

Relazione Natalizia

Francesco Angelo Fabiano Antonacci
Francesco Sermi

16 gennaio 2025

1 Ricostruzione numerica di forme d'onda

1.1 Forme d'onda quadre

Un'onda quadra alternata dispari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dalla serie infinita a Eq.(1).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\omega t) \quad (1)$$

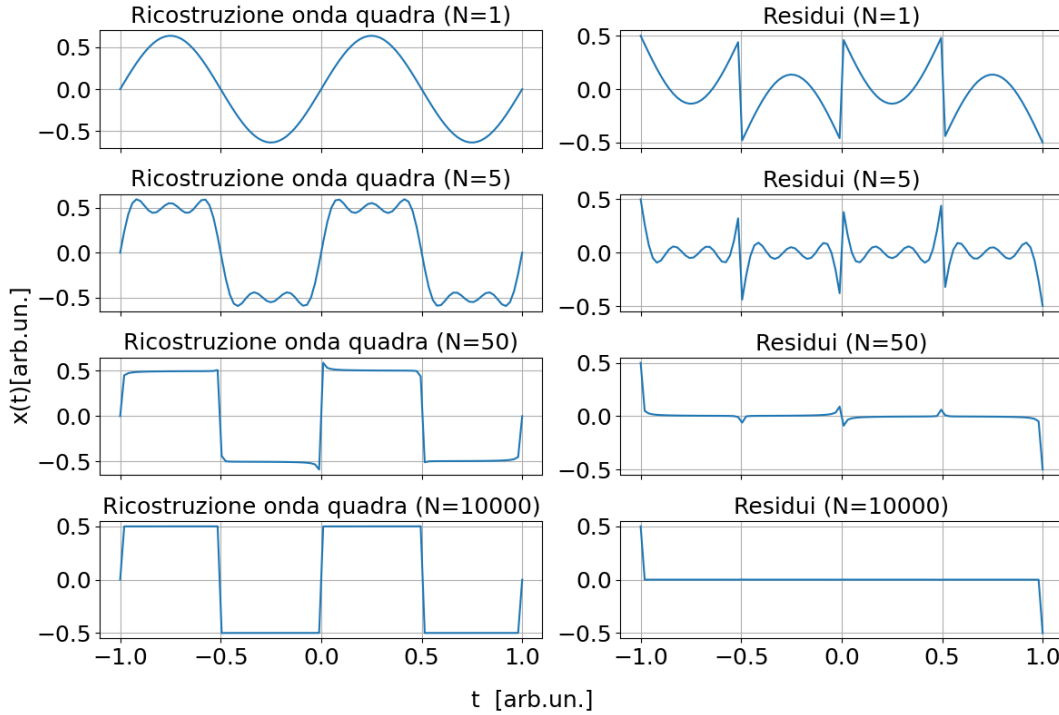


Figura 1: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

In Fig(1) e Fig(2) sono mostrate due ricostruzioni numeriche dell'onda quadra. All'aumentare dei termini N della serie diminuisce la distanza tra onda analitica e serie di seni.

Si osserva che nel caso di Fig(1), la quale ha una risoluzione peggiore, la deformazione dell'onda quadra assomiglia a quanto visto nelle esperienze pratiche di laboratorio con l'oscilloscopio quando si usa il generatore di funzioni a frequenze sufficientemente alte: forse questo rivela qualcosa sul funzionamento del generatore di funzioni.

Si osserva che la presenza di lati obliqui nei transienti è conseguenza di un sottocampionamento della mia ricostruzione, questo comporta che non c'è miglioramento all'aumentare dei termini della serie.

I residui nei punti iniziali e i transienti non si annullano mai: in corrispondenza di ognuno di questi punti si trovano dei picchi.

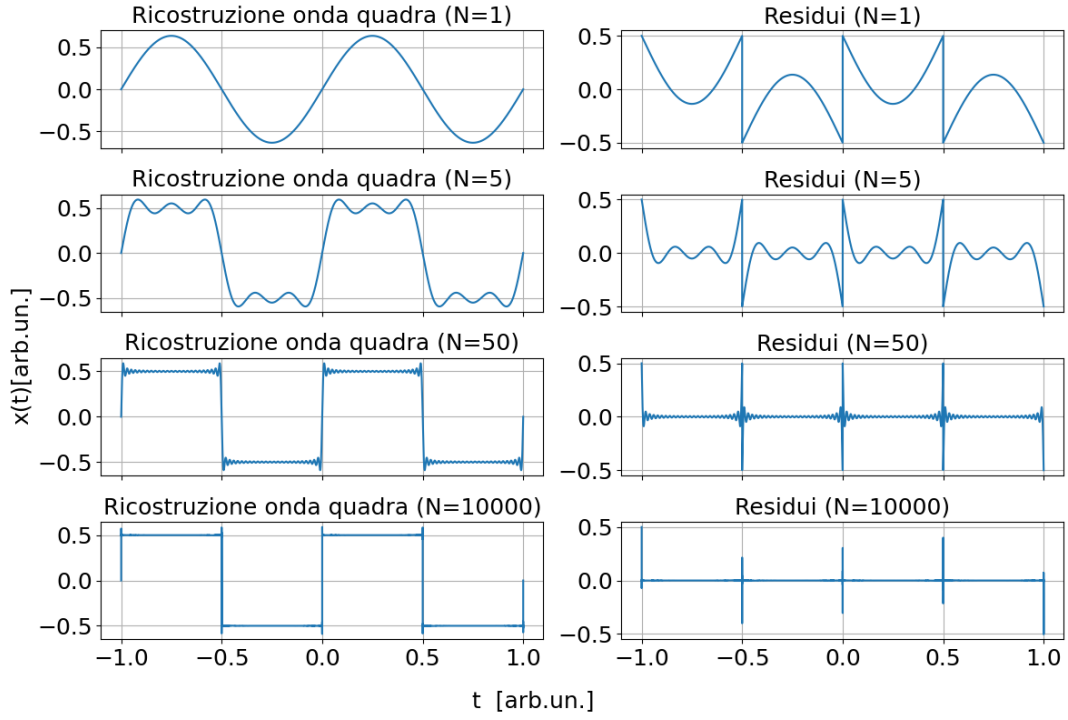


Figura 2: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

1.2 Forme d'onda triangolari

Un'onda triangolare alternata pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dall' Eq.(2).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \cos(k\omega t) \quad (2)$$

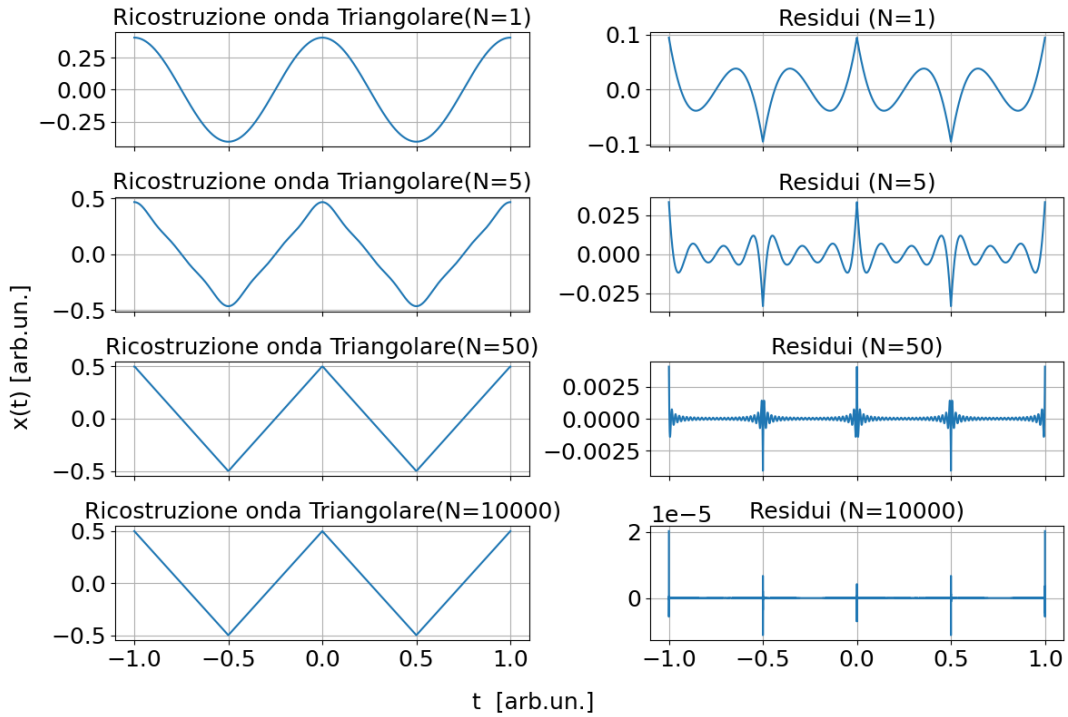


Figura 3: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

Similmente a quanto accade per l'onda quadra, anche in questo caso, nei punti in cui la derivata è discontinua e nei punti al bordo non c'è convergenza semplice come si può vedere dai grafici dei residui in Fig.(3) e Fig.(4). Anche solo qualitativamente si osserva a entrambe le risoluzioni che la convergenza all'onda analitica è più rapida dell'onda quadra, una migliore discussione di ciò avverrà in Sez.(1.3).

