

Relazione Natalizia

Francesco Angelo Fabiano Antonacci
Francesco Sermi

January 18, 2025

1 Ricostruzione numerica di forme d'onda

Tutte le simulazioni di questa sezione sono state fatte assegnando alle onde periodo unitario.

1.1 Forme d'onda quadre

Un'onda quadra alternata dispari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dalla serie infinita a Eq.(1).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\omega t) \quad (1)$$

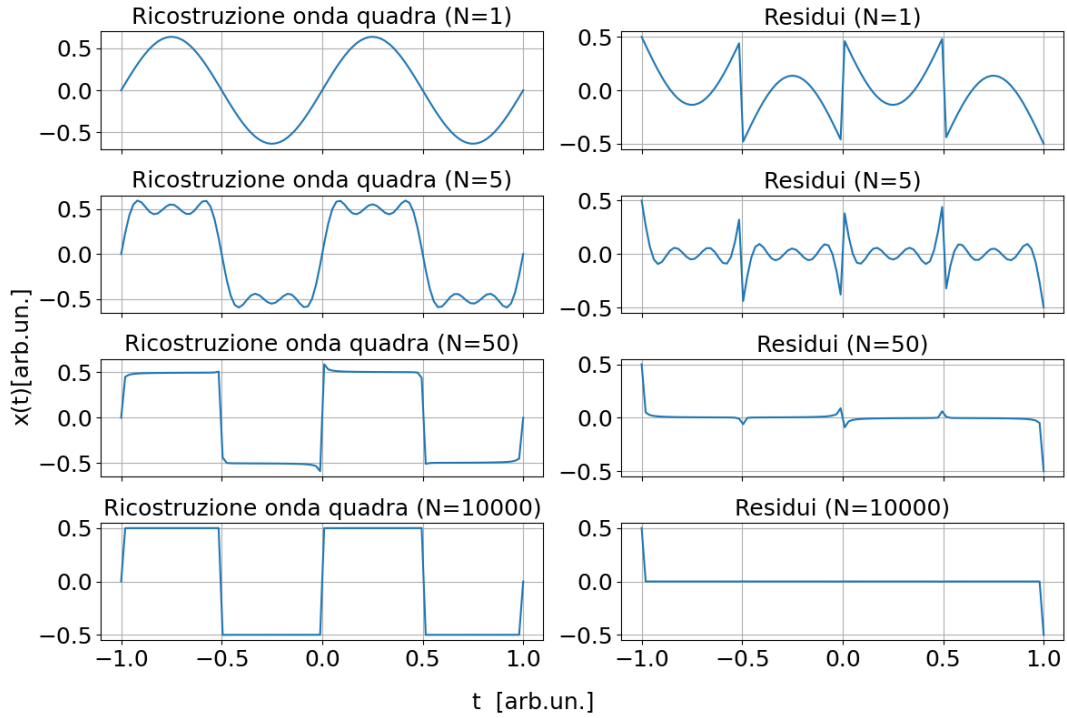


Figure 1: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

In Fig(1) e Fig(2) sono mostrate due ricostruzioni numeriche dell'onda quadra. All'aumentare dei termini N della serie diminuisce la distanza tra onda analitica e serie di seni.

Si osserva che nel caso di Fig(1), la quale ha una risoluzione peggiore, la deformazione dell'onda quadra assomiglia a quanto visto nelle esperienze pratiche di laboratorio con l'oscilloscopio quando si usa il generatore di funzioni a frequenze sufficientemente alte.

La presenza di lati obliqui nei transienti è conseguenza di un sottocampionamento della ricostruzione, questo comporta che non c'è miglioramento dell'approssimazione all'aumentare dei termini della serie.

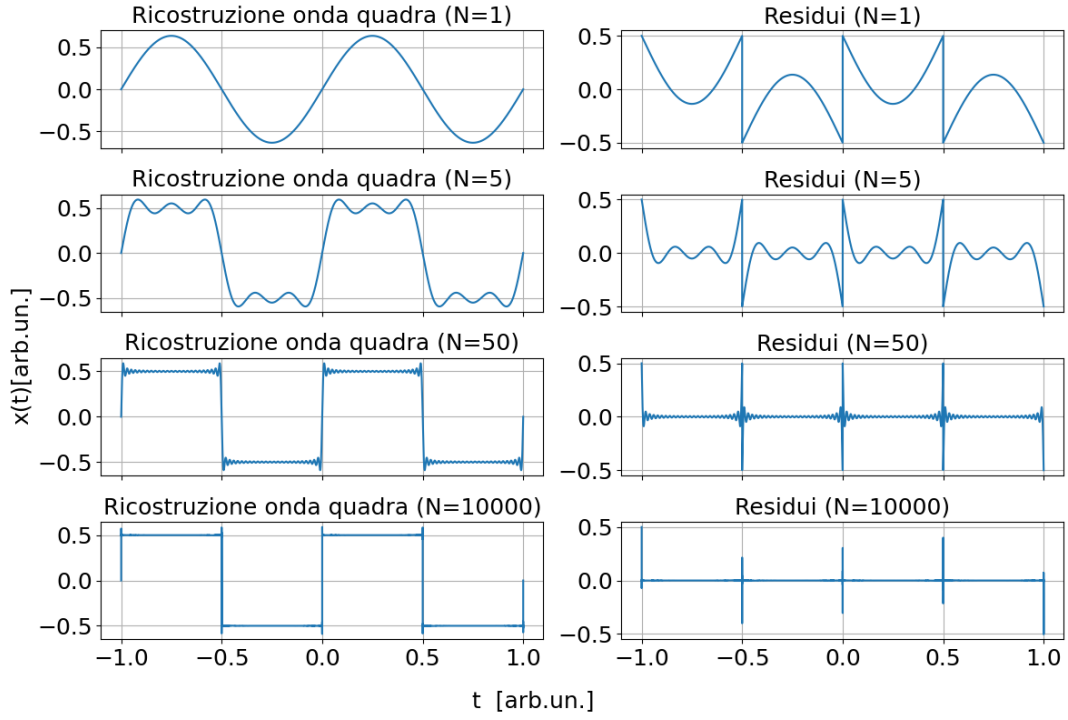


Figure 2: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda quadra Eq.(1) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

I residui nei punti iniziali e sui transienti non si annullano mai: infatti non c'è convergenza semplice nei punti di discontinuità della funzione, e quindi in corrispondenza di ognuno di questi si trovano dei picchi.

1.2 Forme d'onda triangolari

Un'onda triangolare alternata pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritta dall' Eq.(2).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \cos(k\omega t) \quad (2)$$

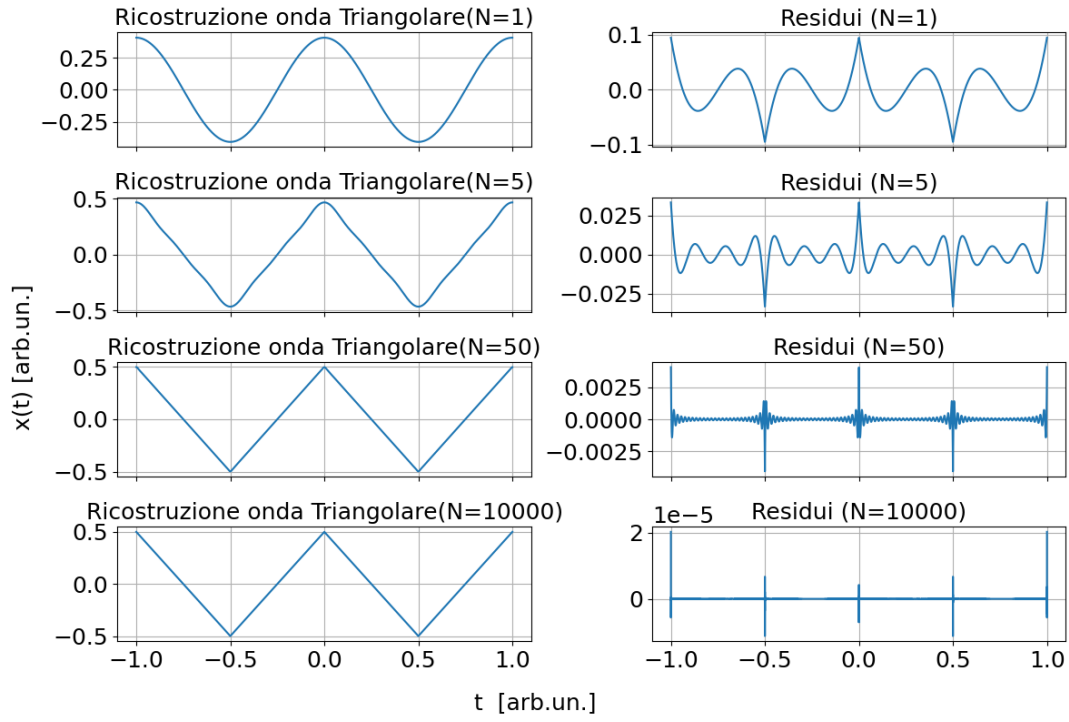


Figure 3: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

Differentemente da quanto accade per l'onda quadra, in questo caso, nei punti in cui la derivata è discontinua e nei punti al bordo c'è convergenza semplice anche se più lenta che altrove. A tal proposito, si vedano grafici dei residui in Fig.(3) e Fig.(4). Anche solo qualitativamente si osserva a entrambe le risoluzioni che la convergenza all'onda analitica è più rapida dell'onda quadra, una migliore discussione di ciò avverrà in Sez.(1.3).

