

# Relazione Natalizia

Francesco Angelo Fabiano Antonacci

December 19, 2024

## 1 Ricostruzione numerica di forme d'onda

### 1.1 Forme d'onda quadre

Un'onda quadra alternata dispari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dalla seguente serie infinita a Eq.(1).

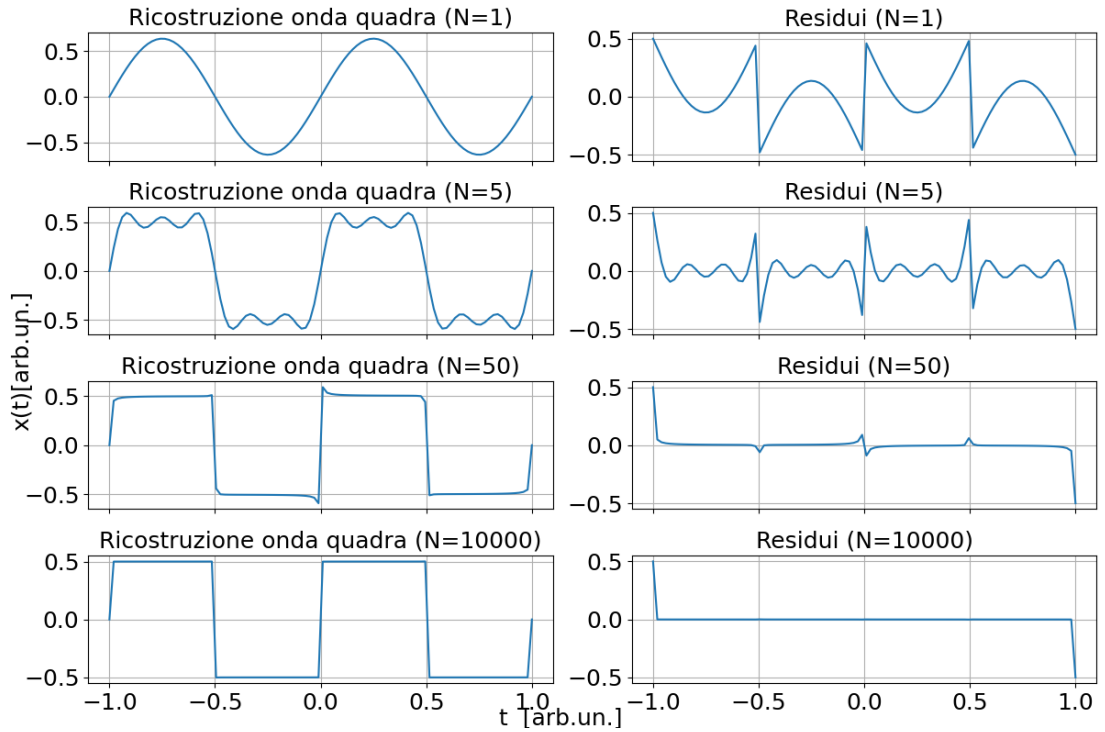


Figure 1: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione.  $N$  è il numero a cui è stata troncata la serie.

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\omega t) \quad (1)$$

In Fig(1) e Fig(2) sono mostrate due ricostruzioni numeriche dell'onda quadra. All'aumentare dei termini  $N$  della serie diminuisce la distanza tra onda analitica e serie di seni.

Si osserva che nel caso di Fig(1), la quale ha una risoluzione peggiore, la deformazione dell'onda quadra assomiglia a quanto visto nelle esperienze pratiche di laboratorio con l'oscilloscopio quando si usa il generatore di funzioni a frequenze sufficientemente alte: forse questo rivela qualcosa sul funzionamento del generatore di funzioni.