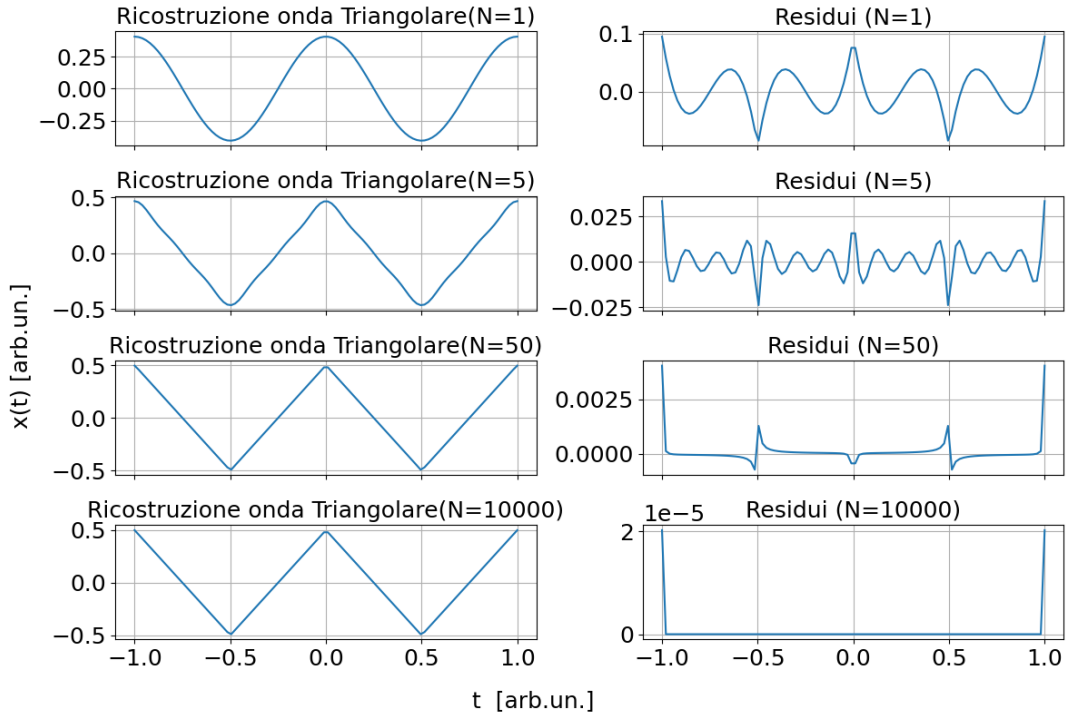


Figura 4: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

Per quanto riguarda l'utilizzo di diverse risoluzioni nei grafici, l'impiego di una risoluzione minore comporta problemi nella convergenza solo nei punti iniziali e non nei punti di transiente, l'impiego di una risoluzione maggiore fa osservare dei picchi nei residui in prossimità dei transienti. Chiaramente non mettere i punti di picco tra i punti che vengono campionati comporta una deformazione della forma d'onda grafica che non viene osservata nei residui.

1.3 Verifica di convergenza della serie

La serie di Fourier delle rispettive onde dovrebbe convergere integralmente alle funzioni analitiche. Come ci si aspetta dalla teoria, la velocità di convergenza rispetto al numero di iterazioni è diversa per le forme d'onda come si può vedere in Fig.(5).

Tuttavia nel caso dell'onda quadra si osserva un comportamento inaspettato: quando il campionamento avviene su numero sufficientemente piccolo di periodi, non c'è più convergenza integrale tra la funzione semplice, definita sugli intervalli dalla serie di Fourier, e la funzione analitica: con ogni probabilità questo è dovuto al transiente che non è adeguatamente approssimato. Inoltre, per entrambe le onde compiono delle oscillazioni dei residui che si smorzano nella coda all'aumentare delle iterazioni come si può vedere in Fig.(6).

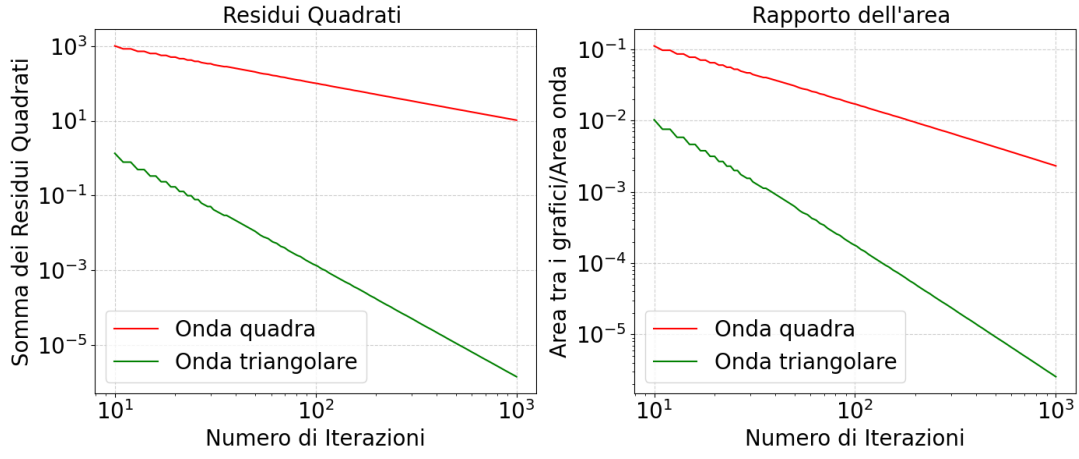


Figura 5: Nella figura simulazione numerica sono stati usati cento milioni di campionamenti presi tra due periodi.

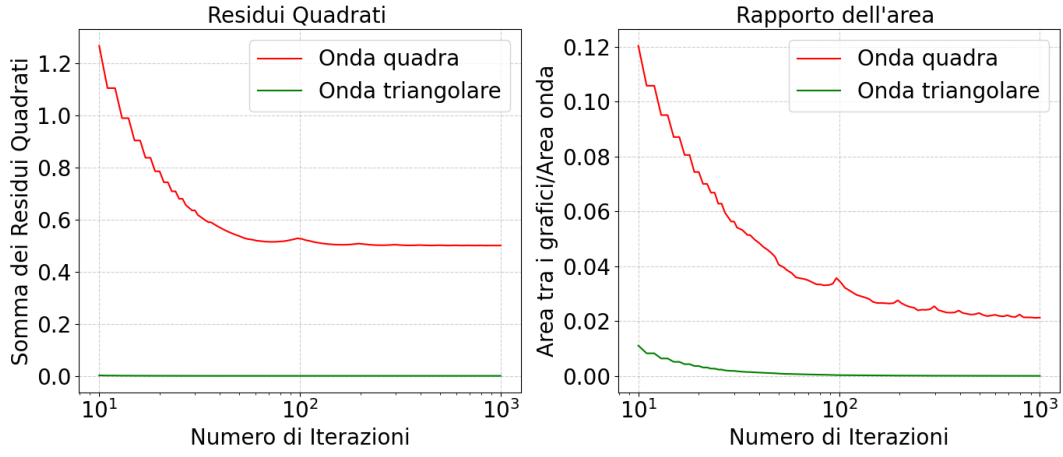


Figura 6: Nella figura simulazione numerica sono stati usati 100 campionamenti presi tra due periodi.

1.4 Treni di impulsi

Un treno di impulsi pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descitta dall' Eq.(3).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \sin(k\pi\delta) \cos(k\omega t) \quad (3)$$

δ è il rapporto tra massimo e minimo dell'onda. Come si può vedere in Fig.(7) e in Fig.(8) si possono fare le stesse identiche osservazioni fatte in Sez(1.1).