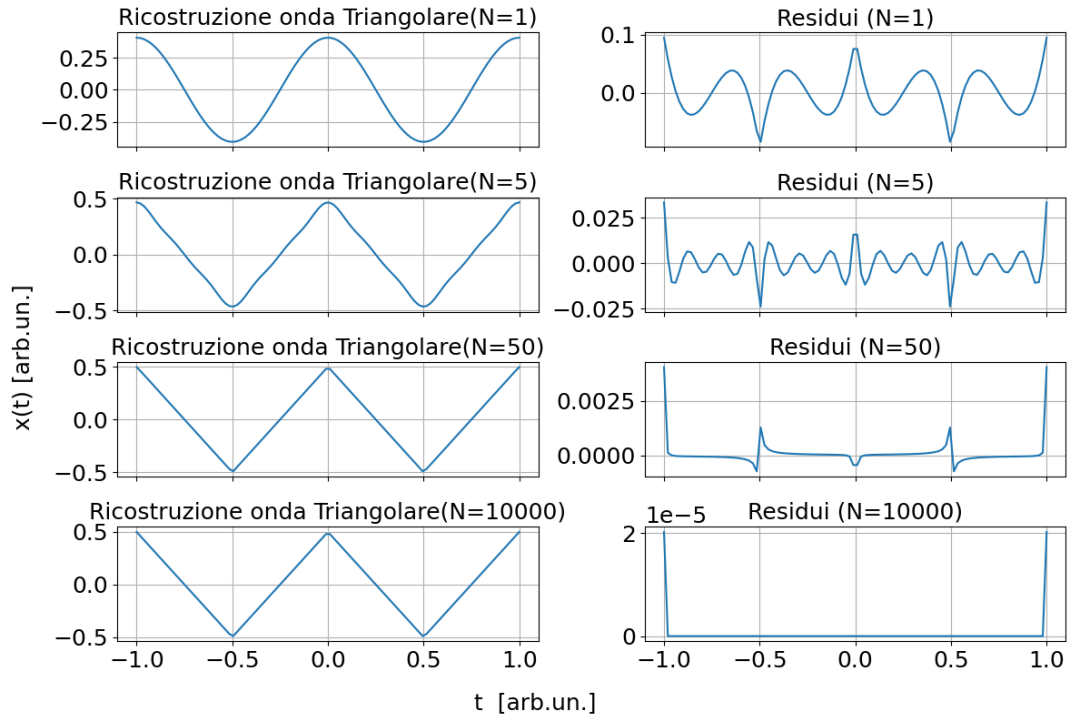


Figure 4: A sinistra ricostruzione numerica dell'onda triangolare Eq.(2) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

Per quanto riguarda l'utilizzo di diverse risoluzioni nei grafici, l'impiego di una risoluzione minore comporta problemi nella convergenza solo nei punti iniziali e non nei punti di transiente; al contrario, l'impiego di una

risoluzione maggiore fa osservare dei picchi nei residui in prossimità dei transienti; questo è legato al particolare campionamento effettuato: non mettere i punti di picco tra quelli che vengono campionati comporta una deformazione della forma d'onda graficata che non viene osservata nei residui.

1.3 Verifica di convergenza della serie

La serie di Fourier delle rispettive onde dovrebbe convergere integralmente alle funzioni analitiche. La velocità di convergenza rispetto al numero di iterazioni è diversa per le forme d'onda come si può vedere in Fig.(5). Quando il campionamento avviene su numero sufficientemente piccolo di periodi, nel caso in questione 50 campionamenti al periodo, non c'è più convergenza integrale tra la funzione semplice, definita sugli intervalli dalla serie di Fourier, e la funzione analitica: con ogni probabilità questo è dovuto al transiente che non è adeguatamente approssimato. Inaspettatamente, si osserva che entrambe le onde compiono delle "oscillazioni smorzate": la convergenza dovrebbe migliorare all'aumentare dei termini delle serie, ma localmente questo non è verificato, si veda Fig.(6).

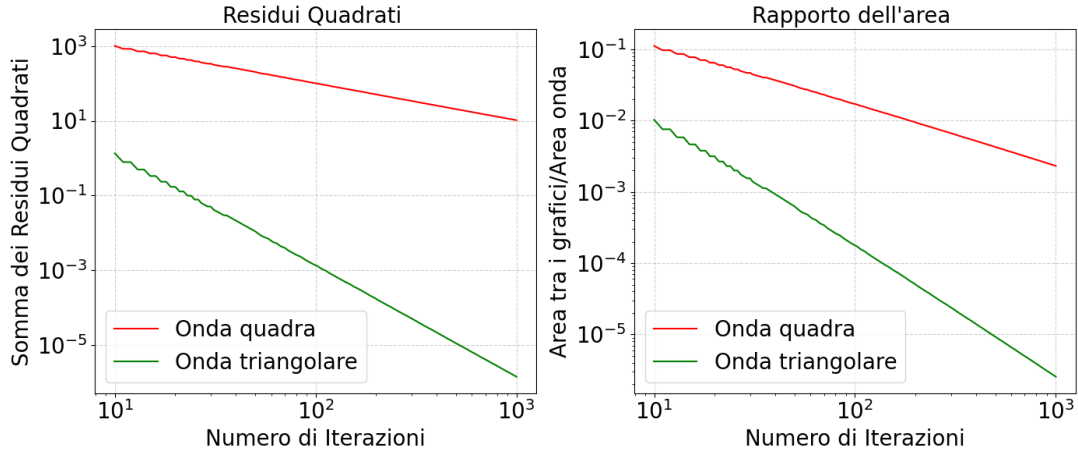


Figure 5: Nella figura simulazione numerica sono stati usati cento milioni di campionamenti presi tra due periodi.

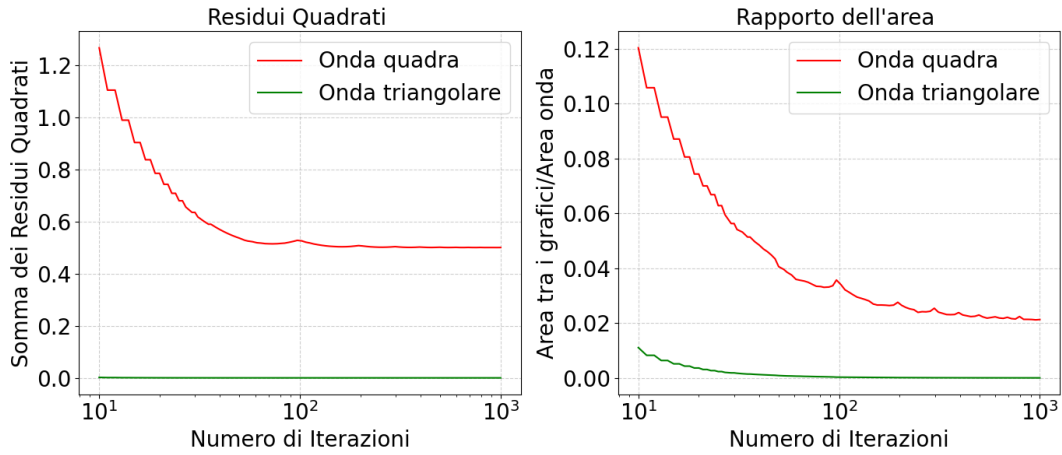


Figure 6: Nella figura simulazione numerica sono stati usati 100 campionamenti presi tra due periodi.

1.4 Treni di impulsi

Un treno di impulsi pari con ampiezza picco-picco unitaria e fase nulla è descritto dall' Eq.(3).

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \sin(k\pi\delta) \cos(k\omega t) \quad (3)$$

δ è il rapporto tra massimo e minimo dell'onda. Come si può vedere in Fig.(7) e in Fig.(8), è possibile fare le stesse identiche osservazioni fatte in Sez(1.1).

