

Relazione FFT

Francesco Sermi
Francesco Angelo Fabiano Antonacci

March 23, 2025

1 Forme d'onda

E' stata fatta la FFT di forme d'onda quadrate, trinagolari e sinusoidali acquisite in laboratorio Il risultato è mostrato in Fig.(1).

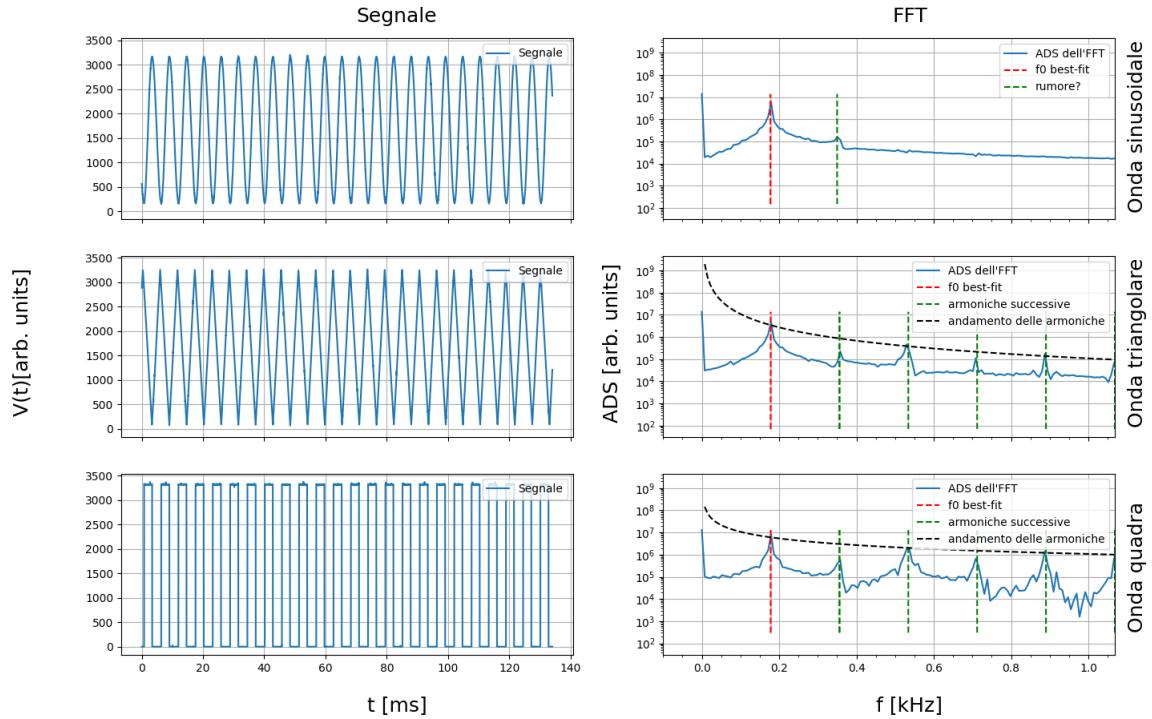


Figure 1: A destra sono mostrati segnali acquisiti in laboratorio, a sinistra è stata eseguita la FFT.

Nel caso dell'onda sinusoidale si osserva la comparsa di un picco dovuto a rumore a 300[Hz]. Per le altre forme d'onda è interessante notare la comparsa delle armoniche successive alla principale, come ci si aspetta dallo sviluppo in serie di seni e coseni delle rispettive forme d'onda. In questi casi è stata disegnata sopra la FFT la legge di potenza di come scalano le armoniche successive, rispettivamente $\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k^2}$ per l'onda quadra e per quella triangolare.

E' stato eseguito un bestfit per le frequenze principali f_0 , i risultati sono riportati in Tab.(2) e mostrati in Fig.(1) assieme al rispettivo valore estrapolato dalla FFT.

Come incertezza sulla frequenza f_0 estrapolata dalla FFT è stata considerata la deviazione standard di una distribuzione uniforme attorno a f_0 con ampiezza la risoluzione del campionamento: si assume infatti che ogni punti attorno a f_0 possa essere equiprobabilmente il "valore reale".

Table 1: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

onda	f_{0fft} [kHz]	$f_{0bestfit}$ [kHz]
Sinusoide	0.179 ± 0.001	0.177455 ± 0.000002
Triangolare	0.179 ± 0.001	0.1780571 ± 0.0000009
Quadra	0.179 ± 0.001	0.1780571 ± 0.0000009

Table 2: I tre segnali sono stati raccolti a distanza di poco tempo cambiando solo la forma d'onda con il generatore di funzioni, tuttavia colpisce la vicinanza dei valori f_{0fft} . Nessuno dei valori per la frequenza acquisito con la FFT e col Fit sono compatibili nella barra di errore. Potrebbe essere stato sottostimato l'errore nella FFT.

