



Integrazione di Navier-Stokes e applicazioni

F.A.F. Antonacci

1 febbraio 2026





Indice

- ① Idea
- ② Convegenza
- ③ Condizioni al contorno
- ④ Profilo gaussiano di densità
- ⑤ Variante del profilo gaussiano di densità
- ⑥ Onda sonora
- ⑦ Vortici
- ⑧ Jet puntiforme



Navier-Stokes comprimibile

Ho assunto che il mio fluido non assorba né conduca calore, sia comprimibile e viscoso.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu \nabla^2 \vec{u}}{\rho} + \frac{(\zeta + \mu/3) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}{\rho} + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

- ▶ $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ è il termine convettivo, che rappresenta il trasporto della velocità dal flusso stesso;
- ▶ $-\nabla p/\rho$ è il gradiente di pressione, responsabile dell'accelerazione dovuta alla pressione;
- ▶ $\mu \nabla^2 \vec{u}/\rho$ rappresenta la viscosità del fluido (diffusione della velocità);
- ▶ $(\zeta + \mu/3) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})/\rho$ è il termine viscosità bulk, che interviene se il fluido è compressibile;
- ▶ \vec{F}/ρ è la forza esterna applicata sul fluido.

Incomprimibilità o politropica e continuità?

Ho scelto di introdurre una politropica invece di imporre l'incomprimibilità per i seguenti motivi:

- ▶ supponendo processi adiabatici posso controllare κ della legge $p = \kappa \rho^\gamma$;
- ▶ posso aumentare κ in modo arbitrario per aumentare la velocità del suono fino a rendere il fluido incomprimibile;
- ▶ non ho voglia di introdurre la risoluzione dell'equazione del laplaciano per la pressione: intodurrei pure ulteriore rumore numerico;
- ▶ scrivo meno codice.

Ho utilizzato l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Con le tre equazioni appena enunciate ho chiuso il sistema.



La discretizzazione

- ▶ **Integratore euleriano**
- ▶ **Approccio euleriano**
 - ▶ per aggiornare la densità uso continuità;
 - ▶ per aggiornare il campo delle velocità uso Navier-Stokes;
 - ▶ per determinare la pressione utilizzo la politropica.



Figura: Esempio di griglia usata nell'integrazione. Si è presa un'immagine ravvicinata per migliorarne la visibilità.

Convergenza della simulazione

Le integrazioni numeriche divergono se il passo temporale non è sufficientemente piccolo: desidero che la risoluzione temporale della mia simulazione sia più grande delle velocità caratteristiche del mio problema.

- ▶ $dx = 1$;
- ▶ $dt = CFL \frac{dx}{|\vec{u}|_{max} + c_{s,max}}$
- ▶ $c_s = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ è la velocità locale del suono supposta la compressione adiabatica del fluido;
- ▶ CFL è un fattore di adimensionale convergenza della simulazione.



Courant-Friedrichs-Lowy

- ▶ La simulazione, siccome si basa su un integratore euleriano \Rightarrow
- ▶ dovrebbe divergere come $1/CFL$ a meno che non ci siano soluzioni stabili.
- ▶ Il limite nella scelta di CFL è il tempo di calcolo e la memoria del computer \Rightarrow
- ▶ per ovviare a questo si registra uno stato della griglia saltando un numero proporzionale a CFL .



Condizioni al contorno

- ▶ condizioni al contorno sono determinate nel codice dalla definizione delle derivate (`gradient()` di `numpy`);
- ▶ il mezzo è assunto infinito e il prologato in maniera continua;
- ▶ ⇒ Detta \hat{n} la normale al bordo, si desidera:
 - ▶ $(\hat{n} \cdot \nabla) \vec{u} \leq 0$,
 - ▶ $(\hat{n} \cdot \nabla) \rho \leq 0$;
- ▶ simulazioni sono valide finché non si raggiunge il bordo;
- ▶ altrimenti la simulazione diverge.