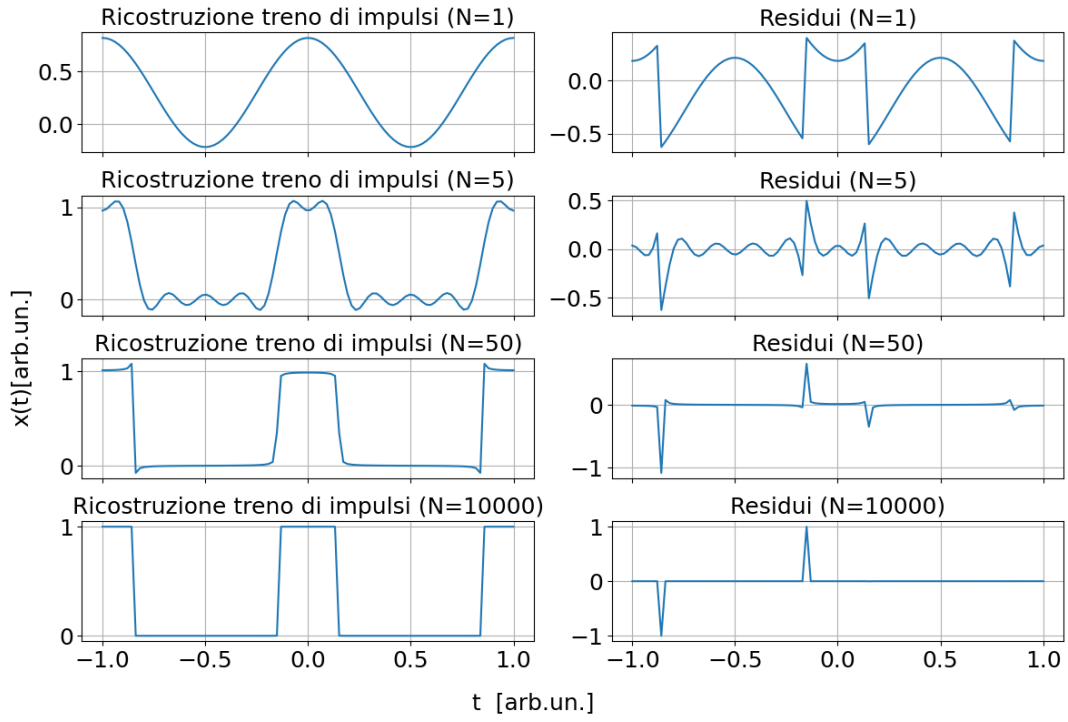


Figure 7: A sinistra ricostruzione numerica del treno di impulsi Eq.(3) su due periodi con cento punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

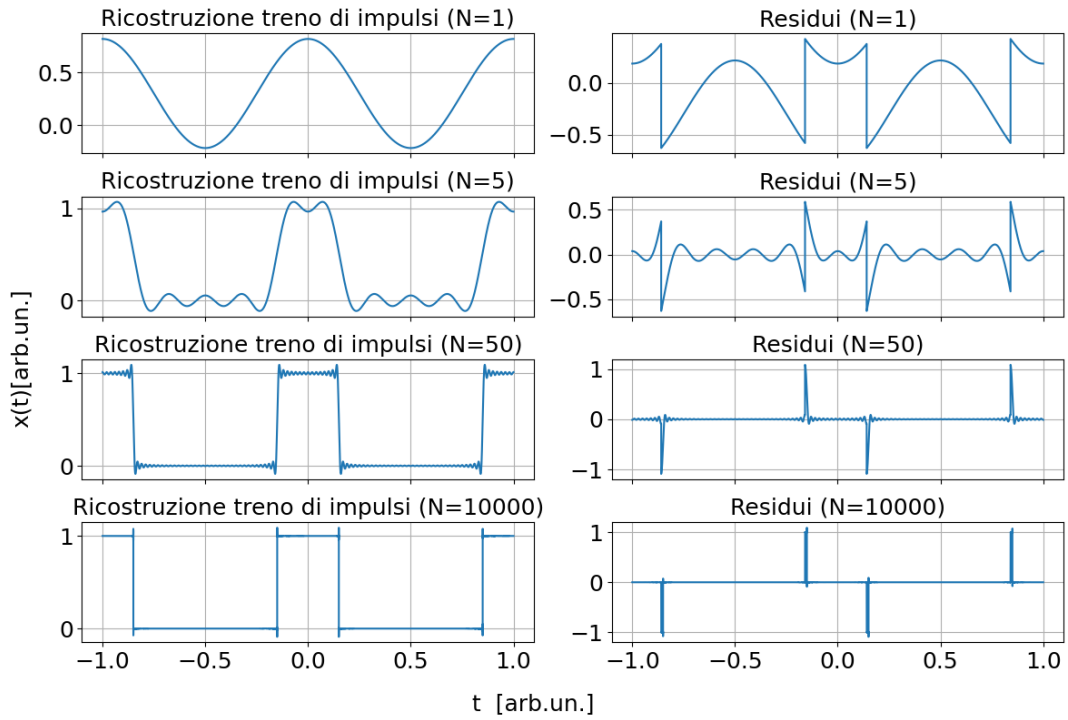


Figure 8: A sinistra ricostruzione numerica del treno di impulsi Eq.(3) su due periodi con centomila punti. A destra residui tra onda analitica e la ricostruzione. N è il numero a cui è stata troncata la serie.

2 Filtro passa basso e filtro passa alto

Un filtro passa basso di frequenza di taglio f_T , che riceve un segnale sinusoidale, di frequenza angolare ω , lo riscalda di un fattore G e lo sfasa di un angolo ϕ come dato da Eq.(4).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{-f}{f_T}\right) \quad (4)$$

Un filtro passa alto di frequenza di taglio f_T , che riceve un segnale sinusoidale, di frequenza angolare ω , lo riscalda di un fattore G e lo sfasa di un angolo ϕ come dato da Eq.(5).

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_T}{f}\right)^2}}, \quad \phi(f) = \arctan\left(\frac{f_T}{f}\right) \quad (5)$$

Dunque le equazioni per le onde passanti per ciascuno dei filtri si trovano moltiplicando ciascun termine della sommatoria per il rispettivo $G(k\omega, f_T)$ e sommando il termine $\phi(k\omega, f_T)$ all'interno della sinusoide o cosinusoide. G e ϕ hanno significato di Eq.(4) o Eq(5) dipendentemente dal filtro del contesto.

Tutte le simulazioni di questa sezione sono state fatte assegnando alle onde periodo unitario.

2.1 Onda quadra

Le funzioni descriventi il segnale in uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un'onda quadra, sono date dal procedimento descritto i Sez.(2).

2.1.1 Filtro passa basso

E' possibile fare le stesse considerazioni riguardanti il numero di termini della serie impiegati, i transienti e il campionamento come in Sez.(1.2), in quanto la curva che viene approssimata è continua (vedi Fig(9) e Fig(10)).

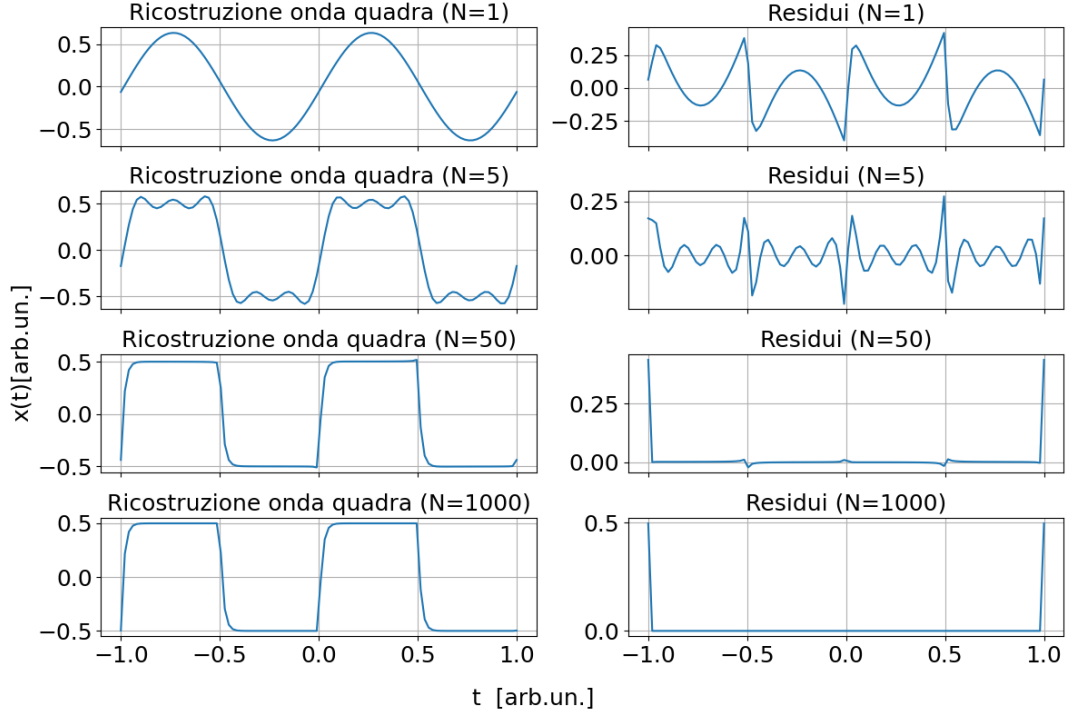


Figure 9: A sinistra c'è l'onda a pinna di squalo. A destra c'è il grafico dei residui. La risoluzione utilizzata è stata di cento punti su due periodi.

