

# Pendolo quadrifilare

Francesco Angelo Fabiano Antonacci  
Alessandro Di Meglio

April 24, 2024

## 1 Scopo dell'esperienza

Gli scopi dell'esperienza sono:

- lo studio della costante di smorzamento della velocità di oscillazione del pendolo
- studio della dipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione

## 2 Cenni teorici

Ai fini di stimare le velocità massime  $v_{max}$  nel punto più basso è stata utilizzata la seguente relazione:

$$v_{max} = \frac{wl}{t_T d} \quad (1)$$

Dove  $w$  è l'ampiezza della bandierina,  $l$  è la distanza centro di massa-punto di sospensione,  $t_T$  è il tempo che la bandierina impiega per passare attraverso il sensore,  $d$  è la distanza tra punto di sospensione-bandierina.

Assunto che l'attrito viscoso sia proporzionale alla velocità massima  $v(t)$  con la quale un pendolo oscilla, la  $v(t)$  decresce esponenzialmente con un coefficiente di smorzamento  $\lambda$ . Data  $v_0$  la velocità iniziale è valida:

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Definiamo il tempo di smorzamento come  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ .

L'ampiezza massima di ciascuna oscillazione è stata stimata con la seguente relazione:

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{v_{max}^2}{2gl}\right) \quad (3)$$

Dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Il periodo delle oscillazioni di un pendolo in funzione dell'ampiezza delle oscillazioni è descritto dalla seguente equazione:

$$T = 2\pi(a_1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^4 + o(\theta^4)) \quad (4)$$

Dove è possibile dimostrare che  $a_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $a_2 = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $a_3 = \frac{11}{3072}\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

## 3 Apparato strumentale

### 3.1 Materiale

- Un pendolo quadrifilare;
- un computer per acquisizione ed analisi dei dati.

### 3.2 Strumenti di misura

- calibro ventesimale (risoluzione  $0.05mm$  )
- metro a nastro (risoluzione  $1mm$ )
- Arduino (risoluzione  $1\mu s$ )

## 4 Descrizione delle misure

In tabella(4) riportiamo le misure raccolte relative alle dimensioni del pendolo.

$b[mm]$	$l[mm]$	$w[mm]$
$58 \pm 1$	$1087 \pm 1$	$19.80 \pm 0.05$

Table 1:  $b$  è la distanza tra centro di massa e bandierina,  $l$  la distanza tra centro di massa del pendolo e punto di sospensione,  $w$  è lo spessore della bandierina.

E' stato lasciato oscillare il pendolo più volte e partendo da diverse ampiezze iniziali e da Arduino sono stati acquisiti: tempo di transito, periodo di oscillazione, tempo rispetto all'avvio delle misure.

## 5 Analisi dei dati

### 5.1 Smorzamento della velocità di oscillazione

E' stato fatto un fit ai minimi quadrati dell'equazione (2) lasciando  $v_0$  e  $\lambda$  come parametri liberi. E' stato verificato che l'influenza dell'incertezza sui tempi è cinque ordini di grandezza più piccola dell'incertezza sulle velocità misurate: di conseguenza i tempi saranno la variabile indipendente. In tabella (2) sono riportati i risultati dell'algoritmo di best-fit.

In figura(1) sono riportati i dati sperimentali considerati in questa sezione e la previsione del modello teorico, in figura (2) è riportato il grafico dei residui.

$v_0$ [m/s]	$\lambda[s^{-1}]$	$\tau[s]$
$0.4967 \pm 0.0001$	$2533 \times 10^{-6} \pm 2 \times 10^{-6}$	$394.8 \pm 0.3$

Table 2: Risultati dell'algoritmo di best fit per l'equazione(2)

