

Integrazione di Navier-Stokes e applicazioni

F.A.F. Antonacci

2 febbraio 2026





Indice

- ① Idea
- ② Convergenza
- ③ Condizioni al contorno
- ④ Profilo gaussiano di densità
- ⑤ Variante del profilo gaussiano di densità
- ⑥ Onda sonora
- ⑦ Vortici
- ⑧ Jet puntiforme



Navier-Stokes comprimibile

Ho assunto che il mio fluido non assorba né conduca calore, sia comprimibile e viscoso.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu \nabla^2 \vec{u}}{\rho} + \frac{(\zeta + \mu/3) \nabla(\nabla \cdot \vec{u})}{\rho} + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

- ▶ $\text{conv} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ è il termine convettivo, che rappresenta il trasporto della velocità dal flusso stesso;
- ▶ $-\nabla p / \rho$ è il gradiente di pressione, responsabile dell'accelerazione dovuta alla pressione;
- ▶ $\mu \nabla^2 \vec{u} / \rho$ rappresenta la viscosità del fluido (diffusione della velocità);
- ▶ $(\zeta + \mu/3) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) / \rho$ è il termine viscosità bulk, che interviene se il fluido è comprimibile;
- ▶ \vec{F} / ρ è la forza esterna applicata sul fluido.



Incomprimibilità o politropica e continuità?

Ho scelto di introdurre una politropica invece di imporre l'incomprimibilità per i seguenti motivi:

- ▶ supponendo processi adiabatici posso controllare κ della legge $p = \kappa \rho^\gamma$;
- ▶ posso aumentare κ in modo arbitrario per aumentare la velocità del suono fino a rendere il fluido incomprimibile;
- ▶ non ho voglia di introdurre la risoluzione dell'equazione del laplaciano per la pressione: introdurrei pure ulteriore rumore numerico;
- ▶ scrivo meno codice.

Ho utilizzato l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Con le tre equazioni appena enunciate ho chiuso il sistema.



La discretizzazione

- ▶ **Integratore euleriano**
- ▶ **Approccio euleriano**
 - ▶ per aggiornare la densità uso continuità;
 - ▶ per aggiornare il campo delle velocità uso Navier-Stokes;
 - ▶ per determinare la pressione utilizzo la politropica.



Figura: Esempio di griglia usata nell'integrazione. Si è presa un'immagine ravvicinata per migliorarne la visibilità.

Convergenza della simulazione

Le integrazioni numeriche divergono se il passo temporale non è sufficientemente piccolo: desidero che la risoluzione temporale della mia simulazione sia più grande delle velocità caratteristiche del mio problema.

- ▶ $dx = 1$;
- ▶ $dt = CFL \frac{dx}{|\vec{u}|_{max} + c_{s,max}}$
- ▶ $c_s = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ è la velocità locale del suono supposta la compressione adiabatica del fluido;
- ▶ CFL è un fattore di adimensionale convergenza della simulazione.

Courant-Friedrichs-Lewy

- ▶ La simulazione, siccome si basa su un integratore euleriano \Rightarrow
- ▶ le grandezze integrate divergere come $CFL \propto 1/N$ (con N numero di punti in cui si divide il passo temporale) a meno che non ci siano soluzioni stabili.
- ▶ Il limite nella scelta di CFL è il tempo di calcolo e la memoria del computer \Rightarrow
- ▶ per ovviare a questo si registra uno stato della griglia saltando un numero proporzionale a CFL .



Condizioni al contorno

- ▶ condizioni al contorno sono determinate nel codice dalla definizione delle derivate (`gradient()` di `numpy`);
- ▶ il mezzo è assunto infinito e il prologato in maniera continua;
- ▶ \Rightarrow Detta \hat{n} la normale al bordo, si desidera:
 - ▶ $(\hat{n} \cdot \nabla) \vec{u} \leq 0$,
 - ▶ $(\hat{n} \cdot \nabla) \rho \leq 0$;
- ▶ simulazioni sono valide finchè non si raggiunge il bordo;
- ▶ altrimenti la simulazione diverge.