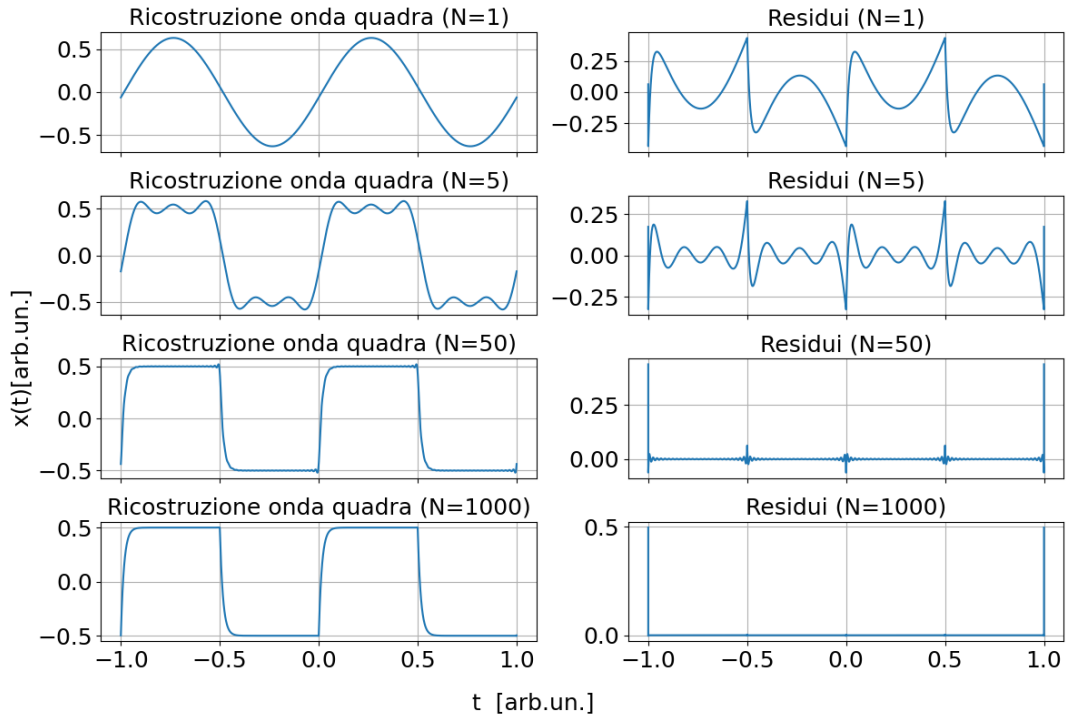


Figure 10: A sinistra c'è l'onda a pinna di squalo. A destra c'è il grafico dei residui. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

Si può simulare il comportamento di un filtro al variare della frequenza in ingresso: per semplicità la simulazione è stata fatta tenendo fissa la frequenza dell'onda e variando la frequenza di taglio, si veda Fig.(11).

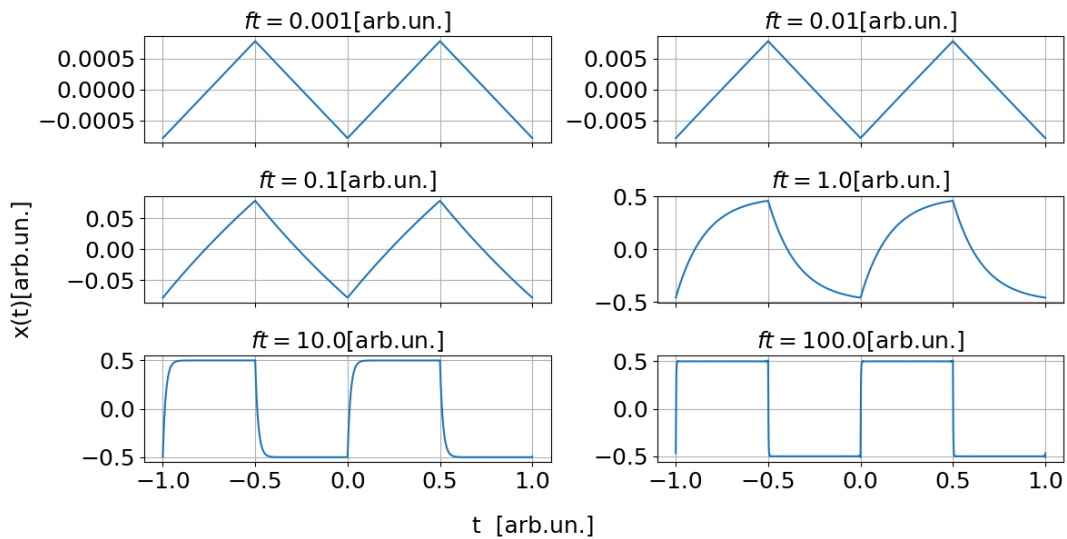


Figure 11: Onde a pinna di squalo al variare della frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

Quanto simulato e mostrato in Fig.(11) è in accordo con quanto visto in laboratorio: al decrescere della frequenza di taglio rispetto alla frequenza dell'onda quadra, l'onda tende a diventare triangolare e la sua ampiezza diminuisce; viceversa, l'onda tende a divenire quadra, ossia il segnale in ingresso tende a rimanere inalterato.

2.1.2 Filtro passa alto

In Fig(12) si simula il passaggio di un'onda quadra attraverso un filtro passa alto: si può osservare specialmente nel caso $ft = 0.1$ [arb.un.] la stessa forma d'onda osservata collegando l'oscilloscopio in modalità AC al generatore di funzioni.

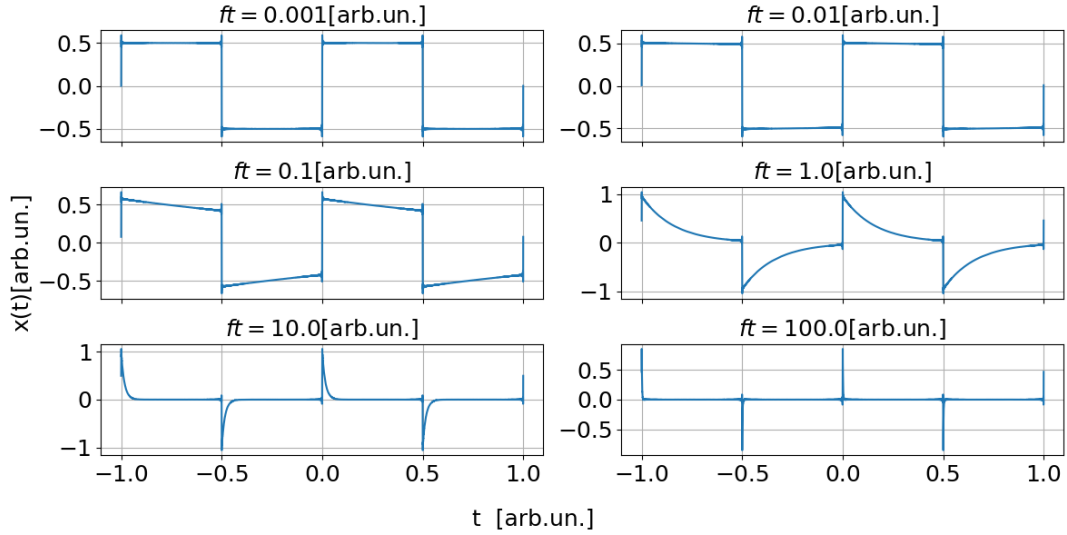


Figure 12: Simulazione di filtri passa alto con onda quadra. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.2 Onda triangolare

Le funzioni descriventi il segnale in uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un'onda triangolare, sono date dal procedimento descritto in Sez.(2).

2.2.1 Integratore

In Fig.(13) viene riportato il comportamento di un filtro passa basso per un'onda triangolare. Valgono tutti i commenti precedentemente fatti in Sez.(2.1.1)

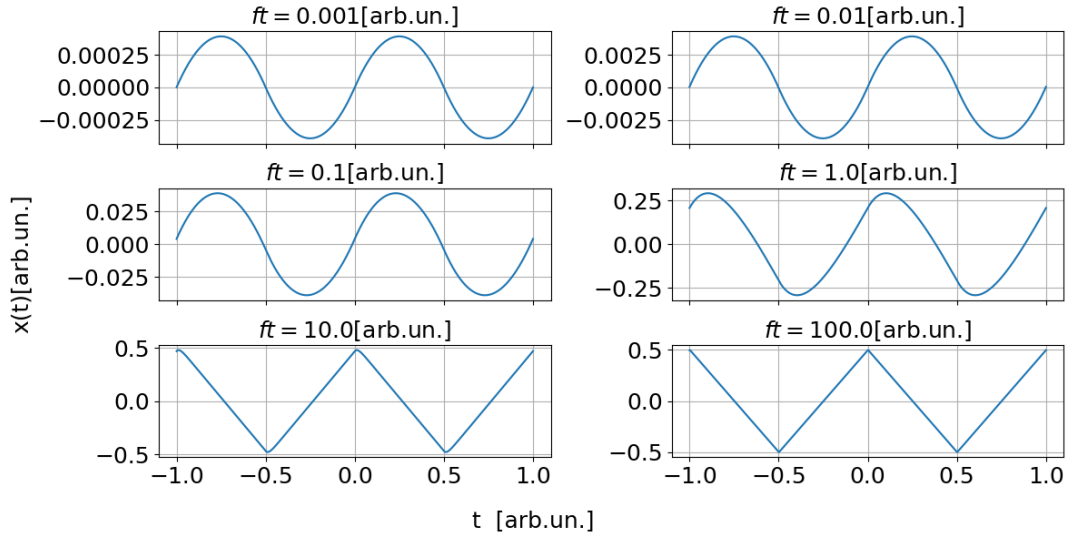


Figure 13: Segnale triangolare attraversante filtri passa basso di diversa frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.2.2 Derivatore

