partizione diventa

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i \tilde{J}_{ij} \sigma_j\right) \quad \tilde{J}_{ij} = \rho \tilde{J}_{ij}$$

Questo si scrivibile in termini di integrali Gaussiani in questo modo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(\tilde{J}^{-1})}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i \tilde{J}_{ij} \sigma_j\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\sum_i \sigma_i \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i (\tilde{J}^{-1})_{ij} \psi_j \right] d^n \psi \\ Z_Z &= \sum_{\{\sigma_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\sum_i \sigma_i \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i (\tilde{J}^{-1})_{ij} \psi_j \right] d^n \psi \end{aligned}$$

Il vantaggio di rappresentarlo in questo modo è che le σ spengono solo al I ordine

$$\sum_{\{h_i\}} \exp\left(\sum_i h_i \psi_i\right) = \prod_i \cosh(\psi_i) = e^{\sum_i \ln(\cosh \psi_i)}$$

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp\left[\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i (\mathcal{J}^{-1})_{ij} \psi_j\right] d^n \psi$$

$\Xi F(\psi)$

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int e^{-F(\psi)} d^n \psi$$

Fa puzza di integrale dei cammini

Adesso ci siamo levati gli spin dai piedi e abbiamo una sorta di azione con cui poter lavorare e il tutto senza fare approssimazioni! Ors però abbiamo i seguenti problemi:

- a) Che ci faccio con sta funzione di partizione scritta così?
- b) Cosa rappresenta ψ ?
- 2) Ors come ora niente. Questo perche' se vogliamo ad esempio studiare la magnetizzazione bisogna mettere il termine $\sum h_i \psi_i$

Facendo questo allora fine risultato che $\cosh \psi_i \rightarrow \cosh(\psi_i + h_i)$. Se si manda $\psi_i \rightarrow \psi_i - h_i$ abbiamo che

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp\left[\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} (\psi_i - h_i)(\mathcal{J}^{-1})_{ij} (\psi_j - h_j)\right] d^n \psi$$

Sfruttando sempre le solite equazioni con derivate parziali:

$$m_i = \frac{\partial F}{\partial n_i} \Big|_{n=0} = -k_b T \frac{\partial Z}{\partial n_i} \Big|_{n=0} = \sum_j J_{ij}^2 \langle \psi_j \rangle$$

E siamo riusciti a scaricare anche questo compito alle ψ_i :

- b) Sotto un certo punto di vista uno potrebbe usare l'equazione di sopra per dire che

$$\langle \vec{\psi} \rangle = \vec{J} \vec{m} = \vec{J} \langle \vec{s} \rangle$$

Quindi c'è come se le ψ indicassero la forza di interazione tra i vari spin e meno di qualche costante dipendente dalla temperatura.

Spiegato Male e forse c'è pure sbagliata

Integrale dei Cammini

Vogliamo riuscire a trovare un modo strano di calcolare l'operatore di evoluzione temporale $U(t', t)$

$$|\Psi(t')\rangle = U(t', t)|\Psi(t)\rangle$$

L'2 componente nel punto x' è

$$\Psi(x', t') = \langle x'| \Psi(t') \rangle = \langle x' | U(t', t) |\Psi(t)\rangle = \int U(x', t', x, t) \Psi(x, t) dx$$

imponendo $|\Psi(t)\rangle = |x\rangle$ otteniamo che

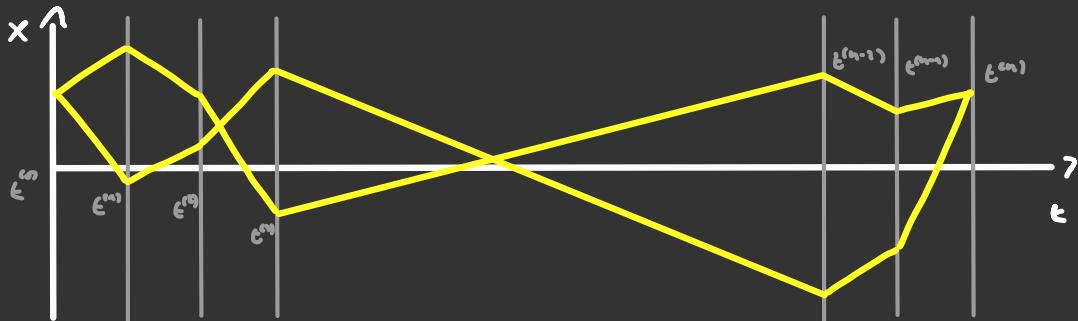
$$U(x', t', x, t) = \langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | x \rangle$$

Volendo possiamo spezzare l'evoluzione temporale in 2

$$U(x', t', x, t) = \int U(x'', t'', x', t') U(x', t', x, t) dx$$

O in n

$$U(x^{(n)}, t^{(n)}, x, t) = \int U(x^{(n)}, t^{(n)}, x^{(n-1)}, t^{(n-1)}) \cdots U(x^1, t^1, x, t) dx^{(n-1)} \cdots dx^1$$



Questo integrale equivale alla somma di tutte le ampiezze di probabilità di tutti i cammini

Questo integrale però ha i problemi che dipende dall'operatore d'azione: impulsi:

$$\langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | x \rangle \approx \langle x' | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m} \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} V(x) \right] | x \rangle + \dots$$

$$\langle x | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m} \right] | x \rangle = \int \langle x' | p' \rangle \langle p' | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2 \Delta t}{2m} \right] | p \rangle \langle p | x \rangle dp dp'$$

$$= \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2 \Delta t}{2m} \right] \frac{e^{+\frac{i}{\hbar} p(x'-x)}}{2\pi\hbar} dp =$$

Quindi: $\langle x' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | x \rangle \approx$

$$\int \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[H(p, x) - \frac{p(x'-x)}{(t'-t)} \right] (t'-t) \right\} dp$$

Per $n \rightarrow \infty$ e $t^{(i)} - t^{(i+1)} \rightarrow 0$

$$U(x+dx, t+dt, x, t) = \int \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[H(p, x) - p \dot{x} \right] dt \right\} dp$$

Moltiplicandone tante assieme otteniamo queste eq. t diventa un valore continuo

$$U(x', t', x, t) = \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int H(p, x) - p \dot{x} dt \right] D\chi(t) Dp(t)$$

Questo si può semplificare ulteriormente, infatti:

$$\int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int \frac{p^2}{2m} - p \dot{x} dt \right] Dp(t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2} dt \right]$$

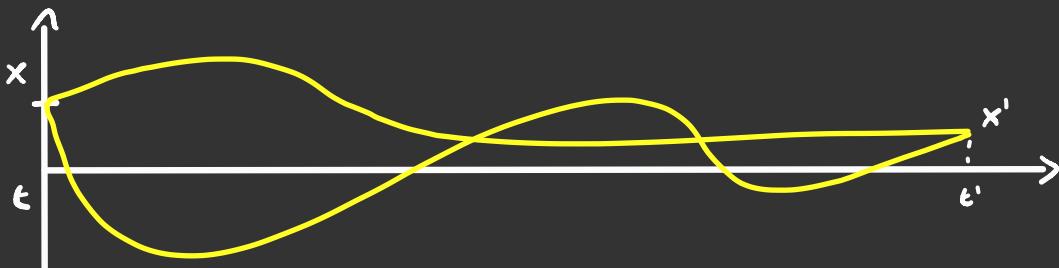
$$U(x', t', x, t) = \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2} - V(x) dt \right] D\chi(t) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int L(x, \dot{x}) dt} D\chi(t)$$

Adesso analizziamo bene l'equazione dell'integrale dei cammini

$$U(x', t', x, t) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt} Dx(t)$$

Quello che succede è questo:

- 1 Prendi una traiettoria $x(t)$
- 2 Calcola il contributo che dà all'ampiezza di transizione
- 3 Somma



Definisco l'azione $S[x(t)] = \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt$

Vedendo posso svilupparla in serie

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S[x_0(t)] + \int \frac{\delta S[x_0(t)]}{\delta f(t)} (x(t) - x_0(t)) dt + \\ &+ \int \frac{\delta S[x_0(t)]}{\delta f(t) \delta g(t')} (x(t) - x_0(t))(x(t') - x_0(t')) dt dt' + \dots \end{aligned}$$

Se sviluppizmo in un punto di minimo abbiamo che

$$U \propto e^{i \frac{S[x_0(t)]}{\hbar}} \int e^{\frac{i}{\hbar} M(t, t') [x_{(t)} - x_0(t)][x_{(t')} - x_0(t')]} dt dt' \quad M(t, t') = \frac{\delta S[x_0(t)]}{\delta f(t) \delta g(t')}$$

Questo ci fa vedere che se mandiamo $\hbar \rightarrow 0$ tutti i contributi che si spostano dal valore di minimo tendono a cancellarsi.

Relazione tra Integrale dei Cammini e Funzione di Partizione

Se abbiamo un sistema termodinamico di un campo $\vec{m}(\vec{x})$ la sua funzione di partizione è

$$Z = \int e^{-\beta H[\vec{m}(\vec{x})]} D\vec{m}(\vec{x})$$

Che ricorda molto l'operazione d'evoluzione temporale

$$U = \int e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} Dx(t)$$

Quindi con le giuste sostituzioni è possibile usare tutte le trucchetti che i teorici usano per calcolare U tra cui l'approssimazione punto di sella e i diagrammi di Feynman.

Ad esempio l'equazione di Landau-Ginzburg è scrivibile così

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int \exp \left[\sum_i \ln(\cosh \psi_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i(J^{-1})_{ij} \psi_j \right] D\psi \rightarrow$$

per $i \rightarrow +\infty$

$$\rightarrow \frac{1}{Z_0} \int \exp \left[\int \ln \cosh \psi(x) dx - \frac{1}{2} \int \psi(x) J^{-1}(x,y) \psi(y) dx dy \right] D\psi(x)$$

Torniamo all'equazione di Landau - Ginzburg e vediamo che possiamo fare

$$\frac{1}{2\pi} \int \exp \left[\int \ln \cosh \Psi(x) dx - \frac{1}{2} \int \Psi(x) J^{-1}(x,y) \Psi(y) dx dy \right] D\Psi(x)$$

Aesso noi vogliamo sapere sotto quali condizioni il nostro sistema c'è ferromagnetico o paramagnetico.

Noi sappiamo che se c'è paramagnetico allora $\Psi=0$ è un minimo, altrimenti se c'è ferromagnetico c'è un punto di massimo

$$\ln \cosh \Psi(x) \approx -\frac{1}{2} \Psi^2(x) + \frac{1}{12} \Psi^4(x)$$

$$F[\Psi] \approx \int -\frac{1}{2} \Psi^2(x) + \frac{1}{12} \Psi^4(x) dx - \frac{1}{2} \int \Psi(x) J^{-1}(x,y) \Psi(y) dx dy$$

Primo di procedere c'è meglio scrivere in una forma più comoda J^{-1} .

$$\tilde{J}(K, K') = \frac{1}{2\pi} \int e^{iKx} e^{iK'y} J(x-y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(K_x+y)} e^{iK'y} J(x) dx dy = \delta(K, K') \int e^{-iKx} J(x) dx = \delta(K, K') \tilde{J}(K)$$

$$J^{-1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\delta(K-K')}{\tilde{J}(K)} e^{iKx} e^{iK'y} dK dk' = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{iK(x-y)}}{\tilde{J}(K)} dK$$

Vedo che $\Delta J \Delta \tilde{J} = \frac{1}{2}$ e visto che $\Delta J \neq 0$, allora $\Delta \tilde{J} \neq 0$, ma questo significa che $\Delta J^{-1} \neq 0$, quindi possiamo scrivere J^{-1} come una somma di operatori locali invarianti sotto rotazioni.

$$(J^{-1}) \Psi \Psi^* = A(T) |\Psi(x)|^2 + B(T) |D\Psi(x)|^2 + C(T) |D^2\Psi(x)|^2 + \dots$$

Perché l'Hamiltoniana dipende da T?

