Integrazione di Navier-Stokes e applicazioni

F.A.F. Antonacci

31 gennaio 2026

Indice

Navier-Stokes comprimibile

Ho assunto che il mio fluido non assorba né conduca calore, sia comprimibile e viscoso.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu\nabla^2\vec{u}}{\rho} + \frac{(\zeta+\mu/3)\nabla(\nabla\cdot\vec{u})}{\rho} + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

dove:

- conv $= (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ è il termine convettivo, che rappresenta il trasporto della velocità dal flusso stesso;
- $-\nabla p/\rho$ è il gradiente di pressione, responsabile dell'accelerazione dovuta alla pressione;
- $\mu\,\nabla^2\vec{u}/\rho$ rappresenta la viscosità del fluido (diffusione della velocità);
- $(\zeta+\mu/3)\,\nabla(\nabla\cdot\vec{u})/\rho$ è il termine viscosità bulk, che interviene se il fluido è comprimibile;
- $\vec{F}/\rho$ è la forza esterna applicata sul fluido.

Incomprimibilità o politropica e continuità?

Ho scelto di introdurre una politropica invece di imporre l'incomprimibilità per i seguenti motivi:

- supponendo processi adiabatici posso controllare κ della legge $p = \kappa\rho^\gamma$;
- posso aumentare κ in modo arbitrario per aumentare la velocità del suono;
- non ho voglia di introdurre la risoluzione dell'equazione del laplaciano per la pressione: introdurrei pure ulteriore rumore numerico;
- scrivo meno codice.

Ho utilizzato l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Con le tre equazioni appena enunciate ho chiuso il sistema.

La discretizzazione

- Utilizzo un integratore euleriano;
- utilizzo un approccio euleriano: spazialmente costruisco una griglia;
- iterativamente calcolo lo stato successivo utilizzando il precedente;
- per aggiornare la densità uso continuità;
- per aggiornare il campo delle velocità uso Navier-Stokes;
- per determinare la pressione utilizzo la politropica.

Figura: Esempio di griglia usata nell'integrazione. Si è presa un'immagine ravvicinata per migliorarne la visibilità.

Convergenza della simulazione

Il brutto vizio delle integrazioni numeriche è che amano divergere se il passo temporale non è sufficientemente piccolo: desidero che la risoluzione temporale della mia simulazione sia più grande delle velocità caratteristiche del mio problema.

- $dx = 1$;
- $dt = CFL \frac{dx}{|\vec{u}|_{max} + c_{s,max}}$
- $c_s = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ è la velocità locale del suono supposta la compressione adiabatica del fluido;
- CFL è un fattore di adimensionale convergenza della simulazione.

Courant-Friedrichs-Lewy

- La simulazione, siccome si basa su in integratore euleriano $\Rightarrow$
- dovrebbe divergere come $1/CFL$ a meno che non ci siano soluzioni stabili.
- Il limite nella scelta di CFL è il tempo di calcolo e la memoria del computer$\Rightarrow$
- per ovviare a questo si registra uno stato della griglia saltando un numero proporzionale a CFL.

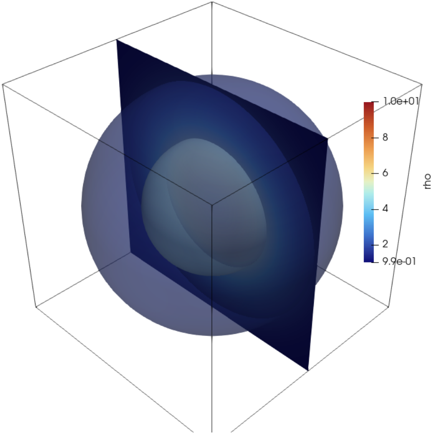
Condizioni al controno

Le condizioni al contorno sono deteminate nel codice dalla definizione delle derivate (ho utilizzato `gradient()` di `numpy`). Il bordo, a causa di `gradient()`, assume che il mezzo sia infinitamente esteso e identico alle caselle adiacenti. Detta $\hat{n}$ la normale al bordo, si desidera:

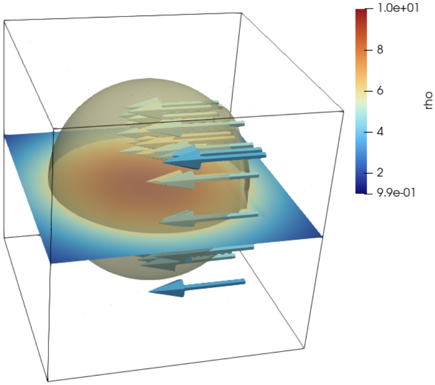
$$(\hat{n} \cdot \nabla)\vec{u} \leq 0; (\hat{n} \cdot \nabla)\rho \leq 0.$$

Altrimenti le grandezze divergono esponenzialmente. Sempre per questo motivo le simulazioni sono valide finchè non si raggiunge il bordo, a quel punto la simulazione diverge, in quanto c'è un ritorno legato al dominio finito.

