

Valutazione sperimentale del modello della catenaria per una catena appesa

Alessandro Di Meglio
Francesco Angelo Fabiano Antonacci

January 18, 2024

1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza consiste nel valutare se il modello dell'equazione (1) per la disposizione spaziale di una catena appesa a due estremi è consistente con dei dati sperimentali.

2 Cenni teorici

La disposizione su un piano di una catena appesa a due estremi è modellizzata dalla seguente formula:

$$y = y_0 + a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad (1)$$

3 Apparato strumentale

3.1 Materiale Utilizzato

Per l'esperienza sono stati utilizzati i seguenti strumenti:

- Filo a piombo
- Catenella
- Nastro adesivo
- Smartphone

3.2 Misure di lunghezza

Per le misure di lunghezza è stato utilizzato un metro a nastro con risoluzione di 1 mm.

a [m]	x_0 [m]	y_0 [m]
-0.389 ± 0.002	0.8960 ± 0.0002	1.943 ± 0.002

Table 1: Stima delle altezze massime raggiunte tra i rimbalzi

4 Descrizione delle misure

Con l'ausilio del metro a nastro, del nastro adesivo e del filo a piombo è stata appesa la catenella con estremi a medesima altezza. E' stato posto il filo a piombo sull'asse del segmento congiungente i due estremi, ai fini di poter verificare successivamente il corretto allineamento della fotografia. Per ridurre l'effetto prospettico, tramite dei punti di riferimento ci siamo allineati quanto possibile. Per mitigare l'effetto occhio di pesce della fotocamera ci siamo allonati quanto possibile. E' stata scattata la fotografia con lo smartphone. Dalla fotografia sono state prese le coordinate dei punti medi della catena in pixel.

4.1 Incertezze sulle misure di posizione

E' stato considerato σ_x diverso da σ_y .

4.1.1 Incertezze sulle x

Sulle x è stata considerata $\sigma_x = 0.3$ [pixel], in quanto è la distribuzione uniforme sulla risoluzione del nostro campionamento sulla fotografia(1 pixel).

4.1.2 Incertezze sulle y

Sulle y è stata considerata $\sigma_y = 1.1$ [pixel]. E' stata stimata prendendo il ripetuto campionamento per una x, effettuato allo stesso modo dei restanti punti, e facendo la varianza campione sulle coordinate y raccolte.

5 Analisi dei dati

5.1 Algoritmo di Best-Fit

Per utilizzare l'algoritmo di best fit "*curve_fit()*" per l'equazione (1) è stata verificata a posteriori la seguente relazione:

$$\sigma_y \gg \left| \frac{dy}{dx} \right| \sigma_x \quad (2)$$

La derivata massima della curva ottenuta dal fit mediante (1) delle coordinate campionate è 0.8.