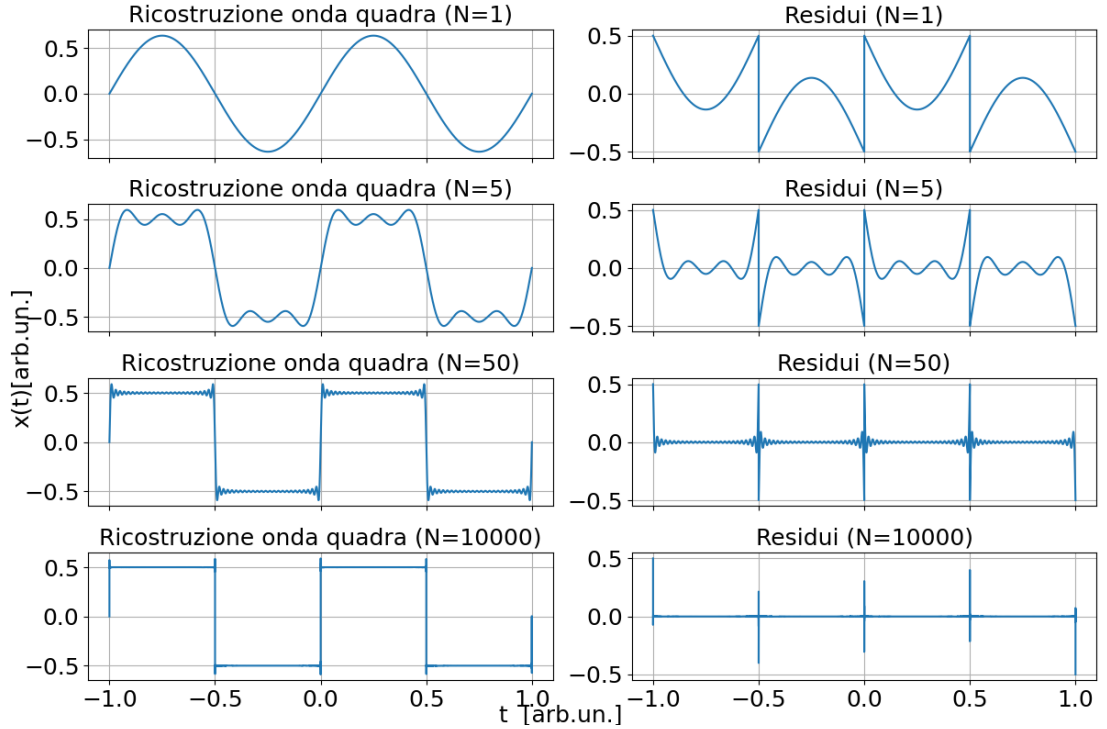


Figure 2: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione.  $N$  è il numero a cui è stata troncata la serie.

Si osserva che la presenza di lati obliqui nei transienti è conseguenza di un sottocampionamento della mia ricostruzione, questo comporta che non c'è miglioramento all'aumentare dei termini della serie.

I residui nei punti iniziali e i transienti non si annullano mai: in corrispondenza di ognuno di questi punti si trovano dei picchi.

## 1.2 Forme d'onda triangolari

Un'onda triangolare alternata pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dalla Eq.(2).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \right)^2 \cos(k\omega t) \quad (2)$$