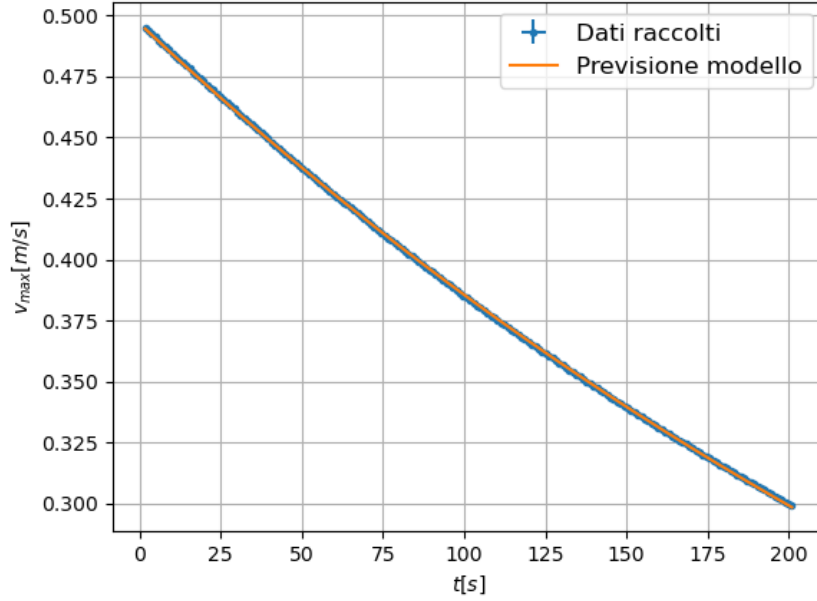


Figure 1: Dati sperimentali e previsione del modello teorico(equazione (2)) coi parametri di best-fit.

### 5.1.1 Valutazione del modello

Dal grafico dei residui, a causa delle eccessive permanenze, si deduce la presenza di un errore sistematico o di un errore del modello. Segue che non è possibile fare il test del  $\chi^2$ .

## 5.2 Variazione del periodo in funzione dell'angolo massimo

E' stato ripetuto il fit descritto nella sezione(5.1) su un campionamento di dati diverso, per poter considerare oscillazioni di maggiore ampiezza. Grazie alla relazione(3) è stata fatta la stima degli angoli massimi. E' stato fatto il fit ai minimi quadrati dell'equazione (4) lasciando come parametri liberi  $a_1, a_2, a_3$ . E' stato fatto il fit anche lasciando solo  $a_1$  e  $a_2$  come parametri liberi. Come variabile indipendente è stato utilizzato l'angolo massimo, sti-

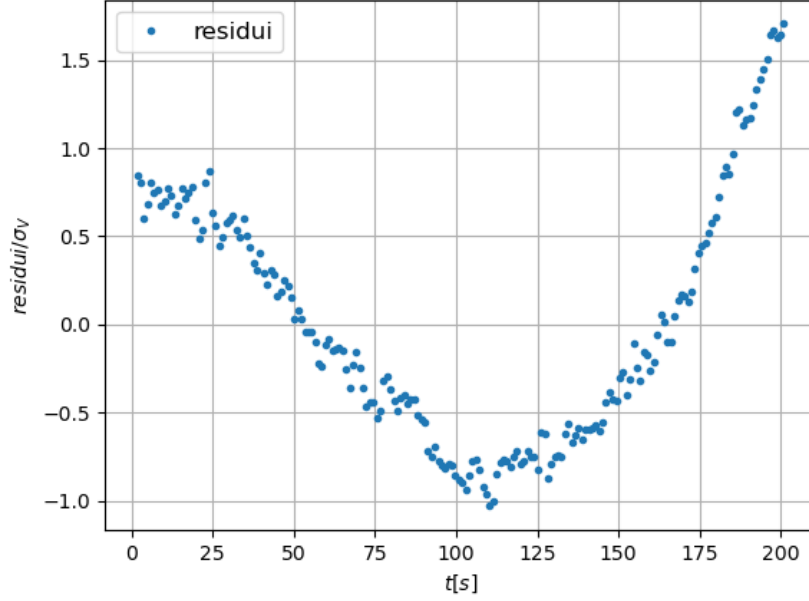


Figure 2: Grafico dei residui della legge(2).

mato secondo l'equazione(3); come variabile dipendente sono stati utilizzati i periodi registrati da Arduino. Non essendo trascurabili gli errori sulla variabile indipendente, è stato utilizzato l'errore efficace iterando l'algoritmo di best-fit.

In tabella (3) sono riportati i risultati dell'algoritmo di best-fit.