Sono state anche fatte acquisizioni "lunghe" di forme d'onda sinusoidali e quadrate. Sono riportati i risultati del bestfit in Fig.(2) e in Tab.(4)

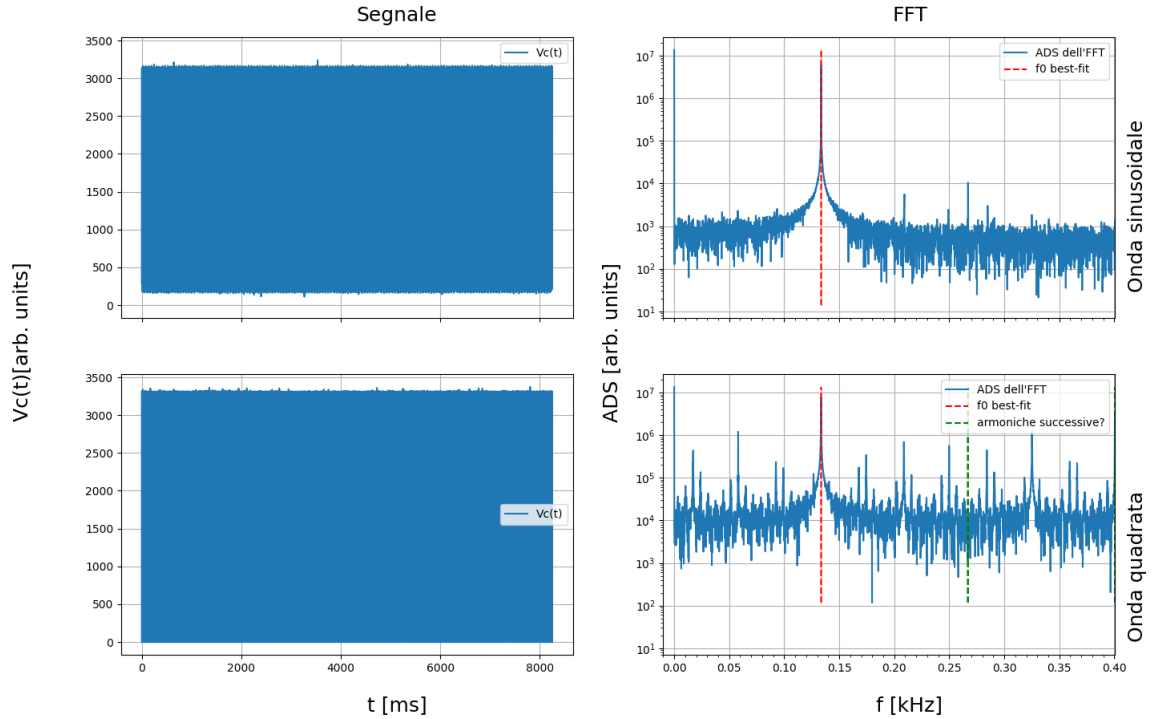


Figure 2: A destra sono mostrati segnali acquisiti in laboratorio, a sinistra è stata eseguita la FFT. E' molto interessante osservare che nel caso dell'onda quadra non compare l'armonica successiva aspettata: questo potrebbe essere legato al fatto che in media sono presi sette punti per periodo e quindi è possibile che ci sia un sottocampionamento dei dati per questa analisi.

Table 3

onda	f_{0fft} [kHz]	$f_{0bestfit}$ [kHz]
Sinusoide	0.13354 ± 0.00002	0.13352992 ± 0.0000003
Quadra	0.13354 ± 0.00002	0.1334881 ± 0.000003

Table 4: Similmente a quanto accade in Tab.(2) le frequenze estrapolate con FFT sono molto vicine tra loro e molto precise; le frequenze estrapolate con FFT e bestfit sono molto vicine tuttavia non sono compatibili dentro la barra di errore.

2 Forme d'onda distorte

Sono stati raccolti segnali cambiando il duty cycle ed è stato eseguito un fit con una sinusoide con l'obiettivo di far convergere solo la frequenza.

E' stata realizzata per ciascuna forma d'onda l'FFT. Il risultato della manipolazione dei dati è riportato in Fig.(3) e in Tab.(5).

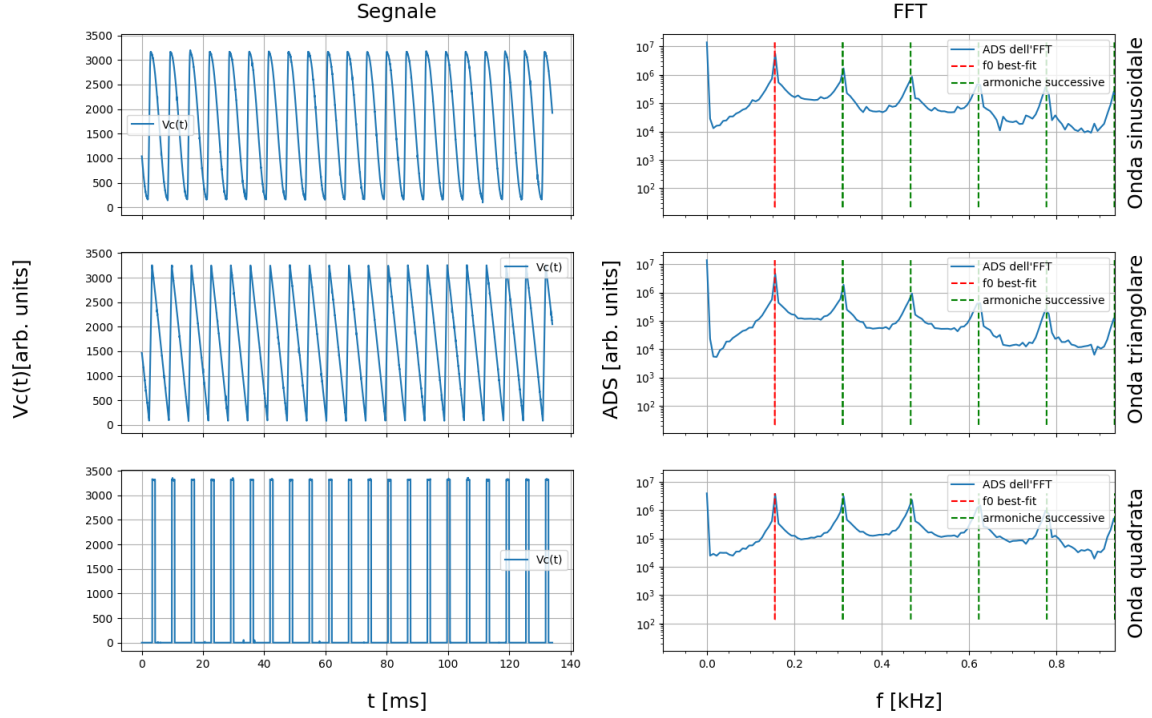


Figure 3: A destra sono mostrati segnali acquisiti in laboratorio, a sinistra è stata eseguita la FFT. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

