

# Usi non lineari dell'OpAmp

Francesco Sacco, Lorenzo Cavioti

Novembre 2015

1)

**a.** Abbiamo collegato il circuito e alimentato a  $\pm 15V$ , i componenti misurati con il multimetro digitale, risultano:

- $C_T = 0.95 \pm 0.04nF$
- $C_F = 1.02 \pm 0.04nF$
- $R_1 = 99.7 \pm 0.8k\Omega$
- $R_2 = 99.3 \pm 0.8\Omega$
- $C_1 = 21.0 \pm 0.9nF$

Il potenziometro è stato regolato in modo da produrre una tensione  $V_P = 184.3 \pm 0.9mV$  misurata con il multimetro digitale

**b.** Per spiegare il circuito dell'amplificatore di carica è meglio analizzarlo con i suoi due sotto-circuiti separatamente, e poi vedere come si incastrano assieme.

Il primo sottocircuito è quello che è collegato al voltaggio in ingresso  $V_S$ , esso si può vedere nella figura 1, risolvere il circuito equivale a risolvere questo sistema di 3 equazioni

$$\begin{cases} V_S - V_- = \frac{Q_T}{C_T} \\ V_- - V_{sh} = I_1 R_1 \\ V_- - V_{sh} = \frac{Q_F}{C_F} \end{cases} \quad (1)$$

Derivando rispetto al tempo la prima e la terza equazione, supponendo che  $\frac{dV_s}{dt} = 0^1$ , e imponendo che  $V_{sh} = AV_-$  si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dV_-}{dt} = -\frac{I_T}{C_T} \\ (1+A)V_- = I_1 R_1 \\ (1+A)\frac{dV_-}{dt} = \frac{I_F}{C_F} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_-}{dt} = -\frac{I_1 + I_F}{C_T} \\ I_F = C_F(1+A)\frac{dV_-}{dt} \\ I_1 = \frac{1+A}{R_1}V_- \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>visto che è un'onda quadra possiamo supporre di interessarci al circuito nei punti in cui l'onda quadra è costante

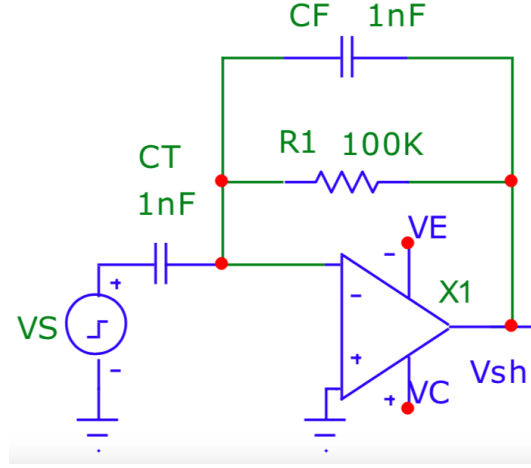


Figura 1: sotto-circuito 1

Passando dal primo sistema all'altro ho usato che  $I_T = I_1 + I_F$ , sostituendo  $I_1$  e  $I_F$  nella prima equazione si ottiene che

$$\frac{dV_-}{dt} = \frac{1}{C_T} \left[ C_F(1+A) \frac{dV_-}{dt} + \frac{1+A}{R_1} V_- \right]$$

$$\frac{dV_-}{dt} \left[ \frac{C_T}{1+A} + C_F \right] = -\frac{V_-}{R_1}$$

Nel limite in cui  $A$  è molto grande possiamo considerare  $\frac{C_T}{1+A} \approx 0$ , quindi l'equazione di prima diventa

$$\frac{dV_-}{dt} \approx -\frac{V_-}{C_F R_1} \quad A \frac{dV_-}{dt} \approx -A \frac{V_-}{C_F R_1} \quad \frac{dV_{sh}}{dt} \approx -\frac{V_{sh}}{C_F R_1}$$

Quindi si ottiene dal primo sottocircuito che

$$V_{sh}(t) = V_{sh}(0) e^{-t/C_F R_1}$$

Per determinare quanto vale il parametro  $V_{sh}(0)$  basta immaginare il generatore del gradino di potenziale  $V_S$  e il capacitore  $C_T$  come un iniettore di carica.