Per calcolare A(T) basta impostare $x=y$, quindi:

$$A(T) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk}{\tilde{J}(K)}$$

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{6} \psi^6(x) - [1 + A(T)] \psi^2(x) + \dots dx$$

$1 + A(T) > 0 \rightarrow \psi = 0$ è un punto di massimo \rightarrow Ferromagnetico

$1 + A(T) < 0 \rightarrow \psi = 0$ è un punto di minimo \rightarrow Paramagnetico

Questo perché $1 + A(T)$ indica

la concavità della funzione

2 $\psi = 0$

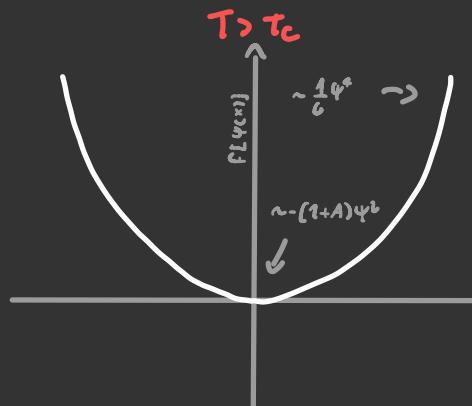
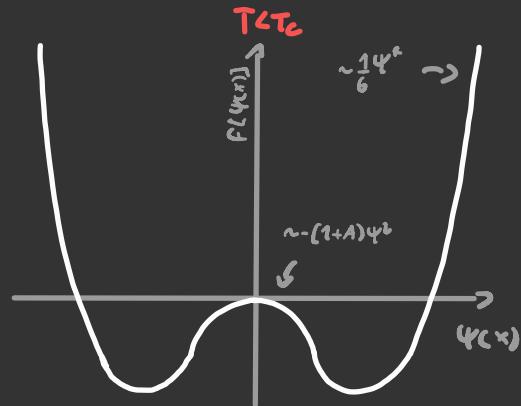
Nel modello di Ising nel quale ogni spin interagisce con quello confinante

$$A(T) = \frac{k_B T}{JY}$$

E le temperature critiche

diventano

$$T_c = \frac{JY}{k_B}$$



Argomento di Peierls

Supponiamo di avere un sistema di spin descritto dall'Ham.

$$H = \sum_{ij} \frac{J}{|r_i - r_j|} s_i s_j$$

Se $J = +\infty \rightarrow$ Modello di Ising "standard"

Se $J = 0 \rightarrow$ Interazioni a raggio infinito

Vogliamo studiare al variare di J quanto il nostro sistema è ferromagnetico, per fare ciò prendiamo un sistema fatto così:



E vogliamo vedere se vuole spontaneamente diventare così

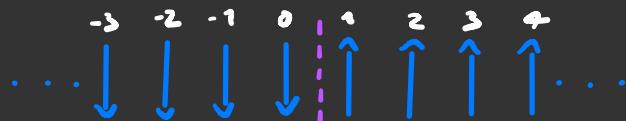


Cominciamo con $J = +\infty$. In questo caso $\delta E = 2J$, visto che la "barriera" può capitare ovunque $\delta S = \ln N$, quindi

$$\delta F = \delta E - T \delta S < 0 \quad \text{Per } N \rightarrow +\infty$$

Quindi questo sistema tenderà a formare barriere e ad essere paramagnetico a ogni temperatura

Per $\gamma < 1/2$



Ho supposto
 $\gamma > 2$ perché senz
spunti fuori il
logaritmo

$$\begin{aligned}\delta E &= 2S \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{N/2} \frac{1}{|n|^\gamma} \propto 2S \sum_{n=-\infty}^0 \sum_{n=1}^{-N/2} \frac{1}{|n|^\gamma} dndn = \\ &= 2S \int_{-\infty}^0 |n|^{1-\gamma} \left[\int_0^{-N/2} dn \right] = \frac{2S}{1-\gamma} \int_{-\infty}^0 |N/2 \cdot n|^{1-\gamma} - |\ln|^{1-\gamma} dn = \\ &= \frac{2S}{1-\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \left[\left| \frac{N}{2} \cdot n \right|^{2-\gamma} - |\ln|^{2-\gamma} \right]_{-\infty}^0 = \frac{2S}{1-\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \left[N^{2-\gamma} - 0^{2-\gamma} \right]\end{aligned}$$

Quindi $\delta E \begin{cases} \gamma > 2 & \text{diverse } z \rightarrow \infty \\ \gamma = 2 & \text{diverse } O(\ln N) \\ \gamma < 2 & = O(N^{2-\gamma}) \end{cases}$

$$\delta F = \delta E - T \delta S = \delta E - T \ln N$$

Quindi per $\begin{cases} \gamma > 2 \rightarrow \text{paramagnete} \\ \gamma < 2 \rightarrow \text{ferromagnete} \\ \gamma = 2 \rightarrow \text{dipende} \end{cases}$

Adesso vediamo il caso 2D

Non l'ho capito (Lezione 15 ultimi 30 min)

Correlazione

Un integrale utile in questo caso è questo

$$\int V_a V_b e^{-\langle V_a V_b \rangle} d\vec{v} = \frac{S_{ab}^{-1}}{2} S e^{-\langle V_a V_b \rangle} d\vec{v} \quad \begin{array}{l} S \text{ è autoaggiunto} \\ \text{e definita positiva} \end{array}$$

Qua c'è la dimostrazione

Faccio questo cambio di variabili $\tilde{V} = S^{\frac{1}{2}} V$ $V_a = S_{aa}^{\frac{1}{2}} \tilde{V}_a$ $V_b = S_{bb}^{\frac{1}{2}} \tilde{V}_b$

$$\begin{aligned} \int V_a V_b e^{-\langle V_a V_b \rangle} d\vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{D e(S)}} \int (S_{aa}^{\frac{1}{2}} \tilde{V}_a) (S_{bb}^{\frac{1}{2}} \tilde{V}_b) e^{-\tilde{V}^2} d\vec{\tilde{v}} = \\ &= \frac{S_{aa}^{\frac{1}{2}} S_{bb}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{D e(S)}} \int \tilde{V}_a \tilde{V}_b e^{-\tilde{V}^2} d\vec{\tilde{v}} = \frac{S_{ab}^{-1}}{2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{D e(S)}} = \frac{S_{ab}^{-1}}{2} S e^{-\langle V_a V_b \rangle} \end{aligned}$$

Questa uguaglianza vale anche per gli spazi di Hilbert

$$\int \psi(x) \psi(x') e^{-\langle \psi(x) \psi(x') \rangle} D\psi = \frac{S^{-1}(x, x')}{2} \int e^{-\langle \psi(x) \psi(x') \rangle} D\psi$$

Questo risultato ci permette calcolare la correlazione di variabili termodinamiche, ad esempio

$$\langle \psi(x) \psi(x') \rangle = \int \psi(x) \psi(x') e^{F(\psi)} D\psi$$

Dove

$$F(\psi) = \int \left(\frac{a}{2} \psi^2(x) + \frac{c}{2} (\nabla \psi(x))^2 \right) d\vec{x} \quad \begin{array}{l} x \text{ è in uno spazio} \\ d\text{-dimensionale} \end{array}$$

$$\text{In questo caso } S = \frac{1}{2} (2 + c \|\nabla\|^2) \quad \text{Abuso di notazione}$$

Se passiamo in trasformata di Fourier

$$F(\psi) = \int \left(\frac{a}{2} \psi^2(k) + \frac{c k^2}{2} \psi^2(k) \right) d\vec{k} = \int \underbrace{\frac{a + c k^2}{2}} \psi^2(k) d\vec{k}$$

$$\text{Quindi: } \mathcal{F}[S] = \frac{2 + e^{K^2}}{2} S(K-K') \leftarrow \text{Perche' la matrice e' diagonale}$$

Adesso invertiamo e antitrasformiamo

$$S^{-1}(x, x') = 2 \int \frac{\delta(K - K')}{2 + e^{K^2}} e^{ik'x'} e^{-ikx} d\vec{k} d\vec{k}' =$$

$$= 2 \int \frac{e^{iK(x' - x)}}{2 + e^{K^2}} d\vec{k} \propto \frac{e^{-\frac{|x-x'|}{L}}}{|x-x'|^{d-2}}$$

Ho cercato il risultato
su internet

Dove $L = \sqrt{\frac{c}{g}}$ e d e' la dimensione dello spazio in cui si trova \vec{x}

Provate a fare i conti per esteso

Se proviamo ad applicarlo ad un sistema magnetico
si vede che

$$G(r) = \text{Cov}(m(r), m(r)) \propto \frac{r^{-\nu}}{r^{d-2+\eta}} \quad \text{dove } \eta = 0, L \ll |t|^\nu$$

Nuovo esp. \uparrow
critico \uparrow e $\nu = -\frac{1}{2}$
che viene da modelli migliori
e esperimenti:

Quindi vicino alla temperatura critica da distanza di
correlazione L diverge a $+\infty$.

L'altra correlazione implica che ci sono dei modi collettivi
molto grandi intorno al punto critico.

Viste che tutte queste particelle si muovono all'unisono
diverse variabili termodinamiche divergono, e il modo
in cui divergono e' determinato dagli esponenti critici.

Aggiungere criterio di Ginzburg

Esponenti critici

Fin ora abbiamo incontrato fin troppi esponenti critici, però abbiamo appena visto che, in linea di principio, dovrebbero venire tutti della $\zeta(r)$, quindi c'è logico pensare che non siano tutti indipendenti fra di loro.

Ad esempio $\chi(h=0, T=T_c) = \frac{N}{V} \frac{1}{k_B T_c} \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \chi \propto \epsilon^\gamma$

Ma c'è anche vero che

$$\chi \simeq \frac{p}{V} \sum_{ij} \text{Cov}(s_i, s_j)_0 = p \frac{N}{V} \int \zeta(r) dx^d \alpha$$

$$\alpha \int \frac{e^{-\epsilon}}{r^{d+\eta-2}} r^{d-1} dr = \int r^{1-\eta} e^{-\epsilon} dr = L^{\eta-2} \underbrace{\int_0^\infty x^{1-\eta} e^{-x} dx}_{\text{cost}}$$

Visto che $L \sim \epsilon^{\nu}$ abbiamo che

$$\chi \propto \epsilon^{\nu(\eta-2)} \propto \epsilon^\gamma$$

quindi:

$$\nu(\eta-2) = \gamma$$

Questa è definita
"Ugualanza di Fisher"

Quindi per scoprire le relazioni fra gli esponenti critici bisogna

- Prendere l'esponente critico γ di una variabile Termodinam.
- Calcolare la relazione che c'è fra la variabile Termo dinamica e la lunghezza di correlazione L
- Uguagliare gli esponenti

Aggiungere ulteriori pagine per gli altri esp. crit.

