

# Pendolo quadrifilare

Francesco Angelo Fabiano Antonacci  
Alessandro Di Meglio

April 16, 2024

## 1 Scopo dell'esperienza

Gli scopi dell'esperienza sono:

- lo studio della costante di smorzamento della velocità di oscillazione del pendolo
- studio della dipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione

## 2 Cenni teorici

Ai fini di stimare le velocità massime  $v_{max}$  nel punto più basso è stata utilizzata la seguente relazione:

$$v_{max} = \frac{wl}{t_T d} \quad (1)$$

Dove  $w$  è l'ampiezza della bandierina,  $l$  è la distanza centro di massa-punto di sospensione,  $t_T$  è il tempo che la bandierina impiega per passare attraverso il sensore,  $d$  è la distanza tra punto di sospensione-bandierina.

Assunto che l'attrito viscoso sia proporzionale alla velocità massima  $v(t)$  con la quale un pendolo oscilla, la  $v(t)$  decresce esponenzialmente con un coefficiente di smorzamento  $\lambda$ . Data  $v_0$  la velocità iniziale è valida:

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Definiamo il tempo di smorzamento come  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ .

L'ampiezza massima di ciascuna oscillazione è stata stimata con la seguente relazione:

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{v_{max}^2}{2gl}\right) \quad (3)$$

Dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Il periodo delle oscillazioni di un pendolo in funzione dell'ampiezza delle oscillazioni è descritto dalla seguente equazione:

$$T = \sqrt{\frac{d}{g}}(a_1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^4 + o(\theta^4)) \quad (4)$$

Dove è possibile dimostrare che  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{16}$ ,  $a_3 = \frac{11}{3072}$ .

## 3 Apparato strumentale

### 3.1 Materiale

- Un pendolo quadrifilare;
- un computer per acquisizione ed analisi dei dati.

### 3.2 Strumenti di misura

- calibro ventesimale (risoluzione  $0.05mm$  )
- metro a nastro (risoluzione  $1mm$ )
- Arduino (risoluzione  $1\mu s$ )

## 4 Descrizione delle misure

In tabella(4) riportiamo le misure raccolte relative alle dimensioni del pendolo.

$b[mm]$	$l[mm]$	$w[mm]$
$58 \pm 1$	$1087 \pm 1$	$19.80 \pm 0.05$

Table 1:  $b$  è la distanza tra centro di massa e bandierina,  $l$  la distanza tra centro di massa del pendolo e punto di sospensione,  $w$  è lo spessore della bandierina.

E' stato lasciato oscillare il pendolo più volte e partendo da diverse ampiezze iniziali e da Arduino sono stati acquisiti: tempo di transito, periodo di oscillazione, tempo rispetto all'avvio delle misure.

## 5 Analisi dei dati

### 5.1 Smorzamento della velocità di oscillazione

Si fa un fit ai minimi quadrati dell'equazione (2) lasciando  $v_0$  e  $\lambda$  come parametri liberi. Si verifica che l'influenza dell'incertezza sui tempi è cinque ordini di grandezza più piccola dell'incertezza sulle velocità misurate: di conseguenza i tempi saranno la variabile indipendente. In tabella (5.1) sono riportati i risultati dell'algoritmo di best-fit.

$v_0$ [m/s]	$\lambda[s^{-1}]$	$\tau[s]$
$0.4967 \pm 0.0001$	$253310^{-6} \pm 210^{-6}$	$394.8 \pm 0.3$

Table 2: Risultati dell'algoritmo di best fit per l'equazione(2)

In figura(1) sono riportati i dati sperimentali considerati in questa sezione e la previsione del modello teorico, in figura (2) è riportato il grafico dei residui.