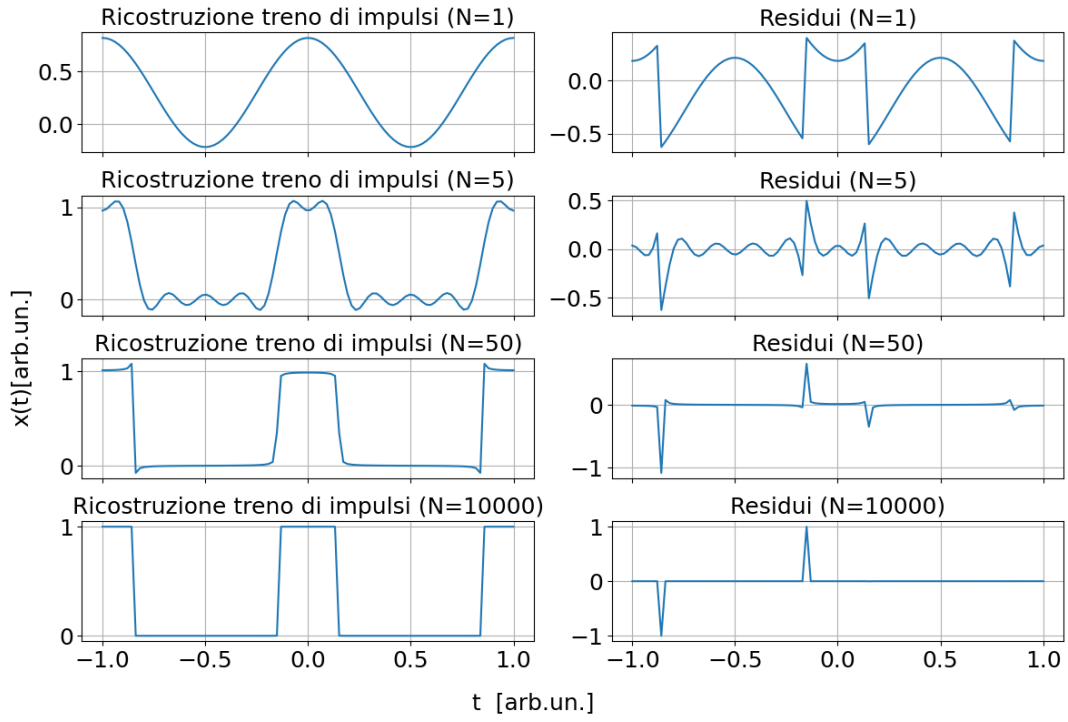


Figura 7: A sinistra ricostruzione numerica del treno di impulsi Eq.(3) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

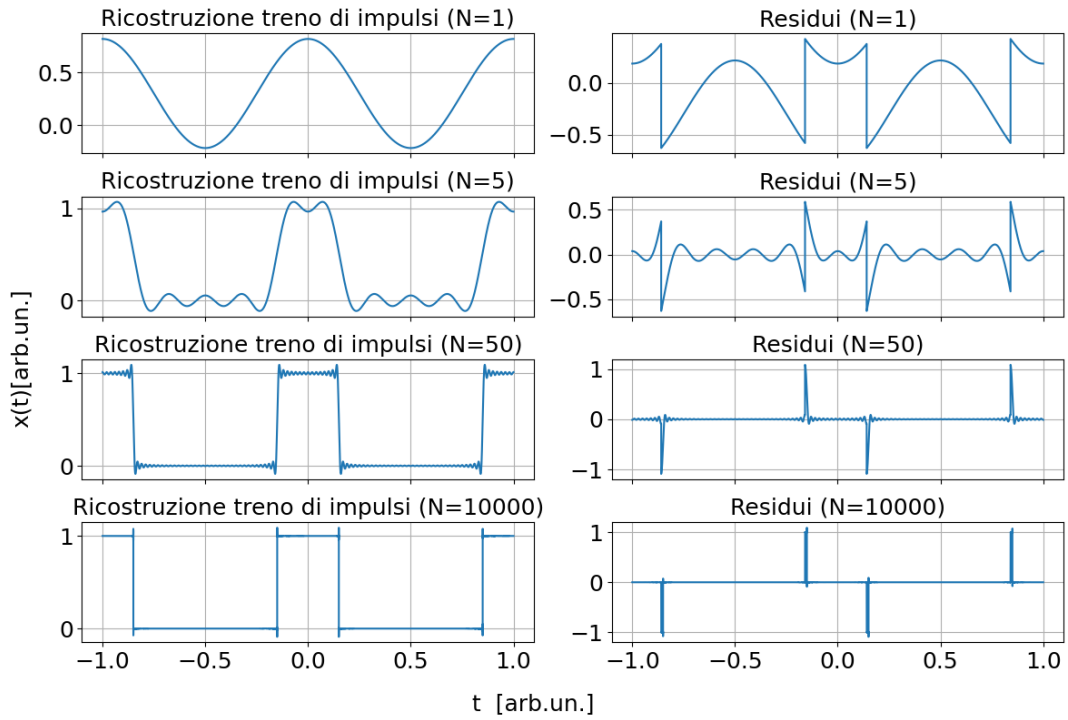


Figura 8: A sinistra ricostruzione numerica del treno di impulsi Eq.(3) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

2 Filtro passa basso e filtro passa alto

Un filtro passa basso di frequenza di taglio f_T , che riceve un segnale sinusoidale, di frequenza angolare ω , lo riscalda di un fattore G e lo sfasa di un angolo ϕ come dato da Eq.(4).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{-f}{f_T}\right) \quad (4)$$

Un filtro passa alto di frequenza di taglio f_T , che riceve un segnale sinusoidale, di frequenza angolare ω , lo riscalda di un fattore G e lo sfasa di un angolo ϕ come dato da Eq.(5).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_T}{f}\right)^2}}, \quad \phi(f) = \arctan\left(\frac{f_T}{f}\right) \quad (5)$$

Dunque le equazioni per le onde passanti per ciascuno dei filtri si trovano moltiplicando ciascun termine della sommatoria per il rispettivo $G(k\omega, f_T)$ e sommando il termine $\phi(k\omega, f_T)$ all'interno della sinusoide o cosinusoide. G e ϕ hanno significato di Eq.(4) o Eq.(5) dipendentemente dal filtro del contesto.

2.1 Onda quadra

Le funzioni descriventi il segnale i uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un'onda quadra, sono date dal procedimento descritto i Sez.(2).

2.1.1 Filtro passa basso

Come nella sezione precedente, è possibile verificare la convergenza della serie di seni con la forma d'onda analitica. Inoltre, si possono fare le stesse considerazioni riguardanti il numero di termini della serie impiegati, i transienti e il campionamento (vedi Fig(9) e Fig(10)).

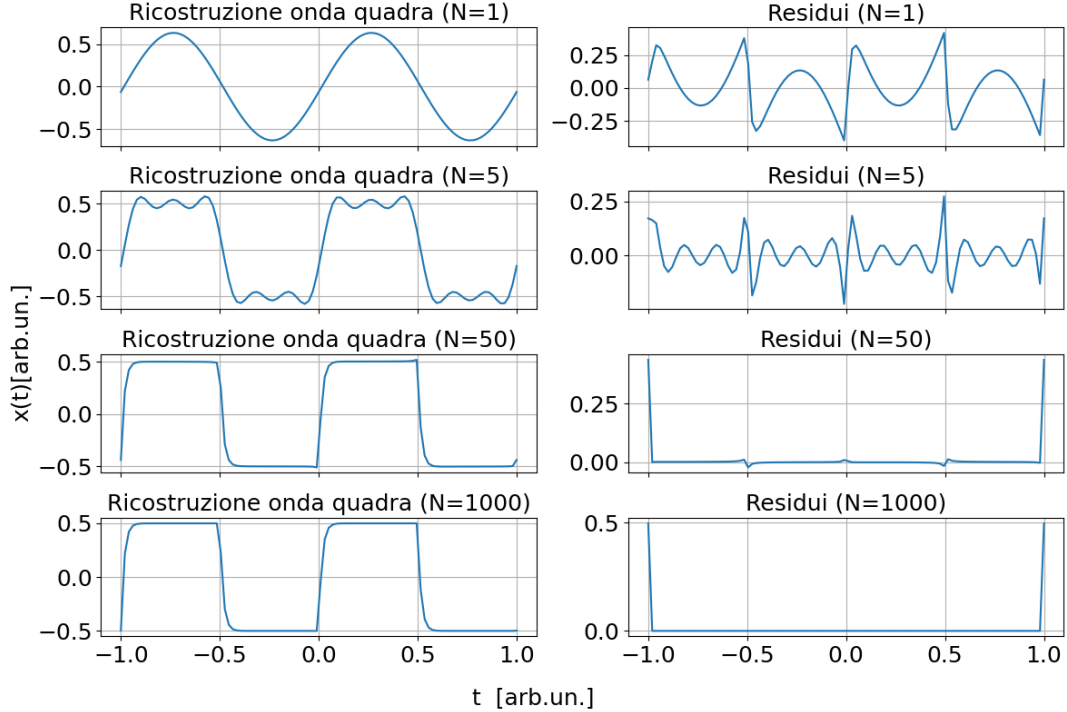


Figura 9: A destra c'è l'onda a pinna di squalo. A sinistra c'è il grafico dei residui. La risoluzione utilizzata è stata di cento punti su due periodi.