In questo caso (vedi Fig.(14)), si osserva che la forma d'onda triangolare passante per un filtro passa alto coincide con quella simulata per un filtro passa basso attraversato da un'onda quadra(vedi Fig(11))

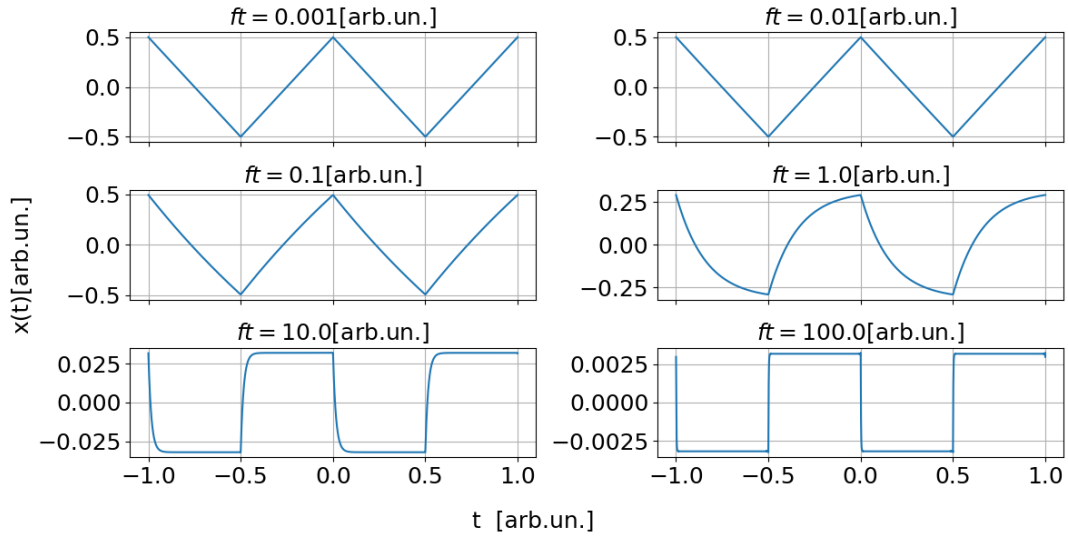


Figure 14: Segnale triangolare attraversante filtri passa alto di diversa frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. La serie di Fourier è stata troncata al termine $N = 10000$.

2.3 Treno di impulsi

Le funzioni descriventi il segnale in uscita o in ingresso da un filtro passa basso o passa alto, i quali in ingresso hanno un treno di impulsi, sono date dal procedimento descritto in Sez.(2).

2.3.1 Integratore

Le osservazioni che si possono fare in questo caso sono già state fatte nella trattazione dell'onda quadra in Sez.(2.1.1). In Fig.(15) viene riportato il segnale integrato di un treno di impulsi. Per facilità di rappresentazione e facilitare possibili manipolazioni nello studio della forma, è stato scelto di tenere compresa la forma d'onda in un intervallo unitario centrato in zero. Se questo non fosse stato fatto appositamente, la forma d'onda, non essendo alternata, non avrebbe spontaneamente, eccetto che nel caso in cui si fosse ricondotti a un'onda quadra, rispettato questa richiesta.

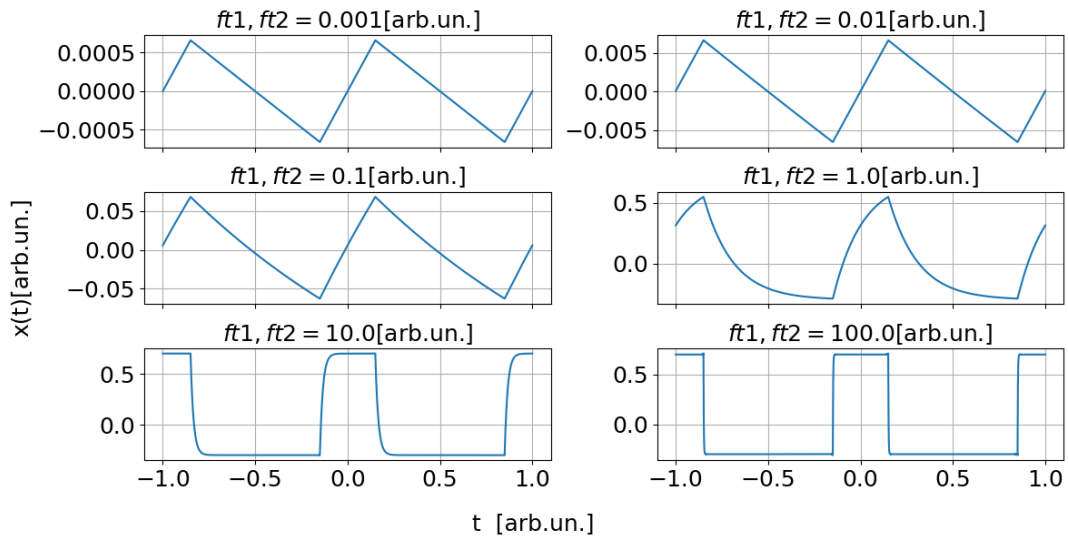


Figure 15: Treno di impulsi attraversante filtri passa basso di diversa frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. E' stato fatto un troncamento al termine 10000 nello sviluppo della serie di seni.

2.3.2 Derivatore

In Fig.(16) viene riportato il segnale derivato di un treno di impulsi.

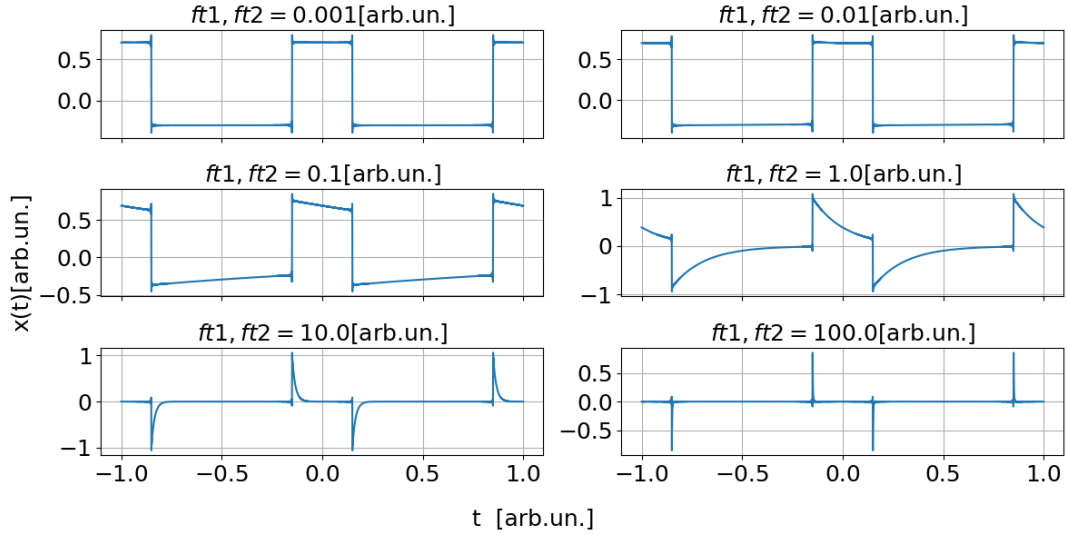


Figure 16: Treno di impulsi attraversante filtri passa alto di diversa frequenza di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. Sono stati usati 10000 termini della serie di seni.

2.3.3 Filtro passa banda

Ora ci prendiamo una piccola soddisfazione. In Fig.(17) si simula il comportamento di un treno di impulsi attraversante un filtro passa banda.

