

Relazione FFT

Francesco Sermi
Francesco Angelo Fabiano Antonacci

March 25, 2025

1 Forme d'onda

E' stata fatta la FFT di forme d'onda quadrate, trinagolari e sinusoidali acquisite in laboratorio. Il risultato è mostrato in Fig.(1).

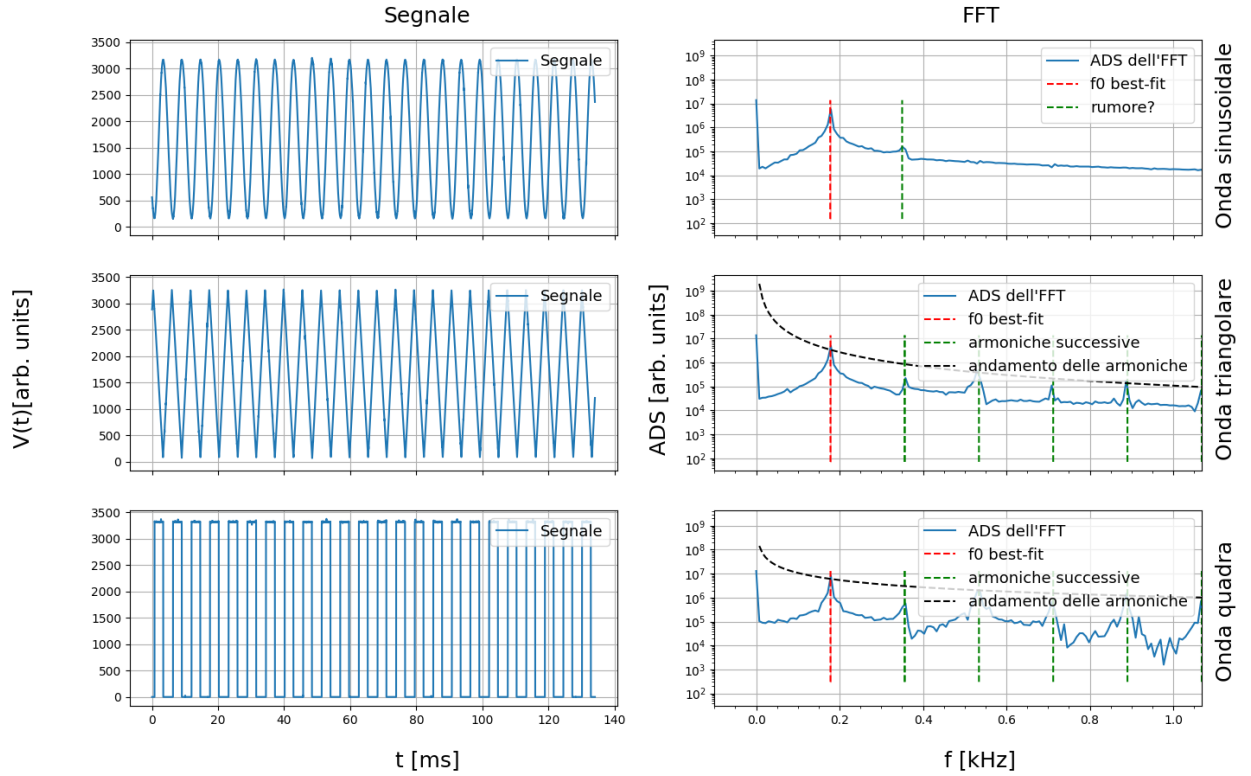


Figure 1: Confronto tra le frequenze stimate tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore con un'area colorata. Coerentemente con quanto ci si può aspettare sono presenti due picchi nella FFT, uno a frequenza nulla, in quanto il segnale non è alternato, l'altro alla frequenza di oscillazione del segnale.

Nel caso dell'onda sinusoidale si osserva la comparsa di un picco dovuto probabilmente a rumore a 300 Hz. Per le altre forme d'onda è interessante notare la comparsa delle armoniche successive alla principale, come ci si aspetta dallo sviluppo in serie di seni e coseni delle rispettive forme d'onda. In questi casi è stata disegnata sopra la FFT la legge di potenza di come scalano le armoniche successive, rispettivamente $\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k^2}$ per l'onda quadra e per quella triangolare.

E' stato eseguito un bestfit con forma d'onda sinusoidale Eq.(1) per le frequenze principali f_0 , i risultati sono riportati in Tab.(1) e mostrati in Fig.(1) assieme al rispettivo valore estrapolato dalla FFT. E' stata usata la forma d'onda sinusoidale per tutti i set di dati in quanto l'unico obiettivo del bestfit è quello di individuare la frequenza delle oscillazioni.

$$f(t; A, \omega, \phi, c) = A \sin(\omega t + \phi) + c, \quad (1)$$

Come incertezza sulla frequenza f_0 estrapolata dalla FFT è stata considerata la deviazione standard di una distribuzione uniforme attorno a f_0 con ampiezza la risoluzione del campionamento.

Forma d'onda	f_{0fft} [kHz]	$f_{0bestfit}$ [kHz]
Sinusoide	0.179 ± 0.001	0.177455 ± 0.000002
Triangolare	0.179 ± 0.001	0.1780571 ± 0.0000009
Quadra	0.179 ± 0.001	0.1780571 ± 0.0000009

Table 1: Tutti i valori, eccetto quelli relativi alla sinusoide, sono compatibili tra loro entro le barre di errore.

Sono state anche fatte acquisizioni "lunghe" di forme d'onda sinusoidali e quadrate. Sono riportati i risultati del bestfit in Fig.(2) e in Tab.(2).