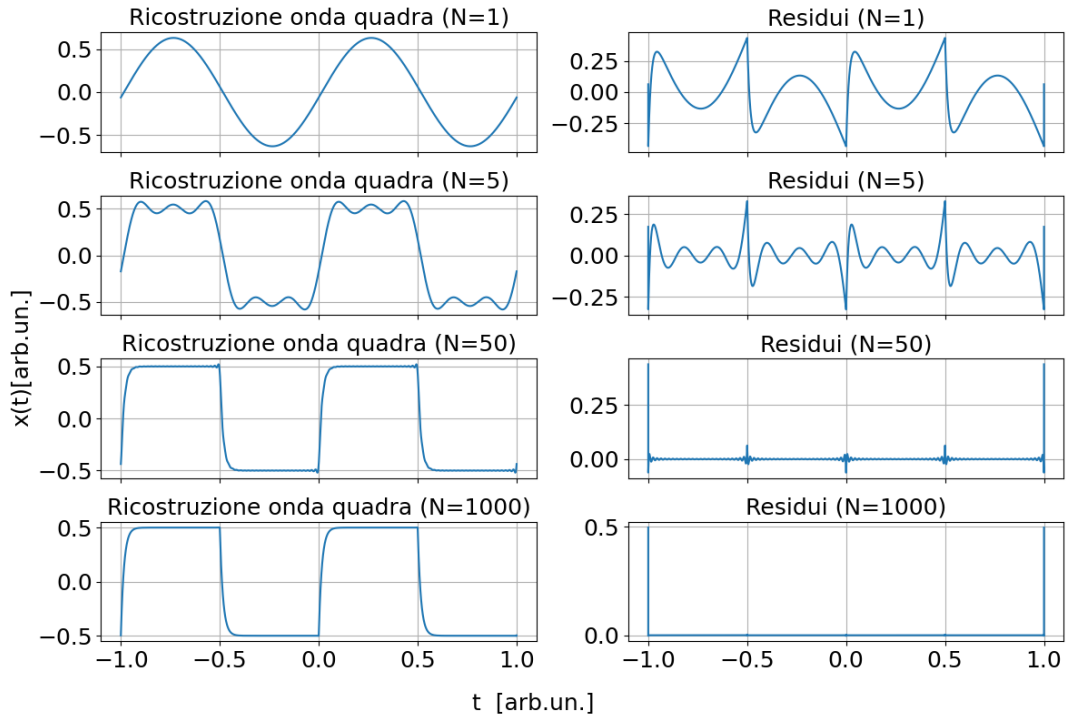


Figura 10: A destra c'è l'onda a pinna di squalo. A sinistra c'è il grafico dei residui. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

Si può facilmente simulare il comportamento di un filtro al variare della frequenza in ingresso: per semplicità la simulazione è stata fatta tenendo fissa la frequenza dell'onda e variando la frequenza di taglio, come fatto in Fig.(11).

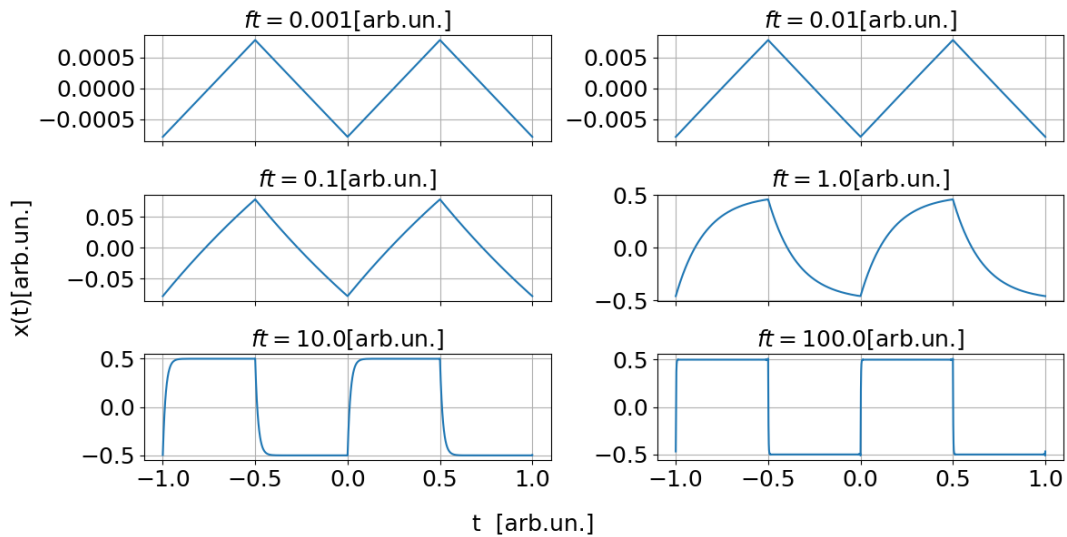


Figura 11: Onde a pinna di squalo al variare della frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

Si vede chiaramente che quanto simulato è in accordo con quanto visto in laboratorio: al decrescere della frequenza di taglio rispetto alla frequenza dell'onda quadra l'onda tende a diventare triangolare e la sua ampiezza diminuisce; viceversa, l'onda tende a divenire quadra, ossia il segnale in ingresso tende a rimanere inalterato.

2.1.2 Filtro passa alto

E'interessante simulare il comportamento di un filtro passa alto come fatto in Fig(12): si può osservare specialmente nel caso $ft = 0.1$ [arb.un.] la stessa forma d'onda osservata collegando l'oscilloscopio in modalità AC al generatore di funzioni.

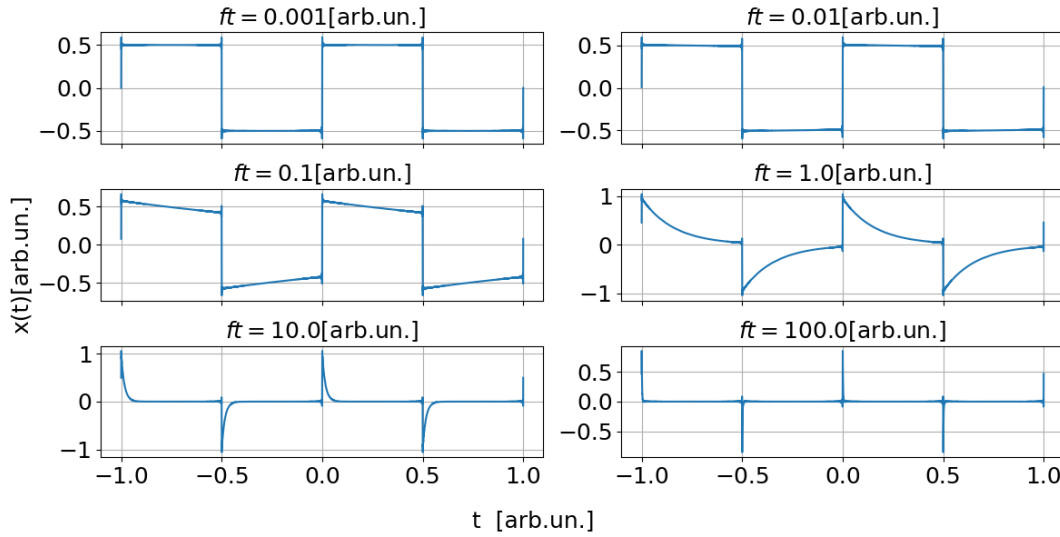


Figura 12: Simulazione di filtro passa alto con onda quadra. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.2 Onda triangolare

Le funzioni descriventi il segnale in uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un'onda triangolare, sono date dal procedimento descritto in Sez.(2).

2.2.1 Integratore

In Fig.(13) anche il comportamento di un filtro passa basso per un onda triangolare. Valgono tutti i commenti precedentemente in Sez.(2.1.1)

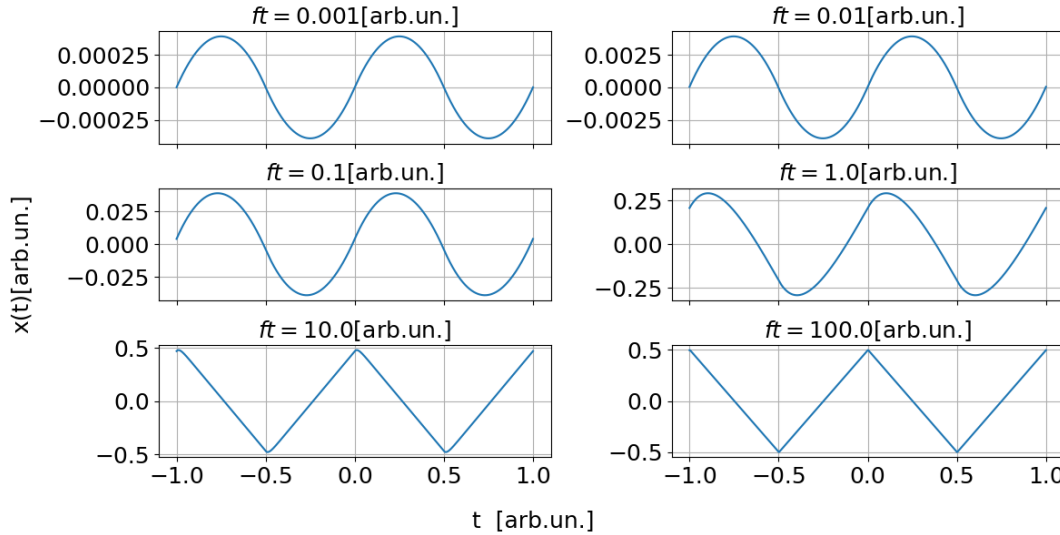


Figura 13: Per la ricostruzione della forma d'onda è stato adottato il procedimento descritto in Sez.(2). La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.2.2 Derivatore