Gruppo d:

Leczione XVI

Rinormalizzazione

Prendiamo un reticolo

di spin, se siamo

vicini al punto critico

la lunghezza di correl.

c'è maggiore del passo

reticolare, quindi:

possiamo trattare 4

spin adiacenti come un

tutt'uno (vedi la Figura), se stiamo in d -dimensioni;

Allora un blocco di spin comprende 2^d spin, la variabile

di spin del blocco viene definita s_i (sono quelli blu)

Il valore di s_i è determinato da un voto di maggioranza

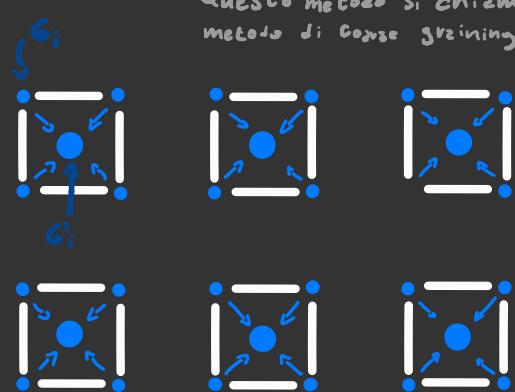
In caso di pareggio gli si assegna il valore
tra gli spin s_j attorno ad esso. dello spin in basso e sinistra, ma tanto
gli spin sono correlati, quindi non succede mai

Se il nostro modello è formulato bene ci aspettiamo

che la funzione di partizione è scrivibile così

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp[-\beta H_N(\{s_i\})] \rightarrow Z' = \sum_{\{s_i\}} \exp[-\beta H'_N(\{s_i\})]$$

e che il sistema descritto da Z' si comporti in un modo
analogo a Z vicino al punto critico



Definisco F l'energia libera media per particelle ed essa dipende da t e h . Visto che l'energia libera totale deve essere costante

$$N F(t, h) = N' F(t', h')$$

Il motivo per cui $t, h \rightarrow t', h'$ è che visto che le lunghezze di correlazione sono costanti, gli spin s sono più scorrutti tra di loro rispetto agli spin S , quindi è come se il sistema fosse più lontano dal punto critico.

Visto che t, h, t', h' sono piccoli possiamo supporci che

Ora come ora non
sappiamo quanto
valgono y_t e y_h

$$t' = l^{y_t} t \quad h' = l^{y_h} h$$

l rappresenta di quanto volte
la distanza fra gli spin aumenta
quando si passa da s a s'

Mettendo tutto assieme abbiamo che l'equazione a inizio pigno diventa \downarrow Non dipende da l

$$F(t, h) = l^{-d} F(l^{y_t} t, l^{y_h} h)$$

Se si guarda attentamente il primo termine non dipende da l , mentre il secondo apparentemente sì.

Si può dimostrare che questo significa che

$$F(t, h) = t^{-\frac{Kd}{y_t}} h^{\frac{(K-1)d}{y_h}} \tilde{F}(h^{-\frac{y_h}{y_t}}) \quad K \text{ e } \tilde{F} \text{ vanno determinate}$$

Qua sotto c'è la dim.

Supponiamo di avere una funzione $F(t, h) = F(l^{y_t} t, l^{y_h} h) = F(l t^{\frac{y_h}{y_t}}, l h^{\frac{y_h}{y_t}})$

l'unico modo per far sì che $F(l t^{\frac{y_h}{y_t}}, l h^{\frac{y_h}{y_t}})$ non dipenda da l è che dipenda dal rapporto degli argomenti: $F(l t^{\frac{y_h}{y_t}}, l h^{\frac{y_h}{y_t}}) = F''(h^{\frac{y_h}{y_t}} / t^{\frac{y_h}{y_t}})$

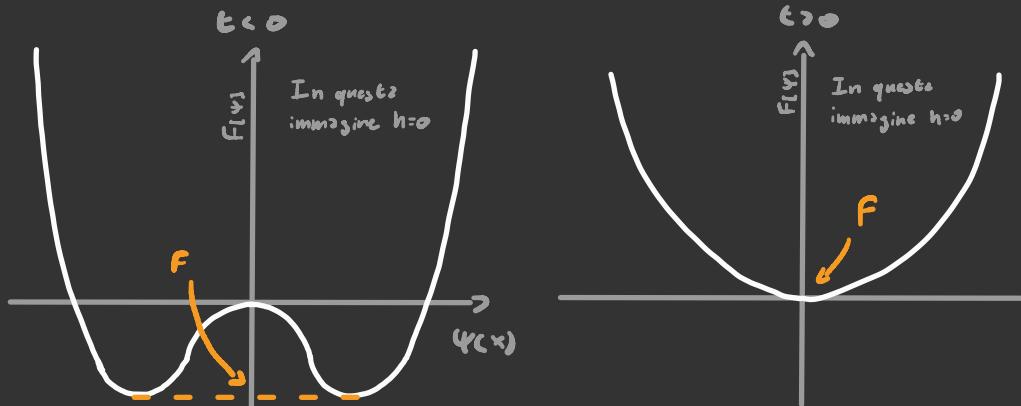
Se invece $F(t, h) = l^d F(l^{y_t} t, l^{y_h} h)$, allora $F(t, h) = l^{-\frac{Kd}{y_t}} h^{\frac{(K-1)d}{y_h}} F'(h t^{-\frac{y_h}{y_t}})$ $d \in \mathbb{R}$

A questo punto ci basta confrontare quest'ultime formule con come si comporta l'energia libera vicino al punto critico.

Sti conti non li ho fatti: primz.
me tanto c'era da analisi II

Noi sappiamo che

$$F(\epsilon, h) = \min_{\psi(x)} \left[\frac{\epsilon}{2} \psi^2 + u \psi^0 - h \cdot \psi \right] = \begin{cases} -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^2}{4} & \text{per } h=0 \epsilon < 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{u}} \left(\frac{h}{4} \right)^{\frac{2}{3}} & \text{per } h \neq 0 \epsilon = 0 \end{cases}$$



con modelli più raffinati: si ottiene che

$$F(\epsilon, h) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \frac{\epsilon^{2-k}}{4} & \text{per } h=0 \epsilon < 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{u}} \left(\frac{h}{4} \right)^{\frac{2}{3}} & \text{per } h \neq 0 \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\text{Eguagliandolo con } F(\epsilon, h) = \epsilon^{-\frac{k+1}{k}} h^{\frac{(k-1)d}{2k}} \tilde{F}(ht^{-\frac{d}{k}})$$

Usando la prima equazione del sistema sappiamo che le due formule possono essere equivalenti se $k=1$, $d/y_c = 2-d$ e $\tilde{F}(0) = y_u$.

con le seconde abbiamo che

$$t^{2-4} \tilde{F}(+\infty) = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \tilde{F}(+\infty) = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{2}{3}} t^{2-2}$$

Inoltre, visto che $\tilde{F} = \tilde{F}(ht^{-4})$

$$(ht^{-4})^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}} t^{2-2} \rightarrow \frac{4}{3} \Delta = 2-2$$

Trattamento generale

Il gruppo di rinormalizzazione ci permette di trovare i punti critici di qualunque sistema termodinamico.

Per fare ciò iniziamo con l'Hamiltoniana più generica che c'è

$$\beta H = \int \frac{t}{2} \psi^2 + u \psi^4 + v \psi^6 + \dots + \frac{k}{2} |D\psi|^2 + \frac{L}{2} |\nabla^2 \psi|^2 + \dots d^d x$$

Un sistema del genere è specificato da dove si trova nello spazio $S = (t, u, v, \dots, k, L, \dots)$

A questo punto si fa il coarse graining, che equivale a raggruppare le particelle vicine in un'unica particella.

Questo matematicamente si ottiene

- Riscalando $x^i = l x$

- Coarse graining $\psi^l(x') = \frac{1}{l^d} \int_{\text{cella di lunghezza } l \text{ centrata in } x'} \psi(x) d^d x$

- Rinormalizzare $\psi^l(x') \rightarrow \frac{1}{l} \psi^l(x')$

Quest'ultimo passaggio serve affinché i range dei valori restino gli stessi, ad esempio in un sistema di spin vogliamo che dopo il coarse graining gli spin siano valori ± 1 .

A questo punto l'Hamiltoniana riscalata sarà

$$\beta H^l = \int \frac{t^l}{2} \psi^2 + u^l \psi^4 + v^l \psi^6 + \dots + \frac{k^l}{2} |D\psi|^2 + \frac{L^l}{2} |\nabla^2 \psi|^2 + \dots d^d x$$

Dove $t^l = t_l(t, u, v, \dots, k, L, \dots)$ e così anche per gli altri parametri. \nwarrow Significa che dipende da l

Quindi $S' = R_i S$ dove R_i rappresentano come cambiano i parametri dell'Hamiltoniana quando ridosso di 1 e questi operatori formano un gruppo

$$R_{1''} \circ R_1 = R_{1''}$$

Il punto critico S^* sara' quel punto tale che

$$S^* = R_i S^*$$

Visto che la lunghezza di correlazione viene ridotta di 1 volte vuol dire che al punto critico $L = +\infty$ oppure 0

$$L(S') = L(R_i S) = 1L(S) \rightarrow L(S^*) = 1L(S^*)$$

Visto che studiare come si comporta $R_i S$ per ogni S e' un casino ci limiteremo a studiare le zone vicine al punto critico.

$$S_i^* + \delta S_i^* = S^* + (R_i)_{ab} \delta S_b$$

Matrice che approssima R_i
vicino al punto critico

Ormaiabbiamo capito che appena vediamo una matrice dobbiamo diagonalizzarla.

Siano $\{O_i\}$ gli autovettori, visto che R e' un gruppo

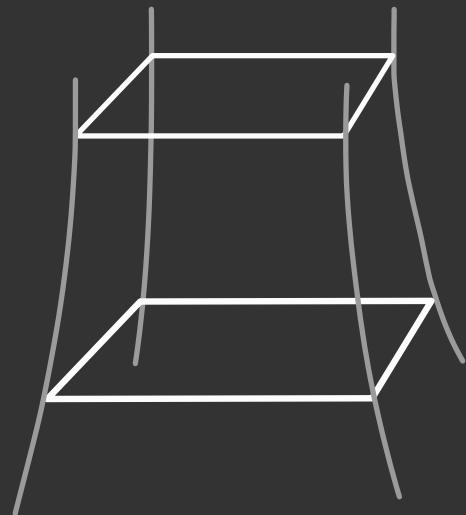
$$R_i R_{i'} O_i = \lambda_i(1) \lambda_{i'}(1') O_i = \lambda_i(1 \cdot 1') O_i$$

Inoltre visto che $\lambda_i(1) = 1$ abbiamo che

$$\lambda_i(1) = 1^y$$

Dove y_i e' un esponente ancora da determinare

Dc completere
Kardor pag 65



Fisica Statistica Quantistica

Al centro della Fisica statistica quantistica c'è la matrice di densità

$$\rho = \sum_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}| P_{\lambda} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{Probabilità di trovarsi} \\ \text{nello stato } \psi_{\lambda} \end{matrix}$$

L'evoluzione temporale di ρ è data da

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$$

E il valore medio di un operatore generico \hat{O} è

$$O = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \langle \psi_{\lambda} | \hat{O} | \psi_{\lambda} \rangle = \text{Tr}[\rho O]$$

Nell'ensemble microcanonico la funzioneonda del nostro sistema deve rispettare il postulato di equiprobabilità

$$|\psi\rangle = \sum c_n |\phi_n\rangle \quad \begin{cases} \text{se } E < E_n < E + \Delta E & c_n = \text{cost} \\ \text{altrimenti} & c_n = 0 \end{cases}$$

E le fasi devono essere sconnesse tra di loro, quindi la matrice di densità è

$$\rho = \frac{1}{P(E)} \sum_{E < E_n < E + \Delta E} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

e l'entropia è $S = k_b \ln P(E)$

Per quanto riguarda l'ensemble canonico la matrice di densità è

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

E infine nell'ensemble grand canonico

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H}-q\hat{N})} \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-q\hat{N})}] = \sum_n z_n e^{\mu_n}$$

Fin qui le differenze con la fisica statistica classica sono minime, ma in meccanica quantistica le particelle possono essere fermioni o bosoni.

Vediamo come si comportano queste particelle supponendo che non siano interagenti.

Per semplicità mettiamo dentro un cubo di lato L.

