



# Integrazione di Navier-Stokes e applicazioni

F.A.F. Antonacci

2 febbraio 2026





# Indice

- ① Idea
- ② Convergenza
- ③ Condizioni al contorno
- ④ Profilo gaussiano di densità
- ⑤ Variante del profilo gaussiano di densità
- ⑥ Onda sonora
- ⑦ Vortici
- ⑧ Jet puntiforme



## Navier-Stokes comprimibile

Ho assunto che il mio fluido non assorba né conduca calore, sia comprimibile e viscoso.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu \nabla^2 \vec{u}}{\rho} + \frac{(\zeta + \mu/3) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}{\rho} + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

- ▶  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  è il termine convettivo, che rappresenta il trasporto della velocità dal flusso stesso;
- ▶  $-\nabla p/\rho$  è il gradiente di pressione, responsabile dell'accelerazione dovuta alla pressione;
- ▶  $\mu \nabla^2 \vec{u}/\rho$  rappresenta la viscosità del fluido (diffusione della velocità);
- ▶  $(\zeta + \mu/3) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})/\rho$  è il termine viscosità bulk, che interviene se il fluido è compressibile;
- ▶  $\vec{F}/\rho$  è la forza esterna applicata sul fluido.

## Incomprimibilità o politropica e continuità?

Ho scelto di introdurre una politropica invece di imporre l'incomprimibilità per i seguenti motivi:

- ▶ supponendo processi adiabatici posso controllare  $\kappa$  della legge  $p = \kappa \rho^\gamma$ ;
- ▶ posso aumentare  $\kappa$  in modo arbitrario per aumentare la velocità del suono fino a rendere il fluido incomprimibile;
- ▶ non ho voglia di introdurre la risoluzione dell'equazione del laplaciano per la pressione: intodurrei pure ulteriore rumore numerico;
- ▶ scrivo meno codice.

Ho utilizzato l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Con le tre equazioni appena enunciate ho chiuso il sistema.



# La discretizzazione

- ▶ **Integratore euleriano**
- ▶ **Approccio euleriano**
  - ▶ per aggiornare la densità uso continuità;
  - ▶ per aggiornare il campo delle velocità uso Navier-Stokes;
  - ▶ per determinare la pressione utilizzo la politropica.



**Figura:** Esempio di griglia usata nell'integrazione. Si è presa un'immagine ravvicinata per migliorarne la visibilità.

## Convergenza della simulazione

Le integrazioni numeriche divergono se il passo temporale non è sufficientemente piccolo: desidero che la risoluzione temporale della mia simulazione sia più grande delle velocità caratteristiche del mio problema.

- ▶  $dx = 1$ ;
- ▶  $dt = CFL \frac{dx}{|\vec{u}|_{max} + c_{s,max}}$
- ▶  $c_s = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  è la velocità locale del suono supposta la compressione adiabatica del fluido;
- ▶  $CFL$  è un fattore di adimensionale convergenza della simulazione.



## Courant-Friedrichs-Lowy

- ▶ La simulazione, siccome si basa su un integratore euleriano  $\Rightarrow$
- ▶ le grandezze integrate divergono come  $CFL \propto 1/N$  (con  $N$  numero di punti in cui si divide il passo temporale) a meno che non ci siano soluzioni stabili.
- ▶ Il limite nella scelta di  $CFL$  è il tempo di calcolo e la memoria del computer  $\Rightarrow$
- ▶ per ovviare a questo si registra uno stato della griglia saltando un numero proporzionale a  $CFL$ .

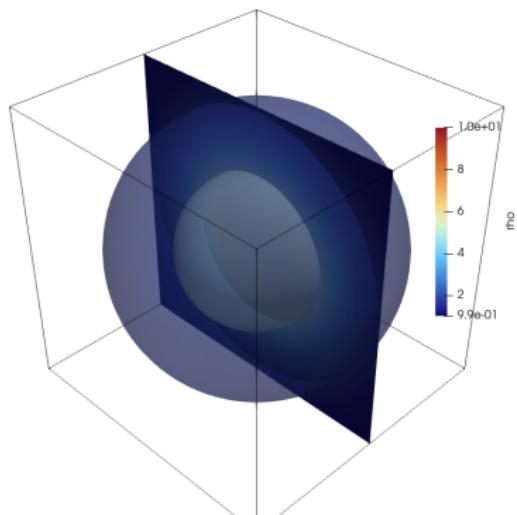


## Condizioni al contorno

- ▶ condizioni al contorno sono determinate nel codice dalla definizione delle derivate (`gradient()` di `numpy`);
- ▶ il mezzo è assunto infinito e il prologato in maniera continua;
- ▶ ⇒ Detta  $\hat{n}$  la normale al bordo, si desidera:
  - ▶  $(\hat{n} \cdot \nabla) \vec{u} \leq 0$ ,
  - ▶  $(\hat{n} \cdot \nabla) \rho \leq 0$ ;
- ▶ simulazioni sono valide finché non si raggiunge il bordo;
- ▶ altrimenti la simulazione diverge.