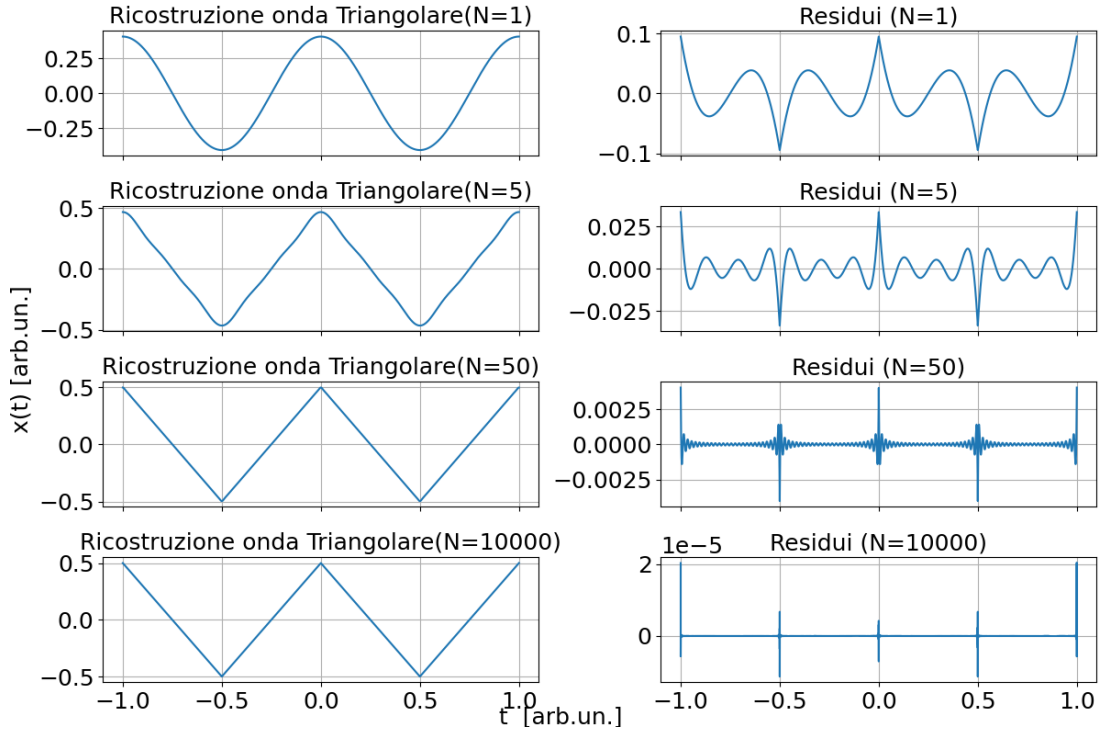


Figure 3: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione.  $N$  è il numero a cui è stata troncata la serie.

Similmente a quanto accade per l'onda quadra, anche in questo caso, nei punti in cui la derivata è discontinua e nei punti al bordo non c'è convergenza come si può vedere dai grafici dei residui in Fig.(3) e Fig.(4). Anche solo qualitativamente si osserva a entrambe le risoluzioni che la convergenza all'onda analitica è più rapida dell'onda quadra, una migliore discussione di ciò avverrà in Sez.(1.3).