Profilo gaussiano di densità

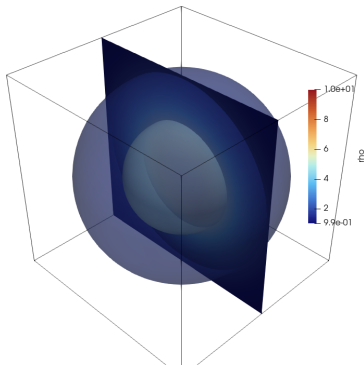


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica che parte fermo e viene lasciato evolvere. Si marcano due isobare a due valori diversi.

Variante del profilo gaussiano di densità

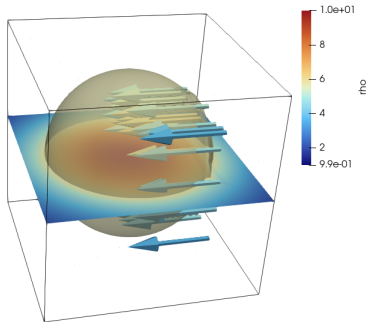


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica, di cui una sezione ha una velocità iniziale. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.

Onda sonora

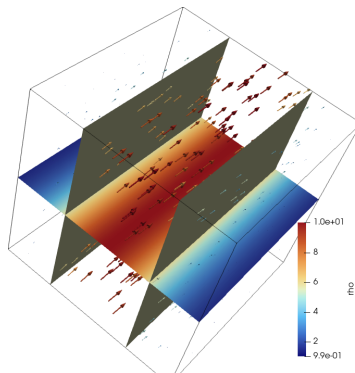


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria planare con velocità modulata gaussianamente e ortogonale al gradiente della densità. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.

Vortice lineare

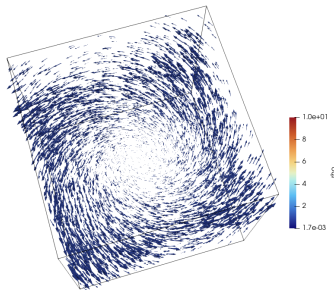


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
 Il fluido è viscido e comprimibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.

Vortice lineare senza viscosità bulk

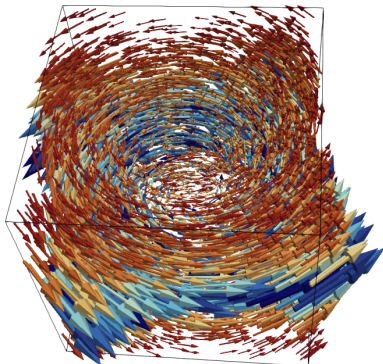


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Il fluido è viscido e comprimibile, si suppone che la viscosità dinamica sia nulla.



Vortice di potenziale

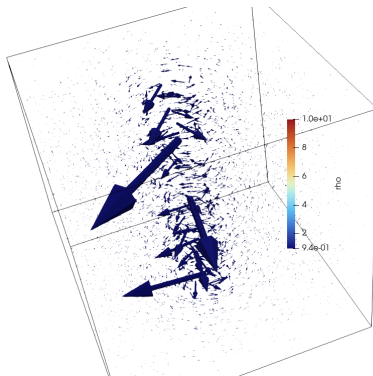


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \frac{\kappa \hat{\phi}}{r}$. Il fluido è viscido e comprimibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.

Vortice di potenziale con viscosità nulla

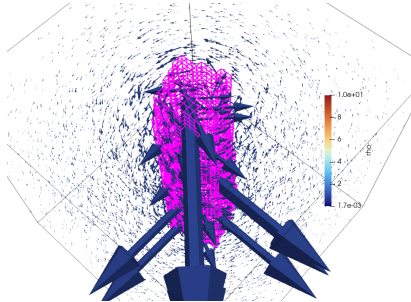


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \frac{\kappa \hat{\phi}}{r}$. Il fluido è inviscido e comprimibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.

Jet puntiforme: Trattazione analitica alla Landau

Supponiamo che in fluido venga immessa della quantità di moto da una sorgente puntiforme con le seguenti ipotesi:

- ▶ fenomeno all'equilibrio (il che implica ad esempio $\nabla \cdot \vec{u} = 0, \partial_t \rho = 0$);
- ▶ osservare da lontano la sorgente;
- ▶ in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) le velocità siano (u, v, w) ;
- ▶ simmetria per rotazione $\Rightarrow r, \theta$ sono le uniche variabili indipendenti, $w = 0$;
- ▶ stream-function $\psi \Rightarrow u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$;
- ▶ per la conservazione del momento deve scalare come r^{-1}
- ▶ $\Rightarrow \psi = r \alpha f(\theta)$, con α costante.