La carica che arriva al circuito non appena  $V_S$  passa dal voltaggio negativo a quello positivo è  $V_S C_T$ , essa sarà la stessa quantità di carica presente ai capi del capacitore  $C_F$ , quindi il voltaggio  $V_{sh}(t=0) = V_S \frac{C_T}{C_F}$

$$V_{sh}(t) = V_S \frac{C_T}{C_F} e^{-t/C_F R_1} \quad (2)$$

E questo è come funziona il primo sottocircuito.

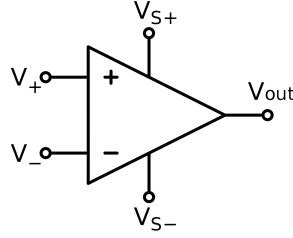


Figura 2: Un OpAmp

Prima di spiegare direttamente il secondo sottocircuito è meglio dare un paio di informazioni approssimative sull'OpAmp.

L'OpAmp è un dispositivo a 5 terminali, per indicare il voltaggio in ciascun terminale useremo la convenzione dell'immagine 2

L'OpAmp è in grado di amplificare il segnale per bene solo se  $V_{S-} < A(V_+ - V_-) < V_{S+}$ , se per caso  $A(V_+ - V_-) > V_{S+}$ , l'amplificatore porta  $V_{out}$  al massimo voltaggio che può dare, cioè  $V_{S+}$ , e se  $A(V_+ - V_-) < V_{S-}$   $V_{out} = V_{S-}$ .

Essendo  $A$  molto grande basta una differenza di potenziale molto piccola ai capi dei terminali  $+$  e  $-$  per mandare l'OpAmp a  $V_{S+}$  e  $V_{S-}$ , questo viene usato per dire in modo binario se un voltaggio è maggiore di un'altro voltaggio, infatti se  $A|V_+ - V_-| \gg 1$  si ha che  $V_{out} = V_{S+}$  se  $V_+ > V_-$  e  $V_{out} = V_{S-}$  se  $V_+ < V_-$ .

Adesso che sappiamo ciò possiamo spiegare il secondo sottocircuito: Il secondo sotto circuito si può vedere nella figura 3, il terminale positivo è collegato a  $V_{sh}$  attraverso una resistenza di  $100\Omega$ , quindi visto che la corrente che passa per il terminale positivo è circa zero possiamo assumere che la differenza di potenziale ai capi sia trascurabile.

Chiamerò  $V_P$ <sup>2</sup> il potenziale che entra nel terminale negativo dell'OpAmp, esso è possibile regolarlo grazie al potenziometro che funge da partitore di tensione. Essendo (quasi sempre)  $A|V_{sh} - V_P| \gg 1$  si ha che

$$\begin{cases} V_{discr} = V_C & \text{se } V_{sh} > V_P \\ V_{discr} = V_E & \text{se } V_{sh} < V_E \end{cases} \quad (3)$$

Unendo i due sottocircuiti come in figura 4 si uniscono i risultati dei paragrafi precedenti:

$$V_{sh} = V_{sh}(0)e^{-t/C_F R_1} \quad \text{e} \quad \begin{cases} V_{discr} = V_C & \text{se } V_{sh} > V_P \\ V_{discr} = V_E & \text{se } V_{sh} < V_E \end{cases} \quad (4)$$