onda	f_{fft} [kHz]	$f_{bestfit}$ [kHz]
Sinusoide	0.156 ± 0.001	0.15559 ± 0.00002
Triangolare	0.156 ± 0.001	0.15559 ± 0.00002
Quadra	0.156 ± 0.001	0.15576 ± 0.00006

Table 5: I tre segnali sono stati raccolti a distanza di poco tempo cambiando solo la forma d'onda con il generatore di funzioni, tuttavia colpisce la vicinanza dei valori f_{fft} . Nessuno dei valori per la frequenza acquisito con la FFT e col Fit sono compatibili nella barra di errore. Potrebbe essere stato sottostimato l'errore nella FFT.

3 Cattive acquisizioni

In Fig.(4) sono riportati esempi di "cattive acquisizioni".

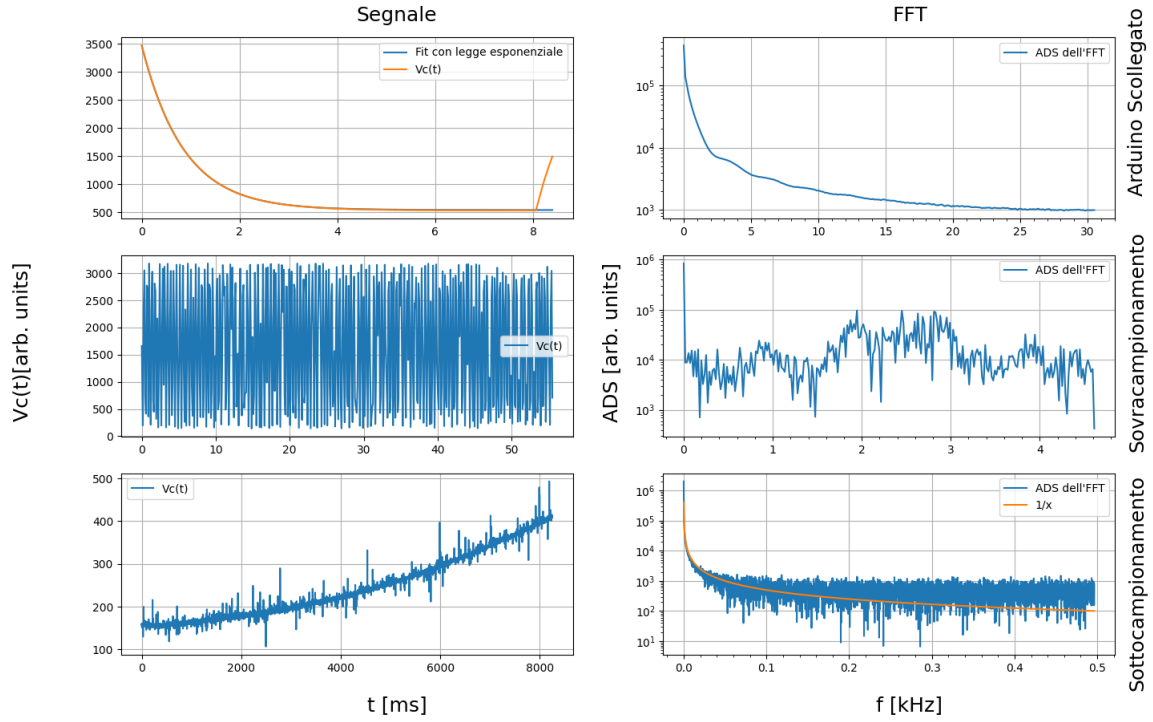


Figure 4: I primi due grafici rappresentano il campionamento di una porta di arduino scollegata. In mezzo è riportato un sottocampionamento: per ogni periodo è acquisito un solo punto. La terza coppia di figure dall'alto rappresenta un sovracampionamento di un periodo: l'acquisizione prende solo il ramo crescente di un seno.

E' stato eseguito un bestfit con una legge esponenziale per la sezione decrescente del segnale acquisito con arduino scollegato: fisicamente questo è legato all'ipotesi che una certa carica presente prima dell'acquisizione sulla porta è dissipata quando la porta comunica con il resto di Arduino. Il risultato del bestfit è riportato in Tab.(6)

$$\frac{\tau[ms]}{0.8598 \pm 0.0004} \quad \frac{\chi^2_{norm}}{5}$$

Table 6: Risultati bestfit per legge esponenziale di un'acquisizione con arduino scollegato. τ è il tempo di decadimento della legge esponenziale.

Per quanto riguarda il sovracampionamento è sufficiente dire che la FFT non riesce a trovare l'armonica principale del segnale sinusoidale e che i diversi picchi che compaiono nel segnale possono esser di natura puramente accidentale.

