Self-Organized Criticality

Bak-Tang-Wiesenfeld model e Manna model

Francesco Bonilauri

Cos'è la criticalità autorganizzata

Come sono definiti i sistemi con criticalità autorganizzata? Si potrebbe dire che sono caratterizzati da invarianza di scala senza bisogno di tuning, ma questa definizione risulta troppo larga e comprende anche fenomeni non-critici come, per esempio, la diffusione.

Nella maggior parte dei casi i sistemi sospettati di manifestare criticalità autorganizzata mostrano una forma di scaling e una forma di avalanching, suggerendo una separazione delle scale temporali.

Modelli

Driving stocastico (bulk) e rilassamento deterministico, che avviene quando la pendenza supera un valore di soglia.

Bak-Tang-Wiesenfeld model

Su un reticolo con q primi vicini:

- **Driving:** Si aggiunge un grano in un sito random i e si aggiorna la pendenza dei sui vicini a monte j:
  $z_i \to z_i + \frac{q}{2} \qquad z_j \to z_j - 1$
- **Toppling:** Ogni sito con pendenza $z_i > z^c$ ridistribuisce q grani ai suoi primi vicini, continuando a step paralleli fino a quiescenza: $z_i \to z_i - q \qquad z_j \to z_j + 1$
- **Dissipazione:** Aperto al contorno, dove i grani escono dal sistema.

Original Bak-Tang-Wiesenfeld model (1987) [2]

- Separazione delle scale temporali di driving e di toppling
- Non abelliano (l'ordine delle operazioni cambia la configurazione di arrivo) per la sua regola di driving, dato che l'aggiunta di un grano influenza anche i siti vicini.

Generalizzazione abelliana di Dhar (1990) del modello BTW. Il parametro z_i non è più la pendenza ma l'altezza di una colonna di grani.

Abellian Bak-Tang-Wiesenfeld model

- **Driving:** Si aggiunge un grano in un sito random i: $z_i \to z_i + 1$
- **Toppling:** Ogni sito con altezza $z_i > z^c$ ridistribuisce q grani ai suoi primi vicini, continuando a step paralleli fino a quiescenza: $z_i \to z_i - q \qquad z_j \to z_j + 1$
- **Dissipazione:** Aperto al contorno, dove i grani escono dal sistema.

Driving stocastico (bulk) e rilassamento **stocastico**. Modello a due stati, appartenente a una classe di universalità diversa dal modello BTW.

Manna model

- **Driving:** Si aggiunge un grano in un sito random i: $z_i \to z_i + 1$
- **Toppling:** Ogni sito con $z_i > z^c = 1$ ridistribuisce **tutti** i suoi grani casualmente ai suoi primi vicini, continuando a step paralleli fino a quiescenza: $z_i \to z_i - q \qquad z_j \to z_j + 1$
- **Dissipazione:** Aperto al contorno, dove i grani escono dal sistema.

Manna model (1991) [2]

Il modello Manna originale non è abelliano per la sua regola di toppling:

Uguale al modello originale, ma il toppling ridistribuisce solo 2 grani alla volta.

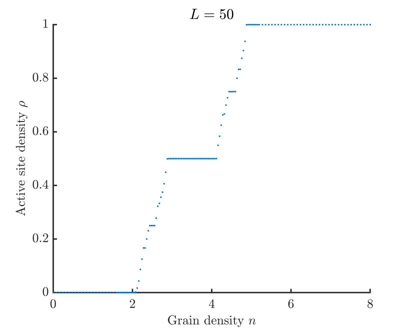
Abellian Manna model

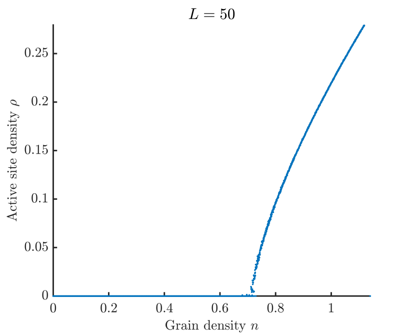
- **Driving:** Si aggiunge un grano in un sito random i: $z_i \to z_i + 1$
- **Toppling:** Ogni sito con $z_i > z^c = 1$ ridistribuisce **due** i suoi grani casualmente ai suoi primi vicini, continuando a step paralleli fino a quiescenza: $z_i \to z_i - q \qquad z_j \to z_j + 1$
- **Dissipazione:** Aperto al contorno, dove i grani escono dal sistema.

Absorbing state phase transition

Fixed energy sandpiles

- Imponendo condizioni periodiche al contorno e mantenendo solamente la dinamica di toppling ottengo sistemi chiusi con **numero di grani conservato**.
- Per densità di grani $n \leq z^c$ esistono configurazioni assorbenti in cui la dinamica si ferma. Mi aspetto anche **una densità critica n_c** con una transizione da una fase assorbente a una attiva e il parametro d'ordine ρ_a si annulla.





