Calcolo Numerico - Progetto 2

Francesco Samuele Fumagalli - 957139

Maggio 2023

1 Modello matematico

1.1 Leggi di Kirchhoff alle correnti per ogni nodo della rete

$$
\begin{cases}
-i_{in} + i_1 + i_3 = 0 & (1) \\
-i_1 + i_2 + i_4 = 0 & (2) \\
-i_2 + i_5 = 0 & (3) \\
-i_3 + i_6 + i_8 = 0 & (4) \\
-i_4 - i_6 + i_7 + i_9 = 0 & (5) \\
-i_5 - i_7 + i_{10} = 0 & (6)
\end{cases}
$$

1.2 Legge di Ohm per ogni corrente di lato

$$
\begin{cases}
i_1 = G_1\,(v_1 - v_2) \\
i_2 = G_1\,(v_2 - v_3) \\
i_3 = G_2\,(v_1 - v_4) \\
i_4 = G_2\,(v_2 - v_5) \\
i_5 = G_2\,(v_3 - v_6) \\
i_6 = G_3\,(v_4 - v_5) \\
i_7 = G_3\,(v_5 - v_6) \\
i_8 = G_4\,v_4 \\
i_9 = G_4\,v_5 \\
i_{10} = G_4\,v_6
\end{cases}
$$

1.3 Legge di Kirchhoff alla tensione per la maglia di ingresso

$$V_{in} - i_{in}\,R_{in} - i_3\,R_2 - i_8\,R_4 = 0$$

1.4 Elenco delle incognite del problema

Incognite:

$$v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\,,\ v_4\,,\ v_5\,,\ v_6\,,\ i_1\,,\ i_2\,,\ i_3\,,\ i_4\,,\ i_5\,,\ i_6\,,\ i_7\,,\ i_8\,,\ i_9\,,\ i_{10}\,,\ i_{in}$$

Abbiamo quindi **17** incognite per **17** equazioni (6 da 1.1 + 10 da 1.2 + 1 da 1.3).

2 Analisi con metodi diretti

2.1 Matrice delle ammettenze Y e termine noto b

```
Y =

    0.0250   -0.0100         0   -0.0050         0         0
   -0.0100    0.0250   -0.0100         0   -0.0050         0
         0   -0.0100    0.0150         0         0   -0.0050
   -0.0050         0         0    0.0108   -0.0033         0
         0   -0.0050         0   -0.0033    0.0142   -0.0033
         0         0   -0.0050         0   -0.0033    0.0108
```

```
b =

    0.0100
         0
         0
         0
         0
         0
```

2.2 Esistenza e unicità della fattorizzazione LU di Y

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un'unica fattorizzazione LU di Y con $L_{ii} = 1\,,\ i = 1, \ldots, 6$ è che i determinanti dei minori principali di Y siano tutti non nulli; questi ultimi valgono:

```
det_minors =

   2.5000e-02   5.2500e-04   5.3750e-06   5.1354e-08   5.5061e-10
```

Essi sono tutti $\neq 0$, la condizione necessaria e sufficiente di esistenza e unicità è quindi soddisfatta.

2.3 Fattorizzazione LU di Y

Fattorizzando Y attraverso la user-coded function `lu_factorization` si ottengono le matrici:

```
L =

   1.0000e+00            0            0            0            0            0
  -4.0000e-01   1.0000e+00            0            0            0            0
            0  -4.7619e-01   1.0000e+00            0            0            0
  -2.0000e-01  -9.5238e-02  -9.3023e-02   1.0000e+00            0            0
            0  -2.3810e-01  -2.3256e-01  -4.2191e-01   1.0000e+00            0
            0            0  -4.8837e-01  -4.8682e-02  -4.3765e-01   1.0000e+00


U =

   2.5000e-02  -1.0000e-02            0  -5.0000e-03            0            0
            0   2.1000e-02  -1.0000e-02  -2.0000e-03  -5.0000e-03            0
            0            0   1.0238e-02  -9.5238e-04  -2.3810e-03  -5.0000e-03
            0            0            0   9.5543e-03  -4.0310e-03  -4.6512e-04
            0            0            0            0   1.0722e-02  -4.6924e-03
            0            0            0            0            0   6.3152e-03
```

2.4 Risoluzione del sistema $Yx = b$

Confronto tra la soluzione del sistema xm calcolata con la built-in function di Matlab \ e la soluzione xc calcolata mediante le user-coded functions `forward_substitution` e `backward_substitution`:

```
>> [xm , xc]

ans =

     7.096049428945891e-01     7.096049428945891e-01
     5.519565624414905e-01     5.519565624414905e-01
     4.808088372963866e-01     4.808088372963866e-01
     4.441115895899644e-01     4.441115895899644e-01
     3.789552518255009e-01     3.789552518255009e-01
     3.385133870061787e-01     3.385133870061787e-01
```

2.5 Norma infinito di xm - xc

Il risultato di diff$= ||\,xm - xc\,||_\infty$ è:

```
diff =

     0
```

3 Analisi con metodi iterativi

3.1 Verifica che Y sia simmetrica e definita positiva

Eseguendo il comando `Y==Y'` restituisce la matrice 6x6:

```
ans =

  6×6 logical array

   1   1   1   1   1   1
   1   1   1   1   1   1
   1   1   1   1   1   1
   1   1   1   1   1   1
   1   1   1   1   1   1
   1   1   1   1   1   1
```

Poiché essa presenta solo valori $=$ "1" Y e la sua trasposta Y' sono uguali, Y è quindi simmetrica.

Il comando Matlab `eig(Y)` calcola gli autovalori della matrice Y restituendo:

```
ans =

   2.3107e-03
   8.4784e-03
   1.2463e-02
   1.6223e-02
   2.2719e-02
   3.8639e-02
```

Poiché tutti gli autovalori sono > 0 Y è definita positiva.

3.2 Risoluzione del sistema $Yx = b$

Confronto tra la soluzione del sistema xm calcolata con la built-in function di Matlab \ e la soluzione xGS calcolata con il metodo di Gauss-Seidel mediante la user-coded function `richardson_stat`:

```
>> [xm , xGS]

ans =

   7.096049428945891e-01    7.096049428940281e-01
   5.519565624414905e-01    5.519565624407000e-01
   4.808088372963866e-01    4.808088372956230e-01
   4.441115895899644e-01    4.441115895894713e-01
   3.789552518255009e-01    3.789552518249385e-01
   3.385133870061787e-01    3.385133870056534e-01
```

3.3 Numero di iterazioni e errore relativo

Confronto fra il numero di iterazioni eseguite k , l'errore relativo effettivamente commesso $true\_rel\_err$ e l'errore relativo stimato est_rel_err:

```
>> [k , true_rel_err , est_rel_err]

ans =

   9.0000e+01   1.2560e-12   8.0592e-13
```

3.4 Fattore di condizionamento

Il fattore di condizionamento ($fact$) dell'errore relativo vale:

```
fact =

   5.1083e+00
```