---

<sup>2</sup>P sta per potenziometro

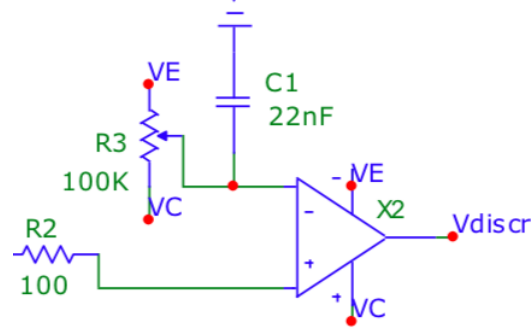


Figura 3: secondo sotto-circuito

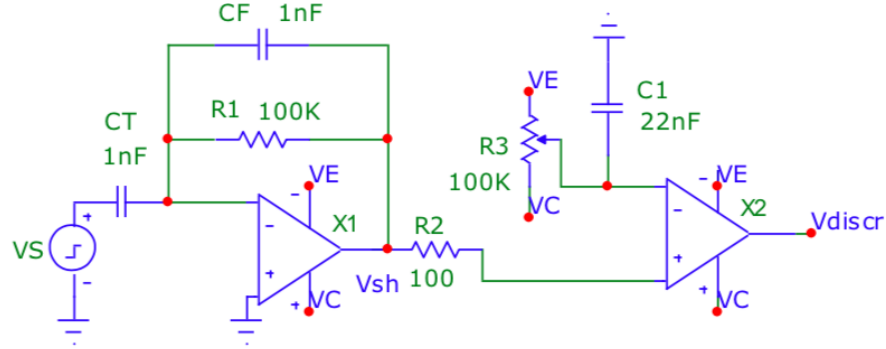


Figura 4: Circuito

Se si vuole ricavare per quanto tempo  $V_{discr} = V_C$  basta risolvere rispetto al tempo  $V_{sh} > V_P$ , quindi

$$V_{sh}(0)e^{-t/C_F R_1} > V_P \quad -\frac{t}{C_F R_1} > \ln\left(\frac{V_P}{V_{sh}(0)}\right) \quad t < C_F R_1 \ln\left(\frac{V_S C_T}{V_P C_F}\right) \quad (5)$$

**c.** Per vedere la relazione tra durata del segnale in uscita e ampiezza del segnale in ingresso abbiamo tenuto  $V_P = 184.3 \pm 0.9mV$  costante e abbiamo fatto variare l'ampiezza  $V_S$ , i dati raccolti sono mostrati in tabella 1. E' stato fatto anche un fit dei dati con la funzione  $t = a \log(bx)$  lasciando  $a$  e  $b$  come parametri di fit (figura 5), per il fit non si sono considerati i punti in cui la durata del segnale in uscita è nulla, ovvero non è presente un segnale, in quanto questi punti vanno a formare una retta  $t=0$  e non ha neanche senso parlare di durata del segnale di uscita.

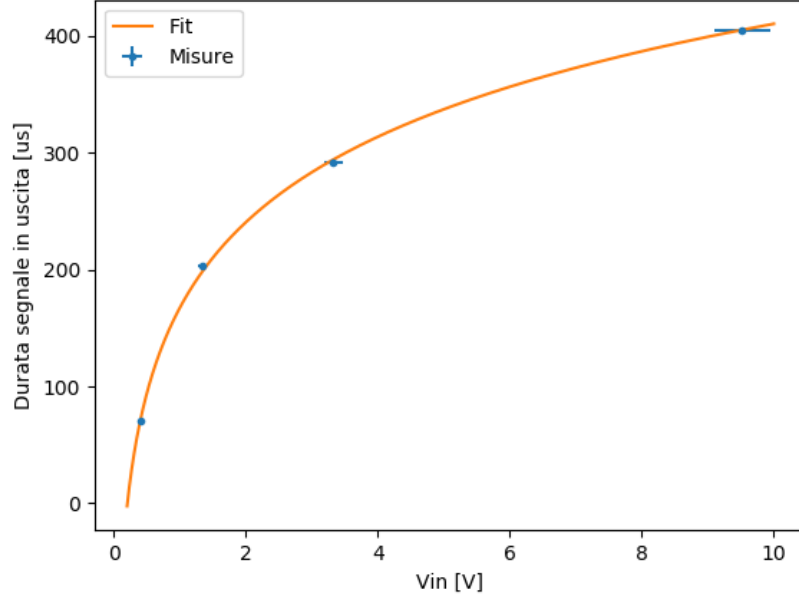


Figura 5: Fit della durata del segnale in uscita in funzione dell'ampiezza  $V_S$