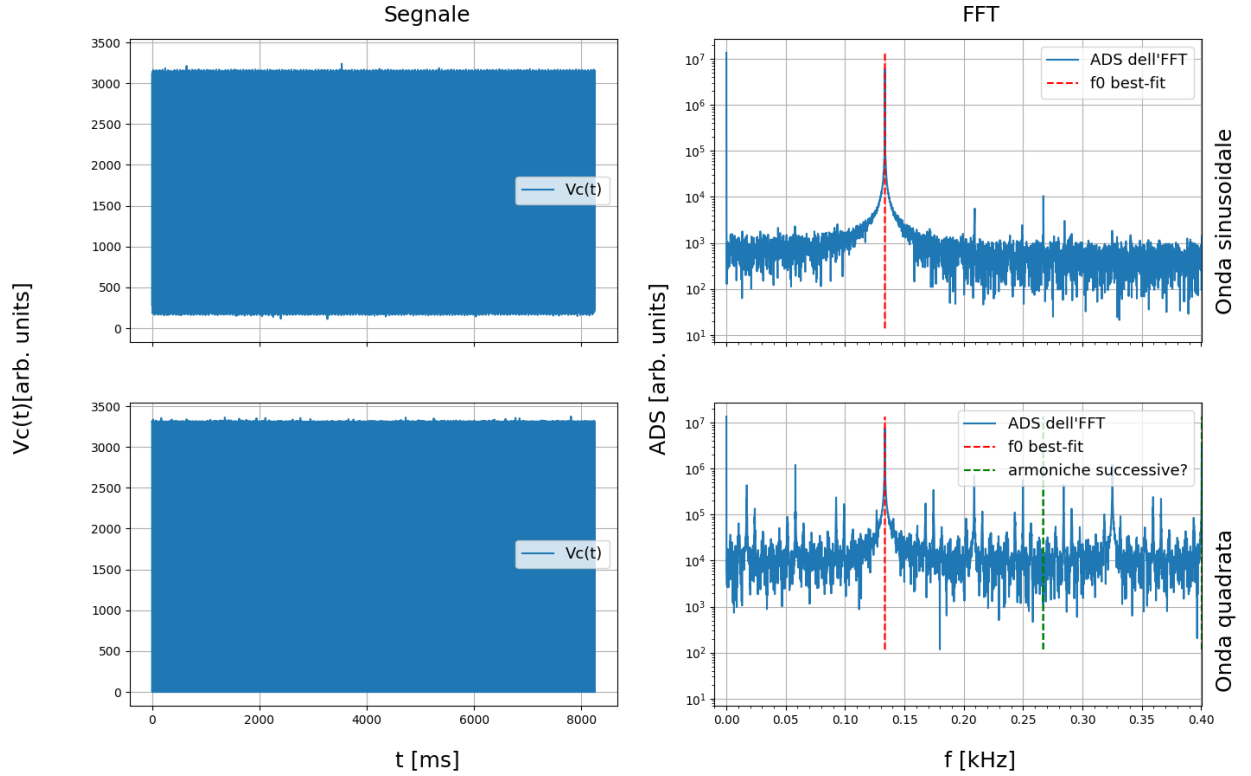


Figure 2: A sinistra sono mostrati segnali acquisiti in laboratorio, a destra è stata eseguita la FFT. E' molto interessante osservare che nel caso dell'onda quadra non compaiano le armoniche successive: questo potrebbe essere legato al fatto che in media sono presi sette punti per periodo e quindi è possibile che ci sia un sottocampionamento dei dati per questa analisi.

Forma d'onda	f_{0fft} [kHz]	$f_{0bestfit}$ [kHz]
Sinusoide	0.13354 ± 0.00002	0.13352992 ± 0.0000003
Quadra	0.13354 ± 0.00002	0.1334881 ± 0.000003

Table 2: Per l'onda sinusoidale la frequenza ricavata dal bestfit è compatibile entro la barra di errore con la FFT. Per l'onda quadra questo non si verifica, probabilmente questo è legato al sottocampionamento menzionato nella didascalia di Fig.(2).

2 Forme d'onda distorte

Sono stati raccolti segnali cambiando il dutycycle del generatore di funzioni. E' stato eseguito un fit con una sinusoide Eq.(1) con l'obiettivo di far convergere solo la frequenza.

E' stata realizzata per ciascuna forma d'onda l'FFT. Come incertezza sulla FFT è stata utilizzata quella discussa in Sez.(1). Il risultato della manipolazione dei dati è riportato in Fig.(3) e in Tab.(3).

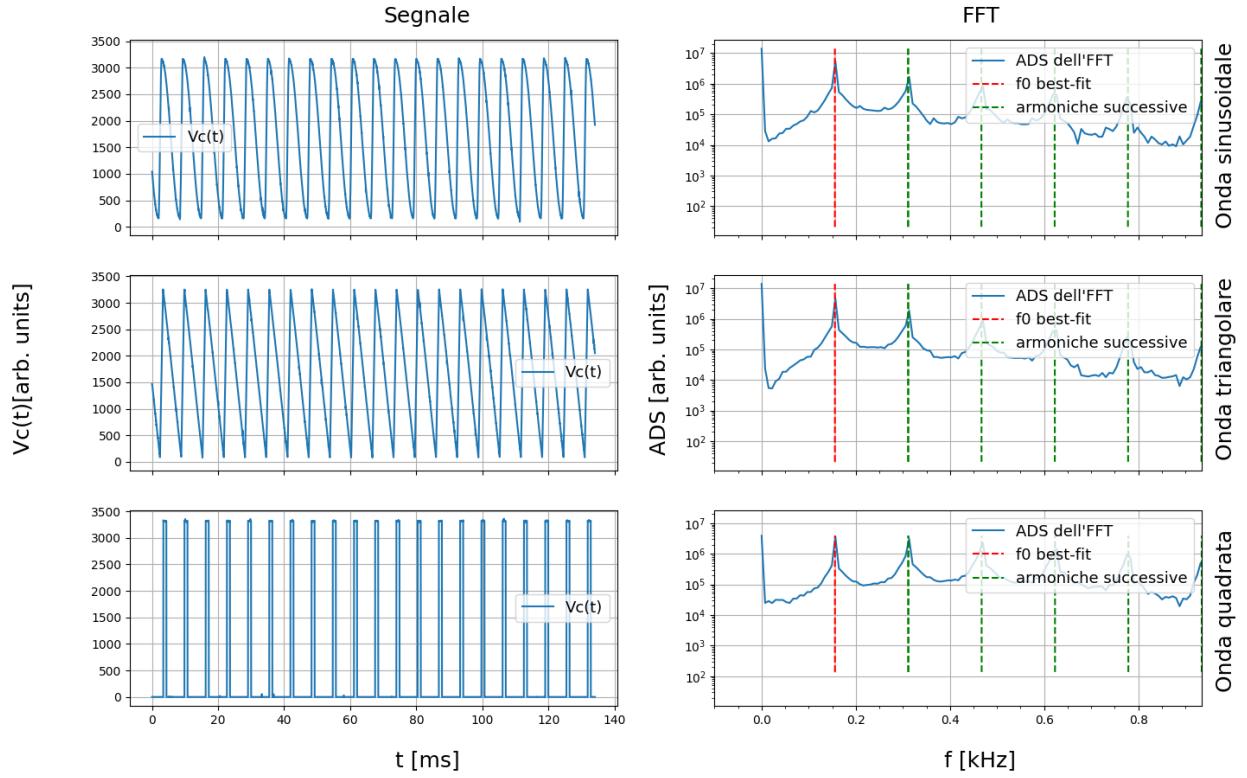


Figure 3: A sinistra sono mostrati segnali acquisiti in laboratorio, a destra è stata eseguita la FFT. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore.

onda	$f_{fft}[\text{kHz}]$	$f_{bestfit}[\text{kHz}]$
Sinusoide	0.156 ± 0.001	0.15559 ± 0.00002
Triangolare	0.156 ± 0.001	0.15559 ± 0.00002
Quadra	0.156 ± 0.001	0.15576 ± 0.00006

Table 3: I valori del bestfit sono compatibili entro le barre di errore con valori ottenuti tramite FFT.