	Modello con 3 parametri	Modello con 2 parametri	Previsione teoria
$v_0[m/s]$	$26605 \times 10^{-4} \pm 8 \times 10^{-4}$	$26605 \times 10^{-4} \pm 8 \times 10^{-4}$	
$\lambda[s^{-1}]$	$-3305 \times 10^{-6} \pm 5 \times 10^{-6}$	$26605 \times 10^{-4} \pm 8 \times 10^{-4}$	
$a_1$	$3353 \times 10^{-4} \pm 2 \times 10^{-4}$	$33496 \times 10^{-5} \pm 3 \times 10^{-5}$	$3330 \times 10^{-4} \pm 2 \times 10^{-4}$
$a_2$	$215 \times 10^{-4} \pm 7 \times 10^{-4}$	$2301 \times 10^{-5} \pm 7 \times 10^{-5}$	$20810 \times 10^{-5} \pm 1 \times 10^{-5}$
$a_3$	$15 \times 10^{-4} \pm 7 \times 10^{-4}$		$11922 \times 10^{-7} \pm 6 \times 10^{-7}$

Table 3: Sono riportati i risultati dell'algoritmo di best fit per l'equazione(4) nel caso in cui si usano  $a_1, a_2, a_3$  che nel caso in cui si usa solo  $a_1, a_2$ . Sono riportati i valori che ci aspetta dalla teoria.

E' stato osservato che se utilizzare tre termini anziché due nello sviluppo della formula del periodo delle oscillazioni del pendolo (equazione(4)) migliora sensibilmente i residui, aggiungerne un quarto non fa altrettanto e influisce sul modello con un ordine di grandezza inferiore alla a quello barra di errore delle misure sui periodi.

In figura(3) sono stati riportati i dati dei periodi delle oscillazioni rispetto agli angoli massimi con le previsioni del modello dell'equazione(4) con 2 e con 3 termini; in figura(4) si trova il corrispondente grafico dei residui. In figura(5) sono stati riportati i dati sperimentali del periodo del pendolo rispetto al tempo trascorso e le previsioni del modello delle equazioni(3) e (4) con 2 e 3 termini.

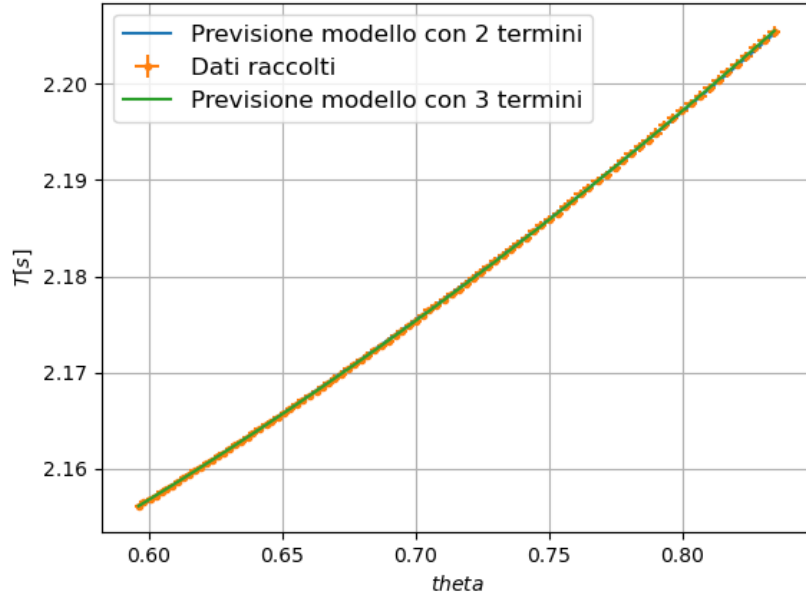


Figure 3: Periodo del pendolo in funzione dell'apertura massima. Il modello utilizzato è quello dell'equazione(4) con i parametri di best fit.

### 5.2.1 Valutazione del modello

Si confrontano i valori di  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  misurati sperimentalmente con quelli indicati dalla teoria: la teoria e i dati sono tra loro incompatibili per  $a_1$  (pur differendo tra loro di due centesimi); distando meno di una barra di errore, sono compatibili per  $a_2$  e  $a_3$ .

