Calcolo Numerico - Progetto 1

Francesco Samuele Fumagalli - 957139

Marzo 2023

1 Modello matematico

Dallo schema circuitale si impone il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i_S = i_R + i_C & \text{(Legge di Kirchhoff dei nodi)} \\ i_R = \dfrac{v(t)}{R} & \text{(Legge di Ohm)} \\ i_C = C\,\dfrac{d\,v(t)}{dt} & \text{(Relazione caratteristica condensatore)} \end{cases}$$

Dal quale si ricava l'equazione differenziale:

$$\frac{d\,v(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\,v(t) = \frac{i_S(t)}{C}$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine a coefficienti continui del tipo $y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$. Esiste quindi l'integrale generale:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left\{c + \int b(t)\,e^{A(t)}\,dt\right\}$$

con $\boldsymbol{A(t)}$ primitiva di a(t) e $\boldsymbol{c}$ costante di integrazione arbitraria.

In particolare: $a(t) = \dfrac{1}{RC}$, $b(t) = \dfrac{i_S(t)}{C}$.

$$\Longrightarrow A(t) = \int_0^t a(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{RC}\,du = \frac{1}{RC}\,t$$

$$\Longrightarrow v(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left\{c + \int_0^t \frac{i_S}{C}\,e^{\frac{u}{RC}}\,du\right\} =$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}}\left\{c + i_S R\,e^{\frac{t}{RC}} - i_S R\right\} =$$

$$= i_S + \left(c - i_S R\right)\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

Impongo le condizioni al contorno:

$$v_0 = v\,(t = 0) = \; c$$

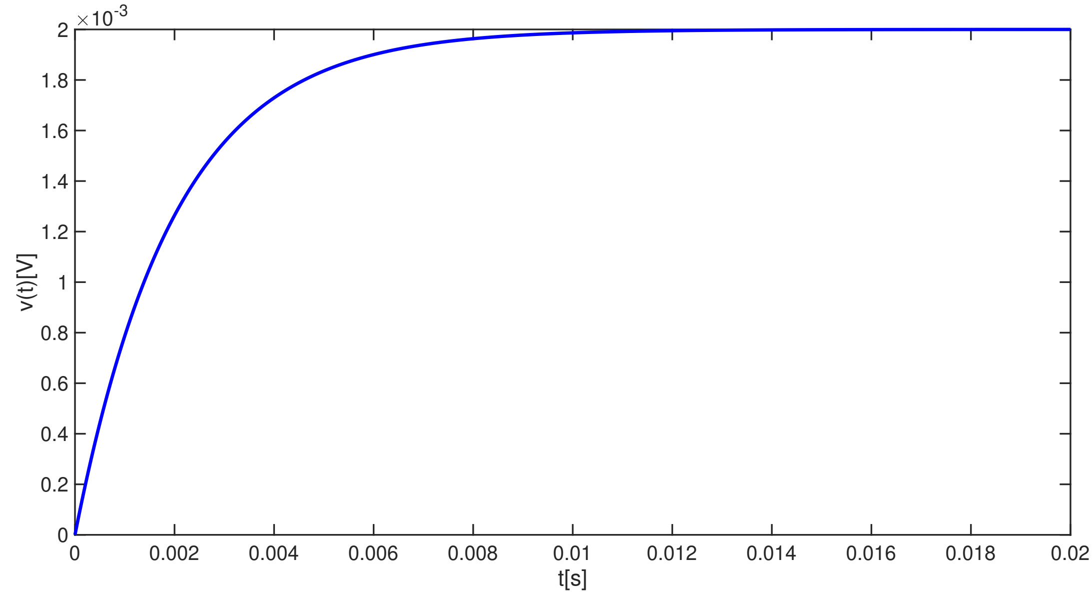
$$v_\infty = v\,(t \to \infty) = i_S R = \; \bar{I}_S R \qquad \text{(per } 0 \leq t \leq T\text{)}$$

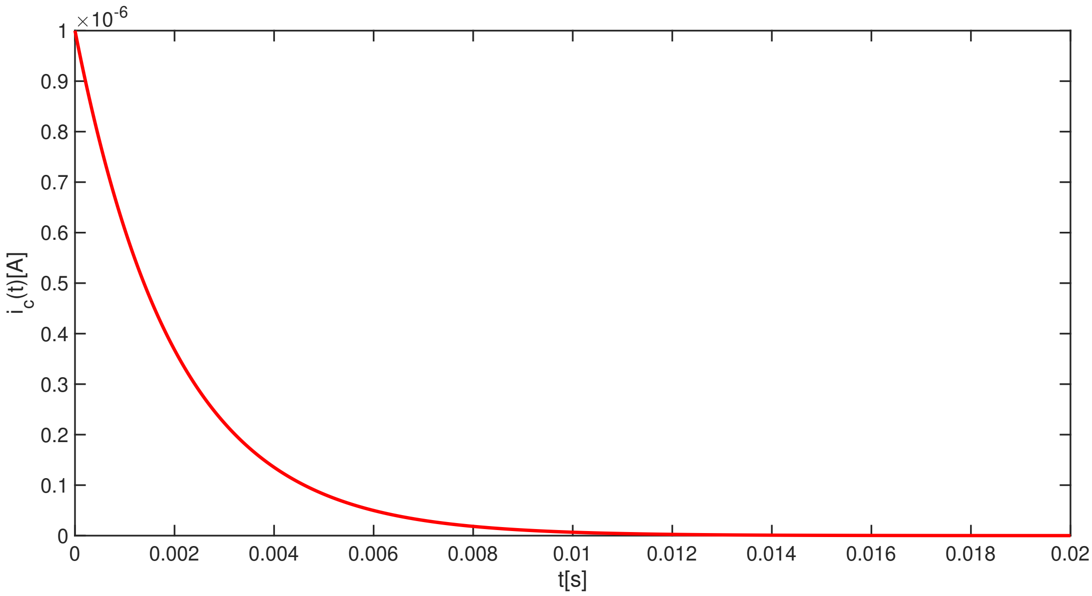
$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{v(t)}{=}\mathrm{v}_\infty + (v_0 - v_\infty)\; e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \text{con } \tau = RC \tag{1}$$

Attraverso la relazione caratteristica del condensatore si ricava:

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}_C(t) = C\,\frac{d\,v(t)}{dt} = -\frac{C}{\tau}(v_0 - v_\infty)\; e^{-\frac{t}{\tau}}} \tag{2}$$

2 Analisi, implementazione e visualizzazione





3 Trattamento dati