Si osserva per la comparsa di armoniche successive per la forma d'onda sinusoidale distorta, e la dilatazione per le altre forme d'onda delle ampiezze delle armoniche successive rispetto a quelle osservate nei segnali non distorti.

3 Cattive acquisizioni

In Fig.(4) sono riportati esempi di "cattive acquisizioni".

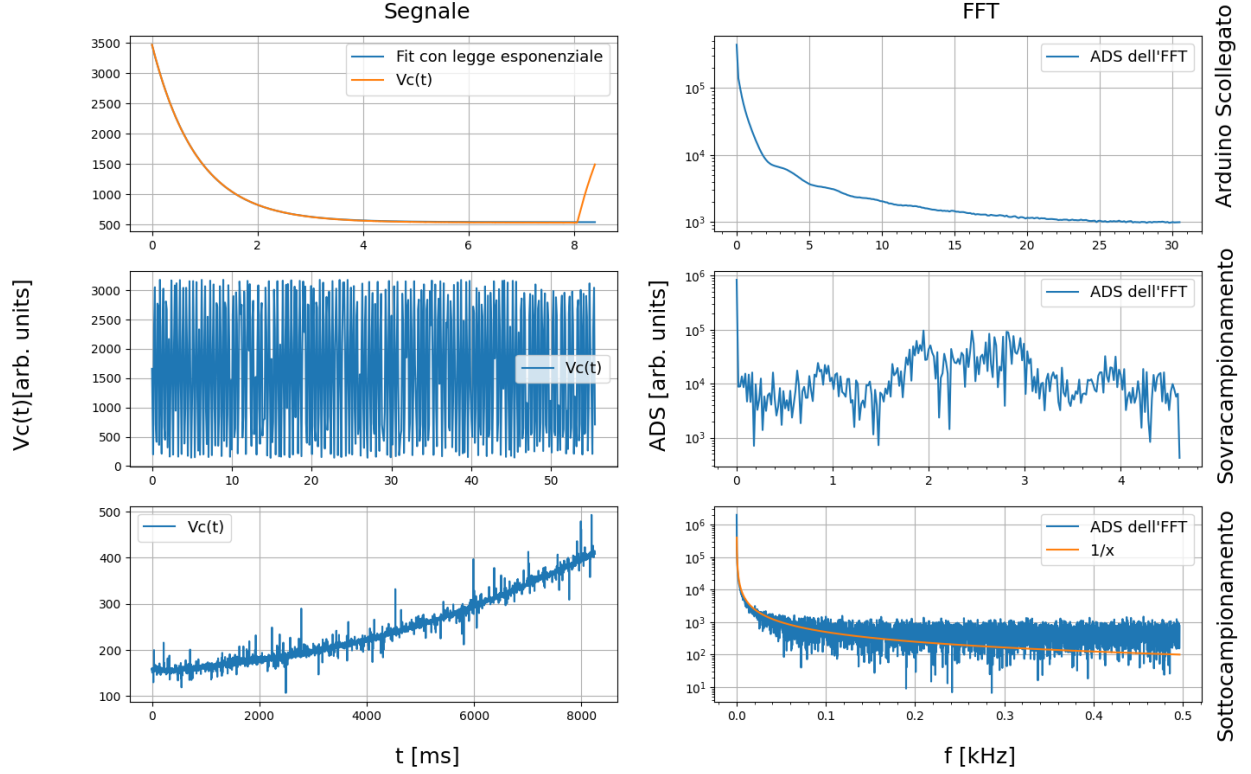


Figure 4: I primi due grafici rappresentano il campionamento di una porta di arduino scollegata. In mezzo è riportato un sottocampionamento: per ogni periodo è acquisito un solo punto. La terza coppia di figure dall'alto rappresenta un sovracampionamento di un periodo: l'acquisizione prende solo il ramo crescente di un seno.

E' stato eseguito un bestfit con una legge esponenziale Eq.(2) per la sezione decrescente del segnale acquisito con arduino scollegato: fisicamente questo è legato all'ipotesi che una certa carica presente prima dell'acquisizione sulla porta è dissipata quando la porta comunica con il resto di Arduino.

$$y = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + c \quad (2)$$

Il risultato del bestfit è riportato in Tab.(4)

$$\frac{\tau[ms]}{0.8598 \pm 0.0004} \quad \frac{\chi_{norm}^2}{5}$$

Table 4: Risultati bestfit per legge esponenziale di un'acquisizione con arduino scollegato. τ è il tempo di decadimento della legge esponenziale Eq.(2).

Per quanto riguarda il sovracampionamento è sufficiente dire che la FFT non riesce a trovare l'armonica principale del segnale sinusoidale e che i diversi picchi che compaiono nel segnale possono essere di natura puramente accidentale.

Nel caso di sottocampionamento siccome una sinusoide localmente può essere approssimata con una retta, si è disegnato sopra la FFT la funzione $\frac{\alpha}{f}$ -dove α è una costante arbitraria- in quanto ciascun termine dello sviluppo in serie di armoniche della funzione $g(f) = f$ è proporzionale all'inverso della corrispettiva frequenza.

4 Autoscillatore

Sono state prese delle misure di un segnale in uscita da un autoscillatore, il cui schema è riportato in Fig(5)

Per ogni segnale registrato, è stato eseguito il fit ai minimi quadratici con Eq.(1) per individuare la frequenza dell'oscillazione sinusoidale del segnale in uscita. E' stata eseguita una FFT, e la frequenza del bestfit è stata confrontata con quella ottenuta dalla FFT.