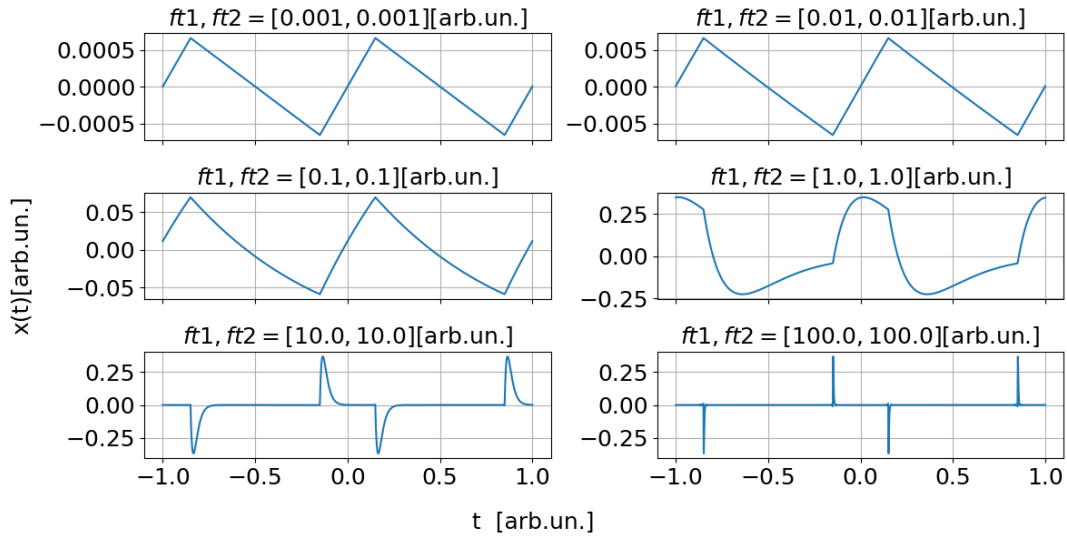


Figure 17: Treno di impulsi attraversante filtri passa banda di diverse frequenze di taglio. La risoluzione utilizzata è stata di centomila punti su due periodi. Sono stati usati 10000 termini della serie di seni.

3 bestfit dei dati acquisiti con Arduino

Con le funzioni ricostruite sono stati realizzati dei bestfit dei dati di un filtro passa basso. Il filtro passa-basso è costituito da una resistenza e capacità rispettivamente R e C , di valori riportati in Tab.(1). Si stima che la sua frequenza di taglio sia :

$$f_T = (0.23 \pm 0.06) \text{ kHz.}$$

R [k Ω]	C [μ F]
0.68 ± 0.03	1.0 ± 0.2

Table 1: Tabella dei valori nominali della resistenza e della capacità del condensatore con cui è stato realizzato il filtro passa-basso in laboratorio.

Per tutti i bestfit realizzati abbiamo troncato la serie di Fourier al termine $N = 1000$. Questo è stato necessario per far eseguire il bestfit in tempi ragionevoli. Come incertezza sulle misure di potenziale è stata presa la deviazione standard campione di un set di acquisizioni con Arduino di misure di differenze di potenziale tenute costanti [1]. Per la natura statistica dell'incertezza è stato dunque assunto *absolute_sigma=True*.

3.1 Onda quadra

E' stato realizzato un bestfit dei minimi quadrati di un set di dati compatibile con un'onda quadra. Il modello con cui fare il bestfit è descritto dall'Eq.(6).

$$V(t) = \left[a \sum_{k=1,3,5\dots}^{1000} \frac{2}{k\pi} \sin(k\omega(t + \delta)) \right] + c \quad (6)$$

Si osserva che trascurare o meno i punti sui transienti è incisivo sul risultato di bestfit come si può vedere in Fig.(18). Quello che accade è che considerando i transienti non sarebbe legittimo applicare l'argoritmo di bestfit Levenberg-Marquardt in quanto l'errore sulla variabile indipendente non è trascurabile: implementare la tecnica dell'errore efficace, a causa della divergenza della derivata della funzione sui transienti, equivale a trascurare quelle misure. Dal χ^2 risulta che l'errore è stato sovrastimato. I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(2). In Fig.(18) sono riportati i dati coi bestfit e i residui.

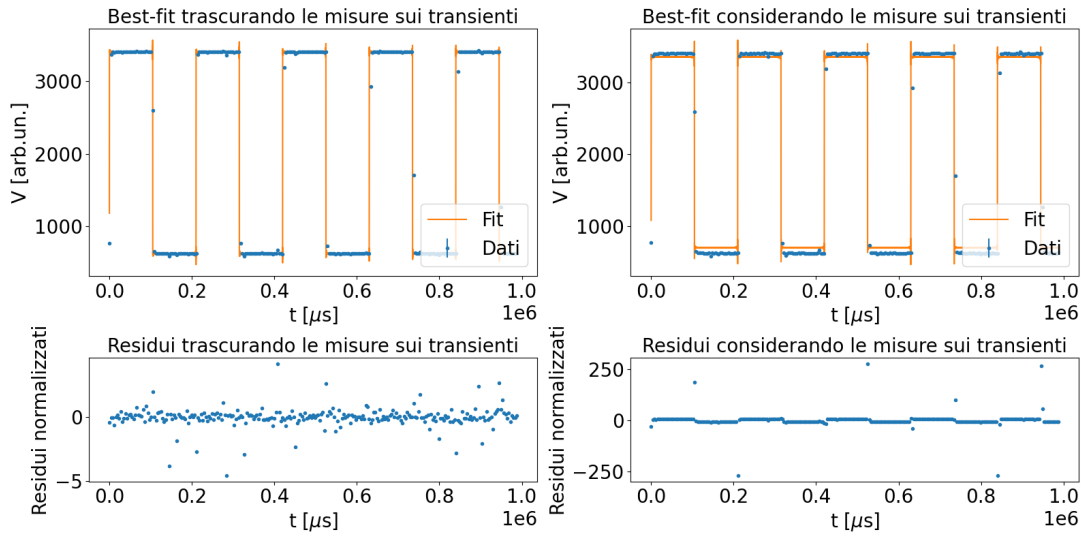


Figure 18: Bestfit di un'onda quadra campionata tramite la scheda Arduino.

	Fit trascurando i transienti	Fit considerando i transienti
ω [rad/s]	29.923 ± 0.001	29.930 ± 0.003
δ [μs]	-35 ± 24	-42 ± 19
a [arb.un]	2774 ± 1	2647 ± 47
c [arb.un]	2012.8 ± 0.7	2026 ± 23
χ^2_{norm}	0.01	14

Table 2: Parametri ottenuti nei bestfit dell'onda quadra eseguito utilizzando il modello descritto dall'eq.(6).

3.2 Onda a pinna di squalo

Sono stati realizzati dei bestfit ai minimi quadrati di quattro set di dati compatibili con forme d'onda a pinna di squalo. Il modello con cui fare i bestfit è descritto dall'Eq.(7).

$$x(t) = \left[a \sum_{k=1,3,5\dots}^{1000} \frac{2G(f, f_T)}{k\pi} \sin(k\omega(t + \delta) + \phi(f, f_T)) \right] + c \quad (7)$$

I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(3). In Fig.(19) sono riportati i dati coi bestfit e i residui: si osserva che, fatta eccezione del primo grafico, la frequenza di taglio aspettata (vedi Sez.(3)) è compatibile entro una barra di errore con quelle stimate.

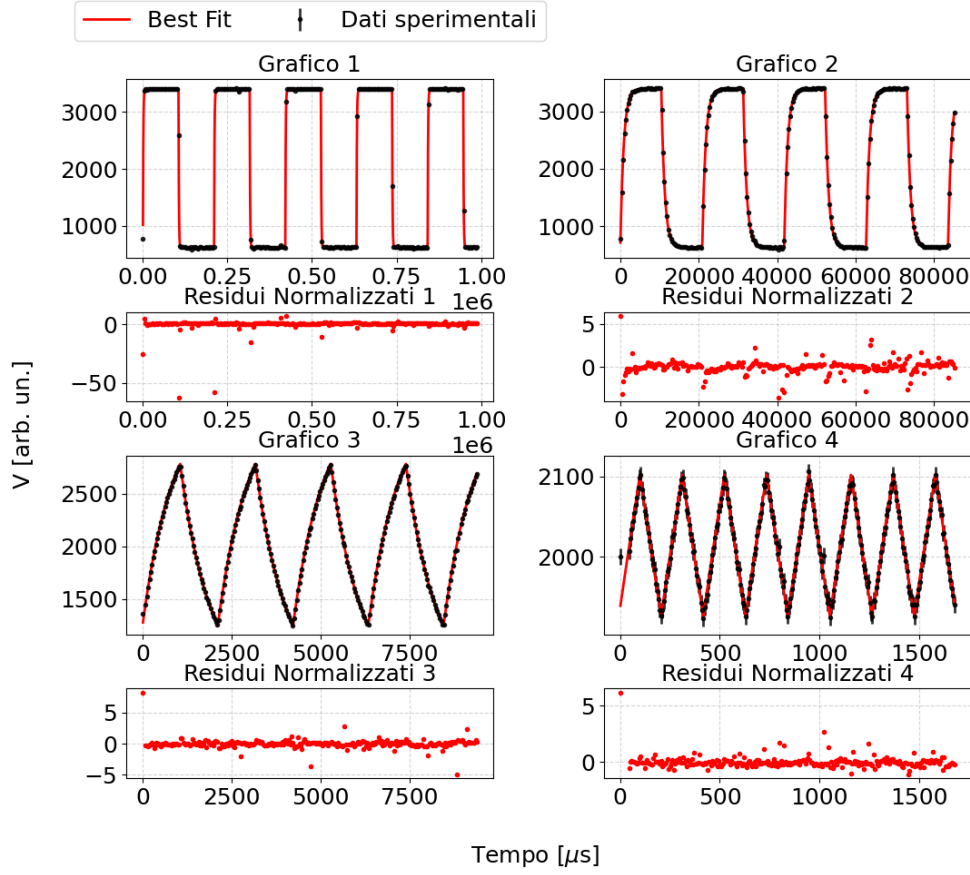


Figure 19: Grafico di bestfit nel caso di un'onda a pinna di squalo

	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
ω [rad/s]	29.839 ± 0.005	300.691 ± 0.009	2970.0 ± 0.4	29669.8 ± 0.2
f_T [kHz]	0.140 ± 0.001	0.1864 ± 0.0004	0.189 ± 0.002	0.1 ± 0.1
δ [μ s]	178 ± 3	26 ± 2	10 ± 1	6 ± 1
a [arb.un]	2779 ± 1	2767 ± 2	2746 ± 20	4137 ± 4644
c [arb.un]	2090.0 ± 0.6	2015.1 ± 0.6	2025.9 ± 0.6	2014.8 ± 0.6
χ^2_{norm}	0.3	0.0071	0.006	0.007

Table 3: Parametri ottenuti nei bestfit dell'onda quadra integrata.