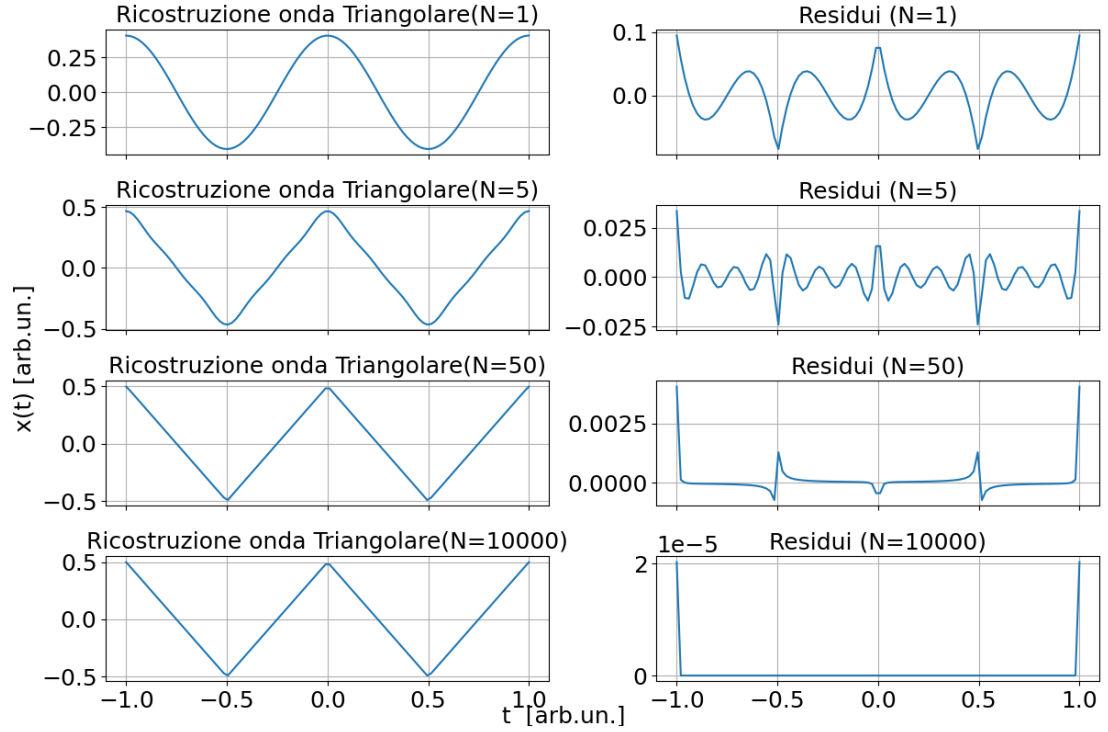


Figure 4: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione.  $N$  è il numero a cui è stata troncata la serie.

Per quanto riguarda l'utilizzo di diverse risoluzioni nei grafici, l'impiego di una risoluzione minore comporta problemi nella convergenza solo nei punti iniziali e non nei punti di transiente, l'impiego di una risoluzione maggiore fa osservare dei picchi nei residui in prossimità dei transienti. Chiaramente non mettere i punti di picco tra i punti che vengono campionati comporta una deformazione della forma d'onda graficata che non viene osservata nei residui. **Considerazione azzardata:** questo accade perché "moralmente" se prima la mancata convergenza in certi punti era un problema "puntuale", in quanto nel caso dell'onda quadra la funzione è discontinua, ora la causa del problema è "locale", in quanto la discontinuità della forma d'onda analitica si ha nella derivata prima.

### 1.3 Verifica di convergenza della serie

La serie di Fourier delle rispettive onde dovrebbe convergere integralmente alle funzioni analitiche. La velocità di convergenza rispetto al numero di iterazioni è diversa per le forme d'onda come si può vedere in Fig.(5).

Tuttavia nel caso dell'onda quadra si osserva un comportamento inaspettato:

quando il campionamento avviene su numero sufficientemente piccolo di periodi, non c'è più convergenza integrale tra la funzione semplice definita sugli intervalli dalla serie di Fourier: con ogni probabilità questo è dovuto al transiente che non è adeguatamente approssimato. Inoltre, per entrambe le onde compiono delle oscillazioni dei residui che si smorzano nella coda all'aumentare delle iterazioni come si può vedere in Fig.(6).

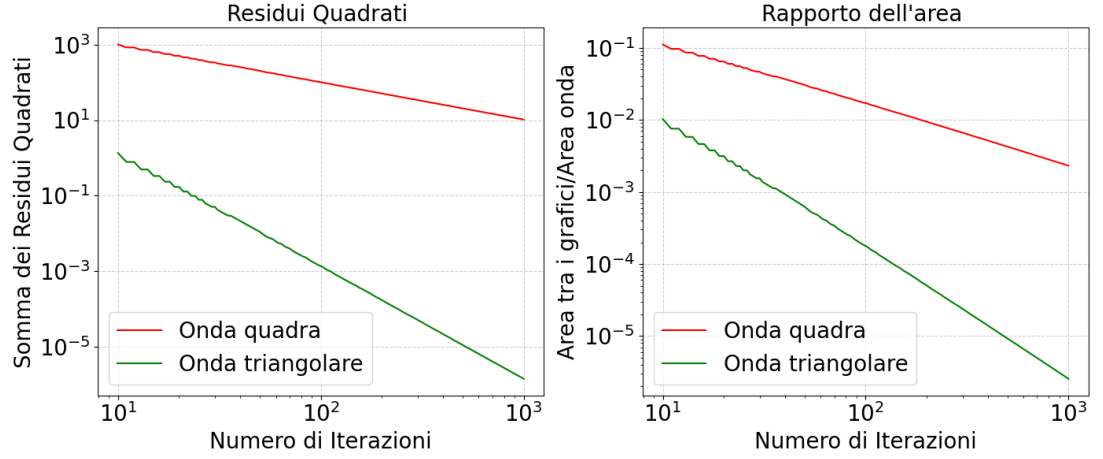


Figure 5: Nella figura simulazione numerica sono stati usati cento milioni di campionamenti presi tra due periodi.