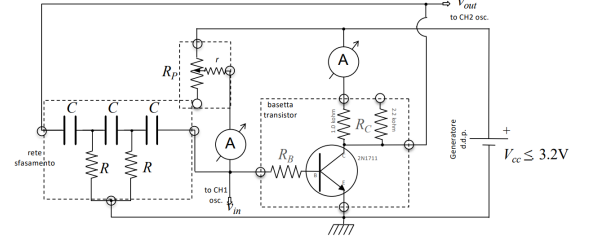
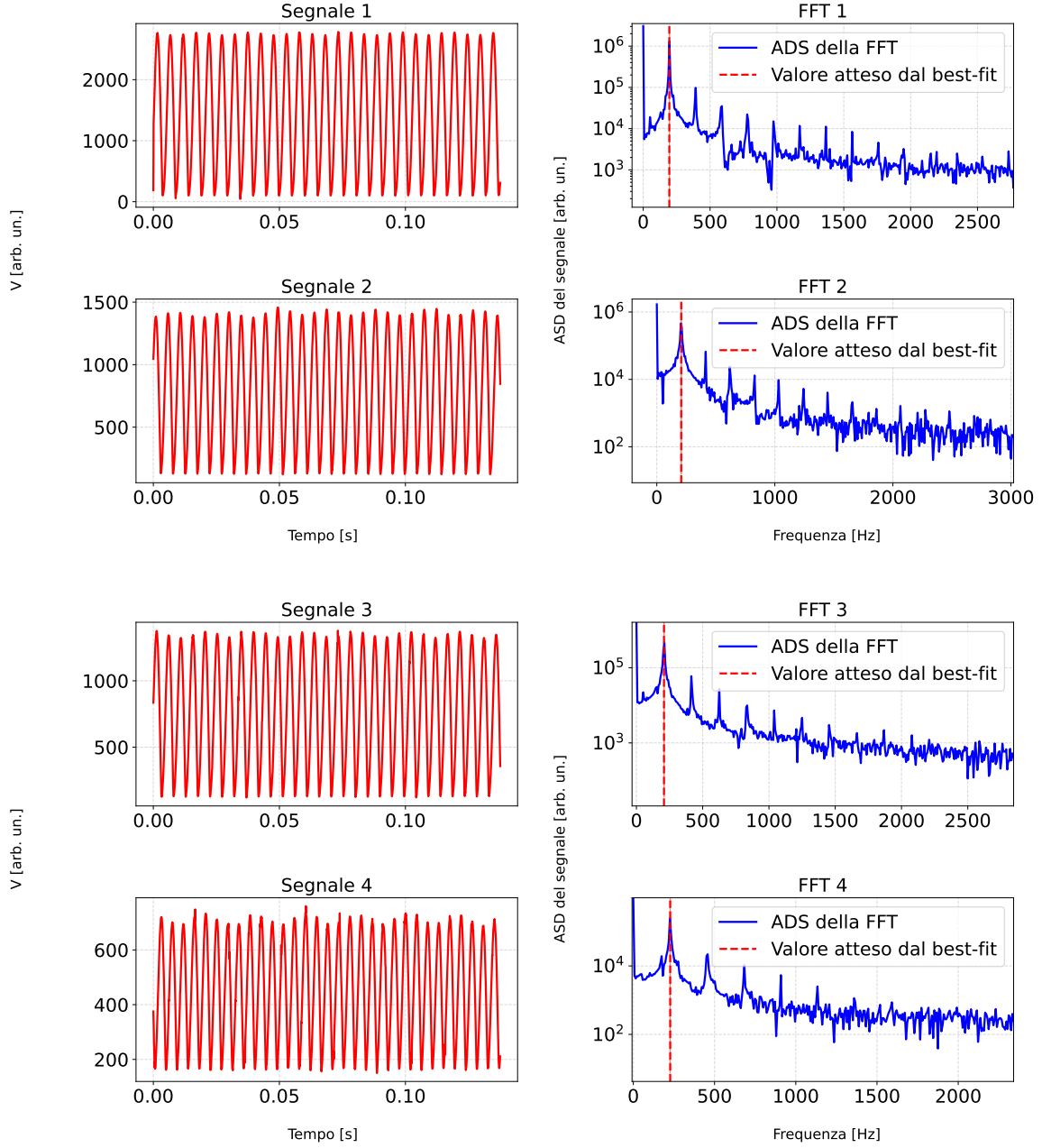


Figure 5: Schema circuitale dell'oscillatore

Riportiamo in Fig(6) dei grafici di alcuni segnali con a sinistra il segnale in uscita e a destra la trasformata di Fourier del segnale. Viene disegnata una linea verticale che rappresenta il valore stimato di f del bestfit.



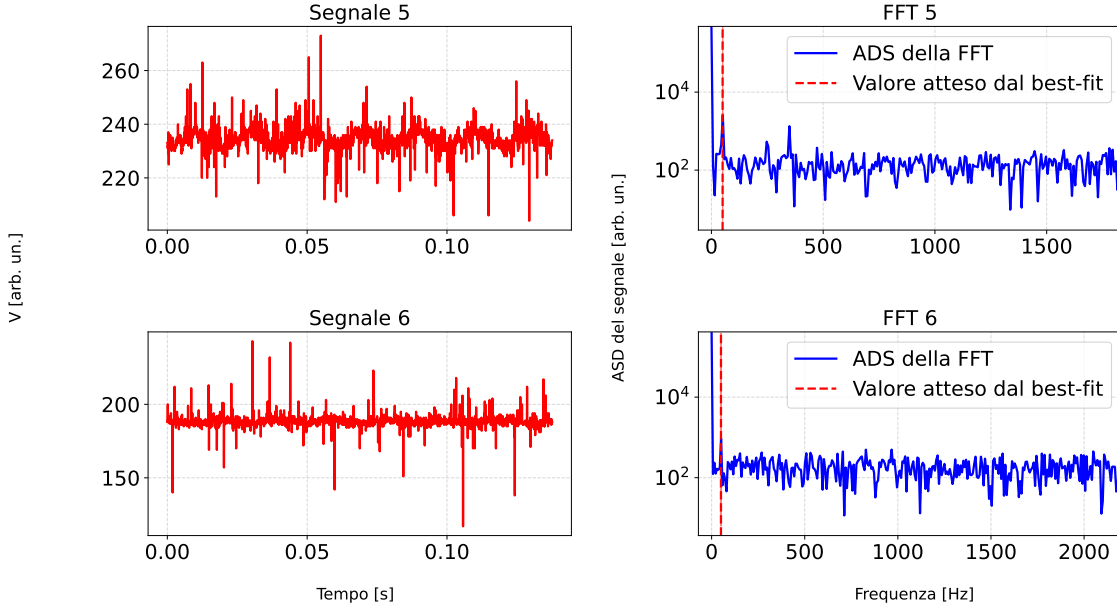


Figure 6: Grafici del segnale in uscita dall'autoscillatore (a sinistra) e della sua FFT (a destra). Attorno alla frequenza stimata dal bestfit è rappresentata con un'area l'incertezza.