Dal grafico dei residui non vi è motivo di rigettare il modello. Ciononostante  $\chi^2 = 0.726$ ,  $p_{value} = 0$ ,  $Dof = 88$ ; segue o che gli errori sono stati sovrastimati, oppure che il modello di fit è stato troppo flessibile.

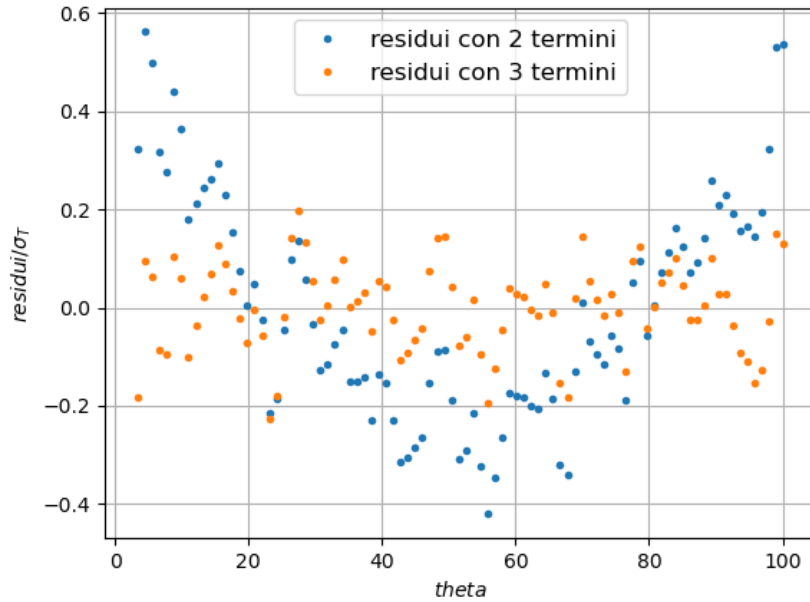


Figure 4: Grafico dei residui della legge(4).

## 6 Conclusione

Il modello dell'equazione (2) non è stato verificato: è possibile che sia il modello inadeguato (ad esempio potrebbe essere necessario considerare l'attrito dipendente dipendente non linearmente dalla velocità) oppure che sia presente un errore sistematico. Il modello dell'equazione(4) potrebbe rischiare l'overfitting sulle misure: sarebbero necessarie una più ampia statistica e una migliore misura delle dimensioni fisiche del pendolo, per poter rigettare o verificare il modello.

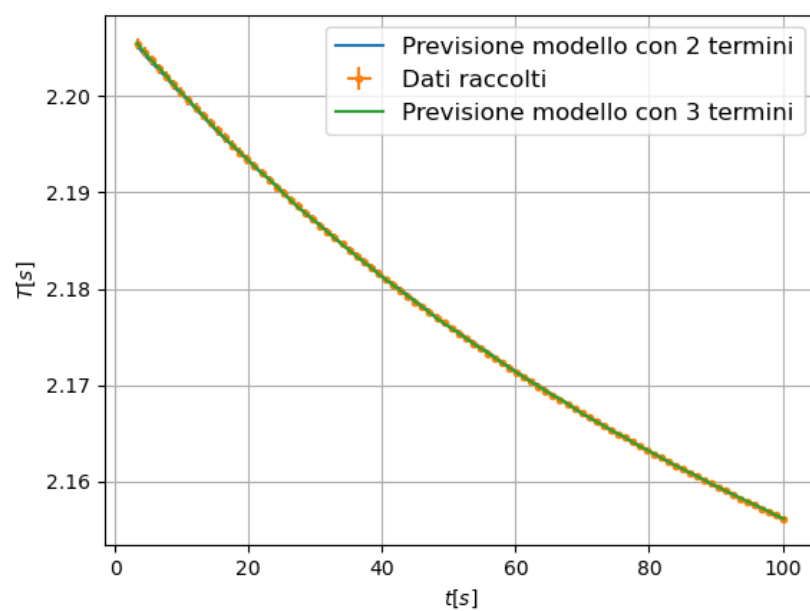


Figure 5: Periodo di oscillazione del pendolo in funzione del tempo trascorso.