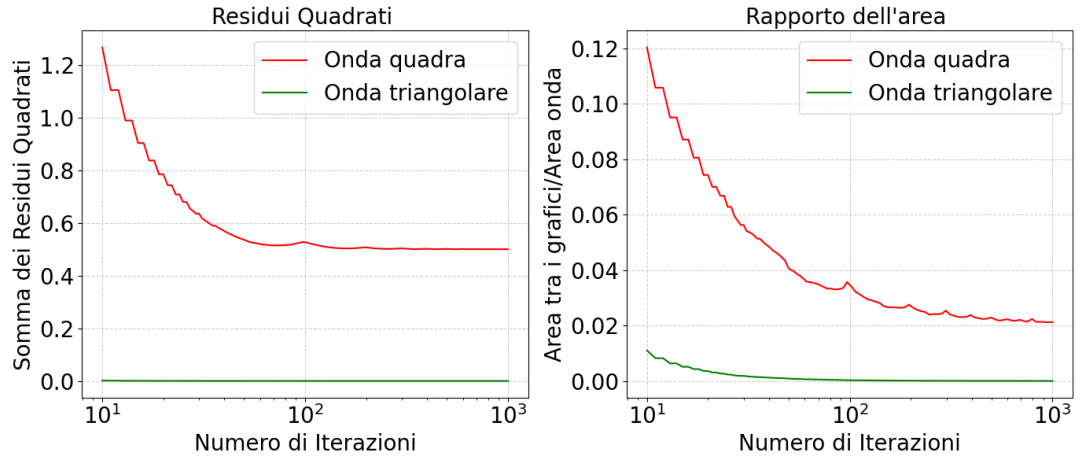


Figure 6: Nella figura simulazione numerica sono stati usati 100 campionamenti presi tra due periodi.

## 1.4 Treni di impulsi

Un treno di impulsi pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritto dalla Eq.(3).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{2}{k\pi} \right) \sin(k\pi\delta) \sin(k\omega t) \quad (3)$$

Come si può vedere in Fig.(7) e in Fig.(8) si possono fare le stesse identiche osservazioni fatte in Sez(1.1).