Profilo gaussiano di densità

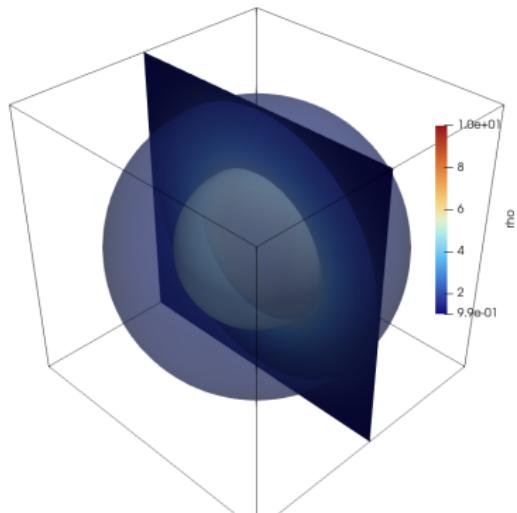


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica che parte fermo e viene lasciato evolvere. Si marcano due isobare a due valori diversi.

Variante del profilo gaussiano di densità

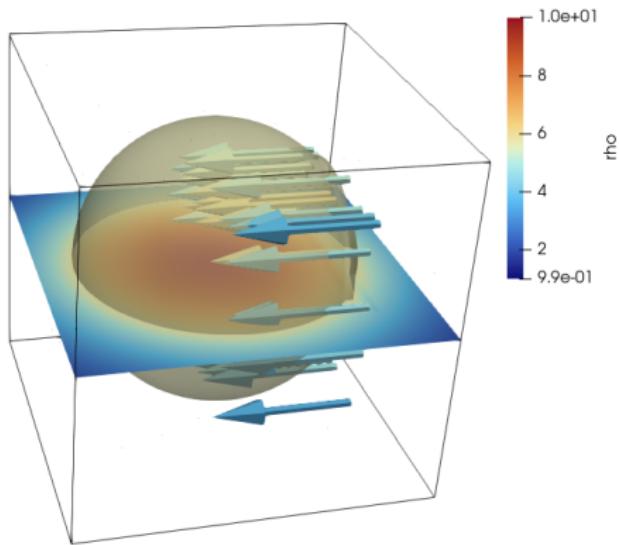


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria sferica, di cui una sezione ha una velocità iniziale. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.



Onda sonora

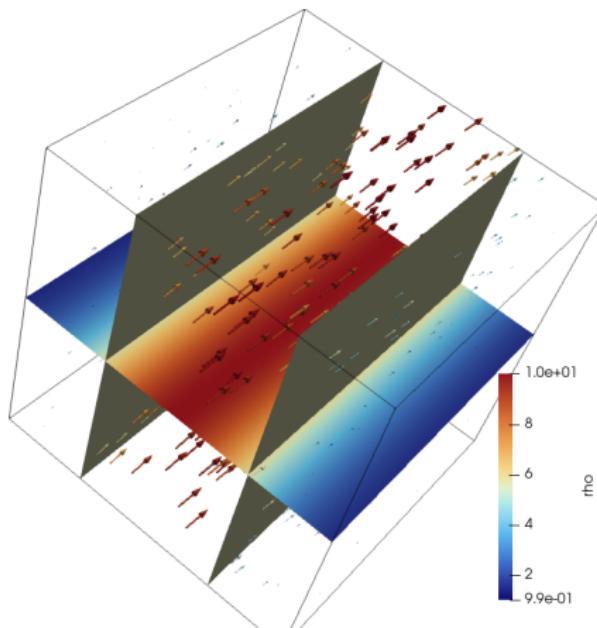


Figura: Profilo gaussiano di densità in simmetria planare con velocità modulata gaussianamente e ortogonale al gradiente della densità. Si rappresentano un isobara e il campo delle velocità.