## Profilo gaussiano di densità



**Figura:** Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica che parte fermo e viene lasciato evolvere. Si marcano due isobare a due valori diversi.

## Variante del profilo gaussiano di densità

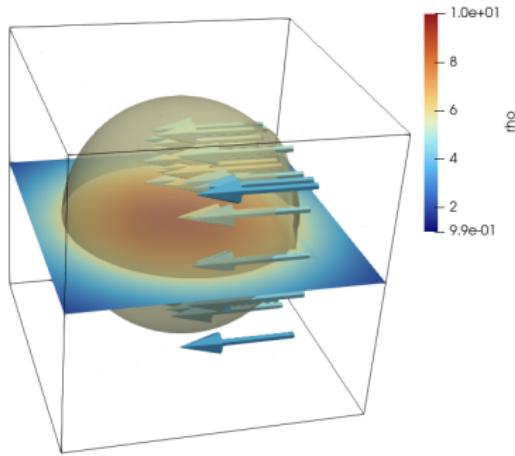
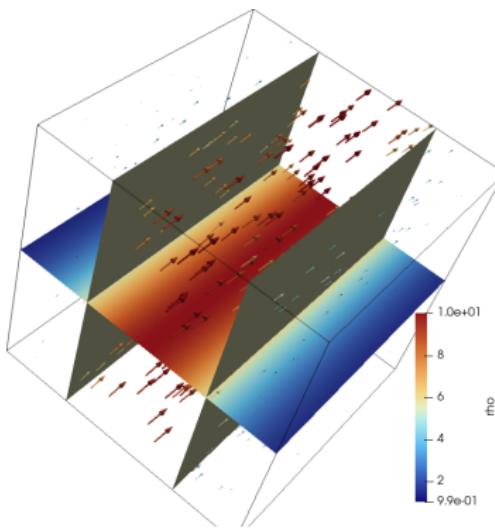


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica, di cui una sezione ha una velocità iniziale. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.

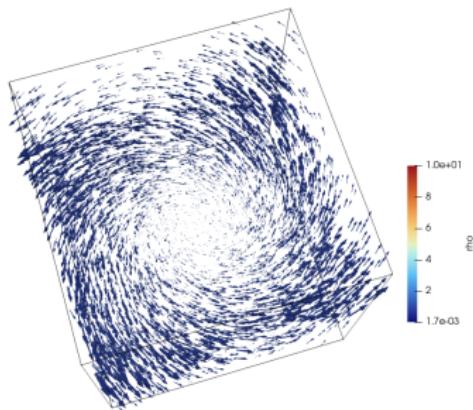
## Onda sonora



**Figura:** Profilo gaussiano di densità in simmetria planare con velocità modulata gaussianamente e ortogonale al gradiente della densità. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.



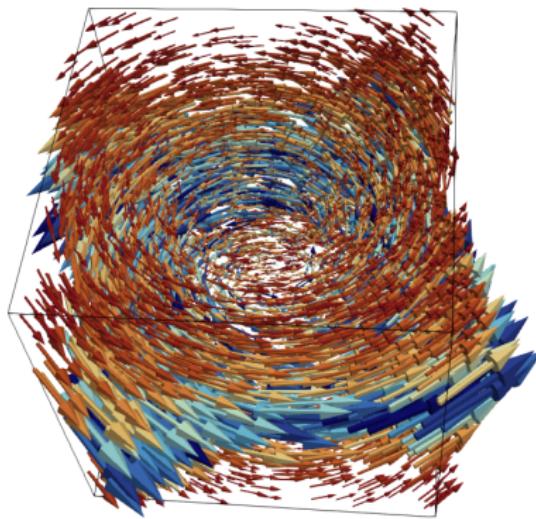
## Vortice lineare



**Figura:** Densità costante, campo delle velocità determinato da  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Il fluido è viscido e compressibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.



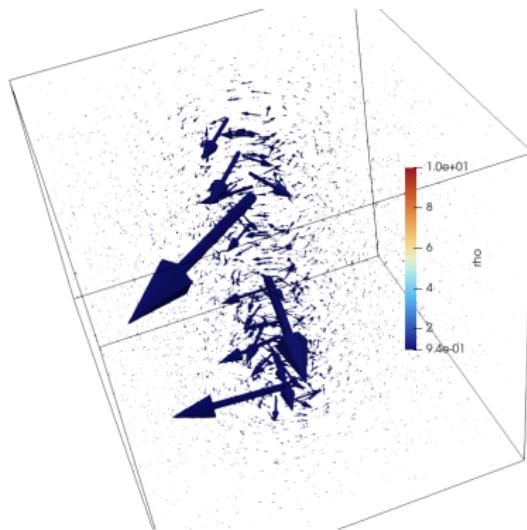
## Vortice lineare senza viscosità bulk



**Figura:** Densità costante, campo delle velocità determinato da  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .  
Il fluido è viscido e compressibile, si suppone che la viscosità dinamica sia nulla.