In questo caso si osserva (vedi Fig.(14)) che la forma d'onda triangolare passante per un filtro passa alto coincide con quella simulata per un filtro passa basso attraversato da un'onda quadra (vedi Fig(11))

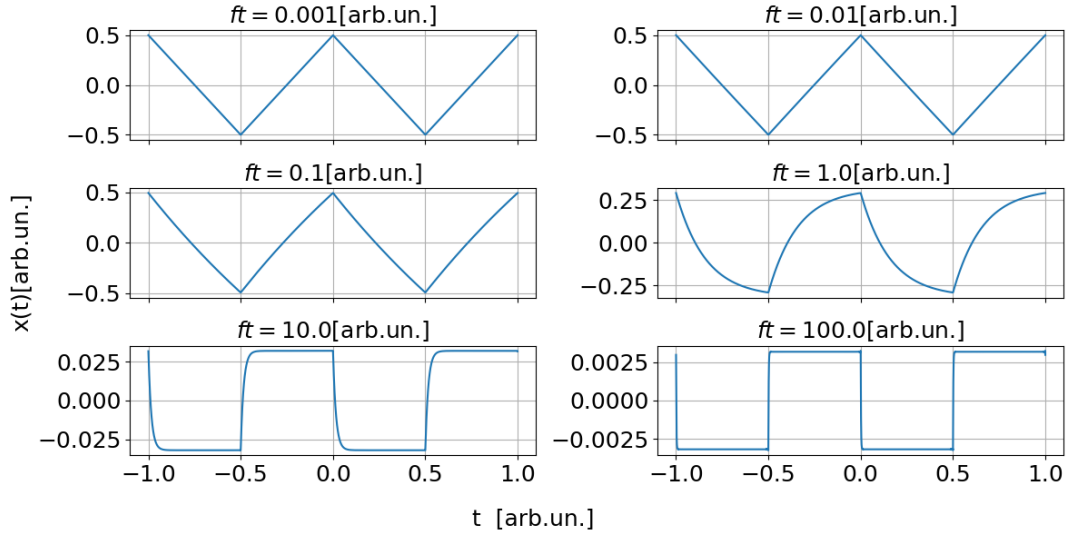


Figura 14: Per la ricostruzione della forma d'onda è stato adottato il procedimento descritto in Sez.(2). La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.3 Treno di impulsi

Le funzioni descriventi il segnale in uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un treno di impulsi, sono date dal procedimento descritto in Sez.(2).

2.3.1 Integratore

Le osservazioni che si possono fare in questo caso sono già state fatte nella trattazione dell'onda quadra Sez.(2.1.1). In Fig.(15) viene riportato il segnale integrato di un treno di impulsi. Per facilità di rappresentazione e facilitare possibili manipolazioni nello studio della forma, è stato scelto di tenere compresa la forma d'onda in un intervallo unitario centrato in zero. Se questo non fosse stato fatto appositamente, la forma d'onda, non essendo alternata, non avrebbe spontaneamente, eccetto che nel caso in cui si fosse ricondotti a un'onda quadra, rispettato questa richiesta.

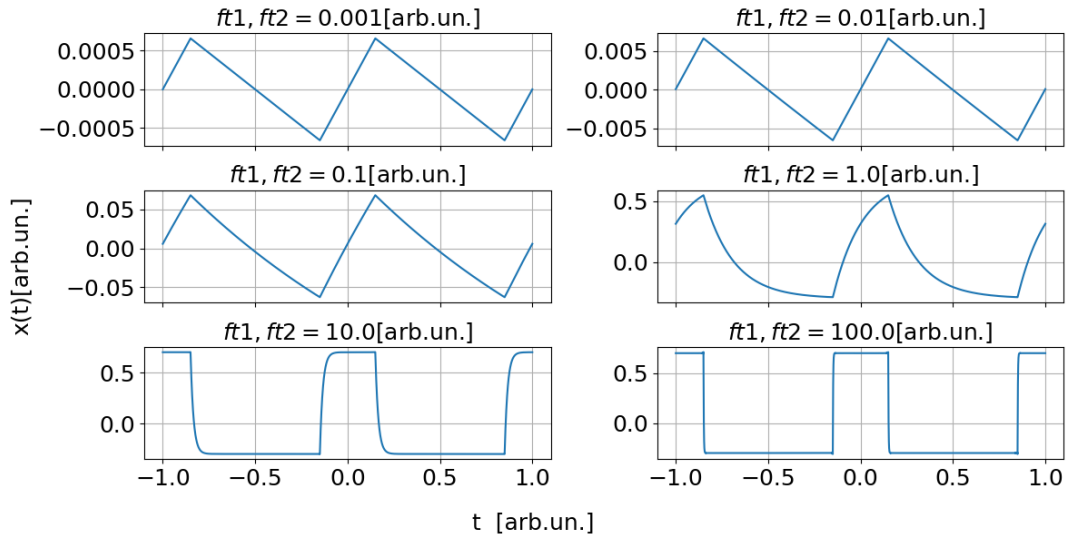


Figura 15: Per la ricostruzione della forma d'onda è stato adottato il procedimento descritto in Sez.(2). La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. E' stato fatto un troncamento al termine 10000 nello sviluppo della serie di seni.

2.3.2 Derivatore

In Fig.(16) viene riportato il segnale derivato di un treno di impulsi.

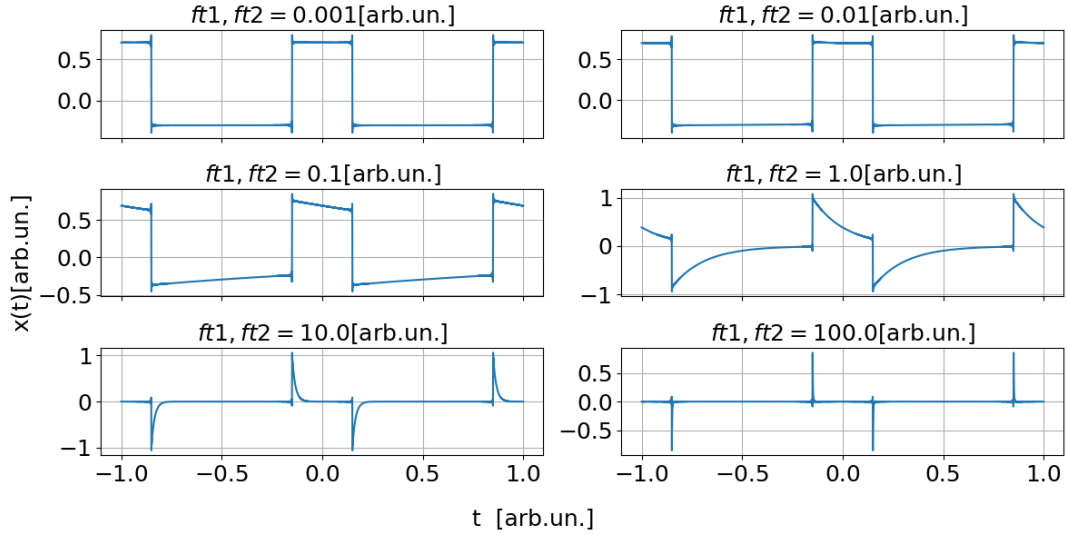


Figura 16: Per la ricostruzione della forma d'onda è stato adottato il procedimento descritto in Sez.(2). La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. Sono stati usati 10000 termini della serie di seni.

2.3.3 Filtro passa banda

E' adesso pura questione di soddisfazione simulare l'effetto di un filtro passabanda su un treno di impulsi. Si veda Fig.(17).