Vortice lineare

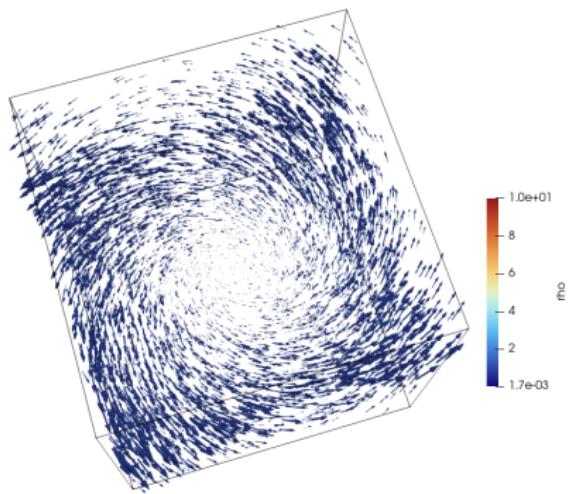


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
Il fluido è viscido e comprimibile, tuttavia siamo nel limite in cui la
velocità del suono è alta.



Vortice di potenziale

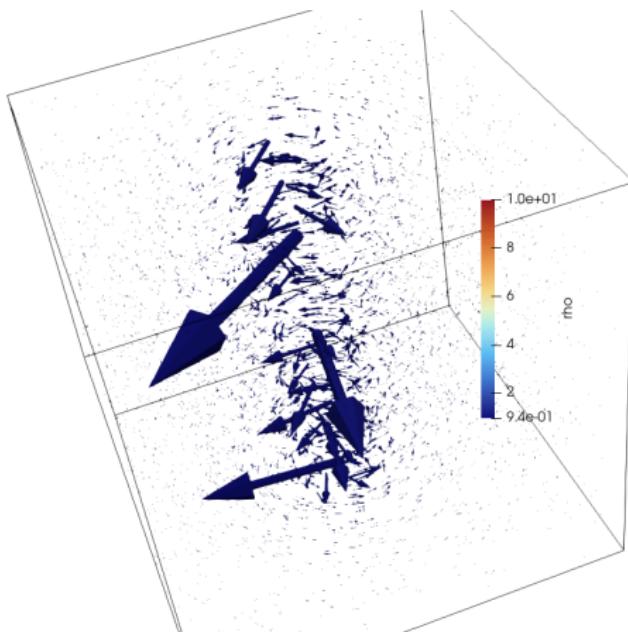


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \frac{\kappa\hat{\phi}}{r}$. Il fluido è viscido e compressibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.

Vortice di potenziale con viscosità nulla

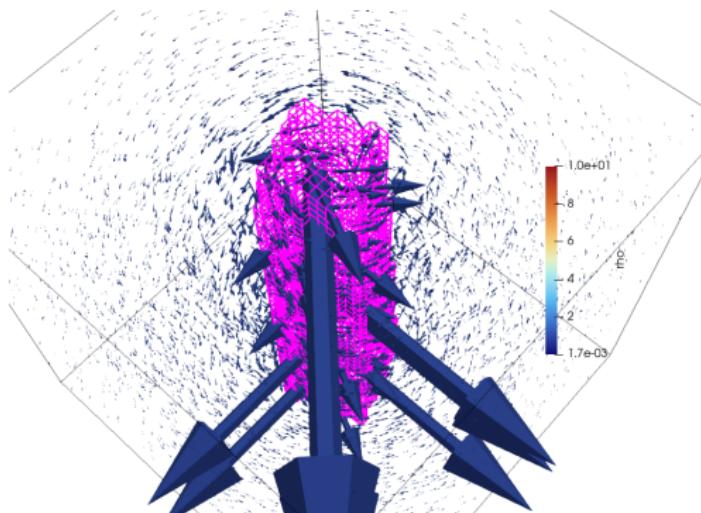


Figura: Densità costante, campo delle velocità determinato da $\vec{v} = \frac{\kappa\hat{\phi}}{r}$. Il fluido è inviscido e compressibile, tuttavia siamo nel limite in cui la velocità del suono è alta.