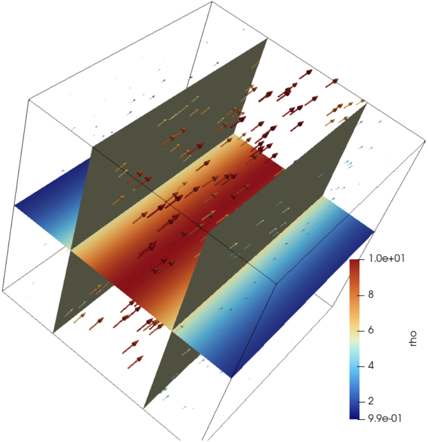
Profilo gaussiano di densità



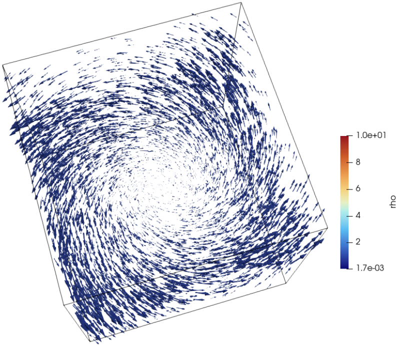
Variante del profilo gaussiano di densità



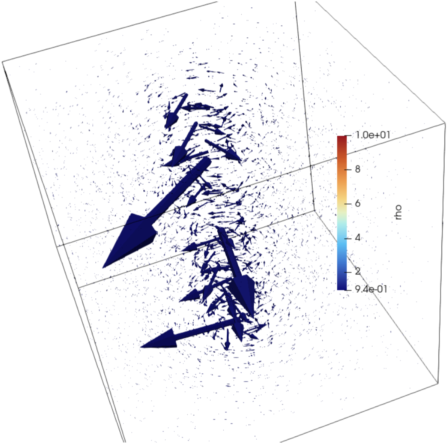
Onda sonora



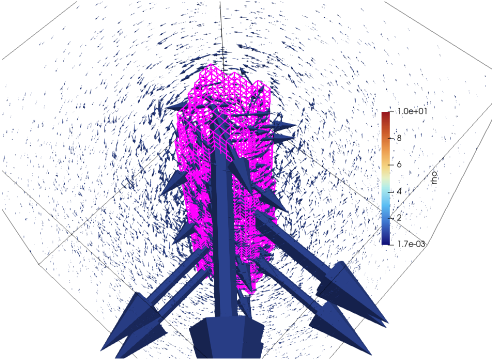
Vortice lineare



Vortice di potenziale



Vortice di potenziale con viscosità nulla



Jet puntiforme: Trattazione analitica alla Landau

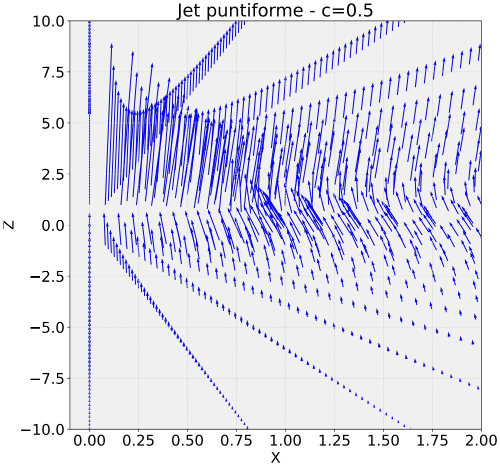
Supponiamo che in fluido venga immessa della quantità di moto da una sorgente puntiforme con le seguenti ipotesi:

- osservare da lontano la sorgente;
- item in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) le velocità siano (u, v, w);
- simmetria per rotazione $\Rightarrow r, \theta$ sono le uniche variabili indipendenti, $w = 0$;
- stream-function $\psi \Rightarrow u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ $v = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$;
- per la conservazione del momento deve scalare come r^{-1}
- $\Rightarrow \psi = r\alpha f(\theta)$, con α costante.

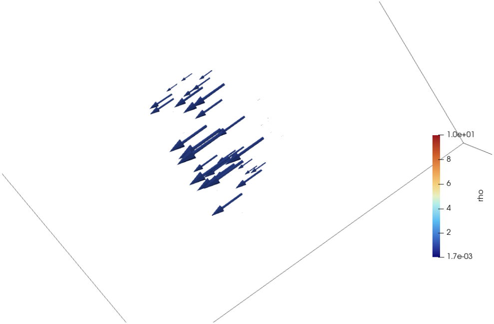
Jet puntiforme

- $f = \frac{2\sin^2\theta}{1+c-\cos\theta}$
- $\psi = \frac{2\alpha\sin^2\theta}{1+c-\cos\theta}$
- $u = \frac{4\alpha(1+c-\cos\theta)\cos\theta-2\sin^2\theta}{r(1+c-\cos\theta)^2}$
- $v = \frac{-2\alpha\sin^2\theta}{r(1+c-\cos\theta)}$

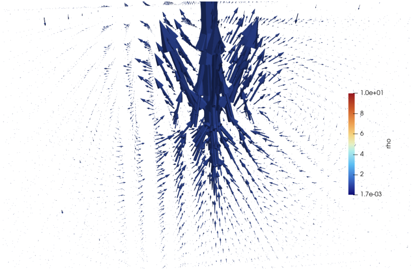
Trattazione analitica alla Landau

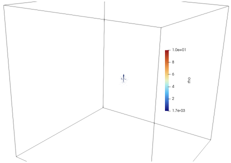


Velocità costante



Forza costante





Aggiustando il bordo...