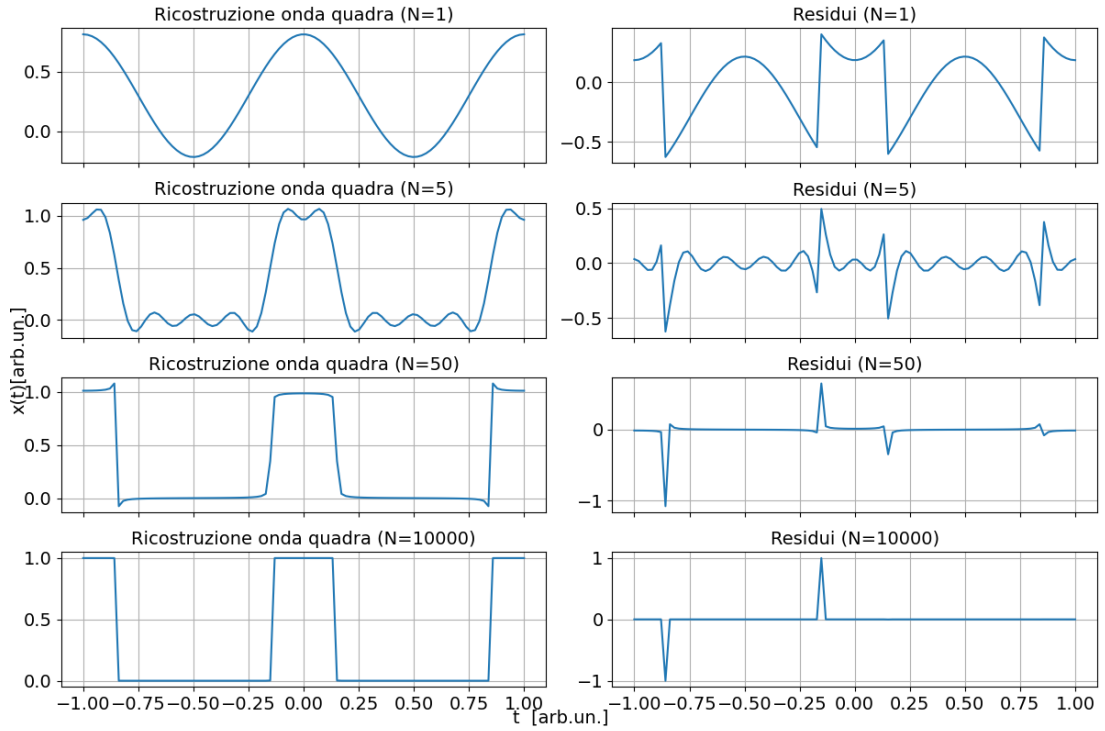


Figure 7: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(3) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

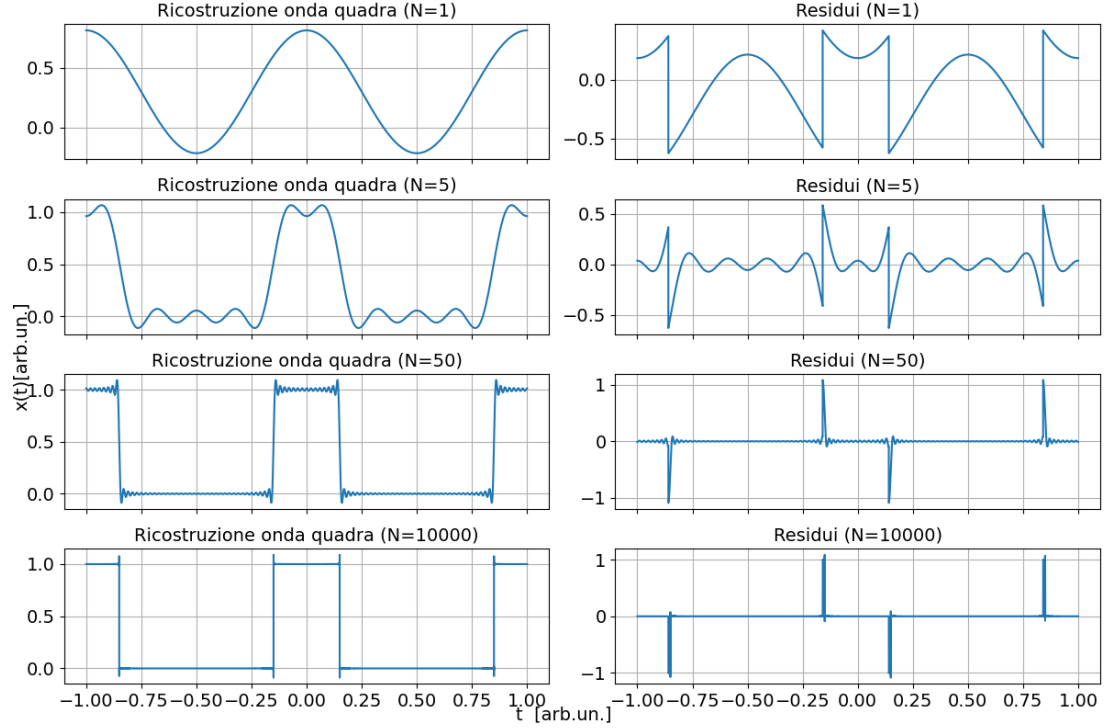


Figure 8: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(3) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