Soluzione analitica del Jet puntiforme

Imponendo Navier-Stokes per u e per v con passaggi non ovvi si ottiene:

$$\blacktriangleright f = \frac{2 \sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$$

$$\blacktriangleright \psi = \frac{2\alpha \sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$$

$$\blacktriangleright u = \frac{4\alpha(1+c-\cos \theta) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)^2}$$

$$\blacktriangleright v = \frac{-2\alpha \sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)}$$



Plot della soluzione analitica

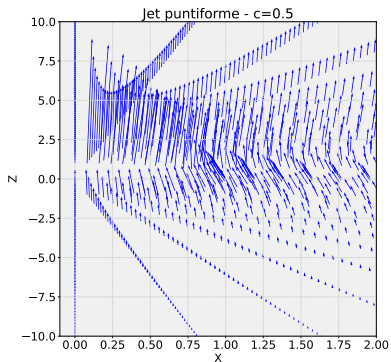


Figura: Sezione del campo delle velocità nel piano X-Z della soluzione analitica del Jet-puntiforme.

Velocità costante

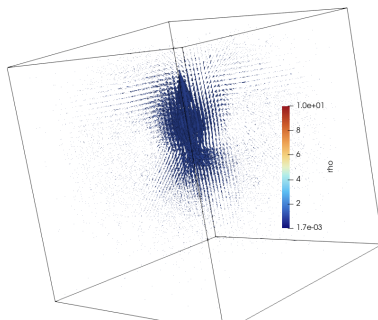


Figura: Fluido con densità costante. Velocità al centro mantenuta costante e modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si rappresenta il campo delle velocità.

Forza costante

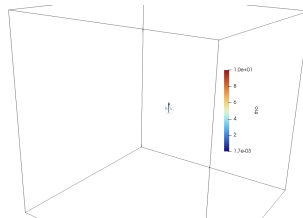
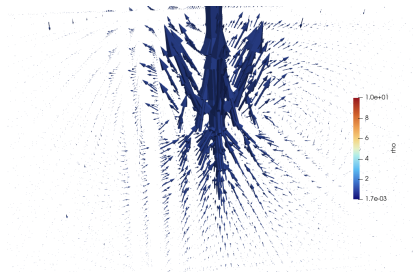


Figura: Fluido con densità costante.
Forza costante modulata con una
gaussiana centrata e molto stretta.
Si rappresenta il campo delle
velocità.

Aggiustando il bordo...

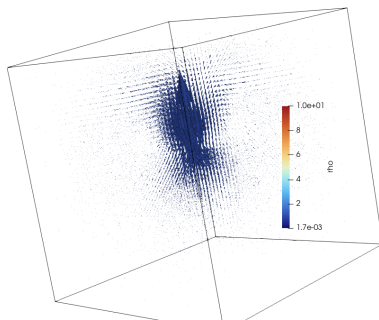


Figura: Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.

Vediamo se la soluzione analitica è stabile numericamente.

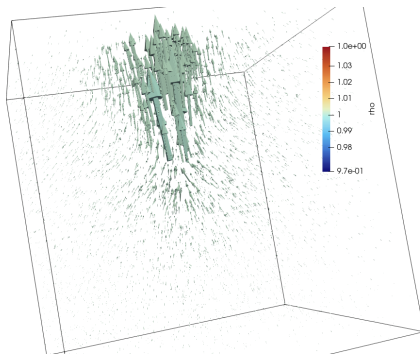


Figura: Evoluzione temporale della soluzione analitica del Jet puntiforme. E' stato necessario rendere la descrizione inesatta per evitare divergenze numeriche almeno all'inizio. Si rappresenta il campo delle velocità.

Tuttavia allargando...

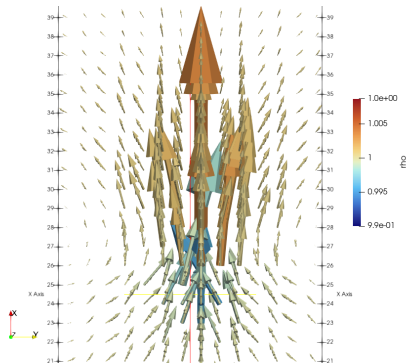


Figura: Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.