Modello aperto

Nel sistema aperto il parametro di controllo n è costantemente aumentato dalla corrente h (il driving), mentre *in presenza di attività* è diminuito dal rate di dissipazione ϵ. In campo medio questo è riassunto con

$$\langle \dot{n} \rangle = \langle h - \epsilon \rho_a(n) \rangle$$

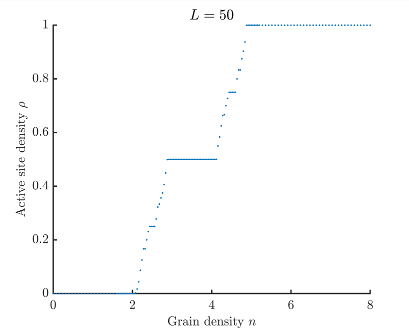
Assumendo il sistema raggiunga stazionarità $\dot{n} = 0$ si ottiene

$$\langle \rho_a \rangle = \frac{h}{\epsilon}$$

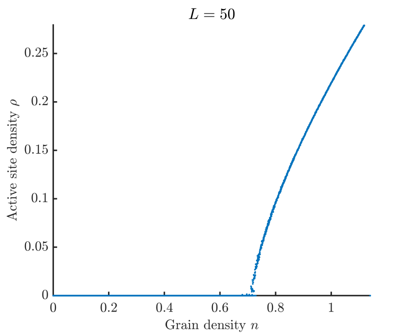
Le due scale di tempo sono separate e il meccanismo di driving si ferma durante il toppling, suggerendo $h \to 0$ e quindi anche

$$\langle \rho_a \rangle \to 0$$

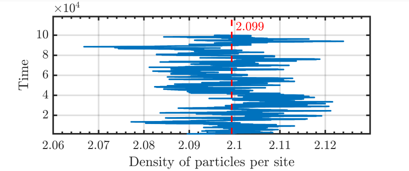
Confronto



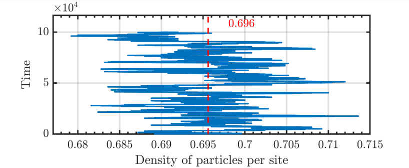
$L = 50$
Active site density ρ
Grain density n
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8



$L = 50$
Active site density ρ
Grain density n
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



$\times 10^4$
Time
2
4
6
8
10
2.099
2.06
2.07
2.08
2.09
2.1
2.11
2.12
Density of particles per site



$\times 10^4$
Time
0
5
10
0.696
0.68
0.685
0.69
0.695
0.7
0.705
0.71
0.715
Density of particles per site

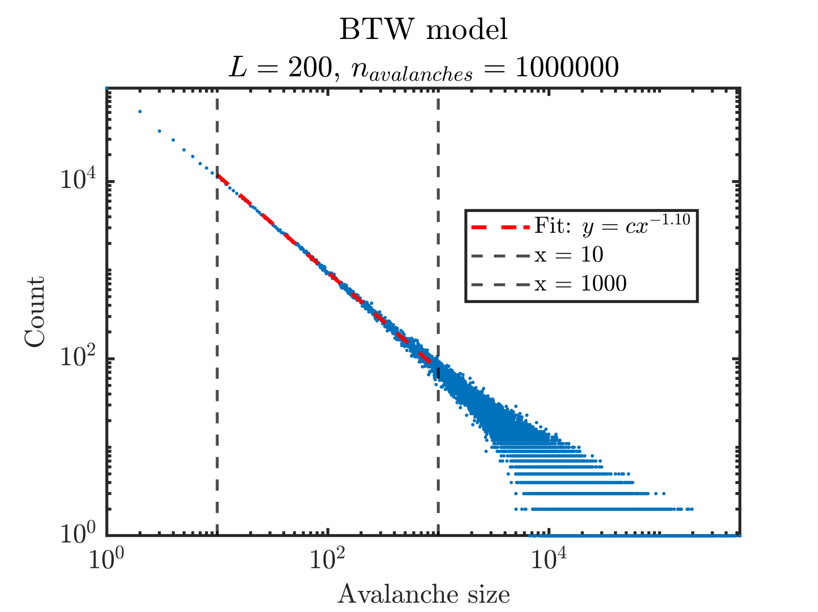
Scaling law ed esponenti critici

La distribuzione delle valanghe nei modelli sandpile seguono **leggi di scaling a potenza**, sia rispetto alla taglia s che alla loro durata T.