$$1.1[\text{pixel}] \gg 0.2[\text{pixel}] \quad (3)$$

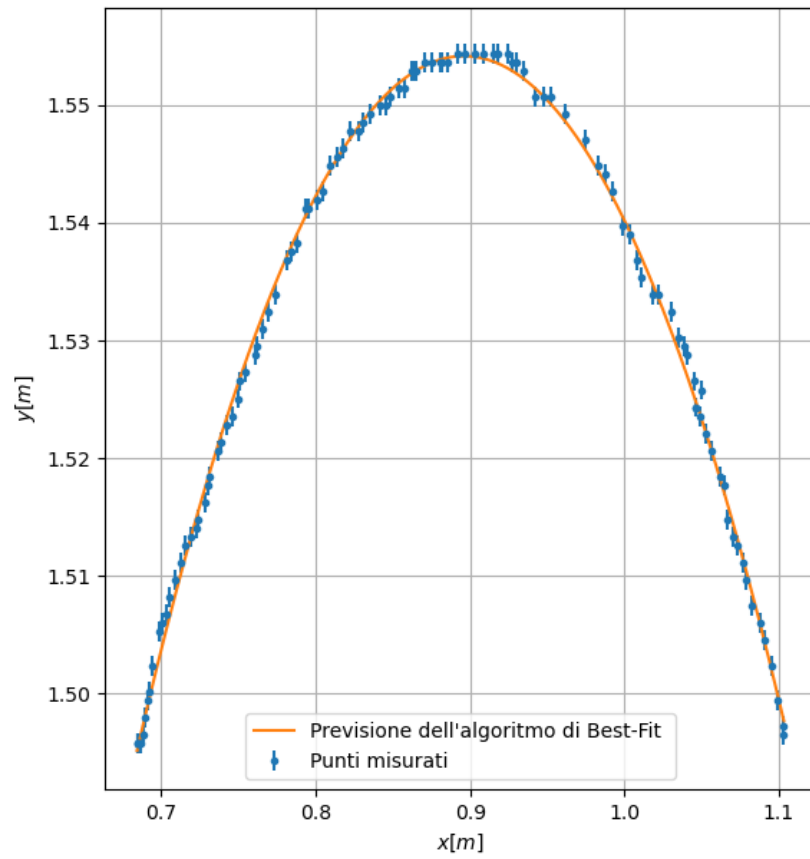


Figure 1: Punti misurati e modello di (1) con i parametri dell'algorithmo di best-fit.

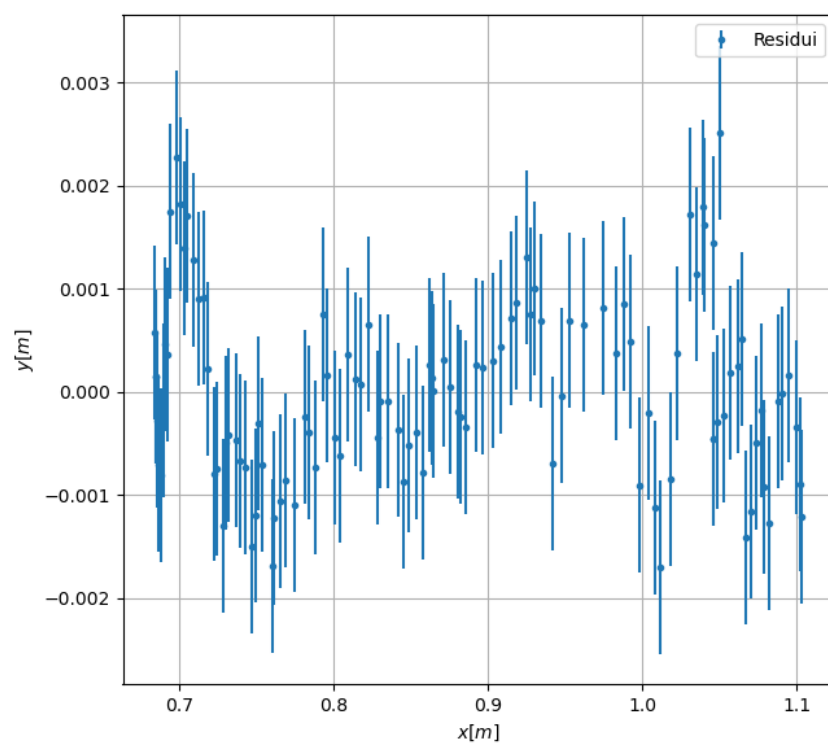


Figure 2: Grafico dei residui.

5.2 X^2 e p-Value

Il valore dei gradi di libertà è $\nu = 108$: abbiamo campionato 111 punti e abbiamo utilizzato 3 parametri nel nostro modello. Il chi-quadro stimato dall'algoritmo di best-fit è $X^2 = 120$. Il p-value corrispondente è $p = 0.79$.

5.3 Errori sistematici

Dal grafico dei residui si osserva la presenza di errori sistematici: assunto di avere il modello "corretto" e i parametri "reali", un punto misurato nel grafico dei residui dovrebbe avere il 50% di trovarsi sopra o sotto lo 0. Il fatto che ci siano sezioni con 11 punti consecutivi sopra il grafico dovrebbe accadere 1 volta su 2000. Su un centinaio di punti che questo accada è alquanto improbabile: molto probabilmente è presente un errore sistematico nelle misure. Questo potrebbe essere dovuto alla deformazione prospettica, oppure all'occhio di pesce della lente, oppure a un cattivo campionamento.

6 Conclusioni

Considerato il valore del p-value non ci sono motivi per rigettare il modello dato dall'equazione(1).