Ci aspettermmo solo un picco dovuto all'armonica principale in quanto l'autoscillatore dovrebbe produrre un segnale sinusoidale. Tuttavia ciò non accade per il fatto che l'autoscillatore fa passare più armoniche. Questo è dovuto al fatto che non si tratta di un autoscillatore puro e la funzione di trasferimento ci dà solo l'armonica principale. In Tab(5) riportiamo i valori di bestfit.

n	$f_{0_{\text{FFT}}}$ [Hz]	$f_{0_{\text{bestfit}}}$ [Hz]
1	195 ± 2	195.13 ± 0.06
2	203 ± 2	206.61 ± 0.07
3	210 ± 2	207.86 ± 0.07
4	225 ± 2	227.02 ± 0.08
5	50 ± 2	50 ± 1
6	50 ± 2	50 ± 4

Table 5: Tabella con i valori di frequenza del segnale stimata tramite FFT e tramite bestfit. Il segnale 5 e il segnale 6 sono interessanti in quanto sono soggetti a rumore: l'incertezza dell'FFT non scala col rumore ma con la lunghezza dell'acquisizione, invece il bestfit risente pesantemente della qualità dei dati.

Si osserva che i valori di frequenza stimati tramite bestfit e tramite FFT sono compatibili entro le barre di errori per tutti i valori. Come incertezza sulla FFT è stata utilizzata quella discussa in Sez.(1).

5 Oscillazioni smorzate

Sono state prese delle misure di segnale in uscita da un circuito RLC, come mostrato in Fig(7) per tre diversi condensatori. Sono stati misurati il periodo e la frequenza delle oscillazioni. E' stato eseguito un fit ai minimi quadrati per un'oscillazione smorzata per determinarne il periodo con Eq.(1). E' stata eseguita una FFT per il medesimo scopo. I risultati sono riportati in Tab.(6) e in Fig.(8).

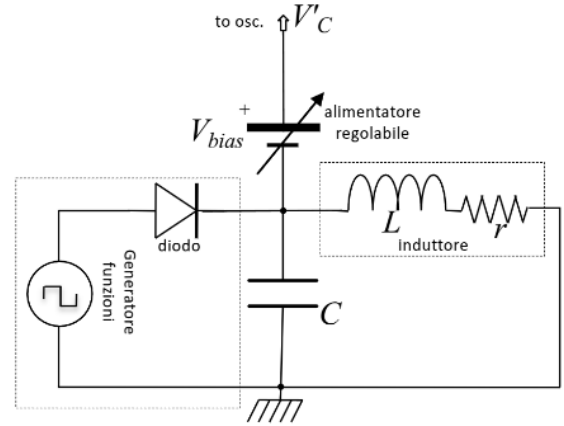


Figure 7: Diagramma del circuito RLC realizzato.

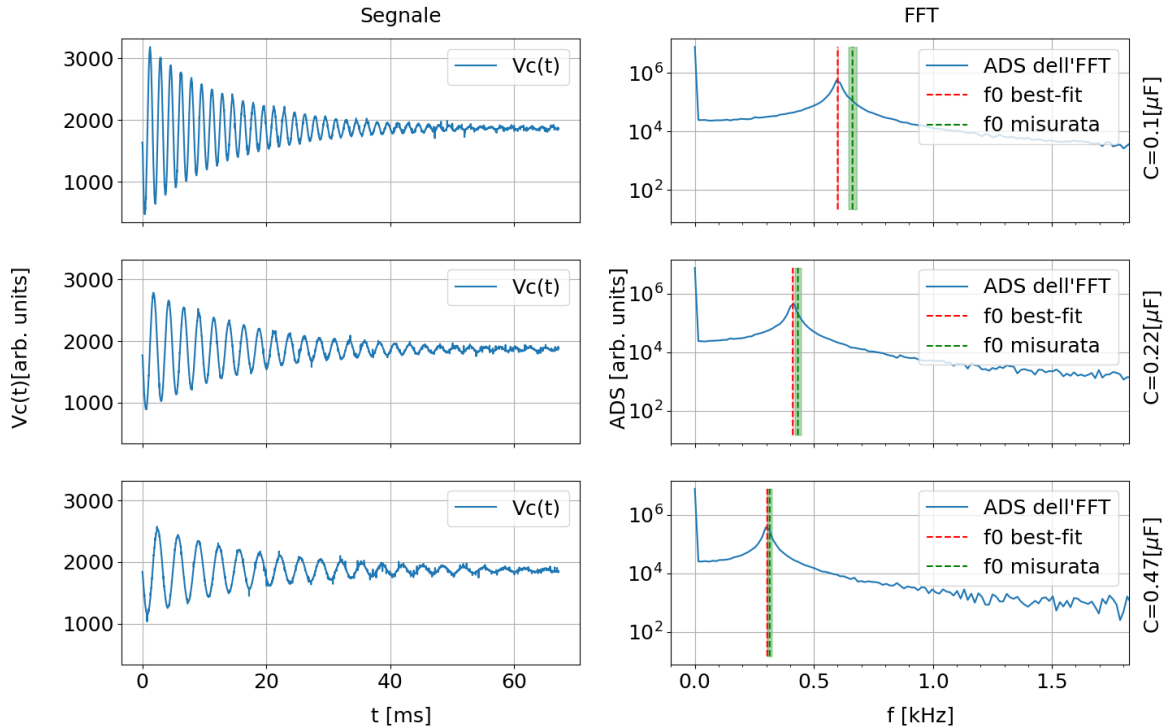


Figure 8: A sinistra è rappresentato il segnale. A destra è rappresentata la FFT insieme alla frequenza stimata dal bestfit e quella misurata in laboratorio. Le incertezze su queste due grandezze sono rappresentate con due rispettive aree colorate.

$C[\mu F]$	f_{0mis}	$f_{0fft}[kHz]$	$f_{0bestfit}[kHz]$
$0.1 \pm 20\%tol.$	0.66 ± 0.02	0.595 ± 0.004	0.6001 ± 0.0003
$0.22 \pm 20\%tol.$	0.43 ± 0.01	0.416 ± 0.004	0.41131 ± 0.00002
$0.47 \pm 20\%tol.$	0.314 ± 0.009	0.298 ± 0.004	0.30393 ± 0.00002

Table 6: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit.