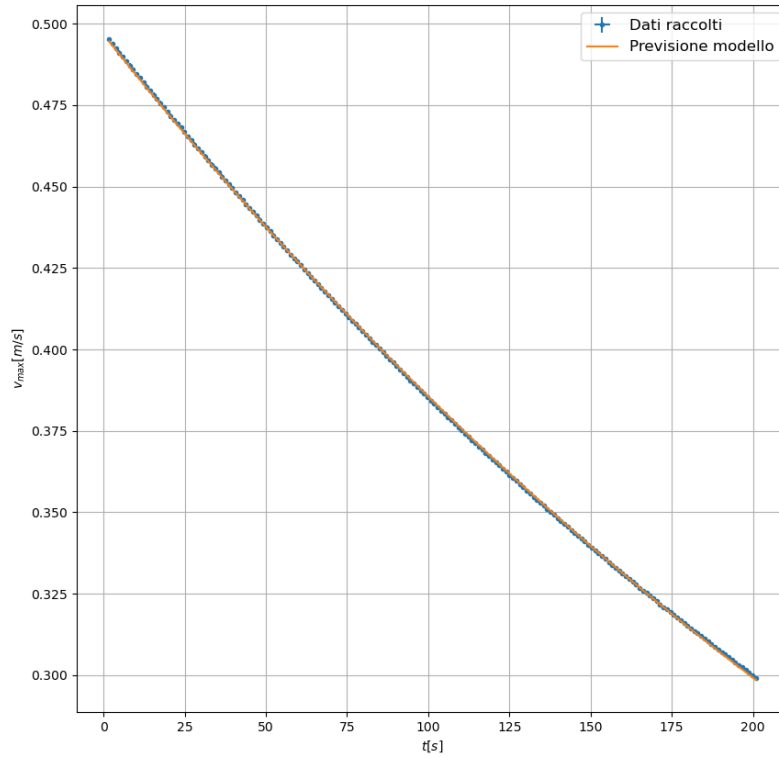


Figure 1: Dati sperimentali e previsione del modello teorico coi parametri di best-fit.

### 5.1.1 Valutazione del modello

Dal grafico dei residui, a causa delle eccessive permanenze, si deduce la presenza di un errore sistematico o di un errore del modello. Segue che non è possibile

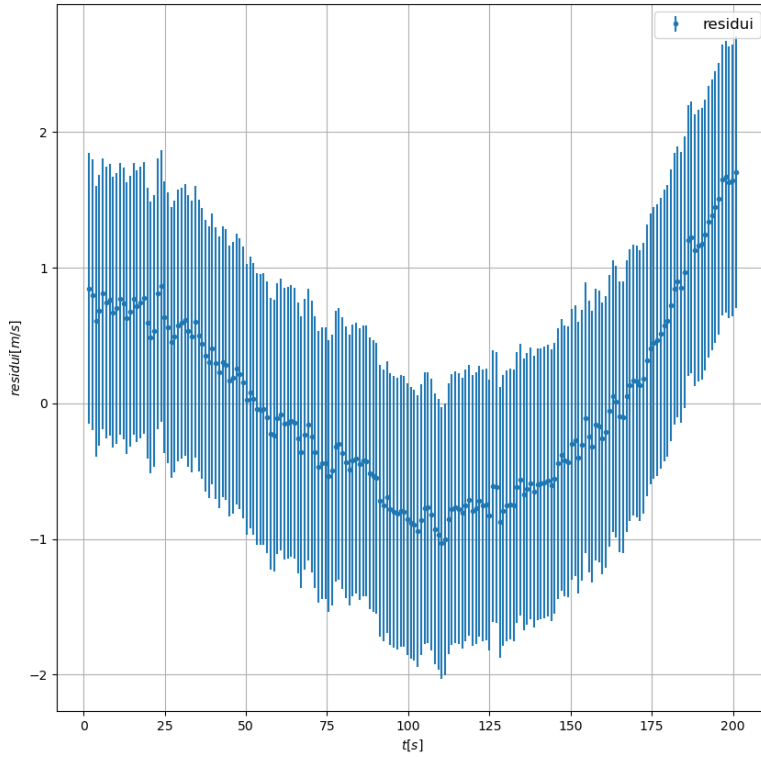


Figure 2: Grafico dei residui della legge(2).

fare il test del  $\chi^2$ .