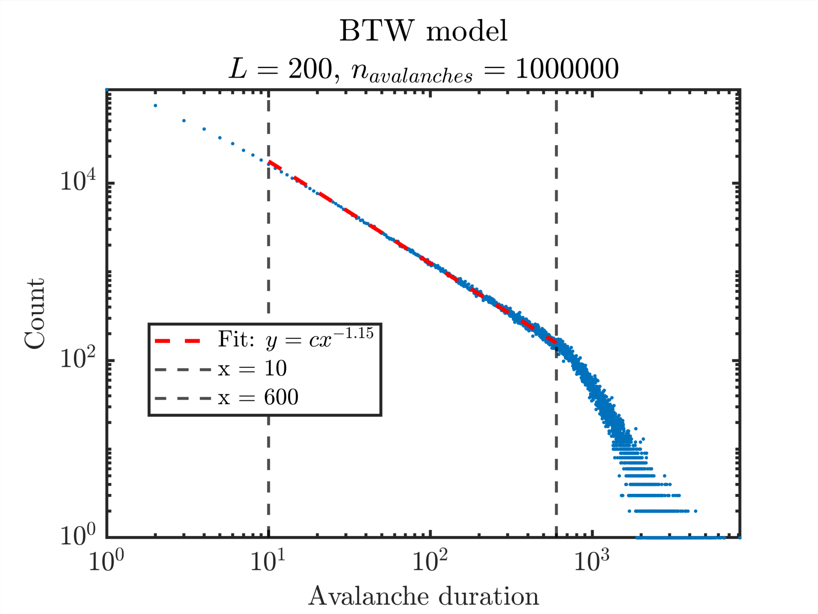
$$P(s;L) = s^{-\tau} f\left(\frac{s}{s_c(L)}\right) \qquad \text{con } s_c(L) = aL^D \text{ e } s >> s_0$$

$$P(T;L) = T^{-\alpha} f\left(\frac{T}{T_c(L)}\right) \qquad \text{con } T_c(L) = bL^z \text{ e } T >> T_0$$

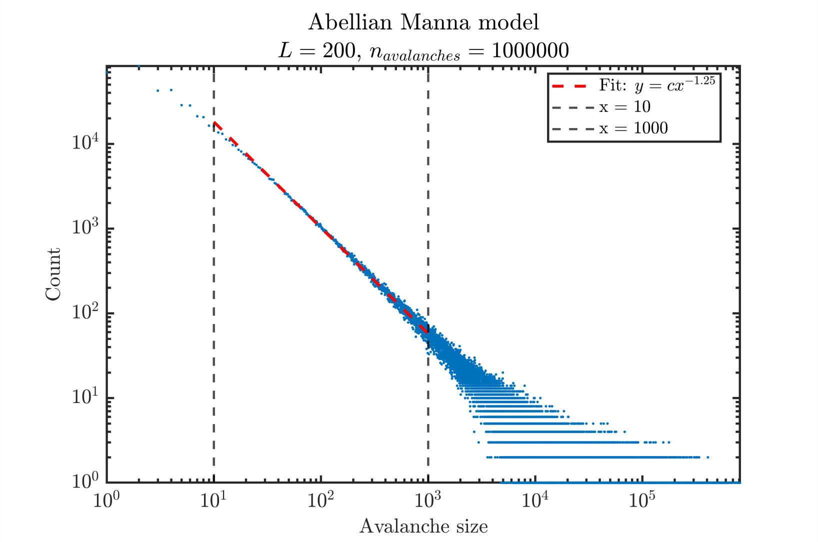
dove τ e α sono rispettivamente l'avalanche size e duration exponents, mentre D e z sono la avalanche dimension e dynamical exponent.

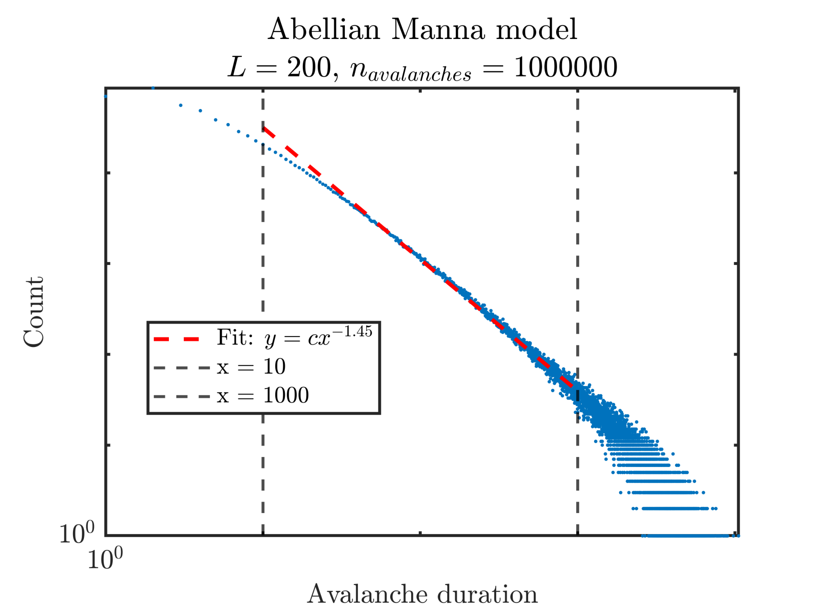

BTW model
$L = 200$, $n_{avalanches} = 1000000$
Fit: $y = cx^{-1.10}$
x = 10
x = 1000
Count
Avalanche size
10^0
10^2
10^4