Le funzioni d'onda sono

$$|\vec{p}\rangle = L^{-\frac{3}{2}} e^{i\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad \text{dove} \quad \vec{p} = \frac{2\pi i}{L} \vec{n} \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

$$\text{Per } V \rightarrow +\infty \quad \sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d\vec{p}$$

L'energia e il numero totale di tutte queste particelle diventa

$$E_{\text{tot}} = \sum_{\vec{p}} E_p, n_p \quad N = \sum_{\vec{p}} n_p$$

$$n_p \text{ pu\`o valere} \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{per bosoni} \\ 0, 1 & \text{per fermioni} \end{cases}$$

Ho usato tutti i discorsi sulla distribuzione di Boltzmann perch\'e non c'era servito a niente vedere

Adesso calcoliamoci la funzione di partizione

$$\text{Degenerazione} \rightarrow Z_N = \sum_{\{n_p\}} g(\{n_p\}) e^{-\frac{E_{\{n_p\}}}{k_B T}}$$

La degenerazione g rappresenta quanto ogni stato n_p è degenero, ad esempio se c'è d_2 considerate spin o polarizzazione. Per adesso imponiamo che $g=1$ è buona notte.

Calcolare la funzione di partizione è difficile visto che dobbiamo assicurarsi che $\sum n_p = N$. Però se ci calcoliamo la funzione di granpartizione sto problema scompare

$$Z = \sum_n^{\infty} Z_n e^{\beta \mu n} = \sum_n^{\infty} \sum_{\{n_p\}} e^{\beta(E_{\{n_p\}} - \mu n)} = \sum_n^{\infty} \sum_{\{n_p\}} e^{\beta \mu n (d_p - 1)} = \prod_p^{\infty} \sum_{n_p} e^{\beta \mu_p (E_p - \mu)}$$

Adesso dobbiamo distinguere

tra il caso bosonico e quello

Il ragionamento dietro a questa uguaglianza è lo stesso usato prima nel modello di Ising.

Dopo forse scrivo la dimostrazione

Fermionico.

$$\sum_{n_p} e^{\beta \mu_p (E_p - \mu)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{\beta(E_p - \mu)}} & \text{Per i Bosoni: Serie Geometrica} \\ 1 + e^{\beta(E_p - \mu)} & \text{Per i Fermioni: Somma solo } n_p = 0,1 \end{cases}$$

$$\ln Z = \begin{cases} - \sum_p \ln[1 - e^{\beta(E_p - \mu)}] & \text{Per i Bosoni} \\ \sum_p \ln[1 + e^{\beta(E_p - \mu)}] & \text{Per i Fermioni} \end{cases}$$

Adesso calcoliamoci il numero medio di particelle

$$N = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} N e^{-\beta(H - \mu N)} \quad \text{se definisco } z \equiv e^{\beta \mu}$$

$$N = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} N z^N e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \sum_{\text{stati}} z \frac{\partial}{\partial z} z^N e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{\text{stati}} z^N e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial z} \ln Z$$

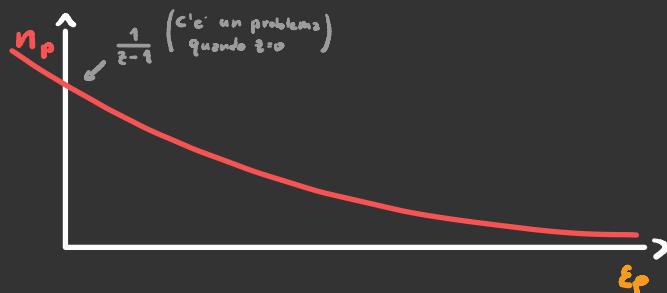
La differenza tra la termodinamica dei bosoni e Fermioni diventa evidente quando si calcola il numero medio di particelle

Distribuzione di Bose-Einstein

$$N = - \sum_{\vec{p}} z \frac{\partial}{\partial z} \ln [z - z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}] = \sum_{\vec{p}} \frac{z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}}{1 - z e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}}} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}$$

Dal ciò possiamo dire che il numero medio di particelle all'impulso \vec{p} è

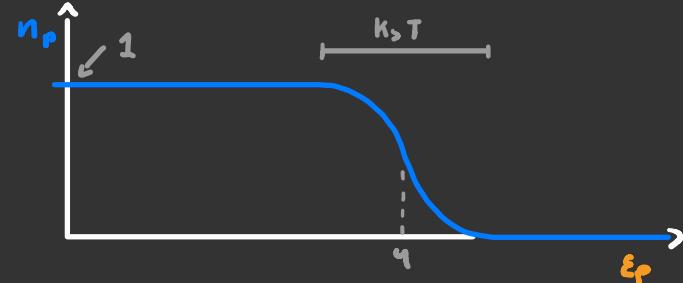
$$n_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1}$$



Distribuzione di Fermi-Dirac

I conti sono identici, il risultato è che

$$n_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} + 1}$$



Se non ti ricordi il segno
ricordati che lo Fermi-Dirac
c'è quello con 450

Potenziale Statistico

I fermioni avendo la funzione d'onda assimmetrica non possono stare nello stesso stato $\Psi(x)\Psi(x) = -\Psi(x)\Psi(x) = 0$

Vogliamo vedere se sto fenomeno è rappresentabile tramite una sorta di potenziale statistico, e già che ci siamo vediamo che fanno i bosoni.

E' importante sottolineare che le particelle sono comunque non interagenti visto che nell'Hamiltonian non c'è alcun termine di interaz.

Il modo in cui il potenziale statistico è collegato alla probabilità che due particelle si trovino secondo è

$$e^{-\beta V_S(r)} \propto V \underbrace{\langle v_1, v_2 | p | r_1, r_2 \rangle}_{\hat{P} \text{ Probabilità che ci sia una particella in } r_1 \text{ e una in } r_2}$$

$r = |r_1 - r_2|$

Questo perche' la probabilità di trovarsi in un certa posizione per boltzmann è proporzionale a $\exp[-\beta V(x)]$.

Quindi quello che dobbiamo fare è calcolare la matrice di densità e da lì calcolare V_S

Per iniziare il calcolo partiamo dalla base degli autostati dell'energia visto che

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$$

Definisco $\Psi_E(v_1, \dots, v_N)$ un autostato di energia E del sistema

$$E = \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(K_1^2 + K_2^2 + \dots + K_N^2 \right)$$

Vettori d'onda di singola particella

Adesso vediamo che forma ha Ψ_E in termini dei vettori d'onda di singole particelle $u_k(r) = e^{iK_k \cdot r}$

$$\Psi_E(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\text{P}} [P] P \{ u_{k_1}(r_1) u_{k_2}(r_2) \dots u_{k_N}(r_N) \}$$

Parità della
permutazione \rightarrow Permutazione delle posizioni

Normalizzazione, solo che con i bosoni funziona male \rightarrow Somma su tutte le permutazioni:

L'parità della permutazione per i bosoni vale sempre 1 e per i fermioni vale 1 se ammette un numero pari di permutazioni e invece -1 se il numero di permutazioni è dispari.

Gli statti posizione scritti in termini delle Ψ_E sono

$$|r_1, \dots, r_N\rangle = \sum_E \Psi_E(r_1, \dots, r_N) |\Psi_E\rangle$$

Quindi la matrice di densità calcolata rispetto a 2 statti posizione

$$\langle r_1, \dots, r_N | \psi | r'_1, \dots, r'_N \rangle = \sum_E e^{-\beta E} \Psi_E(r_1, \dots, r_N) \Psi_E(r'_1, \dots, r'_N) =$$

la somma su tutte le possibili energie diventa una somma su tutti i possibili impulsi:

$$\sum_E e^{-\beta E} = \left(\sum_{k_1} e^{-\beta \frac{\hbar^2 K_1^2}{2m}} \right) \left(\sum_{k_2} e^{-\beta \frac{\hbar^2 K_2^2}{2m}} \right) \dots \left(\sum_{k_N} e^{-\beta \frac{\hbar^2 K_N^2}{2m}} \right)$$

A questo punto basta prendere tutte le funzioni d'onda di singole particelle con gli stessi impulsi, moltiplicarle tra di loro e poi sommare su tutte le possibili permutazioni degli indici

$$\frac{1}{N!} \sum_P [P] \left\{ \sum_{k_1} \exp \left[-\beta \frac{\hbar^2 K_1^2}{2m} + i K_1 \cdot (P r_1 - r'_1) \right] \dots \right.$$

$$\left. \sum_{k_N} \exp \left[-\beta \frac{\hbar^2 K_N^2}{2m} + i K_N \cdot (P r_N - r'_N) \right] \right\}$$

E' possibile approssimare questi termini così

$$\sum_K \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + iK \cdot (\mathbf{p}_r - \mathbf{r}')\right] \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + iK \cdot (\mathbf{p}_r - \mathbf{r}')\right] d^3 K =$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} F(\mathbf{p}_r - \mathbf{r}') \quad \text{dove } F(x) = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\lambda^2}} \quad \text{e } \lambda = \hbar \sqrt{\frac{2m}{\beta}}$$

Quindi:

$$\langle r_1, \dots, r_n | \{ | r'_1, \dots, r'_n \rangle = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \sum_{\{P\}} \prod_i^N F(\mathbf{p}_{r_i} - \mathbf{r}'_i)$$

Se vogliamo calcolarlo rispetto alla stessa posizione

$$\langle r_1, \dots, r_n | \{ | r_1, \dots, r_n \rangle = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \sum_{\{P\}} \prod_i^N F(\mathbf{p}_{r_i} - \mathbf{r}_i)$$

Nella sommatoria delle permutazioni il termine dominante è quello senza permutazioni, poi quello con una sola permutazione e così via ...

$$\sum_{\{P\}} \prod_i^N F(\mathbf{p}_{r_i} - \mathbf{r}_i) = 1 \pm \sum_{i < j} f_{ij} f_{ji} + \sum_{i < j < k} f_{ijk} f_{jik} f_{ikj} \pm \dots$$

Se facciamo il conto solo fino al primo ordine

$$\langle r_1, \dots, r_n | \{ | r_1, \dots, r_n \rangle \approx \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \left[1 \pm \sum_{i < j} f^2(r_i - r_j) \right]$$

Quindi nel caso di 2 particelle

$$\langle r_1, r_2 | \{ | r_1, r_2 \rangle = \frac{V^2}{2\lambda^6} \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi r^2}{\lambda^2}} \right)$$

Non è normalizzabile!

Questa correlazione è quella che differenzia le statistiche quantistiche con quelle classiche.

In particolare nel caso classico $\langle v_1, v_2 \rangle$ (o v_1, v_2) non dipende da v_1 e v_2 , quindi possiamo dire di essere nel limite classico quando

$$\frac{2\pi v^2}{\lambda^2} \gg 1 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda^2} \left(\frac{v}{N} \right)^2 \gg 1$$

Siccome che mi sono rotto le palle di fare conti ecco qua la matrice di densità normalizzata

$$\langle v_1, v_2 \rangle \text{ (o } v_1, v_2) = \frac{1}{V} \left(V \pm \frac{\lambda^3}{2\sqrt{2}} \right)^{-1} \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi v^2}{\lambda^2}} \right)$$

Questo significa che

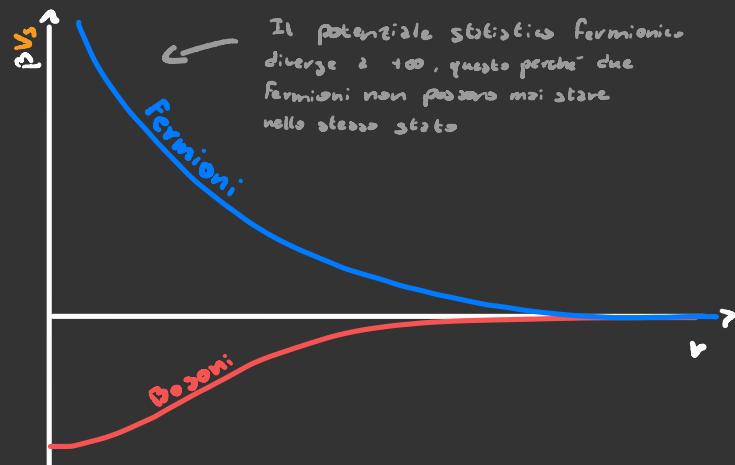
$$v_3 = -k_B T \ln \left(1 \pm e^{-\frac{2\pi v^2}{\lambda^2}} \right) + k_B T \ln \left[V \left(V \pm \frac{\lambda^3}{2\sqrt{2}} \right) \right]$$

Costante, quindi
non conta

Il grafico c'è un po' del genere.