## 5.2 Variazione del periodo in funzione dell'angolo massimo

E' stato ripetuto il fit descritto nella sezione(5.1) su un campionamento di dati diverso, per poter considerare oscillazioni di maggiore ampiezza. Grazie alla relazione(3) è stata fatta la stima degli angoli massimi. E' stato fatto il fit ai minimi quadrati dell'equazione (4) lasciando come parametri liberi  $k = \frac{l}{g}$ , ma anche  $a_1, a_2, a_3$ . Come variabile indipendente è stato utilizzato l'angolo massimo, stimato secondo l'equazione(3); come variabile dipendente sono stati utilizzati i periodi registrati da Arduino. Non essendo trascurabili gli errori sulla variabile indipendente è stato utilizzato l'errore efficace iterando l'algoritmo di best-fit.

In tabella (3) sono riportati i risultati dell'algoritmo di best-fit.

$v_0[m/s]$	$2.6605 \pm 0.0008$
$\lambda[s^{-1}]$	$-0.003305 \pm 0.000005$
$k[s]$	$0.12 \pm$
$a_1$	$0.96 \pm$
$a_2$	$0.061 \pm$
$a_3$	$0.00423 \pm$

Table 3: Risultati dell'algoritmo di best fit per l'equazione(4)

E' stato osservato che se utilizzare tre termini anziché due nello sviluppo della formula del periodo delle oscillazioni del pendolo (equazione(4)) migliora sensibilmente i residui, aggiungerne un quarto non fa altrettanto: inoltre già il terzo termine dello sviluppo si inizia a discostare dal valore previsto dalla teoria.

### 5.2.1 Valutazione del modello

## 6 Conclusione

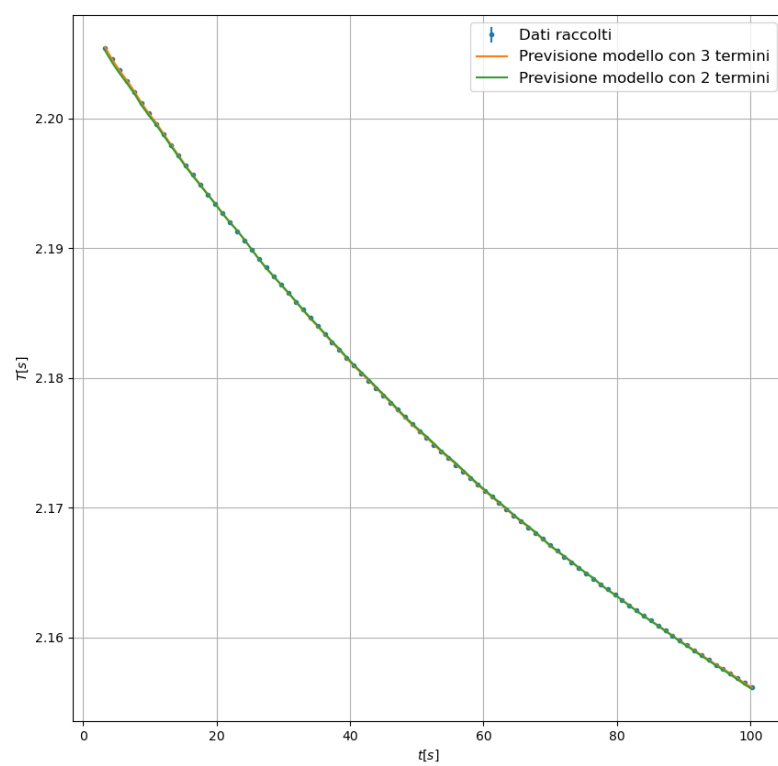


Figure 3: Periodo di oscillazione del pendolo in funzione del tempo trascorso.