Jet puntiforme: Trattazione analitica alla Landau

Supponiamo che in fluido venga immessa della quantità di moto da una sorgente puntiforme con le seguenti ipotesi:

- ▶ fenomeno all'equilibrio (il che implica ad esempio $\nabla \cdot \vec{u} = 0, \partial_t \rho = 0$);
- ▶ osservare da lontano la sorgente;
- ▶ in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) le velocità siano (u, v, w) ;
- ▶ simmetria per rotazione $\Rightarrow r, \theta$ sono le uniche variabili indipendenti, $w = 0$;
- ▶ stream-function $\psi \Rightarrow u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$;
- ▶ per la conservazione del momento deve scalare come r^{-1}
- ▶ $\Rightarrow \psi = r \alpha f(\theta)$, con α costante.





Soluzione analitica del Jet puntiforme

Imponendo Navier-Stokes per u e per v con passaggi non ovvi si ottiene:

- ▶ $f = \frac{2\sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$
- ▶ $\psi = \frac{2\alpha \sin^2 \theta}{1+c-\cos \theta}$
- ▶ $u = \frac{4\alpha(1+c-\cos \theta) \cos \theta - 2\sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)^2}$
- ▶ $v = \frac{-2\alpha \sin^2 \theta}{r(1+c-\cos \theta)}$





Plot della soluzione analitica

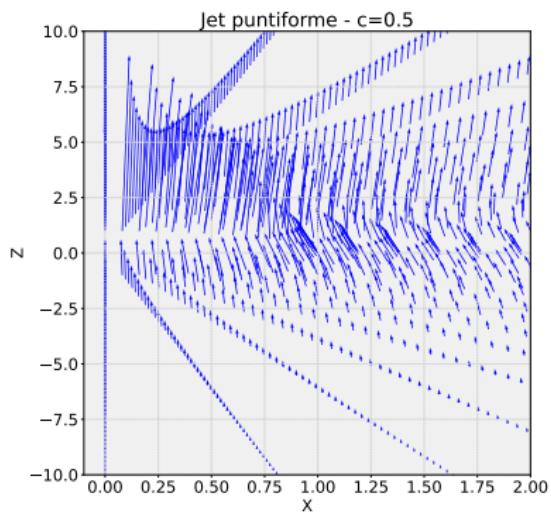


Figura: Sezione del campo delle velocità nel piano X-Z della soluzione analitica del Jet-puntiforme.



Velocità costante

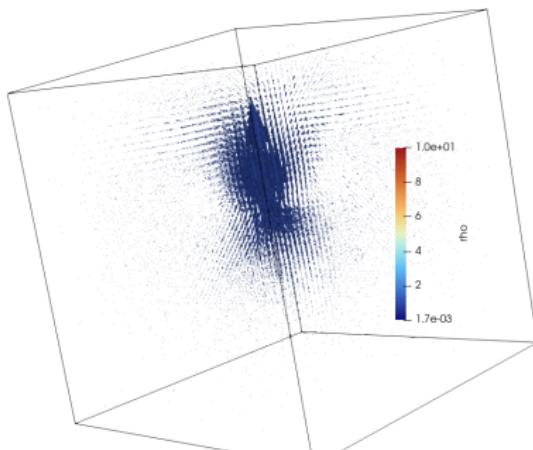


Figura: Fluido con densità costante. Velocità al centro mantenuta costante e modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si rappresenta il campo delle velocità.



Forza costante

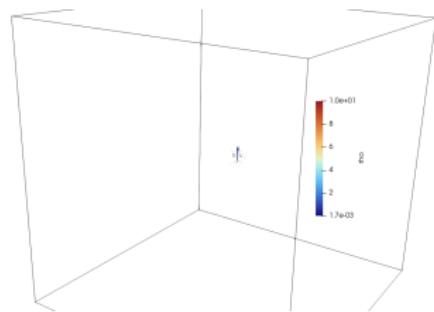
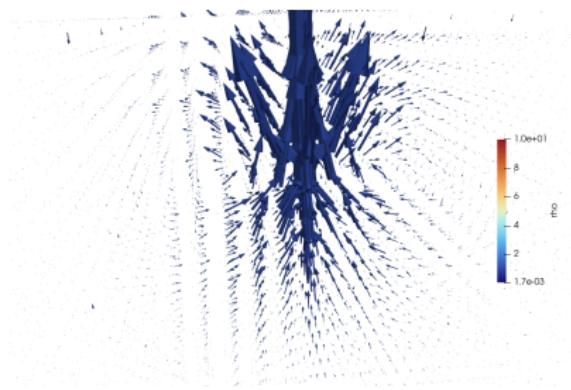


Figura: Fluido con densità costante.
Forza costante modulata con una
gaussiana centrata e molto stretta.
Si rappresenta il campo delle
velocità.