Dal grafico si nota che il principio di Pauli tende a far restringere tra di loro i Fermioni.

I Bosoni invece tendono a stare insieme di loro. questo sarà utile per spiegare la condensazione di Bose-Einstein



Corpo Nero

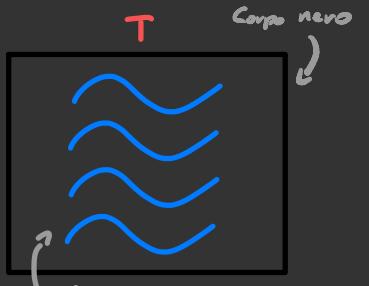
Leczione XX

Il corpo nero è la più semplice applicazione di statistiche dei bosoni.

Il numero medio di fotoni a un determinato

\vec{k} è dato dalla polarizzazione

$$n_k = \frac{2}{e^{\beta h w} - 1} \quad \leftarrow \text{Bose-Einstein}$$



Campo E.M. all'equilibrio termico col corpo nero

Il potenziale chimico è nullo perché si all'equilibrio termico un fotone può essere assorbito dal muro e sputare altri 2 fotoni a diversa frequenza, quindi N cambia, ma E e S no.

Quindi $q=0$

Visto che siamo all'eq

$$E = \sum_k h w n_k = \frac{V}{(2\pi c)^3} \int h w n_k d^3 k = \frac{V}{(2\pi c)^3} \int_0^\infty \frac{8\pi h w^3 dw}{e^{\beta h w} - 1},$$

$$= \frac{V h}{c^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{w^3 dw}{e^{\beta h w} - 1} \quad \begin{matrix} \text{visto} \\ \text{che} \end{matrix} \int \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad E = \frac{V \pi^2}{15} \left(\frac{k_b T}{h c} \right)^4$$

Spettro del corpo nero

Altri discorsi base sulla distribuzione di Bose-Einstein sono quelli sui fenomeni che stanno sul quaderno di fisica dello stato solido

Inserire grafico dello spettro di corpo nero

Equazioni di Stato

Prima avevamo scoperto che per il gas perfetto

$$PV = Nk_b T$$

Adesso vogliamo vedere che succede nel caso quantistico.

Noi sappiamo che

Energia libera
di 6.663

+ per i fermioni
- per i bosoni

$$\ln Z = \beta \Omega = \pm \sum_p \ln [1 \pm e^{-\beta(E_p - \mu)}]$$

Visto che $PV = -\Omega$

$$\frac{PV}{k_b T} = \pm \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln [1 \pm e^{-\beta(E_p - \mu)}] d^3 p = \pm \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \ln [1 \pm z e^{-\frac{\lambda}{zm}}] + \pi p^2 dp =$$

$$= \pm \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{m}{p} \right)^{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{z} \int_0^\infty \ln [1 \pm z e^{-x}] f(x) dx = \quad | \quad x = \frac{p^2}{2m} \quad dx = \frac{p}{m} p dp$$

$$= \frac{2V}{\lambda^3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}} z e^{-x}}{1 \pm z e^{-x}} dx = \quad | \begin{array}{l} \text{Integrazione} \\ \text{per parti} \end{array} \quad \lambda = \hbar \sqrt{\frac{2\pi p}{m}}$$

$$= \frac{2V}{\lambda^3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{z^2 e^{x \pm 1}} dx \quad \text{Definisco } F_m(z) = \frac{1}{m-1!} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{x \pm 1}} dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} F_{\frac{5}{2}}(z) \quad \text{Allo stesso modo} \quad N = \frac{V}{\lambda^3} F_{\frac{3}{2}}(z)$$

Lo sviluppo in serie di queste due funzioni attorno a $z=0$ c'è

$$F_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{N}{V} \lambda^3 = z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \dots \quad F_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{2}{3} \frac{P \lambda^3}{k_b T} = z + \frac{z^2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

Adesso che abbiamo queste due equazioni possiamo usare le prime per calcolare z e fare il rapporto delle due per ottenere l'eq. di stato

$$PV = \frac{3}{2} N k_b T \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right)^2 + \dots \right]$$

Condensazione di Bose-Einstein

Prima avevamo visto che per il gas perfetto di Bosoni:

$$\frac{P}{k_b T} = \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} F_{\frac{5}{2}}(z) \quad N = \frac{V}{\lambda^3} F_{\frac{5}{2}}(z)$$

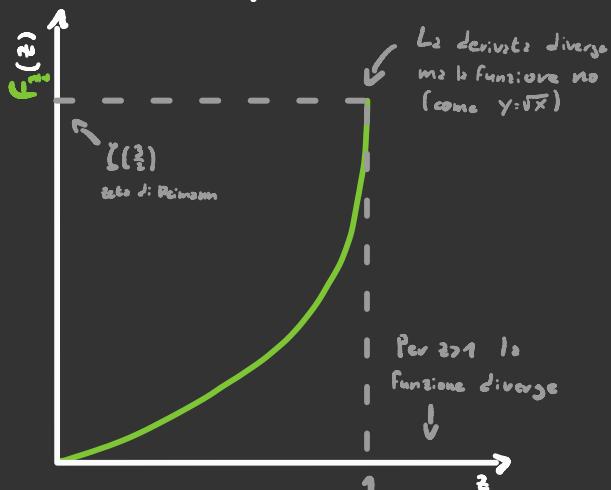
Dove

$$F_{\frac{5}{2}}(z) = z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \dots \quad F_{\frac{5}{2}}(z) = z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \dots$$

Da ora in poi non metterò più il simbolo - sopra la F .

Se andiamo a vedere
che forma ha $F_{\frac{5}{2}}(z)$
e' qualcosa del genere

Ma allora che succede se
io metto un numero di
particelle per unita' di volume
maggiore di $\frac{1}{\lambda^3} \zeta(\frac{5}{2})$?



Visto che sbalza tutto ci rendiamo conto che c'e' una transizione di fase, che e' la condensazione di Bose-Einstein.

Questo significa che

$$N = N_0 + N^* = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{m k_b T}{2 \pi} \right)^{\frac{5}{2}} F_{\frac{5}{2}}(1)$$

↗ N Numero Totale di particelle
 ↑ N^* Particelle condensate
 ↘ N_0 Particelle rimanenti

Si puo' ottenere da questa equazione che la temperatura critica e'

$$k_b T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V F_{\frac{1}{2}}(1)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Adesso penso' sorge il dubbio: dove stanno esattamente le particelle condenzate?

Stanno tutte nello stato fondamentale, questo e' dovuto al fatto che $\eta=0$, quindi ogni particella che viene aggiunta deve stare nello stato a $E=0$.

Poco fa guardiamo queste 2 equazioni sembra che tutte le variabili macroscopiche dipendano solo dalla fase non condensata

$$\frac{P}{k_b T} = \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} F_{\frac{1}{2}}(z)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} F_{\frac{1}{2}}(z)$$

Il motivo e' che per calcolarle abbiamo fatto l'approssimazione

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h} \int dp$$

Che e' pessima quando si lavora con i primi livelli energetici. Visto che ci importa solo il primo livello energetico possiamo dire che

$$\ln Z = - \sum_p \ln [1 - z e^{-p_e}] \approx - \ln(1-z) - \underbrace{\frac{V}{h} \int \ln [1 - z e^{-p_e}] d^3 p}_{\text{Termine stato fond.}} - \underbrace{\text{Il termine di prima}}_{\text{tranne il primo}}$$

A questo punto possiamo aggiungere altre equazioni di stato il contributo dello stato fondamentale

tranne il primo, non diverge

$$\frac{PV}{k_b T} = \ln(1-z) + \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} F_{\frac{1}{2}}(z)$$

$$N = \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{\lambda^3} F_{\frac{1}{2}}(z)$$

Adesso risolviamo queste equazioni di stato.

Per farlo dobbiamo considerare separatamente i casi $z=1$ e $z < 1$.

Nel caso $z=1$ $\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{z}{\lambda}\right)$

Questo significa che $\frac{z}{1-z} = N_0$, che nel limite termodinamico diverge.

L'altra equazione dice che

Questo poiché $1-z \ll V$ nel limite termodinamico divergono allo stesso modo. Quindi se metto $1-z$ nel logaritmo parla contro V

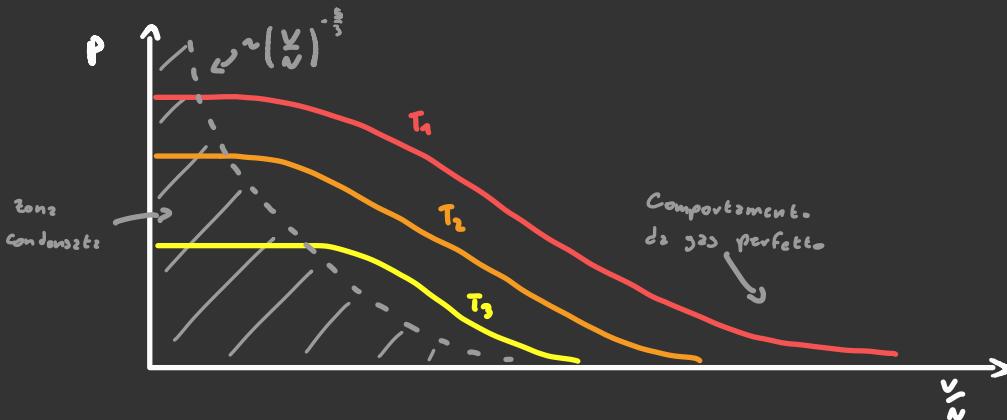
$$\frac{P}{k_B T} = \frac{\ln(1-z)}{V} + \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

Quindi a temperatura costante, quando siamo nella fase condensata la pressione è costante.

Per $z < 1$ possiamo ignorare i termini davanti alla sesta. Fondamentalmente e quindi possiamo ricavare l'equazione di stato ricavata nella sezione sulle equazioni di stato.

$$PV = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{N \lambda^3}{V} \right)^2 + \dots \right]$$

Il grafico delle equazioni di stato nel piano PV è così:



Ora vediamo che tipo di transizione di fase c'è la Condensazione di Bose-Einstein.

La prima peculiarità da considerare

c'è che non capite mai che tutte le particelle sono condenzate. A meno che $T=0$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} \text{Particelle condenzate} \\ N = N_0 + N^* \end{array}$$

\hookrightarrow

Numero Totale
di particelle

Particelle rimanenti

Dunque nell'acqua, ad esempio, se non siamo lungo una linea di transizione, la fase c'è una sola (solido, liquido, ...)