Il fit è stato fatto con `absolute-sigma=False` in quanto gli errori non sono statistici, i parametri risultano  $a = (105 \pm 2) \mu s$   $b = 4.9 \pm 0.2 V^{-1}$  con un  $\chi^2_{ridotto} = 0.79$ . Confrontando i parametri ottenuti con la teoria si ottiene che  $a = (101.6 \pm 4.2) \mu s$  e  $(b = 5.1 \pm 0.3) V^{-1}$ . Entrambi i parametri sono compatibili con il modello teorico

$V_S [V]$	$t [\mu s]$
$71.0 \pm 0.4$	$0.41 \pm 0.02$
$(2.03 \pm 0.01) \times 10^2$	$1.34 \pm 0.06$
$(2.92 \pm 0.02) \times 10^2$	$3.3 \pm 0.1$
$(4.04 \pm 0.02) \times 10^2$	$9.5 \pm 0.4$

Tabella 1: Durata del segnale in uscita in funzione dell'ampiezza di  $V_S$

Facendo variare la tensione fornita dal potenziometro  $V_P$  abbiamo misurato la minima tensione  $V_S$  richiesta per avere un segnale  $V_{discr}$ , le misure sono riportate in 2. Abbiamo anche eseguito un fit dei dati ottenuti con la funzione  $f = a * x + b$  usando `absolute-sigma=False`, i parametri ottimali risultano  $a = 1.06 \pm 0.01$   $b = 0.012 \pm 0.004 V$  con un  $\chi^2_{ridotto} = 0.09$ , il chi quadro risulta basso probabilmente a causa della sovrastima degli errori di misura del voltaggio con

$V_P[\text{V}]$	$V_{Smin}[\text{V}]$
$(184.3 \pm 0.9)\text{m}$	$(208 \pm 1)\text{m}$
$0.308 \pm 0.002$	$0.338 \pm 0.002$
$0.49 \pm 0.003$	$0.54 \pm 0.003$
$0.937 \pm 0.005$	$1.02 \pm 0.005$
$1.823 \pm 0.009$	$1.92 \pm 0.01$

Tabella 2: Tensione minima per avere un segnale  $V_{Smin}$  in funzione di  $V_P$

l'oscilloscopio.

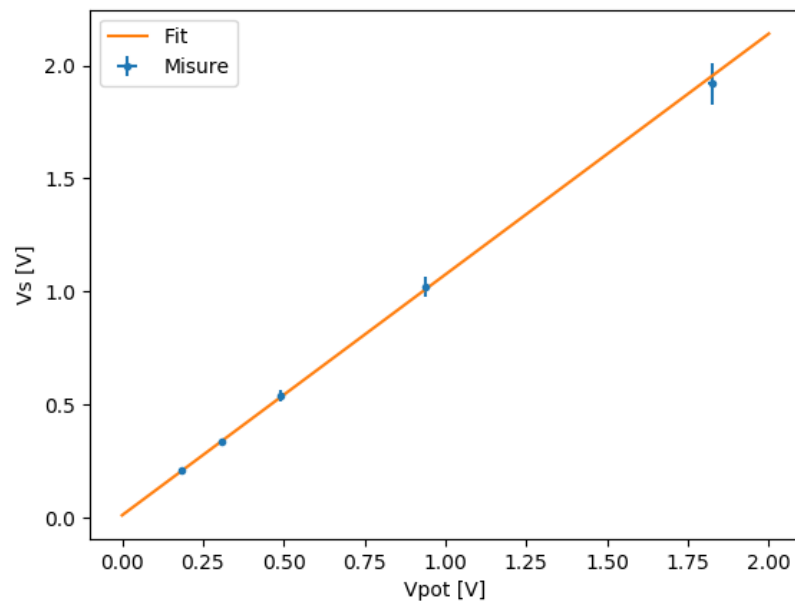


Figura 6: Fit della tensione minima per avere un segnale  $V_{Smin}$  in funzione di  $V_P$