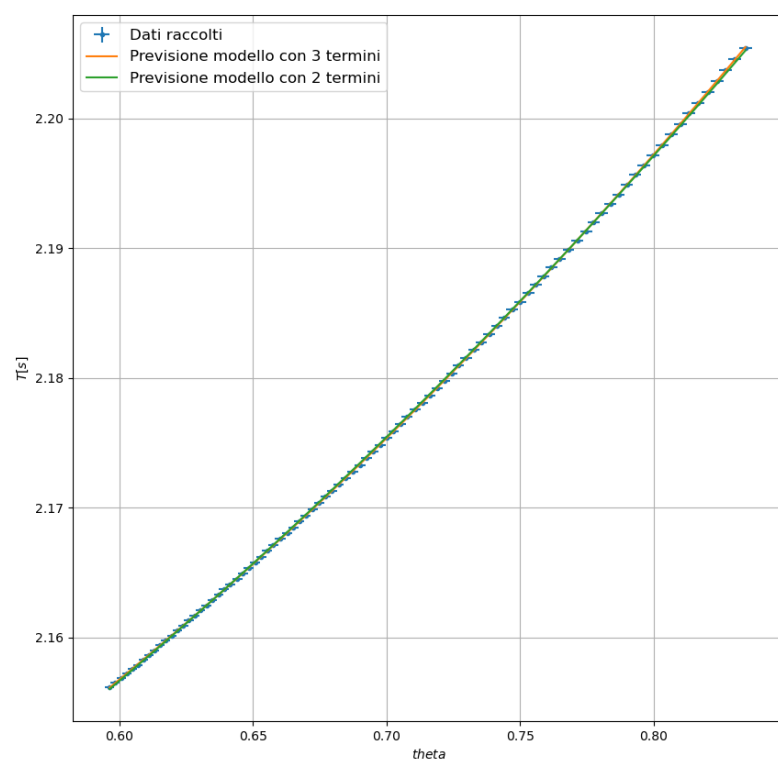


Figure 4: Periodo del pendolo in funzione dell'apertura massima

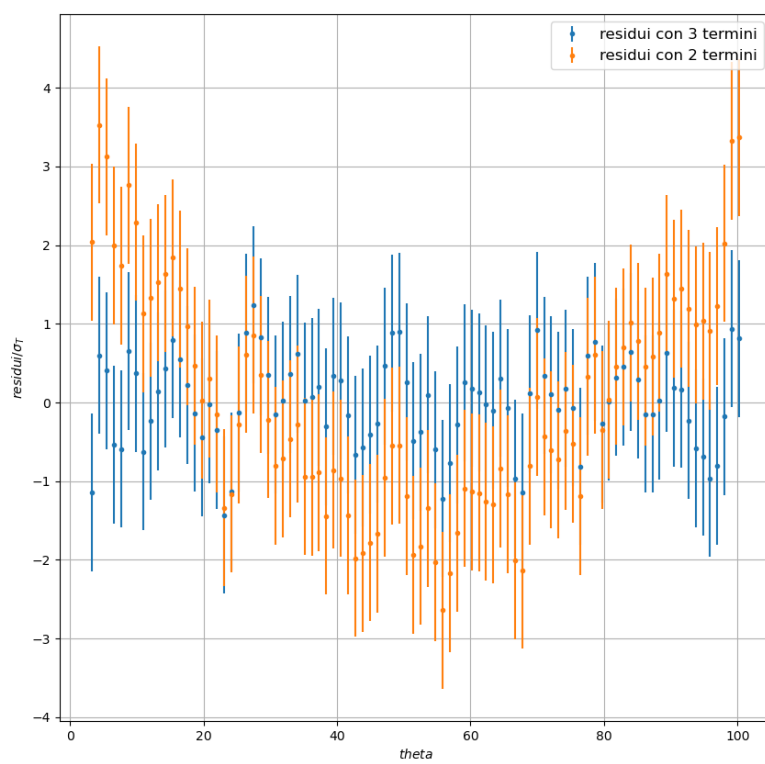


Figure 5: Grafico dei residui della legge(4).