Per vedere se stiamo parlando di una transizione di fase vera e propria dobbiamo andare a vedere se ci sono discontinuità di qualche parte.

$$\frac{p^2}{2m} = E \quad dE = \frac{p}{m} dp \quad dp \sqrt{m} \frac{dE}{\sqrt{E}} \quad p^2 dp = 2m^2 \sqrt{E} dE$$

$$E = \frac{V}{h^3} \int \frac{E \frac{d^3 p}{e^{\beta E} - 1}}{z^3 e^{\beta E} - 1} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{2m^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}}{z^3 e^{\beta E} - 1} dE = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} f_{\frac{5}{2}}(z)$$

Visto che c'è $f_{\frac{5}{2}}$
dobbiamo distinguere

Era $z=1$ e $z>1$

$$E = \begin{cases} \frac{12\sqrt{\pi} V}{h^3} m^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) & \text{per } z=1 \\ 8 V m^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \frac{p \lambda^3}{h^3 k_B T} & \text{per } z>1 \end{cases}$$

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{N,V}$$

Completa discorso sulla capacità termica

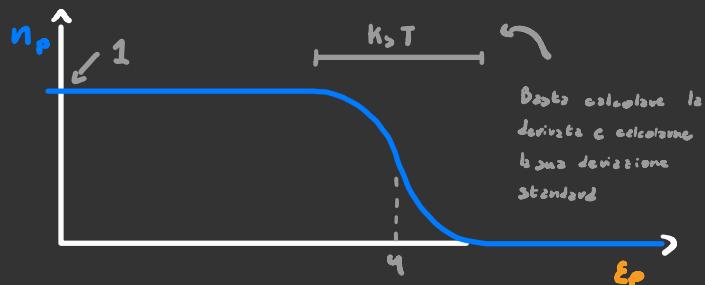
Fermioni non Interagenti

Il numero medio di

fermioni con impulso p

e'

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1}$$



A basse temperature

questa funzione assume la forma a gradino, e la larghezza del gradino è $\approx k_B T$. Dopo lo dimostra

Iniziamo a trattare il caso a $T=0$ e poi effettuiamo delle correzioni per $T \neq 0$.

A $T=0$ il volume dello spazio delle fasi con $\epsilon_p < \mu$ è pieno, mentre al di fuori c'è vuoto. Il numero totale di particelle è

$$N = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \xrightarrow{\text{Degenerazione}} = \frac{V}{h^3} \int_{p_F}^{\infty} \frac{d^3 p}{p_F} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{p_F^3}{3} \xrightarrow{\text{Impulso di Fermi}}$$

$$\text{con } \frac{p_F^2}{2m} = \mu \quad \xrightarrow{\text{L'impulso di Fermi è l'impulso che c'è sulla superficie di Fermi}}$$

Molte quantità termodinamiche possono essere scritte così

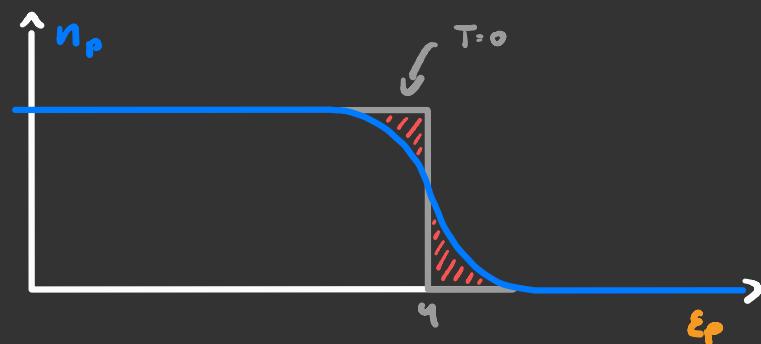
$$I = \frac{V}{h^3} \int \tilde{F}(\vec{p}) n_p(\epsilon_p) d^3 p = \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\epsilon) \rho(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon \equiv \int_0^{+\infty} \tilde{F}(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon$$

Come ad esempio l'energia

$$E = \frac{V}{h^3} \int \frac{\epsilon \cdot g \cdot d^3 p}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} : \xrightarrow{\text{Conti: noiosi}} \frac{3}{5} N \mu$$

Spesso e volentieri si integrano in queste forme non sono calcolabili per $T \neq 0$

$$I = \int_0^{+\infty} F(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon$$



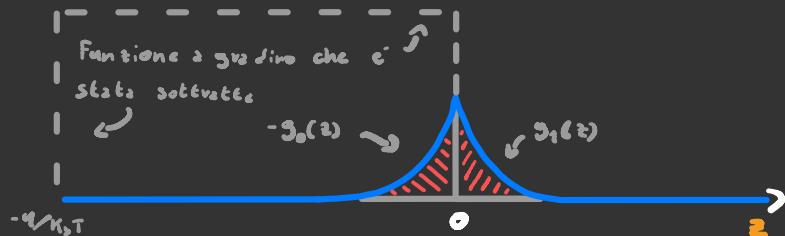
quindi cerciamo di scriverlo sotto forma di serie attorno 2

$z \equiv \frac{\epsilon - q}{k_B T}$. Supponiamo di voler calcolare

$$I = I_0 + \delta I$$

\leftarrow Calcolato a $T=0$

$$I_0 = \int_0^q F(\epsilon) d\epsilon$$



$$\delta I = k_B T \int_{-\infty}^{+\infty} F(q + k_B T z) [g_1(z) - g_0(z)] dz$$

Le funzioni g_0 e g_1 sono definite in questa immagine qui sopra

$$g_1(z) = -g_0(-z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

Adesso sviluppiamo F attorno $z=0$. Viste che $g_1(z) - g_0(z)$ è pari, abbiamo che solo i termini dispari sopravvivono

$$\begin{aligned} \delta I &= z k_B T \left[k_B T F'(u) \int_0^{+\infty} z^2 g_1(z) dz + \frac{1}{3!} (k_B T)^3 F'''(u) \int_0^{+\infty} z^3 g_1(z) dz + \dots \right] \\ &= \frac{\pi^2}{6} F'(u) (k_B T)^2 + \frac{7\pi^4}{360} F'''(u) (k_B T)^4 + \dots \end{aligned}$$

Questa cosa si chiama espansione di Sommerfeld

aggiungere eq. di Sefer

Proprietà Magnetiche dei fermioni

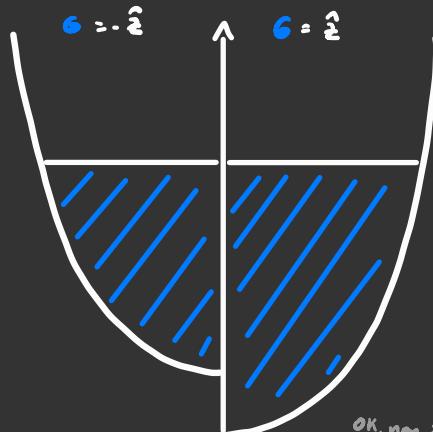
L'hamiltoniana di elettroni liberi non interagenti in campo magnetico è

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - q_0 \epsilon_i \cdot \vec{B}$$

Iniziamo ad analizzarla tenendo il potenziale vettore \vec{A} .

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} - q_0 \epsilon_i \cdot \vec{B}$$

Se supponiamo che $\vec{B} = B \hat{z}$
abbiamo che i 2 spin di fermi
degli elettroni con spin \uparrow
hanno un potenziale chimico
più grande di $2q_0 B$
rispett. a quelli con spin \downarrow .
Questo perché il termine dovuto
al campo magnetico crea un offset delle energie.



OK, non so bene
come spiegarlo,
guarda l'immagine

Se voglio misurare la magnetizzazione lungo \hat{z}

$$m = q_0 \frac{N^{\uparrow} - N^{\downarrow}}{V}$$

Nel limite classico abbiamo che

$$\frac{N^{\uparrow}}{N^{\downarrow}} = e^{2\mu_0 B}$$

Mentre in quello quantistico basta calcolare la differenza del volume delle due sfere di ferro:

$$\frac{N^{\uparrow} - N^{\downarrow}}{V} = \frac{2\pi}{3h^3} \left\{ (2m\mu)^{\frac{2}{3}} \cdot [2m(4 - 2qB_0)]^{\frac{1}{3}} \right\}$$

In entrambi i casi all'aumentare del campo magnetico esterno aumenta la magnetizzazione. Questo fenomeno si chiama paramagnetismo di Pauli.

Se vogliamo analizzare l'Hamiltoniana senza il termine di Spin guardate il mio quaderno di Fisica dello stato solido, là ne parlo

II Quantizzazione

Nella seconda quantizzazione le particelle sono eccitazioni dei campi, gli operatori a^\dagger ed a sono chiamati operatori di creazione e distruzione perché creano e distruggono particelle (eccitazioni).

Un campo ha tanti modi di eccitazione quindi bisogna specificare con un indice quale modo eccita.

$$a_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i+1} |n_1, n_2, \dots, n_i+1, \dots\rangle$$

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\rangle$$

Un generico stato è scrivibile così

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle \quad \begin{matrix} \text{Stato} \\ \text{vuoto} \end{matrix}$$

Visto che lavoriamo con particelle identiche

$$(1, 1) \in a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \in a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle \Rightarrow a_1^\dagger a_2^\dagger = \lambda a_2^\dagger a_1^\dagger$$

Se scambio a_i^\dagger con a_j^\dagger non deve cambiare niente, quindi $\lambda = 1$ per i **bosoni** $\lambda = 1$, mentre per i **fermioni** $\lambda = -1$.

Se vogliamo scriverlo in termini di commutatori o anticommutatori:

$$\text{bosoni: } \rightarrow [a_i, a_j] = 0 \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

$$\text{fermioni: } \rightarrow \{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$$

Da qui si ottiene che $(\hat{a}^+)^2 = 0$ per i fermioni, quindi non si può avere mai più di un Fermione per stato di occupazione, questo è detto principio di esclusione di Pauli.

Adesso proviamo a fare un cambiamento di base. Sono $\{\lambda\}$, $\{\lambda'\}$ due basi, per fare il cambio base questo

$$|\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} |\lambda'\rangle \langle \lambda'|\lambda\rangle \quad \text{visto che } |\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} |0\rangle$$

Faccio l'aggiunta

$$2_{\lambda}^+ = \sum_{\lambda'} 2_{\lambda'}^+ \langle \lambda'|\lambda\rangle \rightarrow 2_{\lambda} = \sum_{\lambda'} 2_{\lambda'} \langle \lambda|\lambda'\rangle$$

Adesso che abbiamo imparato a rappresentare le funzioni d'onda come operatori vediamo a cosa moltiplicare gli operatori stessi.

Un esempio di operatore di singolo corpo è questo

$$\langle n_1, n_2, \dots | \hat{O}_{\lambda}, | n_1, n_2, \dots \rangle = O_{\lambda} n_{\lambda} \underbrace{\langle \dots | \dots \rangle}_{\substack{\text{In pratica agisce} \\ \text{solo su una componente}}}$$

Se cambio base allora essa sarà una combinazione lineare di tanti operatori come quello di sopra.