3.3 Onda sinusoidale

Sono stati realizzati dei bestfit ai minimi quadrati di quattro set di dati compatibili con onde sinusoidali. Il modello con cui fare il bestfit è descritto dall'Eq.(8).

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) + c \quad (8)$$

Dal χ^2 risulta che l'errore è stato sovrastimato. I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(4). In Fig.(20) sono riportati i dati con il bestfit e i residui.

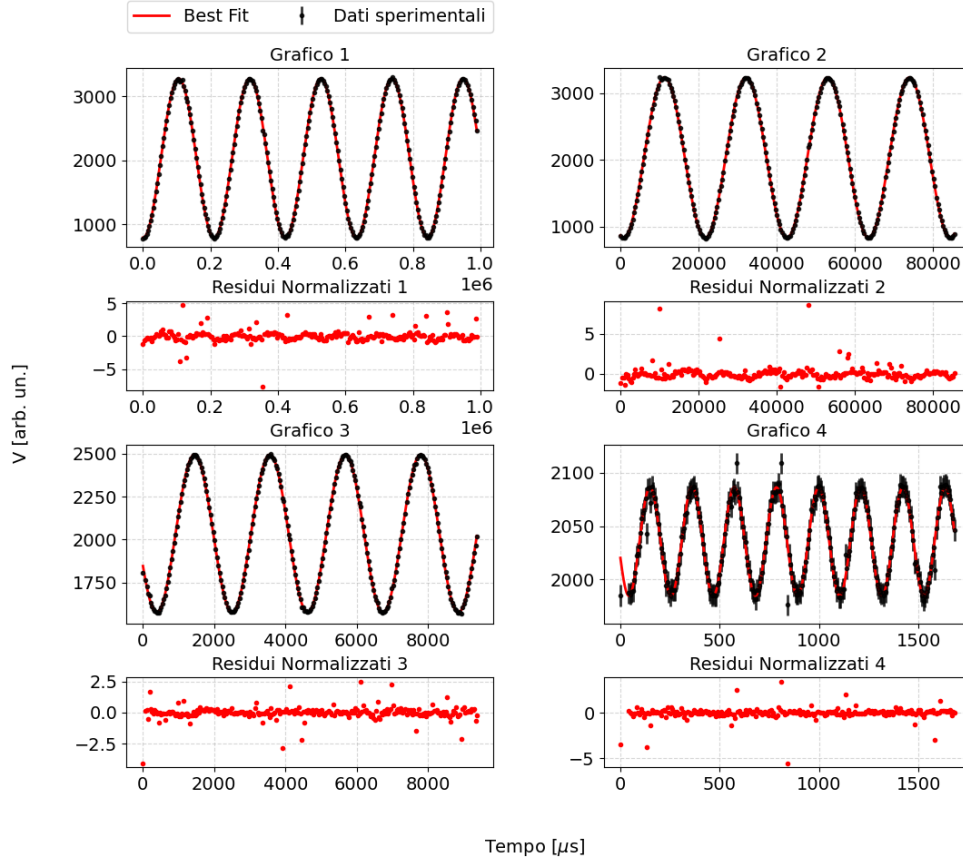


Figure 20: Grafici di bestfit nel caso di un'onda sinusoidale integrata.

	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
ω [rad/s]	29.822 ± 0.003	300.77 ± 0.03	2969.9 ± 0.7	29652 ± 3
δ [μs]	-1.588 ± 0.001	-1.811 ± 0.001	-2.723 ± 0.004	-2.89 ± 0.04
a [arb.un]	1240.2 ± 0.8	1201.2 ± 0.9	459.0 ± 0.8	50.8 ± 0.8
c [arb.un]	2035.9 ± 0.6	2036.5 ± 0.6	2035.3 ± 0.6	2035.4 ± 0.6
χ^2_{norm}	0.009	0.009	0.002	0.004

Table 4: Parametri ottenuti nei bestfit ottenuti nel caso di un'onda sinusoidale integrata.

3.4 Onda triangolare

Sono stati realizzati dei bestfit ai minimi quadrati di quattro set di dati compatibili con forme d'onda triangolari integrate. Il modello con cui fare il bestfit è descritto dall'Eq.(9).

$$x(t) = a \sum_{k=1,3,5\dots}^{1000} G(f, f_T) \frac{4}{(k\pi)^2} \sin(k\omega(t + \delta) + \phi(f, f_T)) + c \quad (9)$$

I parametri ottenuti sono riportati in Tab.(5). In Fig.(21) sono graficati i dati con i bestfit e i residui. Dal χ^2 possiamo dedurre che gli errori sono stati sovrastimati. Anche in questo caso, fatta eccezione del primo grafico, la frequenza di taglio aspettata è compatibile entro una barra di errore con quelle stimate. Il fatto che la prima stima della frequenza di taglio, quella a frequenza più bassa, si discosti dalle altre suggerisce che il modello stia trascurando qualche fenomeno che a basse frequenze è incisivo. Siccome il circuito utilizzato per fare il campionamento dei dati era lo stesso, valgono le medesime considerazioni fatte in precedenza.

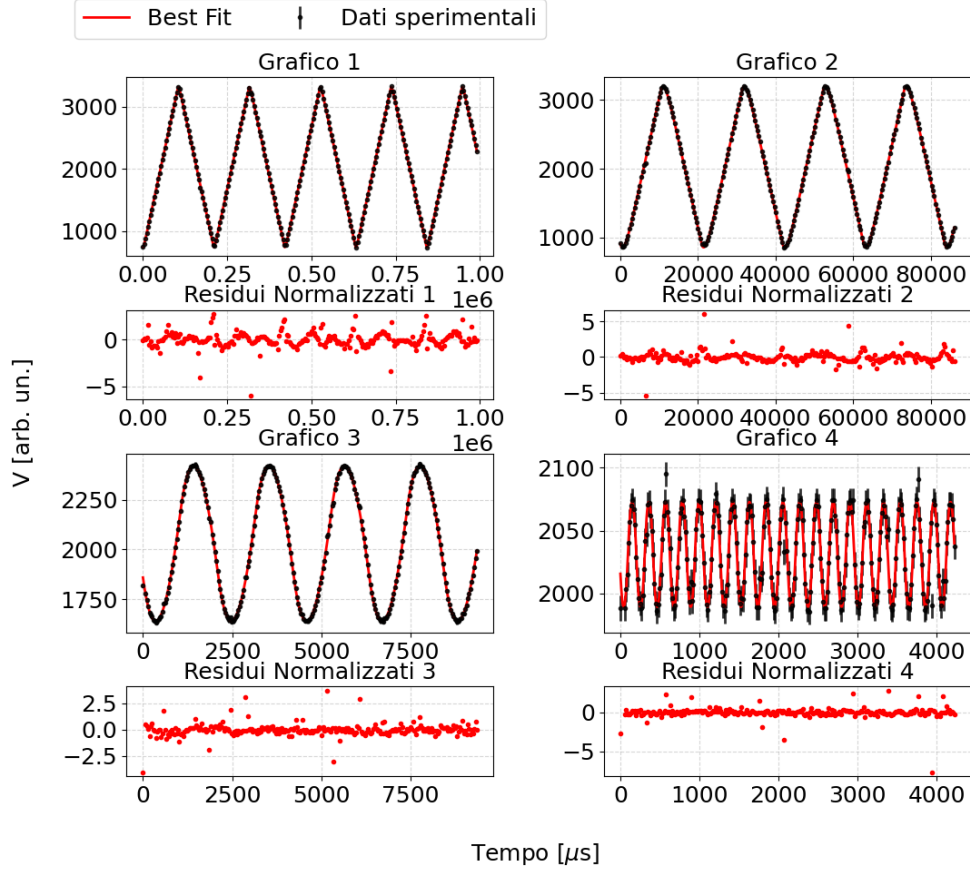


Figure 21: Grafico di bestfit nel caso di un'onda triangolare che usa il modello descritto in Eq.(9)

Parametri	Grafico1	Grafico2	Grafico3	Grafico4
a [arb.un]	2665 ± 3	2671 ± 4	2674 ± 139	2652 ± 12653
ω [rad/s]	29.817 ± 0.002	300.784 ± 0.03	2969.2 ± 0.08	29667 ± 16
δ [s]	0.107 ± 0.002	0.0105 ± 0.0001	0.001073 ± 0.000007	113 ± 7
c [arb.un]	2059.8 ± 0.6	1994.9 ± 0.6	2002.56 ± 0.63	2030.9 ± 0.6
f_T [Hz]	61 ± 4	167 ± 2	187 ± 10	189 ± 9
χ^2_{norm}	0.007	0.006	0.003	0.0053

Table 5: Parametri ottenuti nei bestfit. a è l'ampiezza del segnale, ω è la frequenza angolare del segnale, δ il duty cycle, c l'offset dei nostri dati rispetto allo zero, f_T la frequenza di taglio e χ^2_{norm} il chiquadro normalizzato.