## 2 Filtro passa basso e filtro passa alto

Un filtro passa basso di frequenza di taglio  $f_T$ , che riceve un segnale di frequenza angolare  $\omega$ , lo riscalda di un fattore  $G$  e lo sfasa di un angolo  $\phi$  come dato da Eq.(4).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{-f}{f_T}\right) \quad (4)$$

Un filtro passa alto di frequenza di taglio  $f_T$ , che riceve un segnale di frequenza angolare  $\omega$ , lo riscalda di un fattore  $G$  e lo sfasa di un angolo  $\phi$  come dato da Eq.(5).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_T}{f}\right)^2}}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{f_T}{f}\right) \quad (5)$$

Dunque le equazioni per le onde passanti per ciascuno dei filtri si trovano moltiplicando ciascun termine della sommatoria per il rispettivo  $G(k\omega, f_T)$  e

sommando il termine  $\phi(k\omega, f_T)$  all'interno della sinusoide o cosinusoide.

## 2.1 Onda quadra

Riporto la forma d'onda della cosinusoide integrata in .

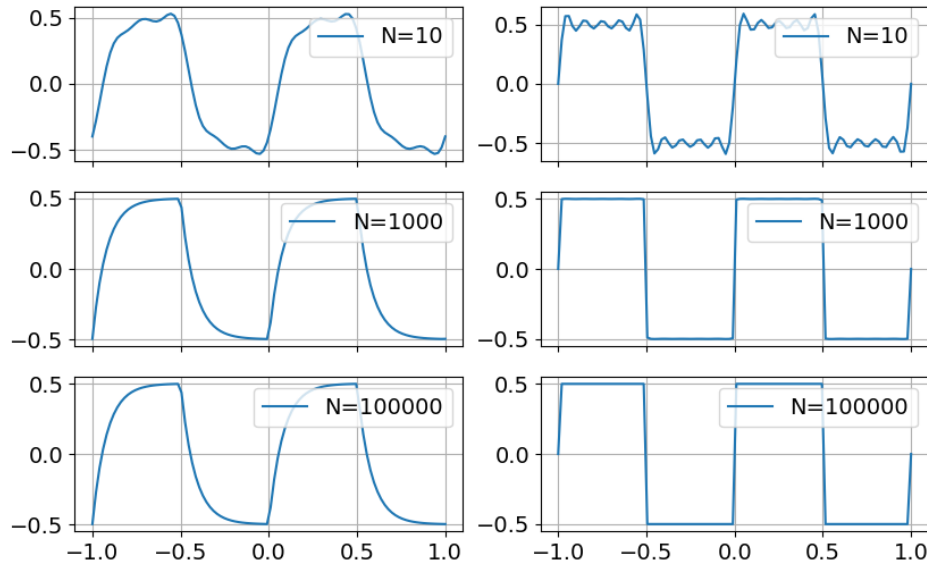


Figure 9:



- 2.2 Onda triangolare
- 2.3 Treno di impulsi
- 3 Filtro passa banda
- 4 Best fit dei dati acquisiti con Arduino
  - 4.1 Onda quadra
  - 4.2 Onda a pinna di squalo
  - 4.3 Onda sinusoidale
  - 4.4 Onda triangolare
- 5 Simulazione numerica dei grafici guadagno vs frequenza
  - 5.1 Integratore con forma d'onda quadra in ingresso
    - 5.1.1 Contestualizzazione dei risultati sperimentali
  - 5.2 Integratore con forma d'onda triangolare in ingresso
    - 5.2.1 Contestualizzazione dei risultati sperimentali
- 6 Simulazioni facoltative
  - 6.1 Derivatore con forma d'onda a scelta in ingresso
  - 6.2 Distorsione di una forma d'onda quadra osservata con accoppiamento AC
  - 6.3 Forma d'onda quadra con duty cycle variabile e filtro passa-basso
    - 6.3.1 Effetti del filtro passa-basso su un treno di impulsi
  - 6.4 Altre simulazioni e confronti con dati sperimentali