Nel caso di sottocampionamento siccome una sinusoide localmente può essere approssimata con una retta, si è disegnato sopra la FFT la funzione $\frac{\alpha}{f}$ -dove α è una costante arbitraria- in quanto ciascun termine dello sviluppo in serie di armoniche della funzione $g(f) = f$ è proporzionale all'inverso della corrispondente frequenza.

4 Autoscillatore

Sono state prese delle misure di un segnale in uscita da un autoscillatore, il cui schema è riportato in Fig(5)

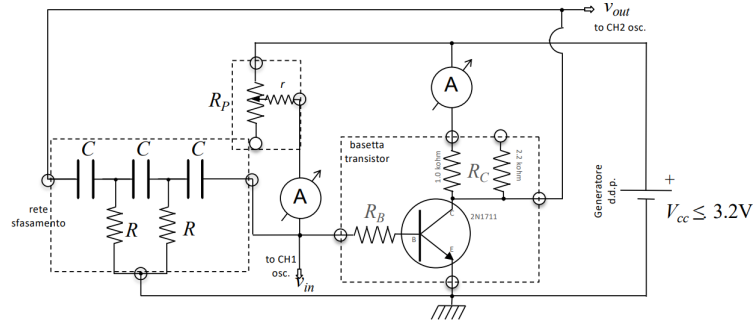
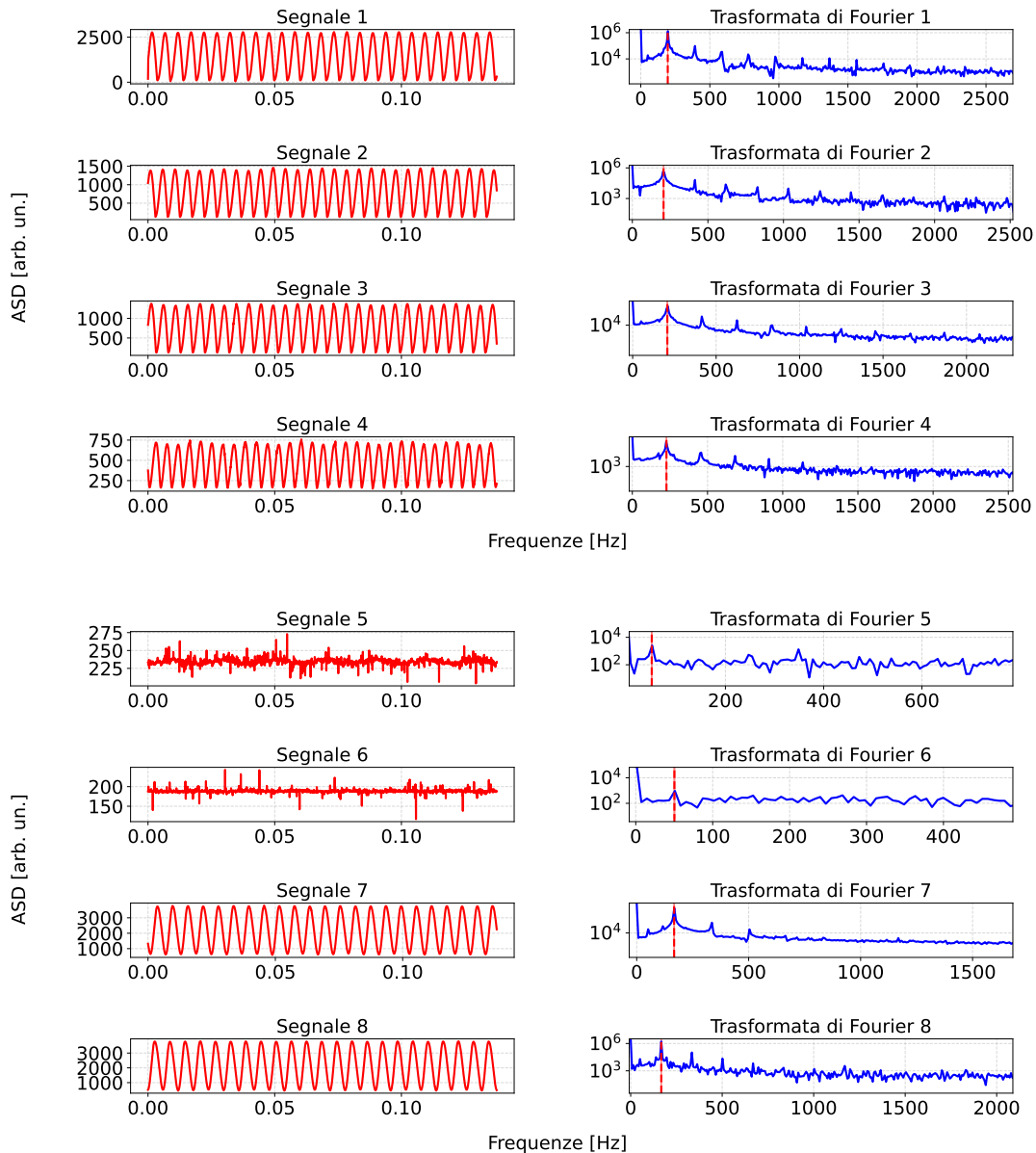


Figure 5: Schema circuitale dell'oscillatore

Per ogni segnale registrato, è stato eseguito il fit ai minimi quadratici per individuare la frequenza dell'oscillazione sinusoidale del segnale in uscita, usando la seguente funzione modello

$$f(t; A, \omega, \phi, c) = A \sin(\omega t + \phi) + c,$$

confrontandolo con il contenuto spettrale ottenuto tramite l'algoritmo della RFFT. Riportiamo in Fig(6) i grafici con a sinistra il segnale in uscita e a destra la trasformata di Fourier del segnale, dove viene graficato una linea verticale che rappresenta il valore stimato di $f = \frac{\omega}{2\pi}$ stimato dal bestfit