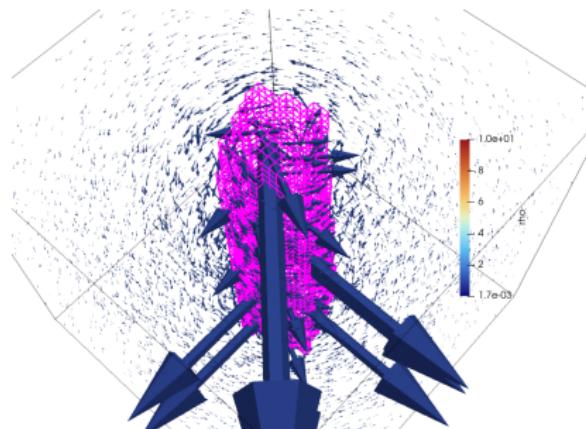
## Vortice di potenziale



**Figura:** Densità costante, campo delle velocità determinato da  $\vec{v} = \frac{\kappa\hat{\phi}}{r}$ . Il fluido è viscido e comprimibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.



## Vortice di potenziale con viscosità nulla



**Figura:** Densità costante, campo delle velocità determinato da  $\vec{v} = \frac{\kappa\hat{\phi}}{r}$ . Il fluido è inviscido e compressibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.





## Jet puntiforme: Trattazione analitica alla Landau

Supponiamo che in fluido venga immessa della quantità di moto da una sorgente puntiforme con le seguenti ipotesi:

- ▶ fenomeno all'equilibrio (il che implica ad esempio  $\nabla \cdot \vec{u} = 0, \partial_t \rho = 0$ );
- ▶ osservare da lontano la sorgente;
- ▶ in coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$  le velocità siano  $(u, v, w)$ ;
- ▶ simmetria per rotazione  $\Rightarrow r, \theta$  sono le uniche variabili indipendenti,  $w = 0$ ;
- ▶ stream-function  $\psi \Rightarrow u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ;
- ▶ per la conservazione del momento deve scalare come  $r^{-1}$
- ▶  $\Rightarrow \psi = r \alpha f(\theta)$ , con  $\alpha$  costante.





## Soluzione analitica del Jet puntiforme

Imponendo Navier-Stokes per  $u$  e per  $v$  con passaggi non ovvi si ottiene:

- ▶  $f = \frac{2\sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$
- ▶  $\psi = \frac{2\alpha \sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$
- ▶  $u = \frac{4\alpha(1+c-\cos \theta) \cos \theta - 2\sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)^2}$
- ▶  $v = \frac{-2\alpha \sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)}$





## Plot della soluzione analitica

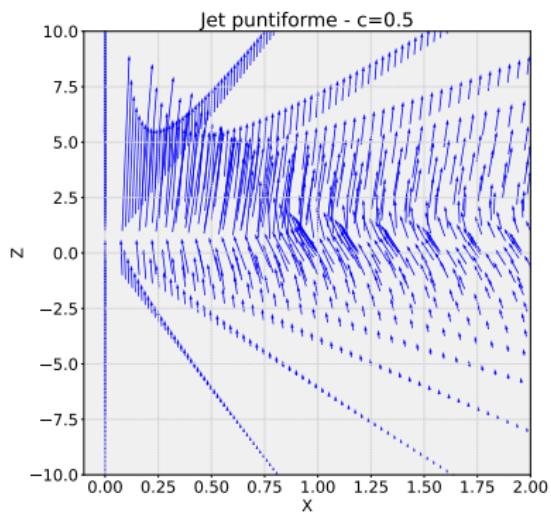
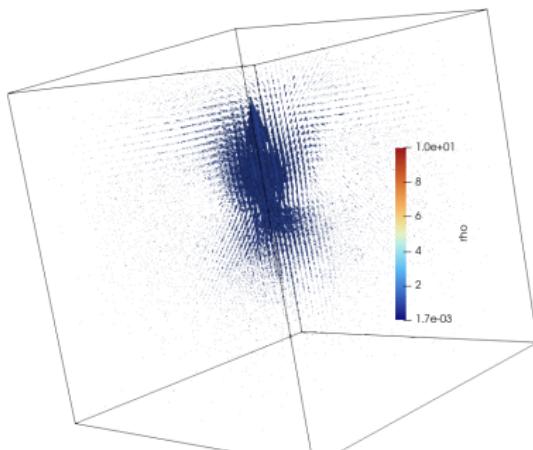


Figura: Sezione del campo delle velocità nel piano X-Z della soluzione analitica del Jet-puntiforme.