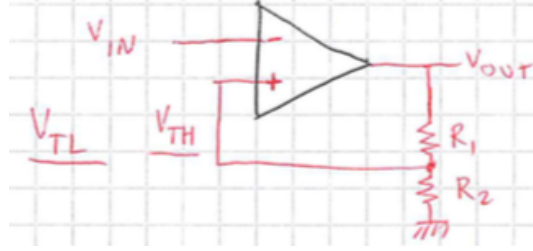


Figura 7: Trigger di Schmitt

2)

**a.** Partiamo dalle seguenti informazioni riguardanti il trigger di Schmitt (immagine 7): esso è uno squadratore d'onda, che funziona nel seguente modo:

$$\begin{cases} V_{out} = V_{CE} & \text{se } V_- > \frac{V_{CC}}{1+R_1/R_2} \\ V_{out} = V_{CC} & \text{se } V_- < \frac{V_{CE}}{1+R_1/R_2} \\ \text{se } \frac{V_{CE}}{1+R_1/R_2} < V_- < \frac{V_{CC}}{1+R_1/R_2} & \text{allora } V_{out} \text{ assume l'ultimo valore assunto} \end{cases} \quad (6)$$

Il multivibratore astabile è mostrato in figura 8, esso è un trigger di Schmitt con due diodi zener che limitano  $-V_{br} < V_{out} < V_{br}$ , dove  $V_{br}$  è il voltaggio di breakdown degli zener. Inoltre grazie al passa-basso  $V_-$  si carica dello stesso segno di  $V_{out}$ , questo porta  $V_-$  a raggiungere  $V_+$ . Una volta che ciò succede,  $V_+$  cambia di segno, e  $V_-$  insegue  $V_+$ , tutto ciò crea un fenomeno oscillatorio.

Il sistema che descrive il circuito è questo

$$\begin{cases} V_{out} - V_- = IR \\ V_{out} - V_+ = I_1 R_1 \\ V_+ = I_1 R_2 \\ Q/C = V_- \end{cases} \quad \begin{cases} V_{out} - V_- = IR \\ \frac{V_{out}}{V_+} = \frac{R_1}{R_2} + 1 \equiv \alpha \\ V_+ = I_1 R_2 \\ \frac{dV_-}{dt} = \frac{V_{out} - V_-}{RC} \end{cases} \quad (7)$$

Supponiamo che a  $t = 0$   $V_{out} = V_{th}$  e  $V_- = -\frac{V_{th}}{\alpha}$ , risolvendo l'ultima equazione del secondo sistema si ottiene che<sup>3</sup>

$$V_- = V_{th} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) e^{-t/RC} \right]$$

Per trovare il periodo dell'oscillazione basta imporre che

$$V_- = V_{th} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) e^{-t/RC} \right] = \frac{V_{th}}{\alpha}$$

<sup>3</sup>Viceversa se a  $t = 0$   $V_{out} = -V_{th}$  e  $V_- = \frac{V_{th}}{\alpha}$  si ottiene  $V_- = -V_{th} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) e^{-t/RC} \right]$