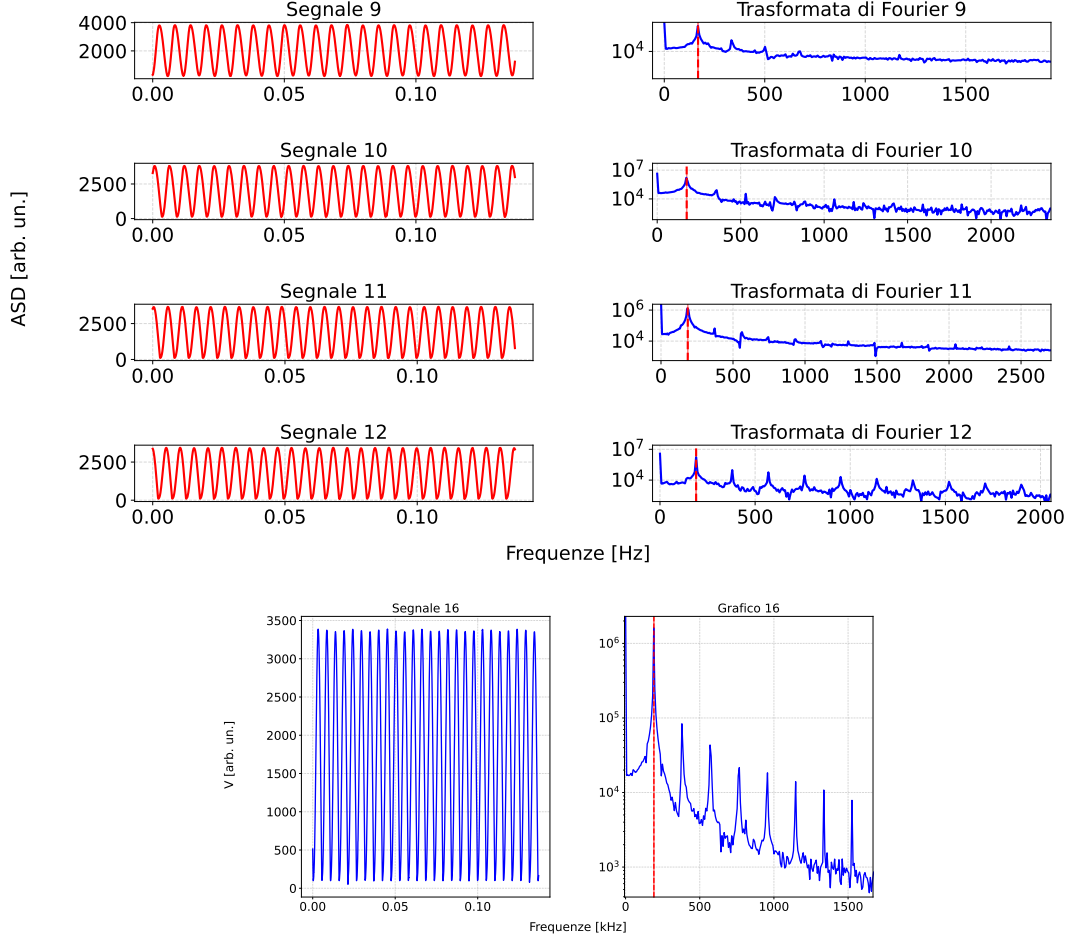


Figure 6: Segnali con relativa trasformata di Fourier graficata di lato

Prima del confronto con i valori di bestfit, possiamo già osservare che abbiamo un picco a frequenza nulla, coerentemente con quanto atteso. Escludendo quest'ultimo, si nota la presenza di molteplici picchi, quando in realtà ci aspettiamo dall'autoscillatore un segnale sinusoidale "puro" quindi ci aspettiamo due picchi: uno corrispondente alla frequenza nulla e uno corrispondente a quello della frequenza del segnale. Questo è chiaramente dovuto al fatto che non si tratta di un autoscillatore puro e non riesce a produrni un segnale perfettamente sinusoidale. In Tab(7) riportiamo i valori di bestfit

n	$f_{0_{\text{rfft}}} [\text{Hz}]$	$f_{0_{\text{bestfit}}} [\text{Hz}]$
1	195 ± 7	195.13 ± 0.06
2	203 ± 7	206.61 ± 0.07
3	210 ± 7	207.86 ± 0.07
4	225 ± 7	227.02 ± 0.08
5	50 ± 7	50 ± 1
6	50 ± 7	50 ± 4
7	168 ± 7	167.21 ± 0.03
8	167 ± 7	166.95 ± 0.03
9	166 ± 7	168.10 ± 0.04
10	174 ± 7	176.66 ± 0.04
11	182 ± 7	185.81 ± 0.03
12	189 ± 7	190.06 ± 0.04
13	190 ± 7	190.78 ± 0.04

Table 7: Tabella con i valori di frequenza del segnale stimata tramite RFFT e tramite bestfit, dove n rappresenta l' n -segnale analizzato

Si osserva che i valori di frequenza stimati tramite bestfit e tramite RFFT sono compatibili entro le barre

di errori per tutti i valori. Come errori sul valore stimato tramite la RFFT si è utilizzata la spaziatura tra un valore della frequenza e quello successivo, che abbiamo scelto, nell'algoritmo della RFFT, di essere pari a

$$\Delta f = \frac{1}{\max t}$$

dove $\max t$ è il tempo massimo di acquisizione del segnale.