Tutte le frequenze sono compatibili eccetto nel primo caso per la frequenza misurata.

Siccome il segnale non è perfettamente sinusoidale, la FFT presenta un ampio spettro di armoniche attorno al picco principale.

6 Materiali nel core dell'induttore

Sono state prese delle misure di segnale in uscita da un circuito RLC, come mostrato in Fig(9) inserendo diversi materiali dentro il core dell'induttore. E' stato eseguito un fit ai minimi quadrati per un'oscillazione smorzata Eq.(3) per determinarne il periodo e il tempo di smorzamento. E' stata eseguita una FFT per determinare il periodo di oscillazione. I risultati sono riportati in Tab.(7) e in Fig.(10).

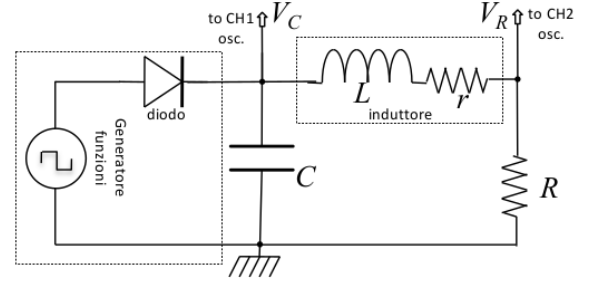
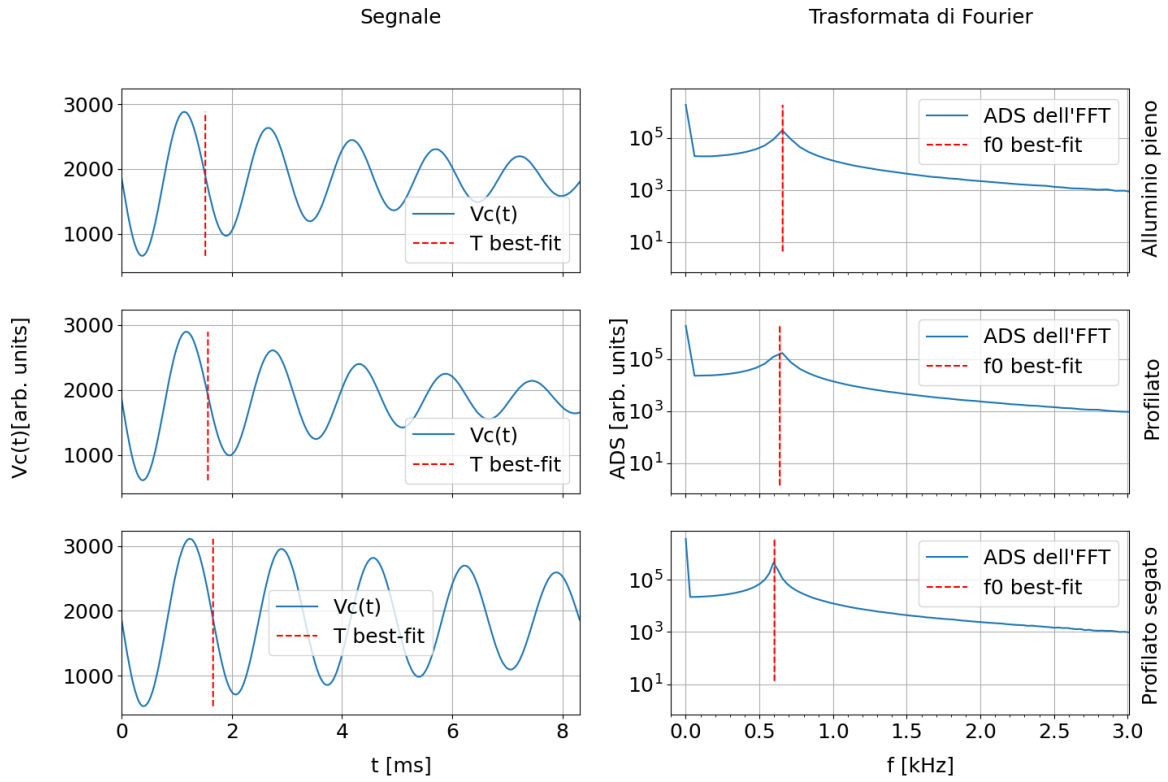


Figure 9: Diagramma del circuito RLC realizzato.