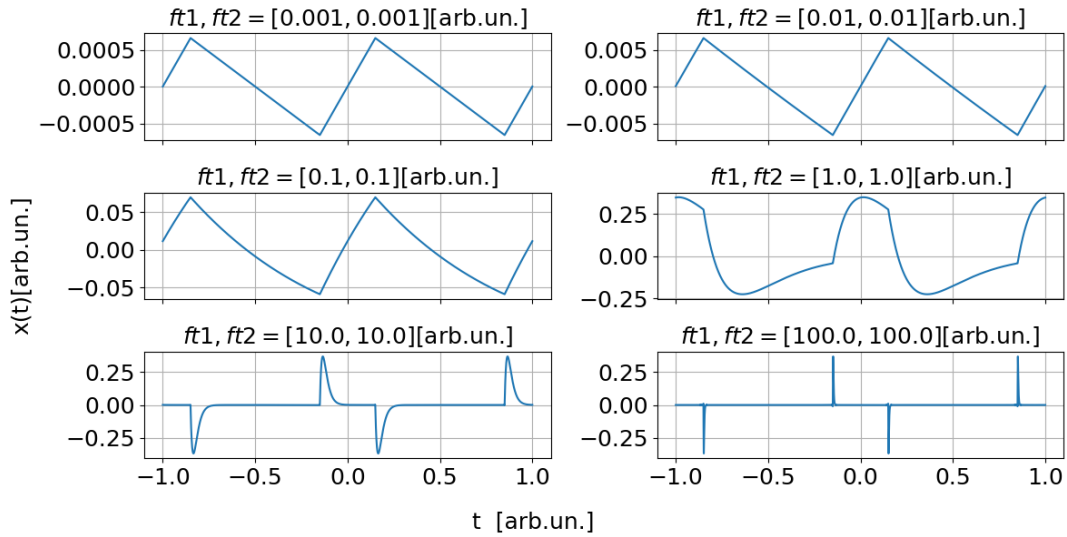


Figura 17: Per la ricostruzione della forma d'onda è stato adottato il procedimento descritto in Sez.(2). La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. Sono stati usati 10000 termini della serie di seni.

3 Best fit dei dati acquisiti con Arduino

Abbiamo infine deciso di ricostruire le forme d'onda di alcuni segnali in uscita da un filtro passa-basso che avevamo campionato in laboratorio con Arduino. Il filtro passa-basso, con i valori nominali della resistenza R e della capacità C del condensatore riportati in Tab.(1), doveva essere caratterizzato da una frequenza di taglio

R [Ω]	C [μF]
680 ± 34	1.0 ± 0.2

Tabella 1: Tabella dei valori nominali della resistenza e della capacità del condensatore con cui abbiamo realizzato il filtro passa-basso in laboratorio.

che è data dalla formula $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$, che nel nostro caso vale

$$f_T = (234 \pm 0.3) \text{ Hz.}$$

Per tutti i best-fit realizzati abbiamo troncato la serie di Fourier al termine $N = 10^3$. Questo è stato necessario per far eseguire il best-fit in tempi ragionevoli. Come incertezza sulle misure di potenziale è stata presa la deviazione standard campione di un set di dati, raccolti con Arduino, delle misure della differenze di potenziale tenuta costante [1].

3.1 Onda quadra

E' stato realizzato il best-fit dei minimi quadrati di un set di dati compatibile con un'onda quadra. Il modello con cui fare il best-fit è descritto dall'Eq.(6).

$$V(t) = \left[a \sum_{k=1,3,5,\dots}^{1000} \frac{2}{k\pi} \sin(k\omega(t + \delta)) \right] + c \quad (6)$$

Si osserva che trascurare o meno i punti sui transienti è incisivo sul risultato di best-fit come si può vedere in Fig.(18). E' stato dunque ragionevole utilizzare *absolute_sigma=True* nel primo best fit, e *absolute_sigma=False* nel secondo. Dal χ^2 risulta che l'errore è stato sovrastimato. I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(2). In Fig.(18) sono riportati i dati con il best fit e i residui.

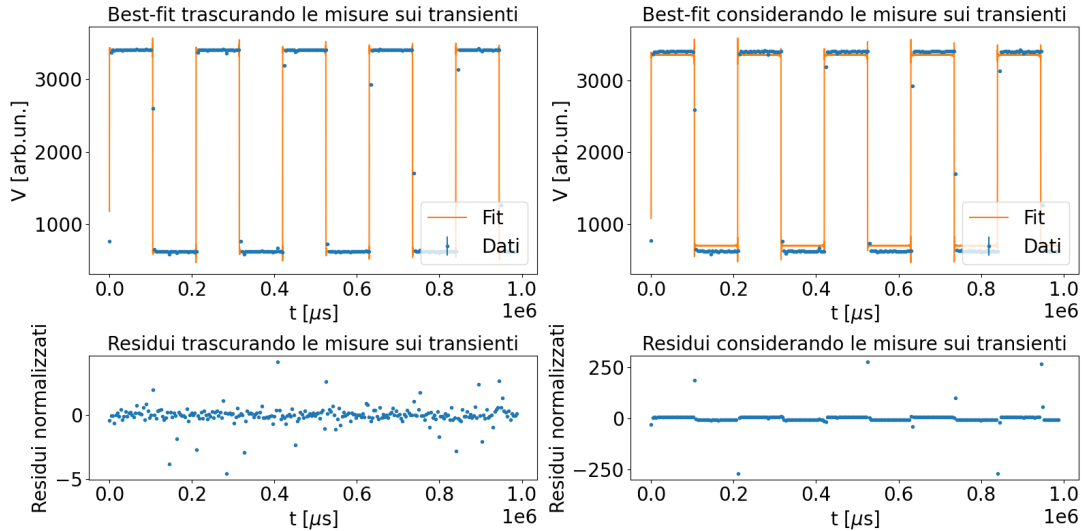


Figura 18: Bestfit di un'onda quadra campionata tramite la scheda Arduino.

	Fit trascurando i transienti	Fit considerando i transienti
ω [rad/s]	29.923 ± 0.001	29.930 ± 0.003
δ [μ s]	-35 ± 24	-42 ± 19
a [arb.un]	2774 ± 1	2647 ± 47
c [arb.un]	2012.8 ± 0.7	2026 ± 23
χ^2_{norm}	0.01	14

Tabella 2: Parametri ottenuti nei best-fit dell'onda quadra eseguito utilizzando il modello descritto dall'eq.(6).

3.2 Onda a pinna di squalo

E' stato realizzato il best-fit dei minimi quadrati di quattro set di dati compatibile con un'onda a pinna di squalo. Il modello con cui fare il best-fit è descritto dall'Eq.(7).

$$x(t) = \left[a \sum_{k=1,3,5,\dots}^{1000} \frac{2G(f, f_T)}{k\pi} \sin(k\omega(t + \delta) + \phi(f, f_T)) \right] + c \quad (7)$$

I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(2). In Fig.(19) sono riportati i dati con il best fit e i residui: si osserva che la frequenza di taglio è stata sottostimata e tutte le stime effettuate non sono compatibili fra loro entro le barre di errore. Ciò fa pensare che sia stato commesso un errore durante il campionamento dei dati oppure la frequenza di taglio attesa non è quella effettiva.