5 Oscillazioni smorzate

Sono state prese delle misure di segnale in uscita da un circuito RLC, come mostrato in Fig(7) per tre diversi condensatori. Sono stati misurati il periodo e la frequenza delle oscillazioni. E' stato eseguito un fit ai minimi quadrati per un'oscillazione smorzata per determinarne il periodo. E' stata eseguita una FFT per il medesimo scopo. I risultati sono riportati in Tab.(8) e in Fig.(8).

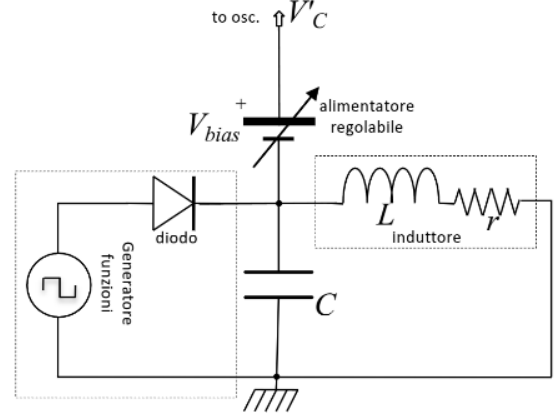


Figure 7: Diagramma del circuito RLC realizzato.

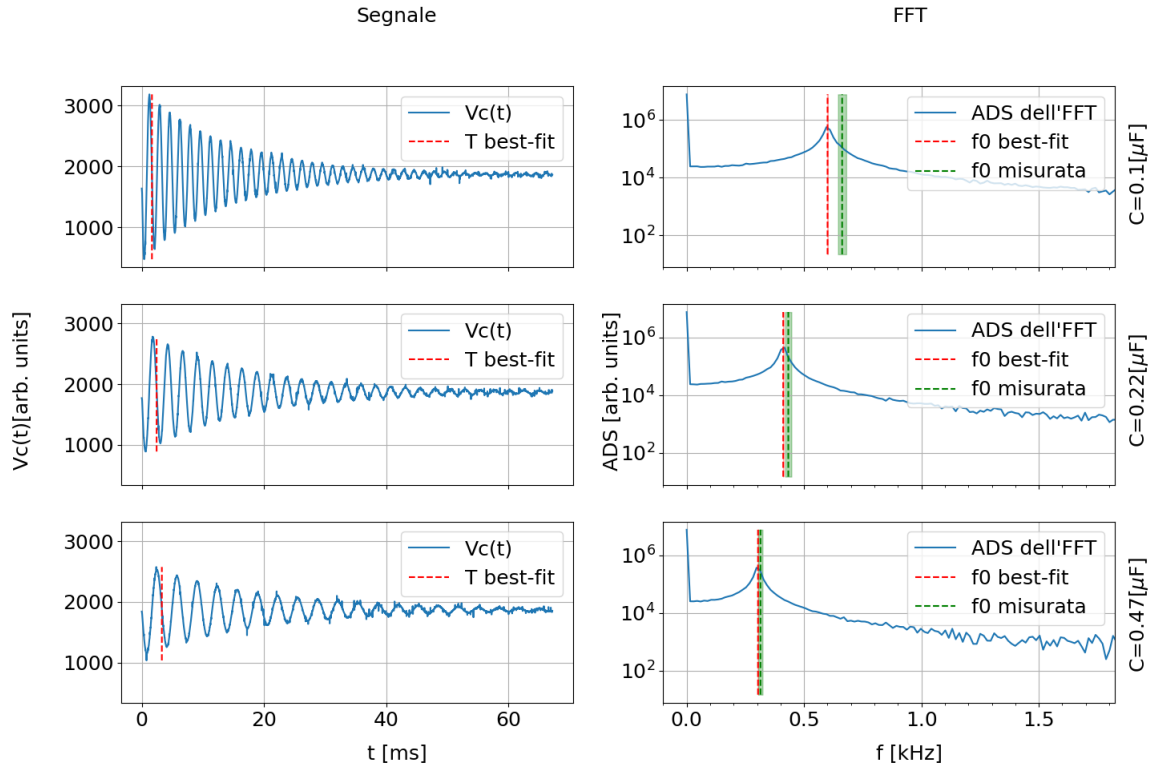


Figure 8

Table 8: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

$C[\mu\text{F}]$	f_{0mis}	$f_{0fft}[\text{kHz}]$	$f_{0bestfit}[\text{kHz}]$
$0.1 \pm 20\%tol.$	0.66 ± 0.02	0.595 ± 0.004	0.6001 ± 0.0003
$0.22 \pm 20\%tol.$	0.43 ± 0.01	0.416 ± 0.004	0.41131 ± 0.00002
$0.47 \pm 20\%tol.$	0.314 ± 0.009	0.298 ± 0.004	0.30393 ± 0.00002

Le frequenze ottenute tramite la FFT e tramite il bestfit sono compatibili, eccetto per la prima frequenza misurata, entro la barra di errore.

Coerentemente con quanto ci si può aspettare sono presenti 2 picchi nella FFT, uno a frequenza nulla, in quanto il segnale non è alternato, l'altro alla frequenza di oscillazione del segnale.

Siccome il segnale non è perfettamente sinusoidale, la FFT presenta un ampio spettro di armoniche attorno al picco principale.

6 Materiali nel core dell'induttore

Sono state prese delle misure di segnale in uscita da un circuito RLC, come mostrato in Fig(9) inserendo diversi materiali dentro il core dell'induttore. E' stato eseguito un fit ai minimi quadrati per un'oscillazione smorzata per determinarne il periodo e il tempo di smorzamento. E' stata eseguita una FFT per determinare il periodo di oscillazione. I risultati sono riportati in Tab.(9) e in Fig.(10).