Il numero uno significa $\rightarrow \hat{O}_1 = \sum_i O_{\lambda_i} n_{\lambda_i} = \sum_{\lambda} \langle \lambda | \hat{O} | \lambda \rangle 2_{\lambda}^+ 2_{\lambda}$

Da qui si ottiene che il caso più generico di operatore a singolo corpo è

$$\hat{O}_1 = \sum_{q, v} 2_q^+ \langle q | \hat{O} | v \rangle 2_v$$

Questo vale per qualsiasi base

Se ci mettiamo nella base delle posizioni possiamo esprimere

l'Hamiltoniana così

$$\hat{H} = \int \hat{a}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \hat{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Per quanto riguarda gli operatori a 2 corpi il procedimento è simile.

$$\hat{V} |v_1, r_2, \dots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} V(v_n, v_m) |v_1, r_2, \dots \rangle$$

Comparandolo con l'operatore di singolo corpo si potrebbe supporre

che c'è il modo di dimostrarlo ma c'è così simile alla dimostrazione per operatori di singolo corpo che mi secca scrivere

$$\hat{V} = \iint \hat{a}^*(\mathbf{r}) \hat{a}^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{a}(\mathbf{r}) \hat{a}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

In pratica in genere ti basta prendere le forme integrate del valore medio di un operatore in prima quantizzazione tipo così

Rappresentazione per bambini che non sanno lavorare coi campi:

$$\langle V \rangle = \iint \psi^*(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

Sostituisci così

Rappresentazione per vari uomini:

$$\hat{V} = \iint \hat{a}^*(\mathbf{r}) \hat{a}^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{a}(\mathbf{r}) \hat{a}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

Fai queste sostituzioni qua e c'hai magicamente il tuo operatore di campo

Correlazione bis

E' possibile definire la matrice di densità di singolo corpo così

Inoltre combacia con la definizione

di covariante che s'era data prima. Se siamo in uno stato puro, allora la matrice di densità assume queste forme

$$n_n(v, v') = N \int z_n^*(v, v_2, v_3, \dots) z_n(v', v_2, v_3, \dots) dr_2 dr_3 \dots$$

Nel caso di uno stato non puro si ha che

$$n(v, v') = \sum_n \left\{ P_n \underbrace{z_n^*(v, v_2, v_3, \dots)}_{\text{probabilità di trovarsi nello stato } n} z_n(v', v_2, v_3, \dots) dr_2 dr_3 \dots \right\} = \sum_n P_n n_n(v, v')$$

Nel caso dell'ensemble canonico

$$n(v, v') = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} n_n(v, v')$$

Quando abbiamo analizzato la Bose-Einstein avevamo scoperto che un numero N_0 di atomi finivano nello stato fondamentale, visto che lo stato fond. ha $\vec{p}=0$ possiamo dire che

$$n(p) = N_0 S(p) + \tilde{n}(p) \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{Parte non condensata} \end{matrix}$$

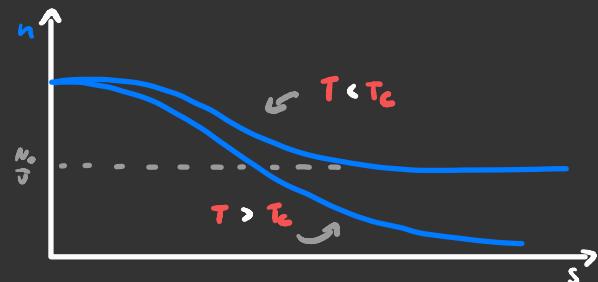
Faccendo la trasformata con $s = r \cdot r'$

$$n(s) = \frac{1}{V} \int n(p) e^{-i p \cdot s / \hbar} dp = \frac{N_0}{V} \int S(p) e^{-i p \cdot s / \hbar} + \frac{1}{V} \int \tilde{n}(p) e^{-i p \cdot s / \hbar} dp = \frac{N_0}{V} + \tilde{n}(s)$$

Qua si nota una cosa strana
cioè se mandiamo $s \rightarrow \infty$ la
correlazione non scompare.

$$n(s) = \frac{N_0}{\sqrt{s}} + \hat{n}(s) \rightarrow \frac{N_0}{\sqrt{s}}$$

Aesso cerchiamo di capire
meglio le proprietà fisiche
di questo condensato.



Quando lo stato fondamentale è occupato da un numero
molto grande di particelle N_0 non c'è che ci cambia molto se
sono N_0 o N_0+1 o N_0-1 . Quando faccio questo

Faccendo queste
operazioni 2o
e 2' non sono
più operatori
quantistici

$$2. |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0-1\rangle \approx \sqrt{N_0} |N_0\rangle$$

$$2' |N_0\rangle = \sqrt{N_0+1} |N_0+1\rangle \approx \sqrt{N_0} |N_0\rangle$$

Nel limite termodinamico
queste dicono un ugualizion

Quindi in questa approssimazione, che si chiama approssimazione
di Bogoliubov gli operatori di creazione e distruzione applicati
allo stato fondamentale sono uguali a $\sqrt{N_0}$, ma che conseguenze
ha? Definisco l'operatore di distruzione $\hat{Q}(v)$ in funzione di
quelli scritti nella base delle energie.

$$\hat{Q}(v) = \sum_i \langle v | \Psi_i \rangle a_i = \sum_i \Psi_i(v) a_i = \Psi_0(v) \sqrt{N_0} + \sum_{i \neq 0} \Psi_i(v) a_i$$

Questo termine non

è quantistico

Quindi:

$$\hat{Q}(v) = \Psi_0(v) + \delta \hat{Q}(v) \leftarrow \text{Fluttuazioni quantistiche}$$

Il termine del condensato $\Psi_0(v)$ è possibile esprimere così
 $|\Psi_0(v)|^2$

Gas di Bose = = poco Interazione

L'Hamiltoniana per un campo intenzionale è

$$H = \int z^*(r) \frac{\hat{p}^2}{2m} z(r) dr + \frac{1}{2} \int z^*(r) z^*(r') V(|r-r'|) z(r) z(r') dr dr'$$

 Qua la matrice è diagonale rispetto alle posizioni

Se lo scrivo nello spazio degli impulsi:

$$H = \int \frac{\hat{p}^2}{2m} z^*(p) z(p) dp + \frac{1}{2V} \int z^*(p+q) z^*(p-q) V(q) z(p) z(p') dp dp' dq$$

✓ Mentre rispetto agli impulsi no

Fin qua non abbiamo fatto approssimazioni, ma ora rimediamo subito. Supponiamo che:

- Il gas sia molto diluita quindi $V(r-r') = V_0 \delta(r-r')$
 $V(q) = g \delta(q)$
- $T \gg 0$, quindi possiamo ignorare tutti i termini con $p, p' \neq 0$ ($z(p) \approx 0$ per $p \neq 0$)
- Ci mettiamo anche l'approssimazione di Bogoliubov

Mettendo tutto insieme si ottiene che

$$E_0 = \frac{N^2 g}{2V}$$

Eh va bene abbiamo scoperto l'acqua calda, ma adesso vediamo che succede se includo gli operatori $z(p)$ al primo ordine

Niente.

Quesco perche' l'impulso totale degli operatori di crezione deve essere uguale a quello degli operatori di distruzione, quindi proviamo al secondo ordine

$$H = E_0 + \int \frac{p^2}{2m} z^*(p) a(p) dp +$$

$$+ \frac{3}{2V} \int 4 z^*(p) z^*_0 a(p) z_0 + z^*(p) z^*(-p) z_0 z_0 + z^*_0 a^* a z(p) z(-p) dp$$

Controlla!

E' possibile fare tramite giochetti che non ci e' dato sapere

$$H = E_0 + \frac{1}{2} \int \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{N}{V} \right) [z^*(p) z(p) + z^*(p) a(-p)] + \frac{N}{V} [z^*(p) a^*(-p) + a(p) a(-p)]$$

Queste Hamiltonianze non e' diagonale, per diagonalizzarla bisogna

Fare questo cambiamento di base

$$\begin{cases} z(p) = u(p) b(p) + v(p) b^*(-p) \\ z^*(p) = u^*(p) b^*(p) + v^*(p) b(p) \end{cases}$$

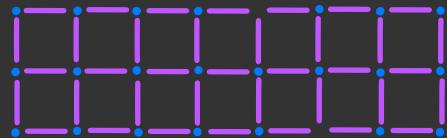
Se vogliamo assicurarsi che le particelle create da $b(p)$ e $b^*(q)$ siano bosoni bisogna imponere che $[b(p), b^*(q)] = \delta(p-q)$, e facendo dei conti si scopre che $u^*(qp) - v^*(cp) = 1$.

Sostituendo le case del sistema di equazioni, e imponendo che $u^*(qp) - v^*(cp) = 0$ si ottiene che

$$H = E_0 + \int \epsilon(\vec{p}) b^*(\vec{p}) b(\vec{p}) d\vec{p} \quad \epsilon(\vec{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{2N}{mV} p^2}$$

Modello di Ising

Quantistico



J, ω_0

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - \omega_0 \sum_i \hat{\sigma}_i^z \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{le 6 sono} \\ \text{tutte matrici} \end{array}$$

Primo di trattarla dal punto di vista termodinamico studiamo lo stato fond. Iniziamo a vedere che succede in un campo magnetico forte $\mathbf{g} \gg J$, quindi mi aspetto che la funzione d'onda del sistema sia

$$|\Psi\rangle = |+\rangle, |-\rangle, \dots \rangle = \prod_i |\psi_i\rangle_j \quad \text{dove} \quad |\psi_i\rangle_j = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Abbiamo che $\langle \Psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \Psi \rangle = \delta_{ij}$

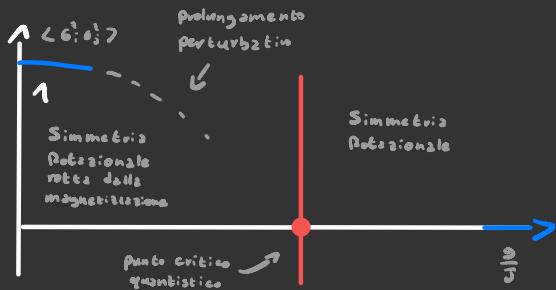
Se $\mathbf{g} \gg J$ ma non troppo $\langle \Psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \Psi \rangle = e^{i g_i x_i / J}$

Se $\mathbf{g}=0$ abbiamo che lo stato fondamentale è degenero

$$|\Psi\rangle \in \text{span}\{ |1\rangle, |0\rangle, \dots \}, |b\rangle, |t\rangle, \dots \} \quad \langle \Psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \Psi \rangle = 1$$

Se invece $\mathbf{g} \ll J$ la funzione d'onda non è più degenero, ma comunque $\langle \Psi | \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z | \Psi \rangle \geq 1$

In entrambi i casi è possibile migliorare la precisione di $\langle \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z \rangle$ perturbativamente, ma solo fino al punto critico quantistico



Per risolvere in modo analitico il problema di Ising in 1D occorre fare un po' di conti.

$$H = - \sum_i J \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + J \sigma_i^z$$

Vogliamo cercare di descrivere l'Hamiltoniana come se fosse un Hamiltoniana di campo.

Quello che faccio e' associare a uno spin un fermione come qui a destra.

$$|\uparrow\rangle = |0\rangle \quad \curvearrowleft$$

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle \quad \curvearrowleft$$

Il fermione c'e'

Gli operatori di creazione e distruzione sono in questo caso

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + \sigma^y}{2} \quad \sigma^- = \frac{\sigma^x - \sigma^y}{2}$$

Questo pero' funziona solo per un sito, questo perch'e gli operatori di spin commutano tra un sito e l'altro, ma gli operatori di creazione e distruzione dovrebbero anti-commutare.