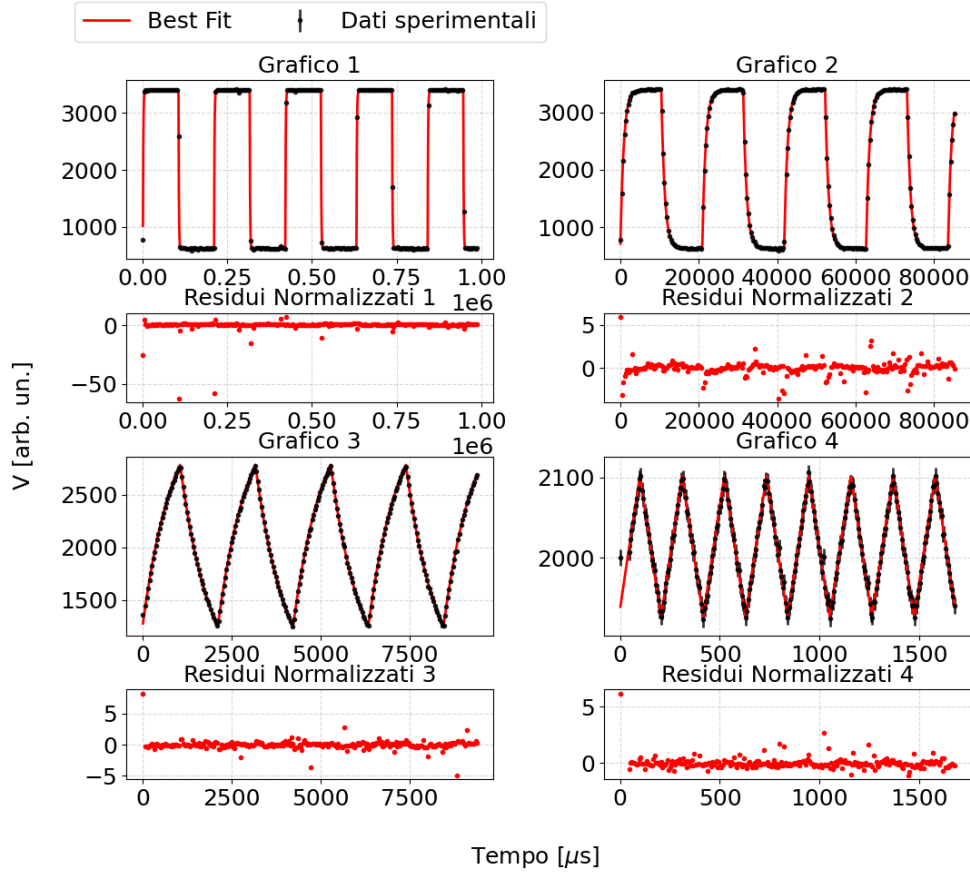


Figura 19: Grafico di bestfit nel caso di un'onda a pinna di squalo

	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
ω [rad/s]	0.29839 ± 0.0005	300.691 ± 0.009	2970.0 ± 0.4	29669.8 ± 0.2
f_T [mHz]	0.140 ± 0.001	0.1864 ± 0.0004	0.189 ± 0.002	0.1 ± 0.1
δ [μs]	178 ± 3	26 ± 2	10 ± 1	6 ± 1
a [arb.un]	2779 ± 1	2767 ± 2	2746 ± 20	4137 ± 4644
c [arb.un]	2090.0 ± 0.6	2015.1 ± 0.6	2025.9 ± 0.6	2014.8 ± 0.6
χ^2_{norm}	0.3	0.0071	0.006	0.007

Tabella 3: Parametri ottenuti nei best-fit nel caso di un'onda a pinna di squalo. ω rappresenta la frequenza angolare, δ lo sfasamento, a l'ampiezza e c l'offset.

3.3 Onda sinusoidale

E' stato realizzato il best-fit dei minimi quadrati di quattro set di dati compatibile con un'onda sinusoidale. Il modello con cui fare il best-fit è descritto dall'Eq.(8).

$$x(t) = a \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

Dal χ^2 risulta che l'errore è stato sovrastimato. I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(4). In Fig.(20) sono riportati i dati con il best fit e i residui.

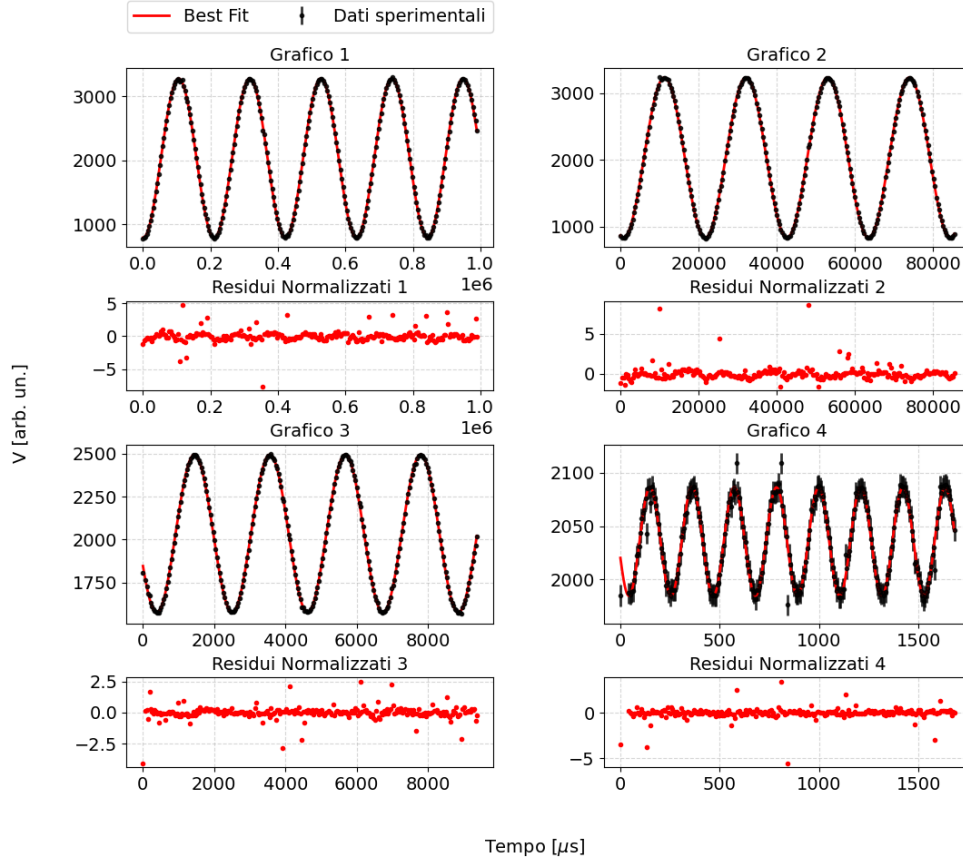


Figura 20: Grafici di bestfit nel caso di un'onda sinusoidale che utilizza il modello descritto dall'Eq.(8).

	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
ω [rad/s]	29.822 ± 0.003	300.77 ± 0.03	2969.9 ± 0.7	29652 ± 3
δ [μ s]	-1.588 ± 0.001	-1.811 ± 0.001	-2.723 ± 0.004	-2.89 ± 0.04
a [arb.un]	1240.2 ± 0.8	1201.2 ± 0.9	459.0 ± 0.8	50.8 ± 0.8
c [arb.un]	2035.9 ± 0.6	2036.5 ± 0.6	2035.3 ± 0.6	2035.4 ± 0.6
χ^2_{norm}	0.009	0.009	0.002	0.004

Tabella 4: Parametri ottenuti nei best-fit ottenuti nel caso di un'onda sinusoidale. ω rappresenta la frequenza angolare, δ lo sfasamento, a l'ampiezza e c l'offset.

3.4 Onda triangolare

E' stato realizzato il best-fit dei minimi quadrati di quattro set di dati compatibile con un'onda traingolare. Il modello con cui fare il best-fit è descritto dall'Eq.(9).

$$x(t) = a \sum_{k=1,3,5\dots}^{1000} G(f, f_T) \frac{4}{(k\pi)^2} \sin(k\omega(t + \delta) + \phi(f, f_T)) + c \quad (9)$$

Dal χ^2 risulta che l'errore è stato sovrastimato. I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(6). In Fig.(21) sono graficati i dati con il best fit e i residui. Dal χ^2 possiamo dedurre che gli errori sono stati largamente sovrastimati, inoltre la frequenza di taglio è anche stavolta stata sottostimata in maniera ancora più drammatica rispetto al caso dell'onda a pinna di squalo. Siccome il circuito utilizzato per fare il campionamento dei dati era lo stesso, valgono le medesime considerazioni fatte in precedenza: nel caso di un errore da noi commesso nella presa dati, questo ha influenzato anche questa presa dati oppure la frequenza di taglio attesa non è quella effettiva.

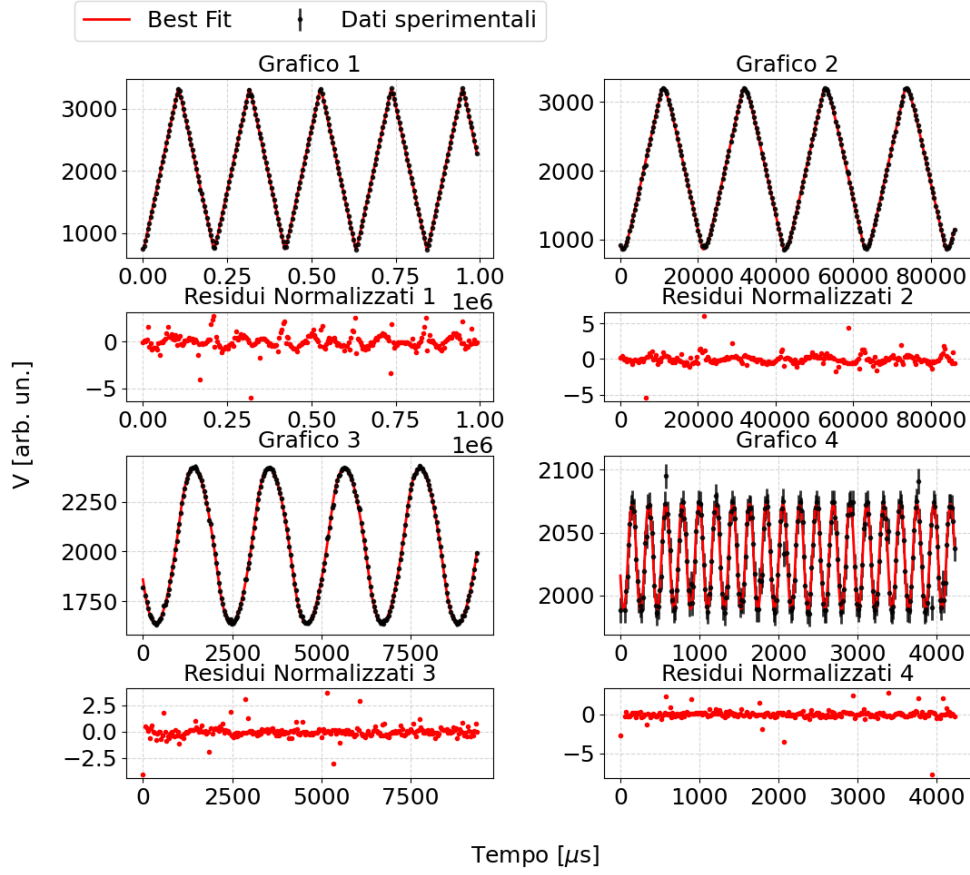


Figura 21: Grafico di bestfit nel caso di un'onda triangolare che usa il modello descritto in Eq.(9)