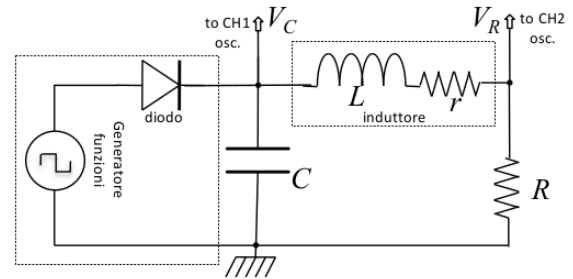


Figure 9: Diagramma del circuito RLC realizzato.

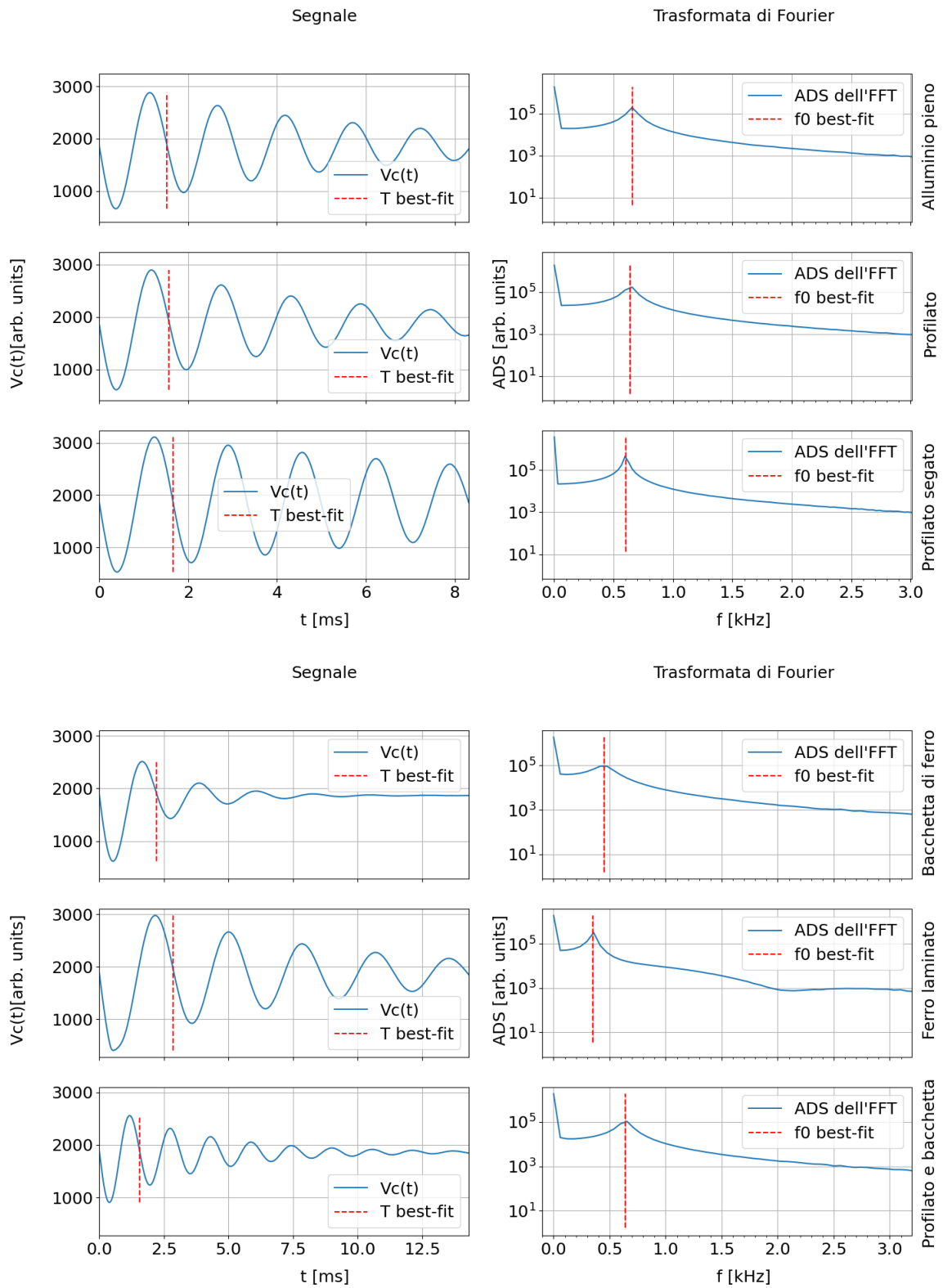


Figure 10: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

Table 9: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

materiale	$f_{0fft}[\text{kHz}]$	$f_{0bestfit}[\text{kHz}]$
Alluminio pieno	0.65 ± 0.02	0.657 ± 0.008
Profilato	0.65 ± 0.02	0.637 ± 0.008
Profilato segato	0.595 ± 0.009	0.601 ± 0.002
Bacchetta di ferro	0.42 ± 0.02	0.451 ± 0.009
Ferro laminato	0.35 ± 0.02	0.349 ± 0.009
Profilato e bacchetta	0.65 ± 0.02	0.639 ± 0.009

Le frequenze ottenute tramite la FFT e tramite il bestfit sono compatibili, eccetto per la bacchetta di ferro, entro la barra di errore. Il problema con la bacchetta di ferro è che essendo il segnale molto smorzato e il picco non è molto pronunciato; in aggiunta siccome l'acquisizione non è stato possibile prenderla sufficientemente lunga -in quanto il segnale sarebbe stato eccessivamente soppresso-, si sovrappone al problema precedente uno legato alla scarsa risoluzione dei punti nello spettro delle frequenze.