$$y = Ae^{-t/\tau} \sin(2\pi f_0 t + \phi) + c \quad (3)$$



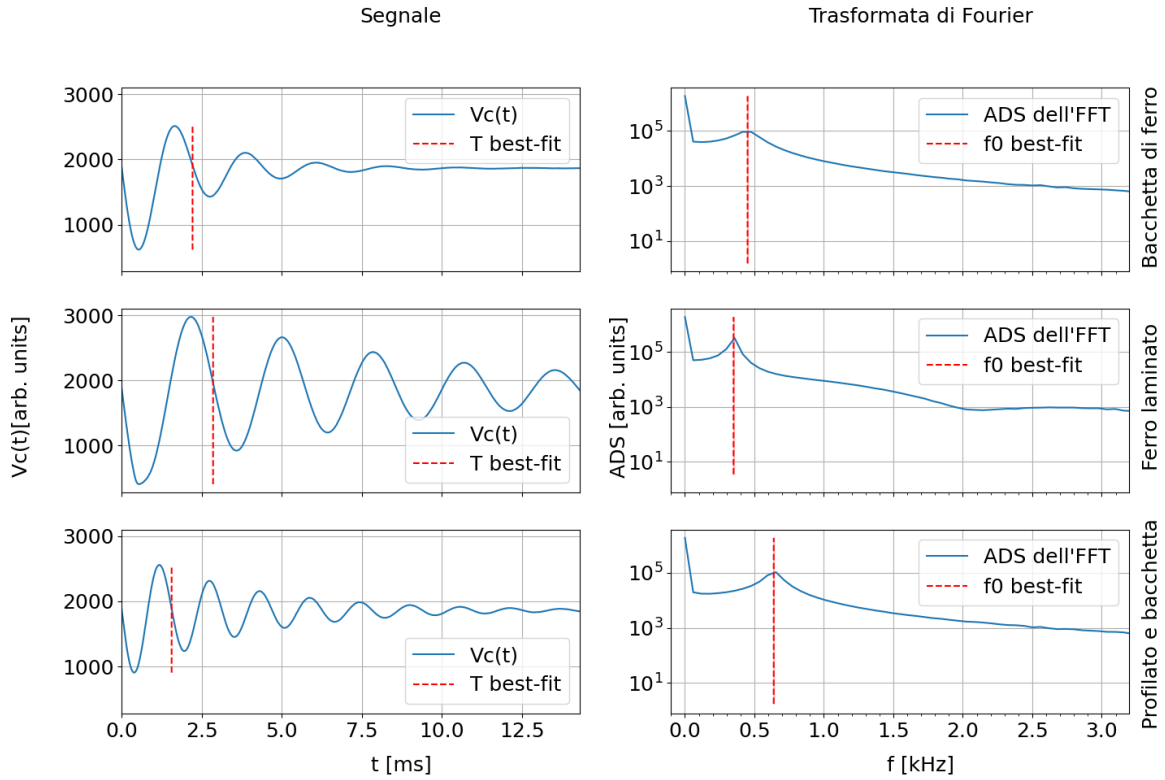


Figure 10: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit. Attorno ai valori medi è stata rappresentata la barra di errore per il valore misurato e per quello del bestfit, per il quale non si vede essendo molto piccola.

Table 7: Confronto tra le frequenze di oscillazione misurate con quelle ottenute tramite FFT e bestfit.

materiale	$f_{0fft}[\text{kHz}]$	$f_{0bestfit}[\text{kHz}]$
Alluminio pieno	0.65 ± 0.02	0.657 ± 0.008
Profilato	0.65 ± 0.02	0.637 ± 0.008
Profilato segato	0.595 ± 0.009	0.601 ± 0.002
Bacchetta di ferro	0.42 ± 0.02	0.451 ± 0.009
Ferro laminato	0.35 ± 0.02	0.349 ± 0.009
Profilato e bacchetta	0.65 ± 0.02	0.639 ± 0.009

Le frequenze ottenute tramite la FFT e tramite il bestfit sono compatibili, eccetto per la bacchetta di ferro, entro la barra di errore. Il problema con la bacchetta di ferro è che essendo il segnale molto smorzato, il picco non è molto pronunciato; in aggiunta siccome l'acquisizione non è stato possibile prenderla sufficientemente lunga -in quanto il segnale sarebbe stato eccessivamente soppresso-, si sovrappone al problema precedente uno legato alla scarsa risoluzione dei punti nello spettro delle frequenze.

Si può osservare che per il blocco di alluminio pieno e il profilato di alluminio, il periodo di oscillazione diminuisce, in quanto l'alluminio è diamagnetico, e il periodo è inversamente proporzionale all'induttanza, la quale diminuisce.

Analogamente per il ferro laminato e, in maggior misura, per la bacchetta di ferro il periodo di oscillazione aumenta per il comportamento da ferromagnete.

Nella discussione appena fatta sto trascurando il contributo dato dal tempo caratteristico di smorzamento al periodo di oscillazione.

Il tempo caratteristico di smorzamento è rilevante nei grafici delle FFT, Fig(10), in quanto impone l'ampiezza del picco: si osserva che questo aumenta per ogni materiale inserito nel core rispetto a quanto visto nel caso del vuoto a Fig.(8). Tuttavia questo non accade per il profilato segato dove, è possibile aspettarsi che gli effetti delle correnti parassite siano meno importanti.

7 "Il pinnacolone"

Per il circuito in Fig.(9) è stato simulato il transiente nel quale il diodo torna dall'interdizione nella quale avvengono le oscillazioni alla conduzione. Per determinare V_c la grandezza rilevante è la corrente che passa per il ramo dell'induttore: è stata dunque usata un'onda quadra a cui è stata applicata la funzione di trasferimento in Eq.(5). Il transiente è osservato dall'oscilloscopio in DC, in tal caso il segnale non viene deformato, o in AC dove alla funzione di trasferimento in Eq.(5) si moltiplica quella del filtro passa-alto in Eq.(4).

$$T_{osc}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j\omega_{osc}}{\omega}} \quad (4)$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_2 = R + r + j\omega L \quad Z = r_G + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad I_{\omega L} = \frac{V_{\omega} Z_1}{Z_1 Z + Z_2 Z} \quad (5)$$

Oltre agli elementi in Fig.(9) è stata aggiunta $r_G = 50\Omega$ interna al generatore. Il risultato della simulazione è riportato in Fig.(11).

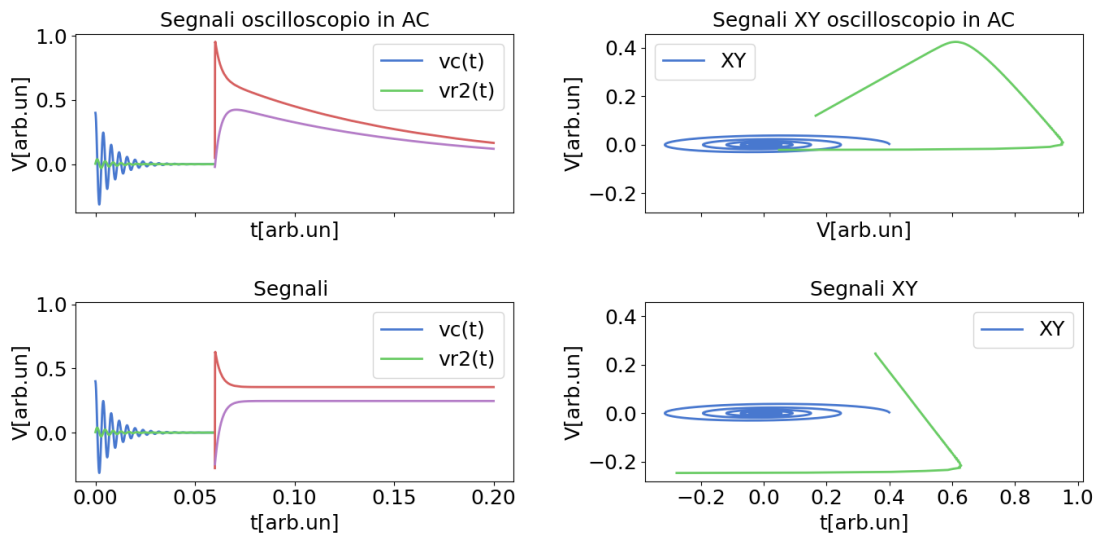


Figure 11: E' stata trovata la forma d'onda ricreata, tuttavia non è stato raccordato il segnale prima e dopo il transiente. Il problema principale è che l'onda quadra trasformata con la funzione di trasferimento non è nulla nel punto di raccordo prima e dopo il transiente nonostante lo sia l'onda quadra.