Parametri	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
a [arb.un]	2665 ± 3	2671 ± 4	2674 ± 139	2652 ± 12653
ω [rad/s]	29.817 ± 0.002	300.784 ± 0.03	2969.2 ± 0.08	29667 ± 16
δ [s]	0.107 ± 0.002	0.0105 ± 0.0001	0.001073 ± 0.000007	113 ± 7
c [arb.un]	2059.8 ± 0.6	1994.9 ± 0.6	2002.56 ± 0.63	2030.9 ± 0.6
f_T [μ Hz]	61 ± 4	167 ± 2	187 ± 10	189 ± 9
χ^2_{norm}	0.007	0.006	0.003	0.0053

Tabella 5: Parametri ottenuti nei best-fit. a è l'ampiezza del segnale, ω è la frequenza angolare del segnale, δ il duty cycle, c l'offset dei nostri dati rispetto allo zero, f_T la frequenza di taglio e χ^2_{norm} il chiquadro normalizzato.

3.5 Treno di impulsi

E' stato realizzato il best-fit dei minimi quadrati di un set di dati compatibile con un treno di impulsi utilizzando il modello descritto in Eq.(10)

$$x(t) = a \left[\sum_{k=1}^{10^3} \frac{2G(f, f_T)}{k\pi} \sin(k\pi\sigma) \cos((k\omega t) + \delta) \right] + c \quad (10)$$

Riportiamo in Tab.(6) i valori di bestfit ottenuti: il χ^2 in questo caso ci dice che gli errori sono stati enormemente sia considerando i transienti che non.

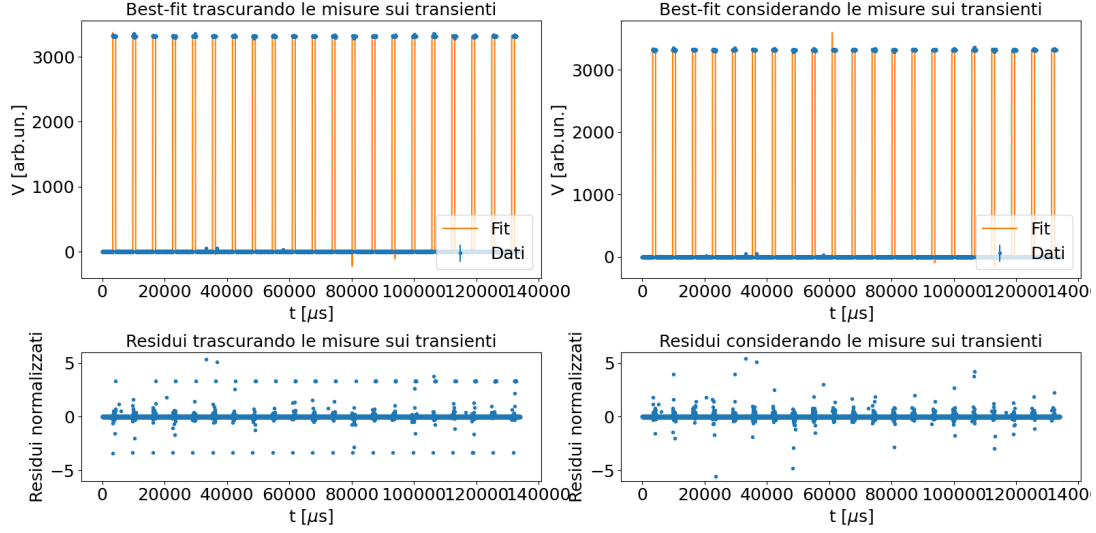


Figura 22: Grafico di bestfit nel caso di un treno di impulsi utilizzando il modello descritto in Eq.(10)

	Trascurando i transienti	Considerando i transienti
a [arb.un.]	3315 ± 3	3312 ± 4
ω [rad/s]	981.7452 ± 0.0009	981.74 ± 0.04
δ	0.145014 ± 0.000009	0.14503 ± 0.00004
σ [s]	-3870.016 ± 0.002	-3869.9 ± 0.3
χ^2_{norm}	49	65

Tabella 6: Parametri ottenuti nei best-fit. a rappresenta l'offset delle nostre misure rispetto allo zero, ω la frequenza angolare, σ il duty cycle e χ^2_{norm} è il chiquadro normalizzato

4 Simulazione numerica dei grafici guadagno vs frequenza

Infine, abbiamo rappresentano il guadagno del segnale periodico in uscita in funzione della frequenza in entrata, riportati in riportati in Fig.(23a) e Fig.(23b). Il modello utilizzato per effettuare questo bestfit è descritto dall'Eq.(11)

$$G(f) = \max_t F(t, f) - \min_t F(t, f) \quad (11)$$

dove abbiamo posto, nel caso dell'onda quadra, che

$$F(t, f) = a \left[\sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}} \sin \left(k\omega t + \arctan \left(-\frac{f}{f_T} \right) \right) \right]$$

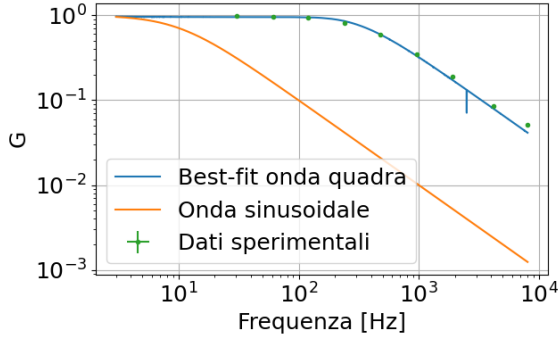
e, nel caso dell'onda triangolare, che

$$F(t, f) = a \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}} \cos \left(k\omega t + \arctan \left(-\frac{f}{f_T} \right) \right) \right]$$

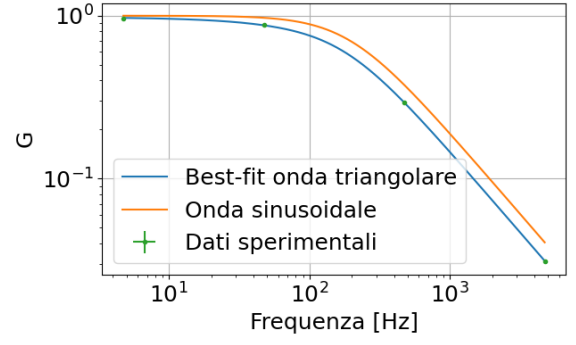
dove a e f_T sono i parametri da stimare col bestfit.

Come atteso, osserviamo che il guadagno di un'onda quadra è maggiore rispetto a quello di un'onda triangolare.

Riportiamo i valori di bestfit in Tab.(7): nel caso dell'onda quadra il valore del κ^2 ci porta a concludere che gli errori sono stati largamente sottostimati, nel caso dell'onda triangolare invece notevolmente sovrastimati. La frequenza di taglio, invece, risulta invece sottostimata rispetto a quella attesa con i valori nominali, mentre nel caso della triangolare è in valore meno sottostimata; tuttavia, in ogni caso, i valori non sono minimamente compatibili entro le barre di errore.



(a)



(b)

Figura 23: (a),(b): Bestfit del guadagno in funzione della frequenza in ingresso nel caso di un'onda quadra e di un'onda triangolare

	Onda quadra	Onda triangolare
$f_T [\mu\text{Hz}]$	191.6 ± 0.9	222 ± 1
a	0.979 ± 0.002	0.951 ± 0.002
κ^2	52	1

Tabella 7: Parametri stimati dal bestfit del guadagno in funzione della frequenza in ingresso. f_T è la frequenza di taglio,

Riferimenti bibliografici

- [1] Antonacci e Sermi. Dati per i best-fit. Disponibili a: <https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/tree/main>, 2024-2025. I dati sono disponibili su: Guadagno: https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/blob/main/Lab2_29102024/data_ard/data12.txt; Treno di impulsi: https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/blob/main/Lab2_19112024/Arduino_negro/data6.txt; e fits degli integratori: https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/tree/main/Lab2_26112024.