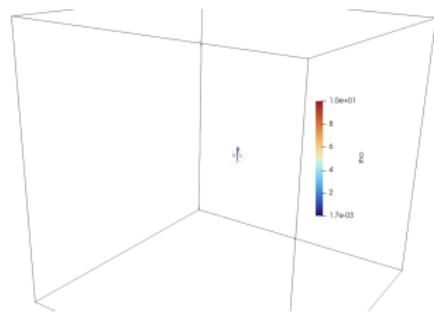
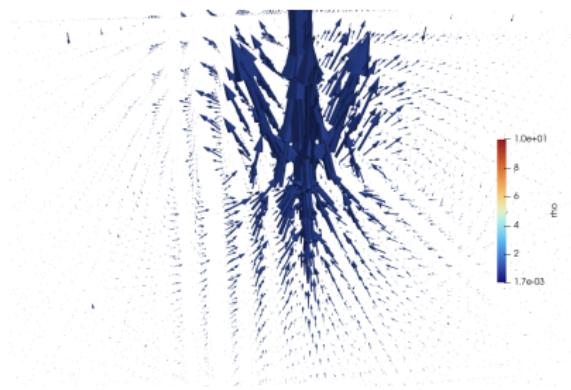
## Velocità costante



**Figura:** Fluido con densità costante. Velocità al centro mantenuta costante e modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si rappresenta il campo delle velocità.

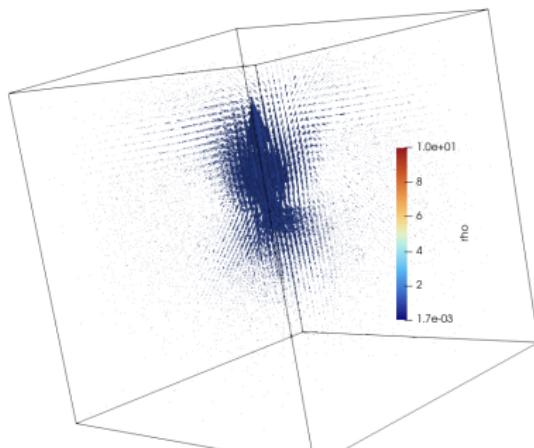


## Forza costante



**Figura:** Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si rappresenta il campo delle velocità.

## Aggiustando il bordo...



**Figura:** Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.



Vediamo se la soluzione analitica è stabile numericamente.

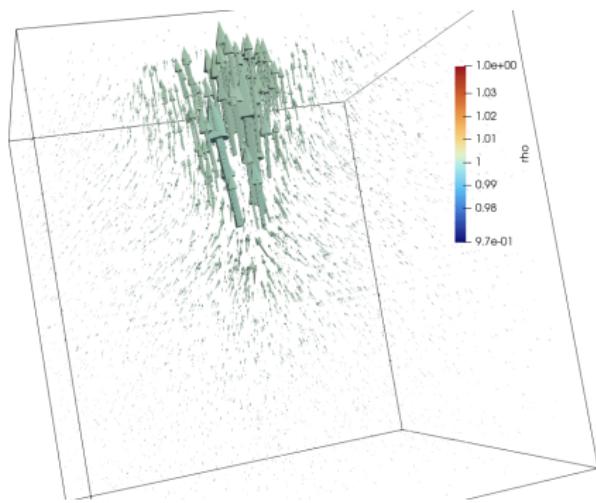
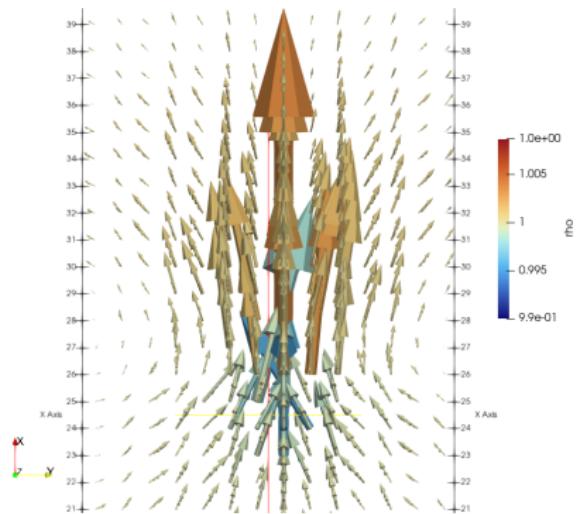


Figura: Evoluzione temporale della soluzione analitica del Jet puntiforme. E' stato necessario rendere la descrizione inesatta per evitare divergenze numeriche almeno all'inizio. Si rappresenta il campo delle velocità.





## Tuttavia allargando...



**Figura:** Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.