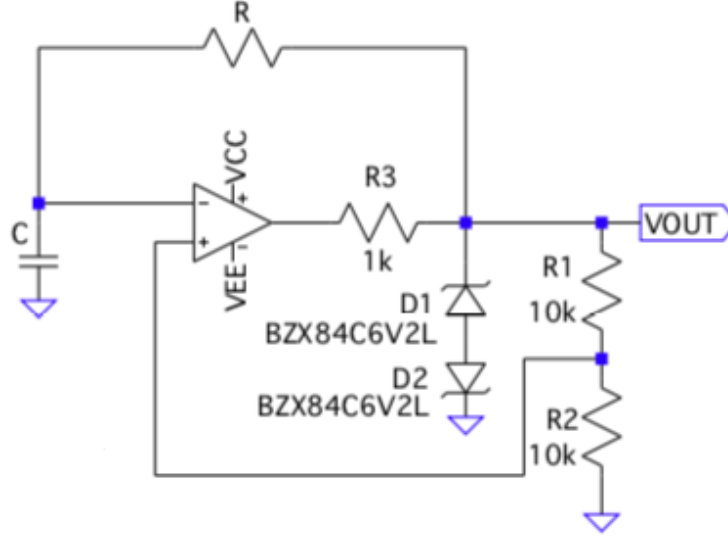


Figura 8: Multivibratore astabile

risolvendo per  $t$ , e moltiplicando per due equivale a trovare il periodo

$$-(1 + \alpha)e^{-t/RC} = 1 - \alpha \quad -\frac{t}{RC} = \ln \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad t = RC \ln \left( 1 + 2 \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$T = 2RC \ln \left( 1 + 2 \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (8)$$

**b.** Grazie all'equazione 8 è stato possibile scegliere una resistenza  $R = (120.3 \pm 0.9)k\Omega$  e una capacità  $C = (10.8 \pm 0.4)nF$  da cui otteniamo un periodo di  $T = (2.88 \pm 0.02)ms$

**c.**  $V_{out}$  presenta un'onda quadra con ampiezza data dalla tensione di breakdown dei diodi zener, e periodo dato dall'equazione 8, il segnale  $V_+$  presenta la stessa forma di  $V_{out}$  in quanto i due segnali differiscono solamente per il partitore  $R_1, R_2$  e in particolare  $V_+ \approx 1/2V_{out}$  figura 9.  $V_-$  presenta un segnale a pinna di squalo (figura 10) che è dato dalla carica e scarica del condensatore.

**d.** Come già accennato nel punto a. la funzione dei diodi è quella di fare oscillare  $V_{out}$  intorno a  $V_{th}$ . La funzione della resistenza  $R_3$  invece è quella di non far esplodere niente, infatti, se si considera quando il voltaggio d'uscita dell'OpAmp è  $V_{CC}$  l'intensità di corrente attraverso  $R_3$  sarà uguale a  $I_3 = (V_{CC} - V_{th})/R_3$ , quindi levare la resistenza  $R_3$  equivale a far divergere  $I_3$

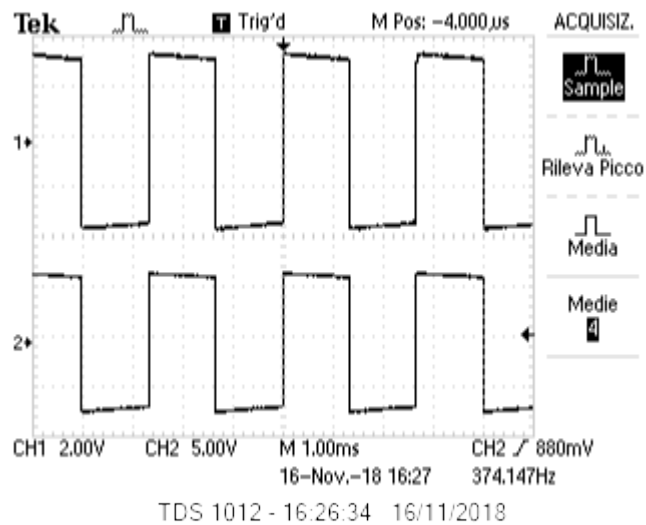


Figura 9: Screenshot dell'oscilloscopio con  $V_+$  (in alto) e  $V_{out}$  (in basso)