3.5 Treno di impulsi

E' stato realizzato un bestfit ai minimi quadrati di un set di dati compatibile con un treno di impulsi utilizzando il modello descritto in Eq.(10)

$$x(t) = a \left[\sum_{k=1}^{1000} \frac{2G(f, f_T)}{k\pi} \sin(k\pi\sigma) \cos((k\omega t) + \delta) \right] + c \quad (10)$$

Riportiamo in Tab.(6) i valori di bestfit ottenuti: in entrambi i casi c'è un χ^2 molto elevato dovuto alla presenza di punti sui transienti.

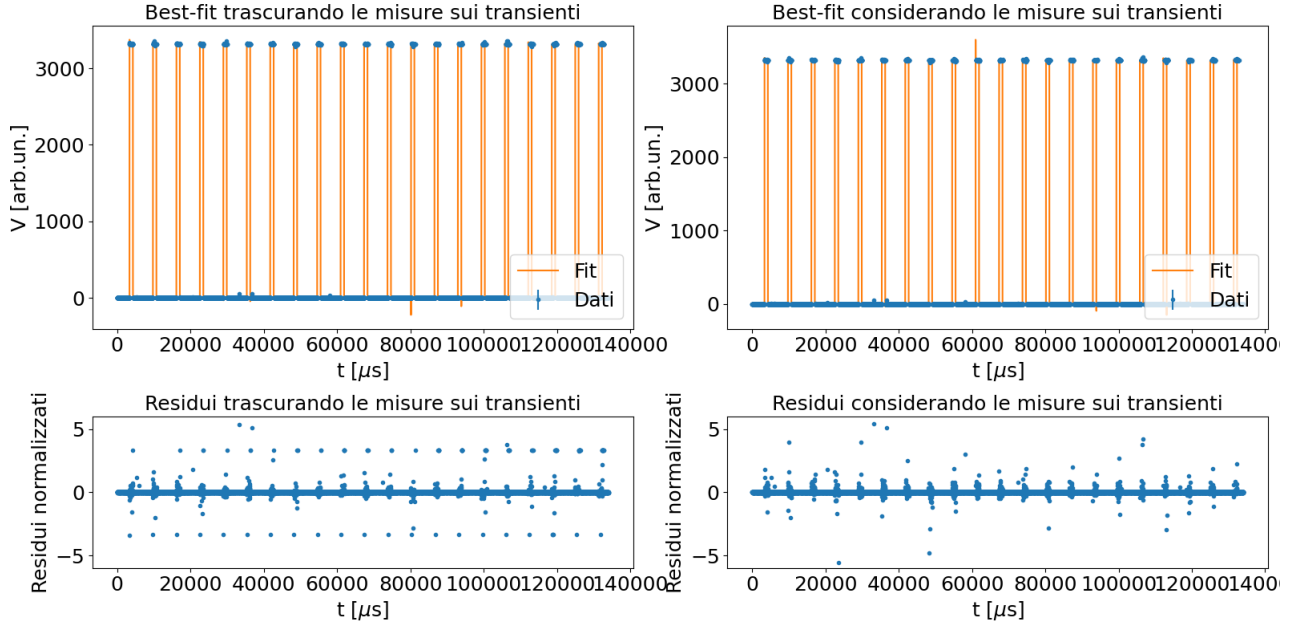


Figure 22: Grafico del bestfit nel caso di un treno di impulsi utilizzando il modello descritto in Eq.(10). Il bestfit è stato ripetuto trascurando le misure sui transienti (vedi Sez.(3.1)).

	Trascurando i transienti	Considerando i transienti
a [arb.un]	3315 ± 3	3312 ± 4
ω [rad/s]	981.7452 ± 0.0009	981.74 ± 0.04
δ	0.145014 ± 0.000009	0.14503 ± 0.00004
σ [s]	-3870.016 ± 0.002	-3869.9 ± 0.3
χ^2_{norm}	49	65

Table 6: Parametri ottenuti nei bestfit.

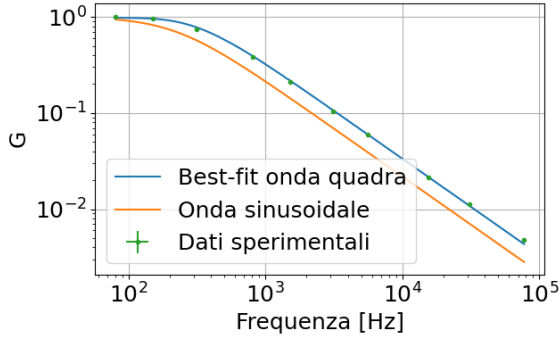
4 Simulazione numerica dei grafici guadagno-frequenza

Sono stati eseguiti due bestfit per il guadagno in uscita in funzione della frequenza in entrata, uno per una forma d'onda quadra, l'altro per una forma d'onda triangolare: si vedano Fig.(23a) e Fig.(23b). I modelli utilizzati per effettuare i bestfit sono descritti da Eq.(11) e da Eq.(12) rispettivamente per l'onda quadrata e la triangolare. Nel primo bestfit è stato usato *absolute_sigma=False* in quanto sono stati usati dati acquisiti con l'oscilloscopio, soggetto ad errori sistematici. Nel secondo caso è stato usato *absolute_sigma=True* in quanto i dati sono stati estrapolati dal bestfit dell'onda triangolare fatto a in Sez.(3.4).

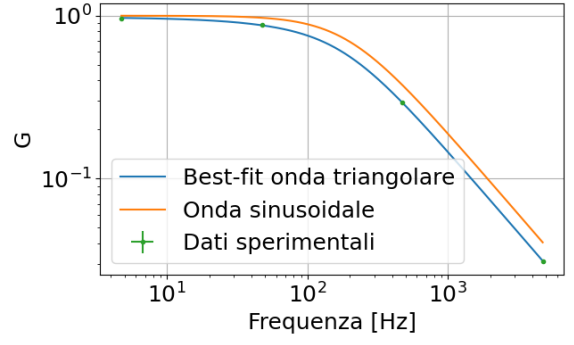
$$F(t, f) = a \left[\sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}} \sin \left(k\omega t + \arctan \left(-\frac{f}{f_T} \right) \right) \right] \quad (11)$$

$$F(t, f) = a \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}} \cos \left(k\omega t + \arctan \left(-\frac{f}{f_T} \right) \right) \right] \quad (12)$$

a e f_T sono i parametri da stimati col bestfit. a è un parametro di controllo che ci aspettiamo essere 1. Tuttavia dai bestfit Tab.(7) questa richiesta non è attesa nel caso dell'onda triangolare. Come atteso, osserviamo che il guadagno di un'onda quadra è maggiore rispetto a quello di un'onda triangolare. La frequenza di taglio, per l'onda triangolare e l'onda triangolare è in accordo con quanto aspettato, ma non con i bestfit realizzati in Sez.(3.4) .



(a)



(b)

Figure 23: (a),(b): Bestfit del guadagno in funzione della frequenza in ingresso nel caso di un'onda quadra e di un'onda triangolare

	Onda quadra	Onda triangolare
f_T [Hz]	128 ± 5	222 ± 1
a	0.977 ± 0.02	0.951 ± 0.002
κ^2	2	1

Table 7: Parametri stimati dal bestfit del guadagno in funzione della frequenza in ingresso. f_T è la frequenza di taglio,

References

- [1] Antonacci e Sermi. Dati per i best-fit. Disponibili a: <https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/tree/main>, 2024-2025. I dati sono disponibili su: Incertezze:https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/blob/main/Lab2_29102024/data_ard/data12.txt; Guadagno:https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/blob/main/Lab2_03122024/data2.txt; Treno di impulsi:https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/blob/main/Lab2_19112024/data6.txt; e fits degli integratori: https://github.com/FrancescoAntonacci/Lab-II/tree/main/Lab2_26112024.