Aggiustando il bordo...

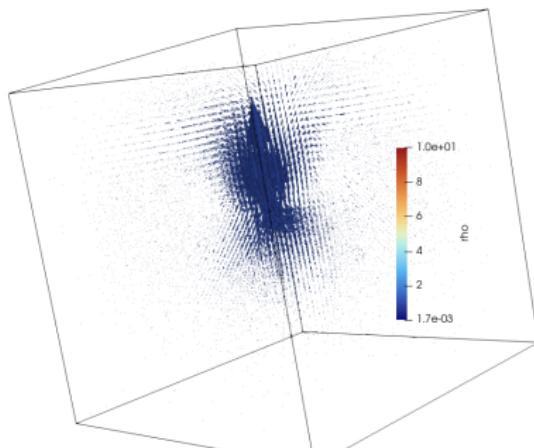


Figura: Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.



Vediamo se la soluzione analitica è stabile numericamente.

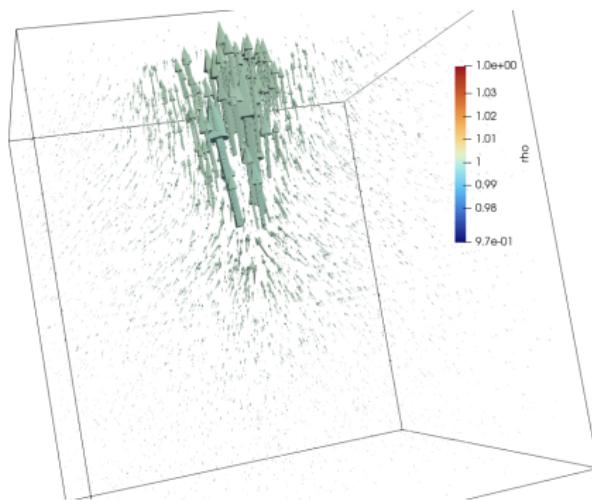


Figura: Evoluzione temporale della soluzione analitica del Jet puntiforme.
E' stato necessario introdurre rendere la descrizione inesatta per evitare divergenze numeriche almeno all'inizio. Si rappresenta il campo delle velocità.





Tuttavia allargando...

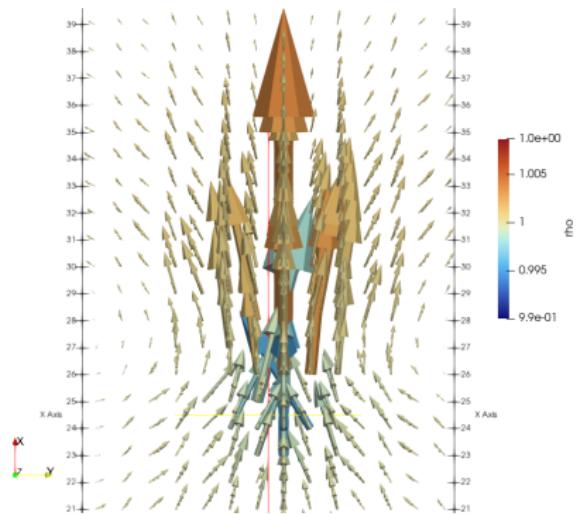


Figura: Fluido con densità costante. Forza costante modulata con una gaussiana centrata e molto stretta. Si tenta di eliminare il flusso di ritorno imponendo che la velocità e la densità siano costanti al contorno. Si rappresenta il campo delle velocità.