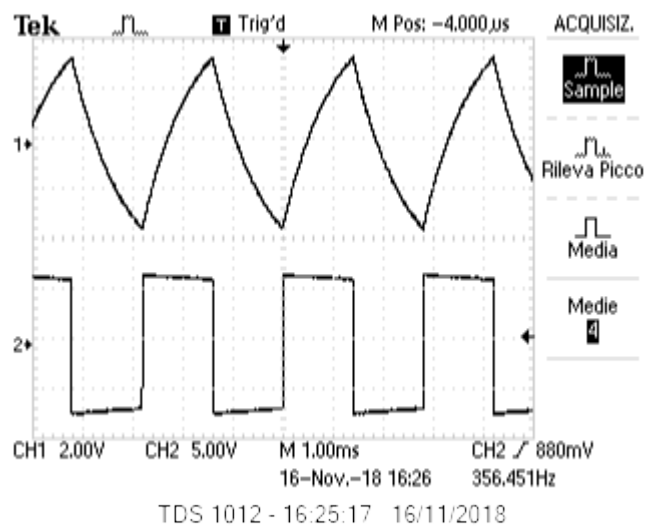


Figura 10: Screenshot dell'oscilloscopio con  $V_-$  (in alto) e  $V_{out}$  (in basso)

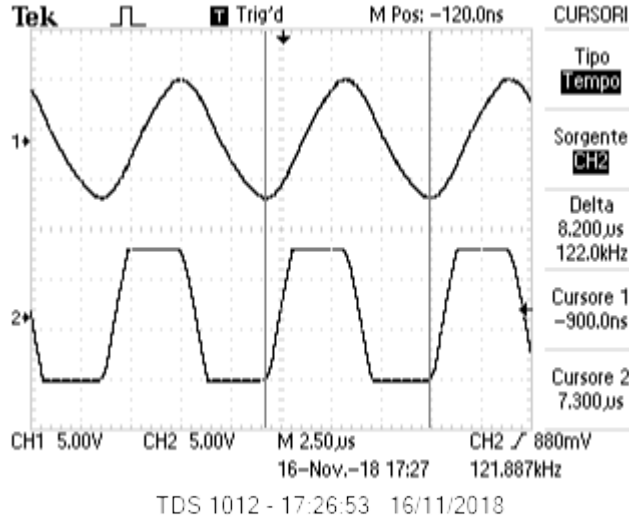


Figura 11: Screenshot dell'oscilloscopio con  $V_-$  (in alto) e  $V_{out}$  (in basso), come si vede il segnale in uscita non rappresenta più fedelmente un'onda quadra

e. se  $V_{CC}$  e  $V_{CE}$  sono un pò maggiori in modulo di  $V_{th}$  il voltaggio in uscita non dipende dalle tensioni di alimentazione, se invece sono minori, allora si notano delle differenze.

Purtroppo a causa della complessità del sistema di equazioni<sup>4</sup> non ci è stato possibile determinare esattamente come variano i parametri, tuttavia è possibile dare delle stime qualitative.

A causa di  $R_3$  il  $V_{out}$  è circa il 0.95 volte il voltaggio in uscita del OpAmp, quindi se il voltaggio dell'uscita scende anche  $V_{out}$  scende (quasi) allo stesso modo, l'abbassamento di  $V_{out}$  causa un rallentamento nella carica o scarica del condensatore modificando il duty cycle.

in particolare se  $V_{CC}$  scende, il duty cycle aumenta e il massimo di  $V_{out}$  scende, se  $V_{CE}$  sale<sup>5</sup>, il duty cycle scende e il minimo di  $V_{out}$  sale.

f. La massima frequenza dell'oscillatore è dato dallo stew-rate dell'operazionale, essendo lo stew-rate  $\approx 10V/\mu s$  la massima frequenza che si può ottenere prima che l'onda diventi triangolare a  $5V$  è  $500kHz$ , quindi in generale l'onda è abbastanza quadra a frequenze inferiori ai  $50kHz$ , in figura 11 si vede che già a  $120kHz$  il segnale in uscita differisce da un'onda quadra

<sup>4</sup>in particolare  $R_3$  aggiunge 2 equazioni al sistema

<sup>5</sup>ricodati che è negativo, quindi in modulo scende