Si può osservare che per i blocchi di alluminio pieno e profilato di alluminio, il periodo di oscillazione diminuisce, in quanto è diamagnetico e il periodo è inversamente proporzionale all'induttanza, che diminuisce.

Analogamente per il ferro laminato e, in maggior misura, per la bacchetta di ferro il periodo di oscillazione aumenta per il comportamento da ferromagnete.

Nella discussione appena fatta sto trascurando il contributo dato dal tempo caratteristico di smorzamento al periodo di oscillazione.

Il tempo caratteristico di smorzamento è rilevante nei grafici delle FFT, Fig(10), in quanto impone l'ampiezza del picco: si osserva che questo aumenta per ogni materiale inserito nel core rispetto a quanto visto nel caso del vuoto visto a Fig.(8). Tuttavia questo non accade per il profilato segato dove, è possibile aspettarsi che gli effetti delle correnti parassite siano meno importanti.

7 "Il pinnacolone"

8 Glicemia

E' stata acquisita la Glicemia di un paziente di diabete mellito tipo 1 in due periodi diversi: le vacanze natalizie e la sessione di studio per gli esami. I risultati dell'analisi con FFT sono riportati in Fig.(11). I due periodi sono paragonabili in quanto ravvicinati e si assume che la temperatura e lo stress non abbiano subito variazioni significative nel paziente.

Si evidenziano i tempi che determinano le frequenze caratteristiche dell'andamento glicemico:

- 3 ore - il tempo di effetto dell'insulina
- 6 ore - il tempo che durante il giorno intercorre tra i parassite
- 24 ore - il giorno (da cui il sonno, la produzione ormonale, le attività svolte...)

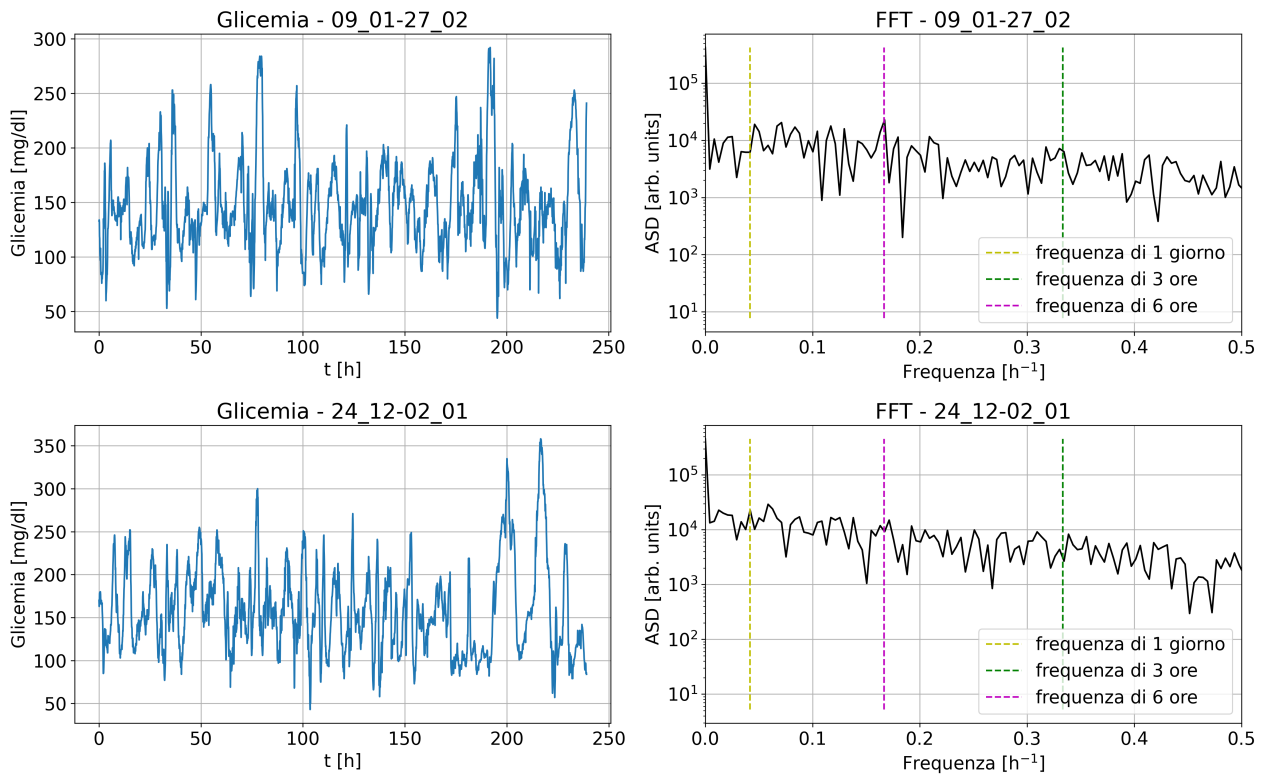


Figure 11: E' evidente la presenza di una maggiore regolarità nel periodo di studio rispetto alle festività: il picco legato al giorno e quello legato ai scompare durante le festività per le persistenti iperglicemie dovute all'aumentata insulino-resistenza e ai pasti più ricchi di grassi. Il picco legato all'azione dell'insulina si attenua probabilmente a causa dell'elevata insulino-resistenza.