8 Glicemia

E' stata acquisita la glicemia di un paziente di diabete mellito tipo 1 in due periodi diversi: le vacanze natalizie e la sessione di studio per gli esami. I risultati dell'analisi con FFT sono riportati in Fig.(12). I due periodi sono paragonabili in quanto ravvicinati e si assume che il clima e lo stress non abbiano subito variazioni significative nel paziente. Per il periodo di esami è disponibile un'acquisizione più lunga, i risultati della FFT sono riportati in Fig.(13).

Si evidenziano i tempi che determinano le frequenze caratteristiche dell'andamento glicemico:

- 3 ore - il tempo di effetto dell'insulina.
- 6 ore - il tempo che durante il giorno intercorre tra i pasti.
- 24 ore - il giorno (da cui il sonno, la produzione ormonale, le attività. svolte...)

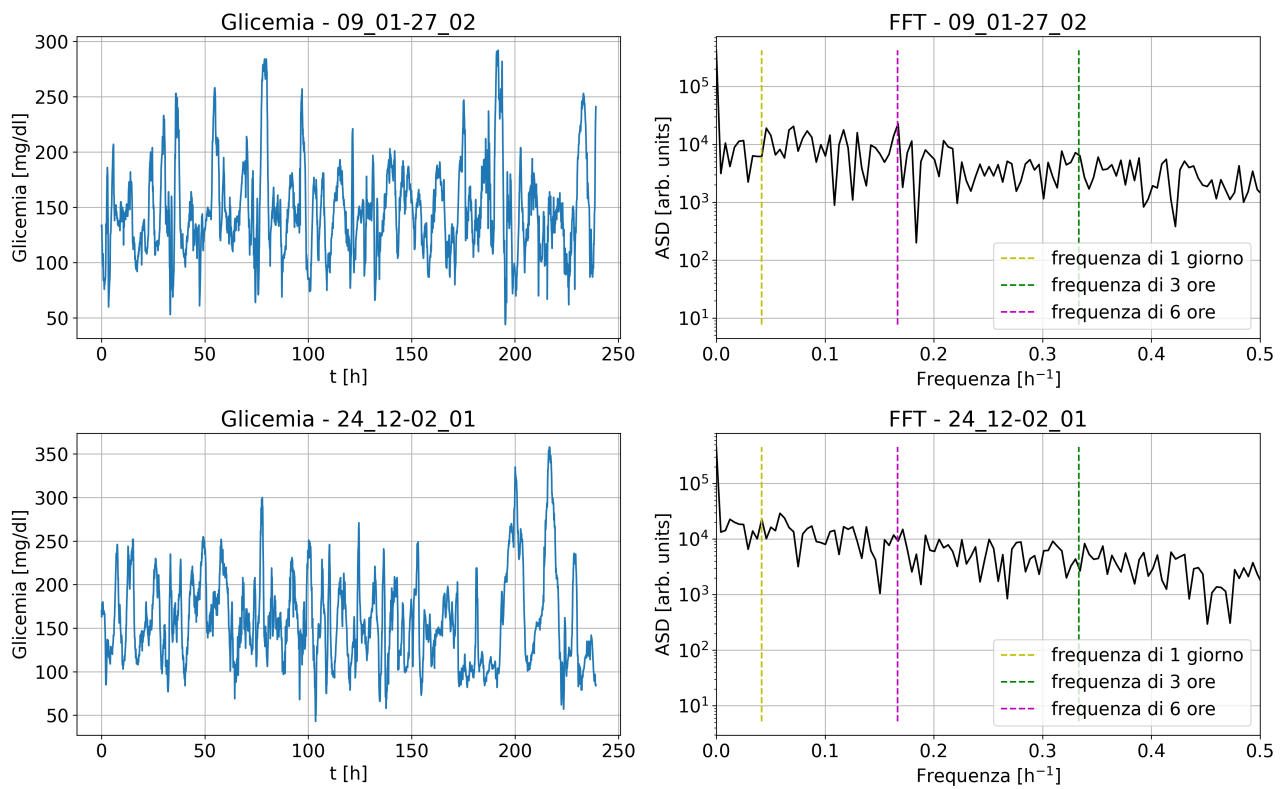


Figure 12: C'è maggiore regolarità nel periodo di studio rispetto alle festività: il picco legato al giorno e quello legato ai pasti scompare durante le festività per probabilmente le persistenti iperglicemie dovute all'aumentata insulino-resistenza e ai pasti più ricchi di grassi.

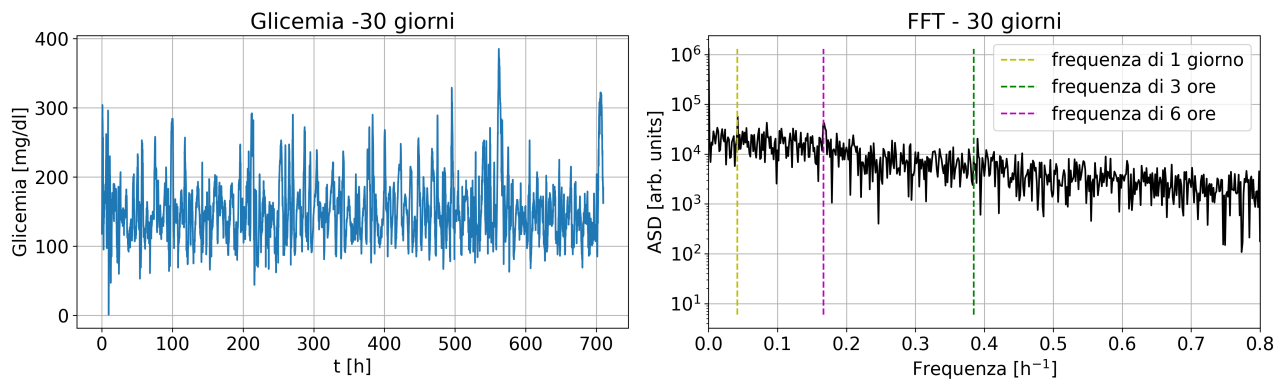


Figure 13: A sinistra glicemia acquisita in un mese di sessione di studio, a destra l'FFT. Con un intervallo di campionamento più ampio rispetto a Fig.(12) i picchi sono più evidenti.