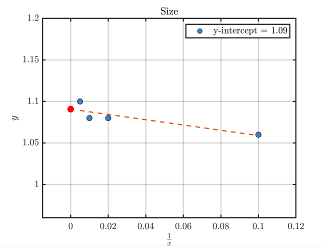
Risultati della simulazione: BTW - avalanche duration

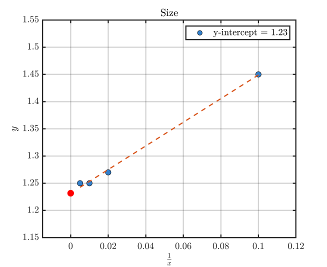


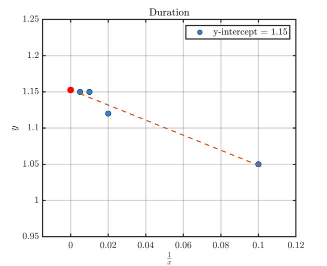
Risultati della simulazione: Manna - avalanche size

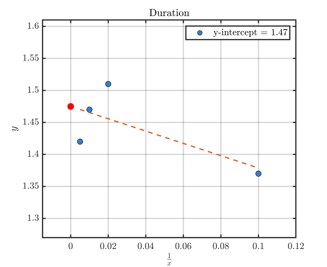



Abellian Manna model
$L = 200$, $n_{avalanches} = 1000000$
Count
Avalanche duration
10^0
10^0
Fit: $y = cx^{-1.45}$
x = 10
x = 1000


Size
y-intercept = 1.09
y
$\frac{1}{x}$


Size
y-intercept = 1.23
y
$\frac{1}{x}$


Duration
y-intercept = 1.15
y
$\frac{1}{x}$


Duration
y-intercept = 1.47
y
$\frac{1}{x}$

Esponenti in letteratura: BTW

Esponenti in letteratura: Manna

References

[1] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. **"Self-Organized Criticality: An Explanation of the 1/f Noise".** In: *Physical Review Letters* 59.4 (July 27, 1987), pp. 381–384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.381. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.381 (visited on 07/15/2024).

[2] Asa Ben-Hur and Ofer Biham. **"Universality in Sandpile Models".** In: *Physical Review E* 53.2 (Feb. 1, 1996), R1317–R1320. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.R1317. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.R1317 (visited on 08/16/2024).

[3] Deepak Dhar. **"Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models".** In: *Physical Review Letters* 64.14 (Apr. 2, 1990), pp. 1613–1616. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.1613. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1613 (visited on 08/23/2024).

[4] Deepak Dhar. ***Some Results and a Conjecture for Manna's Stochastic Sandpile Model.*** arXiv.org. Feb. 10, 1999. DOI: `10.1016/S0378-4371(99)00149-1`. URL: `https://arxiv.org/abs/cond-mat/9902137v2` (visited on 08/16/2024).

[5] ***GitHub - FrancescoBonilauri/SOC.*** URL: `https://github.com/FrancescoBonilauri/SOC` (visited on 09/10/2024).

[6] Malte Henkel et al. ***Absorbing Phase Transitions.*** Non-Equilibrium Phase Transitions / Malte Henkel; Haye Hinrichsen; Sven Lübeck Volume 1. Dordrecht: Springer, 2008. 385 pp. ISBN: 978-1-4020-8764-6.

[7] Gunnar Pruessner. ***Self-Organised Criticality: Theory, Models, and Characterisation.*** Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2012. 494 pp. ISBN: 978-0-521-85335-4.

[8] Gunnar Pruessner. ***SOC Computer Simulations.*** Jan. 14, 2013. DOI: `10.48550/arXiv.1301.2918`. arXiv: `1301.2918 [cond-mat,`

physics:physics]. URL: http://arxiv.org/abs/1301.2918 (visited on 08/16/2024). Pre-published.

[9] Chao Tang and Per Bak. "Critical Exponents and Scaling Relations for Self-Organized Critical Phenomena". In: *Physical Review Letters* 60.23 (June 6, 1988), pp. 2347–2350. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.2347. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.2347 (visited on 09/10/2024).