Per fortuna Jordan e Wigner riuscirono a risolvere il problema definendo

$$a_i^\dagger = \sigma_i^+ \prod_{j < i} \sigma_j^z \quad a_i^\dagger = \sigma_i^+ \prod_{j < i} \sigma_j^z$$

Questo implica che $\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$ $\{a_i^\dagger, a_j^+\} = \delta_{ij}$ $\{a_i^+, a_j^+\} = 0$

Se vogliamo scrivere gli operatori di spin in termini di a e a^+

$$\sigma_i^+ = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j) a_i^\dagger \quad \sigma_i^- = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j) a_i^+$$

$$\sigma_i^z = \prod_{j < i} (1 - 2 a_j^+ a_j) (a_j^\dagger + a_j^\dagger)$$

Se sostituiamo otteniamo che

$$H = \sum_i J(z_i^+ a_{-i} + d_i^+ z_i + z_i^+ d_{-i} + a_{-i}^+ z_i) - g(1 - z_i^+ z_i)$$

Visto che è invariante sotto traslazioni facciamo la Trasformazione

$$H = \sum_K z_K^+ z_K [g - J \cos(Kz)] + J \sin(Kz) (z_K^+ z_K^+ + z_K^- z_K^-) - g$$

E adesso si fa la trasformazione di Bogoliubov

$$b_K = u_K z_K - i v_K z_K^+ \quad \text{con} \quad u_K^2 + v_K^2 = 1$$

Faccendo così $\{b_K, b_{K'}\} = \delta_{KK'} \quad \{b_K, b_{K'}^+\} = \{b_K^+, b_{K'}^+\} = 0$

Inserendo il tutto nell'Hamiltoniana si ha che

$$H = \sum_K E_K (b_K^+ b_K - \frac{1}{2}) \quad E_K = 2J \sqrt{1 + g^2 - 2g \cos(Kz)}$$

$$z_N := \int e^{-\beta V(x)} dx^N = \int_C \cdot \int \beta^{V(x)} dx^N \cdot \int$$

$$\int e^{\beta V(x)} dx^N e^{\beta V(x)} dx^N = V \langle e^{\beta V(x)} \rangle_{\text{in}}$$

$$= V^{N-1} \left[\int e^{\beta V(x)} dx \right]^N z_N$$

Campi Fermionici Interventi:

Visto che il 99% delle volte che si parla di Fermioni che fanno cose essi sono elettroni in un



DAVIDE ROSSINI

Registri a.a. 2020/2021

DATI REGISTRO

insegnamento FISICA STATISTICA (cod. 207BB)

corso di studi WFI-LM - FISICA

periodo Primo semestre

responsabile DAVIDE ROSSINI

docenti DAVIDE ROSSINI

totale ore 56

[Calendario lezioni](#) [Dettaglio ore](#)

LEZIONI

- ✓ 1. Mar 22/09/2020 14:00-15:00 (1:0 h) lezione: Presentazione del corso, argomenti trattati, libri di testo, modalità d'esame. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 2. Mar 22/09/2020 15:00-16:00 (1:0 h) lezione: Richiami di termodinamica: concetti di base, trasformazioni termodinamiche, leggi della termodinamica. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✗ 3. Mer 23/09/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Richiami di termodinamica (continua): dialetto di Maxwell, principio di Landauer; potenziali termodinamici, stabilità degli stati, principio di Le Chatelier (enunciato). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 4. Ven 25/09/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Postulati della meccanica statistica classica, media temporale e media di Gibbs, teorema di Liouville. Insieme microcanonico. Definizione di entropia e consistenza con la termodinamica. Condizioni di equilibrio. Teorema di equipartizione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 5. Mar 29/09/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Teorema di equipartizione (continua) e teorema del viriale. Gas perfetto classico risolto col formalismo microcanonico, paradosso di Gibbs. Costruzione dell'insieme canonico. Definizione di temperatura. Funzione di partizione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 6. Mer 30/09/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Definizione di energia libera di Helmholtz nell'ensemble canonico e consistenza con la termodinamica. Fluttuazioni dell'energia, equivalenza del formalismo canonico con quello microcanonico. Gas perfetto classico risolto col formalismo canonico, distribuzione di Maxwell-Boltzmann. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 7. Ven 02/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Ensemble grancanonico. Funzione di granpartizione. Gran potenziale e consistenza con la termodinamica. Fluttuazioni del numero di particelle e compressibilità isoterma. Equivalenza tra gli ensemble. Gas perfetto nel formalismo grancanonico. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 8. Mar 06/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Spin non interagenti e comportamento paramagnetico (descrizione nei tre ensemble). Derivazione dell'equazione di van Der Waals partendo dal formalismo dell'ensemble canonico per sistemi con interazioni a due corpi, nell'ipotesi di gas diluito e ad alta temperatura. Volume escluso e pressione interna. Punto critico e legge degli stati corrispondenti. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 9. Mer 07/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Regione di instabilità nel gas di van der Waals e costruzione di Maxwell. Sviluppo perturbativo della funzione di granpartizione per gas diluiti, espansione in cumulanti. Funzioni di Mayer, grafi connessi e non connessi. Espansione del virale e coefficienti del viriale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✗ 10. Ven 09/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Interpretazione dell'espansione in cumulanti come sviluppo delle funzioni di Mayer sui grafi connessi. Importanza dei grafi completamente connessi. Esempio: gas di sfere rigide in varie dimensioni. Densità locale e funzioni di correlazione della densità. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 11. Mar 13/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Derivazione della termodinamica di un gas interagente a partire dalla funzione di correlazione densità-densità. Equazioni di Born-Green. Gerarchia BBGKY (cenni) e approssimazione di Kirkwood. Transizioni di fase in termodinamica: considerazioni generali ed evidenze sperimentali. Classificazione di Ehrenfest e classificazione moderna. Transizioni del primo ordine vs. continue. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

ROSSINI) **D2 Approfondire**

- ✓ 12. Mer 14/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Singolarità nella funzione di partizione al limite termodinamico e connessione con le transizioni di fase. Teoremi di Lee-Yang (enunciati e loro conseguenze). Concetto di esponenti critici per una transizione di fase continua. Calcolo degli esponenti critici per un sistema descritto dall'equazione di van der Waals. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 13. Ven 16/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Modello di Ising per spin classici interagenti su reticolo: definizione. Campo molecolare e soluzione di Weiss. Descrizione della transizione di fase del secondo ordine paramagnete/ferromagnete in approssimazione di campo medio. Temperatura critica. Calcolo della magnetizzazione spontanea, calore specifico, suscettività magnetica e esponenti critici di campo medio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 14. Mar 20/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Trasformazione di Hubbard-Stratonovich. Metodo di punto sella e connessioni con il campo medio. Mapping del modello di Ising in una teoria di campo continuo. Teoria di Ginzburg-Landau: funzionale energia libera, ricerca dei minimi e rottura spontanea di simmetria (esempio esplicito per il modello di Ising in campo medio, con rottura di simmetria Z_2). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 15. Mer 21/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Generalizzazioni $O(n)$ del modello di Ising e loro descrizione nel formalismo di Ginzburg-Landau (cenni). Funzione di correlazione e suscettività per il modello di Ising in approssimazione di campo medio. Forma di Ornstein-Zernike. Esponenti critici. Criterio di Ginzburg e dimensione critica superiore per il campo medio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 16. Ven 23/10/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Modello di Ising oltre l'approssimazione di campo medio. Argomento di Peierls per il caso con interazioni a lungo raggio e per il caso bidimensionale su reticolo quadrato. Soluzione esatta del caso unidimensionale mediante il metodo della matrice di trasferimento. Calcolo della magnetizzazione (assenza di magnetizzazione spontanea) e delle funzioni di correlazione (decadimento esponenziale). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 17. Mar 27/10/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Relazioni che coinvolgono gli esponenti critici e leggi di scala. Ipotesi di scaling e invarianza di scala al punto critico; argomento di Widom. Introduzione al Gruppo di Rinormalizzazione: raggruppamento degli spin "alla Kadanoff" - coarse graining. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 18. Mer 28/10/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Gruppo di Rinormalizzazione: punti fissi e campi di scaling. Concetto di campi di scaling rilevanti, irrilevanti e marginali. Esempio di applicazione RG per la catena di Ising: flusso di rinormalizzazione, caratterizzazione dei punti fissi, espansione lineare del flusso RG attorno al punto fisso a temperatura $T=0$ e consistenza con la soluzione esatta. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 19. Mar 03/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Meccanica statistica quantistica: principi di base. Stati puri e stati misti, matrice densità, equazione di Liouville-von Neumann. Postulato di equiprobabilità a priori e postulato delle fasi random. Ensembles di equilibrio: microcanonico, canonico, grancanonico. Terza legge della termodinamica. Distinzione tra gas di bosoni, di fermioni, e di Boltzmann. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 20. Mer 04/11/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: I tre tipi di gas di particelle non interagenti (Boltzmann, Bose, Fermi) descritti col formalismo dell'ensemble grancanonico. Statistiche di Bose-Einstein e di Fermi-DIrac. Limite classico delle statistiche quantistiche (descrizione mediante il formalismo di prima quantizzazione); correzione quantistica al primo ordine, pseudo-potenziale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 21. Ven 06/11/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Sistemi quantistici interagenti in prima quantizzazione (cenni, sviluppi in cluster). Gas di fotoni e termodinamica del corpo nero. Fononi nei solidi: modello classico di oscillatori armonici accoppiati, dispersione lineare dei modi normali a basse energie; modello quantistico di Debye. Calore specifico nei solidi: limiti di basse e di alte temperature. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 22. Mar 10/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Condensazione di Bose Einstein (BEC) per bosoni liberi. Temperatura critica e volume critico. Assenza di BEC in due dimensioni e in una dimensione. Interpretazione della BEC come una sorta di transizione di fase del primo ordine. Funzioni termodinamiche per un gas di Bose ideale. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 23. Mer 11/11/2020 11:15-13:00 (2:0 h) lezione: Equazione di stato per fermioni liberi. Limite per piccole fugacità (regime classico: alte temperature, basse densità) e interpretazione in termini di espansione del viriale, pseudo-potenziale repulsivo. Limite per grandi fugacità (regime quantistico: basse temperature, alte densità) ed espansione di Sommerfeld. Funzioni termodinamiche, energia di Fermi e pressione di degenerazione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 24. Ven 13/11/2020 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Proprietà magnetiche di un gas di fermioni liberi. Paramagnetismo di Pauli. Particella carica in un campo magnetico e Livelli di Landau. Diamagnetismo di Landau (prima parte). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 25. Mar 17/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Diamagnetismo di Landau (seconda parte). Effetto di de Haas-van Alphen. Formalismo di seconda quantizzazione: rappresentazione dei numeri di occupazione, spazio e stati di Fock, operatori di creazione/distruzione, regole di commutazione e di anticommutazione. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 26. Mer 18/11/2020 11:00-13:00 (2:0 h) lezione: Cambio di base per gli operatori di creazione e

distruzione. Operatori a uno e a due corpi. Forma generale dell'Hamiltoniana quantistica in seconda quantizzazione per un sistema di particelle interagenti con potenziale centrale a due corpi. Introduzione al gas di Bose debolmente interagente. Matrice densità one-body; densità in spazio reale e in spazio dei momenti; ordinamento a lungo raggio. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

- ✓ 27. **Ven 20/11/2020 16:00-18:00 (2:0 h)** lezione: Approssimazione di Bogoliubov per un gas di Bose diluito e a basse temperature. Fluttuazioni quantistiche. Trasformazione di Bogoliubov e concetto di quasi-particella. Stato fondamentale interpretabile come stato di vuoto della teoria efficace libera di Bogoliubov. Spettro delle quasi-particelle e termodinamica del sistema; healing length. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- ✓ 28. **Mar 24/11/2020 14:00-16:00 (2:0 h)** lezione: Modello di Ising quantistico in campo trasverso. Limiti di strong coupling e di weak coupling: stato fondamentale nei due limiti. Cenni sulla rottura della simmetria di parità Z_2 e transizione di fase quantistica. Trasformazione di Jordan-Wigner e mapping del caso 1D su una catena fermionica quadratica. [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)
- 29. **Mer 25/11/2020 11:00-13:00 (2:0 h)** lezione: Diagonalizzazione della catena fermionica quadratica mediante rotazione di Bogoliubov in spazio degli impulsi. Spettro delle quasi-particelle; gap tra ground state e primo stato eccitato al variare del campo trasverso. Introduzione ai sistemi fermionici in seconda quantizzazione: modello di tight-binding, conduttori e isolanti di banda; modello di Hubbard, isolante di Mott (cenni). [Lezione erogata telematicamente]. (DAVIDE ROSSINI)

[Calendario lezioni](#) [Dettaglio ore](#)